Fouriertheorie

Skript zur Vorlesung

Prof. Dr. Tim de Laat

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Wintersemester 2021/2022

Version: 19. Januar 2022

Vorwort

Diese Veranstaltung wird speziell für Studierende in den Zwei-Fach-Bachelorstudiengängen, dem Bachelor BK und dem Master of Education Gym/Ges bzw. BK angeboten. Insbesondere werden nur Grundkenntnisse aus den Vorlesungen Analysis I und II und Lineare Algebra I vorausgesetzt.

Dieses Skript wird während des Semesters fortlaufend aktualisiert.

Für Hinweise auf Fehler in diesem Skript bin ich dankbar. Schreiben Sie mir dazu bitte eine E-Mail (tim.delaat@uni-muenster.de).

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Grundfrage der Fouriertheorie ist, ob und unter welchen Bedingungen komplexwertige Funktionen auf $\mathbb{R}$ als unendliche Summen (oder Integrale) von Sinus- und Kosinusfunktionen geschrieben werden können.

Im ersten Teil der Vorlesung untersuchen wir diese Frage für periodische Funktionen. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch mit periode $L > 0$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(x+L) = f(x)$. Es stellt sich heraus, dass wir eine solche Funktion f unter bestimmten Bedingungen als Reihe der Form

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

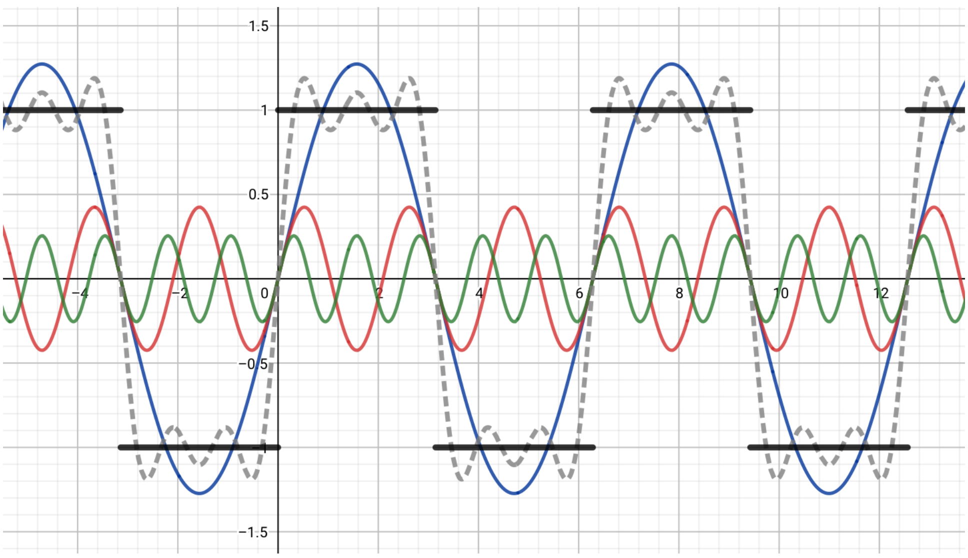
darstellen können, mit $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, wobei natürlich verdeutlicht werden muss, in welchem Sinne die Summe konvergiert und wie das Zeichen $\sim$ zu verstehen ist.

Wir veranschaulichen diese Idee anhand eines Beispiels. Dazu betrachten wir einen Rechteckpuls mit Periode 2π, nämlich die 2π-periodische Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ durch

$$p(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0, \pi), \\ -1, & \text{falls } x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

gegeben ist. In Abbildung 1 sind der Rechteckpuls (schwarz, fett) und die ersten drei nichtverschwindenden Summanden (blau, rot und grün) des Ausdrucks (1) für die Funktion p eingezeichnet. Die gepunktete graue Linie ist die Summe dieser ersten drei Summanden. Abbildung 1 ist nur zur Veranschaulichung. Bemerken Sie insbesondere, dass wir bisher überhaupt nicht erklärt haben, wie die drei Summanden bestimmt wurden.

Abbildung 1: Die ersten drei Summanden der Fourierreihe des Rechteckpulses p. Die Summe der blauen, roten und grünen Schwingungen wird durch die gepunktete graue Linie dargestellt.



Eine Reihe wie in (1) wird Fourierreihe genannt, nach Fourier (1768–1830), der solche Reihen für periodische Funktionen schon im 18. Jahrhundert untersuchte. Mathematiker wie d'Alembert, Euler und Lagrange kannten schon vor Fourier die Fourierreihen bestimmter periodischer Funktionen.

Später werden wir die Grundfrage der Fouriertheorie auch für nicht-periodische Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ untersuchen, wobei f nicht als unendliche Summe, sondern als Integral dargestellt wird.

Heute ist die Fouriertheorie ein Gebiet der Mathematik mit vielen Anwendungen. Neben Anwendungen innerhalb der Mathematik (zum Beispiel in der Funktionalanalysis und der Zahlentheorie) hat Fouriertheorie wichtige Anwendungen in allen Bereichen, in denen Signalverarbeitung eine wichtige Rolle spielt. In der Vorlesung werden wir einige Anwendungen betrachten.

2 Präliminarien

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Begriffe und Resultate. Für die Beweise und Details wird auf die Vorlesungen Analysis I und II verwiesen.

2.1 Wiederholung: Komplexe Zahlen

2.1.1 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

Wir wiederholen kurz die Konstruktion des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Sei $\mathbb{R}^2$ die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen. Zusammen mit der Addition gegeben durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation gegeben durch

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

für beliebige Elemente (x_1, y_1) und (x_2, y_2) von $\mathbb{R}^2$, bildet die Menge $\mathbb{R}^2$ einen Körper, den wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen. Das Nullelement (das neutrale Element der Addition) ist $(0, 0)$; das Einselement (das neutrale Element der Multiplikation) ist $(1, 0)$. Das additive Inverse eines Elements (x, y) ist gegeben durch $-(x, y) = (-x, -y)$; das multiplikative Inverse eines Elements $(x, y) \neq (0, 0)$ ist gegeben durch

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Bemerken Sie, dass die Assoziativgesetze der Addtition und der Multiplikation, die Kommutativgesetze der Addition und der Multiplikation, sowie die Distributivgesetze, d.h.

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \cdot \Big[(x_2, y_2) + (x_3, y_3)\Big] &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3), \\
\Big[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\Big] \cdot (x_3, y_3) &= (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)
\end{aligned}$$

für beliebige Elemente von $\mathbb{C}$, in der Definition eines Körpers enthalten sind. Oft lassen wir die Notation $\cdot$ aus und schreiben einfach zw statt $z \cdot w$.

Bekanntlich schreiben wir $x + iy$ für ein Element (x, y) von $\mathbb{C}$, wobei i die Gleichung $i^2 = -1$ erfüllt. Die Zahl i wird als imaginäre Einheit bezeichnet und erfüllt $i^2 = -1$.

2.1.2 Die komplexe Zahlenebene

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißt x der Realteil von z und wird auch als $\mathrm{Re}(z)$ bezeichnet; die Zahl y heißt der Imaginärteil von z und wird auch als $\mathrm{Im}(z)$ bezeichnet.

Geometrisch identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, indem wir ein Element $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) durch den Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ darstellen. Unter dieser Identifikation stimmt die Addition zweier komplexer Zahlen mit der Addition zweier Vektoren in $\mathbb{R}^2$ überein.

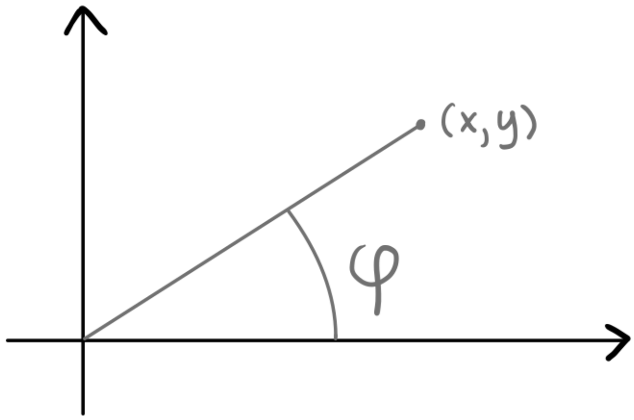
Die Zahl $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$ heißt der Betrag von z und stimmt mit der Länge des Vektors z in der Ebene überein. In $\mathbb{C}$ gelten die Dreiecksungleichung und die umgekehrte Dreiecksungleichung, d.h. für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

$$\begin{aligned}
|z + w| &\leqslant |z| + |w|, \\
|z - w| &\geqslant ||z| - |w||.
\end{aligned}$$

Die Zahl $\overline{z} = \overline{x+iy} = x - iy$ heißt die komplex konjugierte Zahl von z und es gilt:

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Der Realteil x und der Imaginärteil y der komplexen Zahl $z = x + iy$ stimmen unter der Identifizierung mit $\mathbb{R}^2$ mit den kartesischen Koordinaten des Punktes (x,y) überein. Bekanntlich kann man den Punkt (x,y) auch in Polarkoordinaten (r,φ) darstellen, wobei $r = \sqrt{x^2+y^2}$ der Betrag des Vektors (x,y) ist und φ der Winkel wie in der Abbildung:



Für ein Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ ist der Winkel $\varphi \in [0,2\pi)$ also bestimmt durch $\cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ und $\sin(\varphi) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Andersherum, gegeben ein Punkt (r,φ) in Polarkoordinaten, so können wir die kartesischen Koordinaten x und y wie folgt berechnen:

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi).$$

Für die komplexe Zahl $z = x + iy$ gilt also $z = r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$. Die Multiplikation in $\mathbb{C}$ kann man geometrisch in Polarkoordinaten besser verstehen. Seien $z_1 = r_1\big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\big)$ und $z_2 = r_2\big(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\big)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1\Big(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)\Big) r_2\Big(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)\Big) \\ &= r_1 r_2\Big(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\Big) \\ &= r_1 r_2\Big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\Big), \end{aligned}$$

also die Beträge werden multipliziert und die Winkel addiert.

2.2 Wiederholung: Integrationstheorie

2.2.1 Integration von Treppenfunktionen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, falls es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, sodass φ auf jedem offenen Teilintervall (x_{j-1}, x_j), mit $j = 1, \ldots, n$, konstant ist. (Die Werte in den Punkten $x_0, \ldots, x_n$ sind beliebig.)

Sei $\mathcal{T}[a,b]$ die Menge aller Treppenfunktionen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Bekanntlich ist $\mathcal{T}[a,b]$ ein Untervektorraum des Vektorraums aller Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Somit ist $\mathcal{T}[a,b]$ ein Vektorraum.

Sei $\varphi \in \mathcal{T}[a,b]$, sei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine zugehörige Unterteilung von $[a,b]$ und sei c_j der Funktionswert von φ auf (x_{j-1}, x_j). Das Integral von φ ist definiert als

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{j=1}^n c_j(x_j - x_{j-1}).$$

Bekanntlich ist dieses Integral wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Unterteilung.

Proposition 2.1. Das Integral ist ein lineares, monotones Funktional auf dem Vektorraum $\mathcal{T}[a,b]$, d.h. für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi)(x)dx = \lambda \int_a^b \varphi(x)dx + \mu \int_a^b \psi(x)dx$.

(ii) Falls $\varphi \leqslant \psi$, d.h. $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt: $\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b \psi(x)dx$.

2.2.2 Das Riemannsche Integral

Definition 2.2. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann setzen wir

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ f \leqslant \varphi \right\} \qquad \text{(Oberintegral)},$$
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in \mathcal{T}[a,b],\ f \geqslant \varphi \right\} \qquad \text{(Unterintegral)}.$$

Definition 2.3. Eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

In diesem Fall definieren wir das Integral von f als

$$\int_a^b f(x)dx := \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Satz 2.4. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) Die Funktion f ist integrierbar.

(2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $\varphi, \psi \in \mathcal{T}[a,b]$ mit $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx < \varepsilon.$$

Offensichtlich sind Treppenfunktionen integrierbar. Außerdem sind stetige Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und monotone Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar.

Proposition 2.5. Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktion $f + g$, die Funktion λf und die Funktion fg integrierbar und es gelten:

(i) $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

(ii) $\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

(iii) Falls $f \leqslant g$, so gilt: $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

2.2.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes endliches oder unendliches Intervall, das aus mindestens zwei Punkten besteht.

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls $F' = f$.

Satz 2.6. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $a \in I$. Für $x \in I$, sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Dann ist die Funktion $F\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und F ist eine Stammfunktion von f.

Satz 2.7. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

2.2.4 Integration von komplexwertigen Funktionen

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Funktion, seien u der Realteil von f und v der Imaginärteil von f, d.h. u und v sind reellwertige Funktionen, sodass $f(x) = u(x) + iv(x)$ für alle $x \in [a,b]$.

Definition 2.8. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ ist integrierbar, falls ihr Realteil und ihr Imaginärteil integrierbar sind. In dem Fall ist das Integral von f definiert durch

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (u(x) + iv(x))dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

Für das Integral einer komplexwertigen Funktion gelten folgende Eigenschaften, die man leicht überprüfen kann:

(i) Sei $c \in [a,b]$. Für eine integrierbare Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

(ii) Das Integral ist linear, d.h. für alle integrierbare Funktionen $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx.$$

(iii) Für alle integrierbare Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{\int_a^b f(x)dx} = \int_a^b \overline{f(x)}dx.$$

3 Trigonometrische Polynome

In diesem Abschnitt behandeln wir trigonometrische Polynome.

3.1 Grundlegende Definitionen

Definition 3.1. Sei $L > 0$. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt L-**periodisch** (oder periodisch mit Periode L), falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x + L) = f(x).$$

Für eine L-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gilt offenbar: $f(x + kL) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$.

Für ein festes $L > 0$ bildet die Menge aller L-periodischen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ einen Untervektorraum des Vektorraumes aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$.

Definition 3.2. Sei $L > 0$. Ein **trigonometrisches Polynom** der Periode L ist eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der Form

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \tag{2}$$

mit $N \in \mathbb{N}$, $\omega = \frac{2\pi}{L}$ und $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

Da $\cos(n\omega(x + L)) = \cos(n\omega x + 2\pi n) = \cos(n\omega x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ähnlich für sin, ist p tatsächlich L-periodisch.

Wegen der Eulerschen Gleichungen gilt:

$$\cos(n\omega x) = \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}), \qquad \sin(n\omega x) = \frac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x})$$

Es folgt, dass wir p auch anders darstellen können, und zwar als

$$p(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x} \tag{3}$$

mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

für $n = 1, \ldots, N$.

Andersherum können wir ein Polynom der Form (3) als Polynom der Form (2) darstellen, indem wir für $n = 1, \ldots, N$,

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

setzen.

3.2 Wiederholung: Skalarprodukte und Orthonormalsysteme

Jetzt wiederholen wir einige Begriffe der linearen Algebra.

Definition 3.3. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$. Ein **Skalarproduct** auf V ist eine Abbildung $\langle .,. \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$, sodass

(i) Für alle $v, w, u \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\langle \lambda v + \mu w, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle + \mu \langle w, u \rangle.$$

(ii) Für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\overline{\langle v, w \rangle} = \langle w, v \rangle.$$

(iii) $\langle v, v \rangle \geqslant 0$ für alle $v \in V$ und falls $\langle v, v \rangle = 0$, so gilt: $v = 0$.

Beispiele 3.4.

(i) Auf $\mathbb{K}^n$ definiert die Abbildung $\langle .,. \rangle \colon \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ gegeben durch $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n v_j \overline{w}_j$ für $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ und $(w_1, \ldots, w_n)^T$ ein Skalarprodukt.

(ii) Sei $a < b$ und sei $\mathcal{R}([a,b])$ der Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen $f \colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Sei $\langle .,. \rangle \colon \mathcal{R}([a,b]) \times \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{C}$ die Abbildung definiert durch

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Dann gelten für alle $f, g, h \in \mathcal{R}([a,b])$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\langle \lambda f + \mu g, h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \mu \langle g, h \rangle,$$
$$\overline{\langle f, g \rangle} = \langle g, f \rangle.$$

Außerdem gilt: $\langle f, f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{f(x)} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^2 dx \geqslant 0$. Damit definiert $\langle .,. \rangle \colon \mathcal{R}([a,b]) \times \mathcal{R}([a,b]) \to \mathbb{C}$ eine positive Sesquilinearform auf $\mathcal{R}([a,b])$.

Allerdings gilt im Allgemeinen nicht, dass aus $\langle f, f \rangle = 0$ folgt: $f \equiv 0$ (zum Beispiel wenn f eine Funktion ist, die nur in endlich vielen Punkten ungleich 0 ist).

Sei $C([a,b])$ die Menge aller stetigen Funktionen $f \colon [a,b] \to \mathbb{K}$. Bekanntlich ist $C([a,b])$ ein Untervektorraum von $\mathcal{R}([a,b])$. Schränken wir $\langle .,. \rangle$ auf $C([a,b])$ ein, so gilt die letzte Bedingung wohl. Sonst gäbe es nämlich ein $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) \neq 0$, also $|f(x_0)|^2 > 0$. Da die Funktion gegeben durch $x \mapsto |f(x)|^2$ (als Verknüpfung stetiger Funktionen) stetig ist, würde ein $\delta > 0$ existieren, sodass $|f(x)|^2 > \frac{1}{2}|f(x_0)|^2$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a,b] =: I$. Es würde gelten:

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x)|^2 dx \geqslant \frac{1}{2(b-a)} |f(x_0)|^2 \ell(I) > 0,$$

wobei $\ell(I)$ die Länge des Intervalls I bezeichnet.

Also definiert $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf $C([a,b])$. (Die übrigen Bedingungen sind offensichtlich weiterhin erfüllt.)

(iii) **Wichtiger Speziallfall.** Sei $C_L(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller stetigen L-periodischen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Der Vektorraum $C_L(\mathbb{R})$ is zum Vektorraum $C_p([0,L]) = \{f \in C([0,L]) \mid f(0) = f(L)\}$ isomorph (warum?), also definiert

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx \tag{4}$$

ein Skalarprodukt auf $C_L(\mathbb{R})$.

Bemerken Sie, dass für jede zwei L-periodische Funktionen f, g und für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{L}\int_a^{a+L} f(x)\overline{g(x)}dx,$$

da das Produkt zweier L-periodischer Funktionen wieder L-periodisch ist. Man kann also in der Definition (4) des Skalarprodukts jedes Interval der Länge L nehmen.

Definition 3.5. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle .,.\rangle$. Ein System $\{e_i \mid i \in I\}$ von Vektoren in V heißt **Orthonormalsystem** (ONS), falls für alle $i, j \in I$ gilt:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Bekanntlich sind die Vektoren in einem ONS linear unabhängig. Sei $F \subseteq I$ eine endliche Teilmenge und sei $v = \sum_{j\in F} \lambda_j e_j$. Dann gilt:

$$\langle v, e_i\rangle = \left\langle \sum_{j\in F} \lambda_j e_j, e_i \right\rangle = \begin{cases} \lambda_i, & \text{falls } i \in F, \\ 0, & \text{falls } i \notin F. \end{cases}$$

Die Konstanten λ_i sind also eindeutig bestimmt.

Beispiele 3.6.

(i) Sei $C_L(\mathbb{R})$ versehen mit dem Skalarprodukt (4). Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir $e_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $e_k(x) = e^{ik\omega x}$ mit $\omega = \frac{2\pi}{L}$. Dann ist $\{e_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ein ONS. *(Übungsblatt 1.)*

Gegeben $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega x}$, so kann c_k für alle k wie folgt (eindeutig) bestimmt werden:

$$c_k = \langle p, e_k\rangle.$$

(ii) Sei $C_L(\mathbb{R})$ versehen mit dem Skalarprodukt (4). Seien $\mathcal{c}_n(x) := \sqrt{2}\cos(n\omega x)$ und $\mathcal{s}_n(x) := \sqrt{2}\sin(n\omega x)$ für $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\omega = \frac{2\pi}{L}$, und sei $\mathcal{c}_0(x) = 1$. Dann ist $\{\mathcal{c}_n, \mathcal{s}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathcal{c}_0\}$ ein ONS in $C_L(\mathbb{R})$. *(Übungsblatt 1.)*

Gegeben $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$, so können a_n, b_n wie folgt bestimmt werden:

$$a_n = \sqrt{2}\langle f, \mathcal{c}_n\rangle, \quad b_n = \sqrt{2}\langle f, \mathcal{s}_n\rangle, \quad a_0 = 2\langle f, \mathcal{c}_0\rangle.$$

4 Fourierreihen

4.1 Grundlegende Definitionen

In diesem Abschnitt führen wir Fourierreihen ein.

Definition 4.1. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine L-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ integrierbar ist. Sei $\omega = \frac{2\pi}{L}$. Die Zahlen

$$c_k = c_k(f) = \langle f, e_k \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-ik\omega x} dx, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

heißen die **Fourierkoeffizienten** von f. Die Reihe

$$Sf(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

heißt die **Fourierreihe** von f. Wir schreiben

$$f(x) \sim Sf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}.$$

Die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x}$ ist die Folge von Partialsummen $S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x}$. Diese Partialsummen sind trigonometrische Polynome.

Bemerken Sie, dass die Fourierreihe bisher nur als formale Summe definiert wurde; wir haben noch keine Aussagen zur Konvergenz und zur Bedeutung des Zeichens "$\sim$" gemacht.

Bemerkung 4.2. Ist f ein trigonometrisches Polynom von Grad $\leqslant N$, d.h. f hat die Form

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega x},$$

so stimmt die Fourierreihe von f punktweise mit der Funktion f überein.

Bemerkung 4.3. Eine alternative Schreibweise für die Fourierreihe ist gegeben durch

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos(n\omega x) dx, && n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega x) dx, && n = 1, 2, 3, \dots. \end{aligned}$$

Beispiel 4.4. Sei $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die "Sägezahnfunktion" mit Periode 2 gegeben durch

$$\sigma(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \in k\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Bemerken Sie, dass die Funktion σ durch die Werte auf $[-1, 1)$ eindeutig festgelegt ist, da sie 2-periodisch ist.

Da $L = 2$, gilt: $\omega = \pi$. Zunächst berechnen wir die Fourierkoeffizienten. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \sigma(x) \cos(n\omega x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} x \cos(n\pi x) dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

weil die Funktion $x \mapsto x\cos(n\pi x)$ eine ungerade Funktion ist. (*Übungsblatt 1.*) Bemerken Sie auch, dass die abweichenden Funktionswerte an den Endpunkten für das Integral keine Rolle spielen.

Für die übrigen Fourierkoeffizienten gilt:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \sigma(x) \sin(n\omega x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} x \sin(n\pi x) dx \\
\text{(partielle Integration)} \quad &= -\frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) dx \\
&= -\frac{2}{n\pi}(-1)^n + \frac{1}{n^2\pi^2} \sin(n\pi x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von σ ist also

$$\sigma(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \sin(n\pi x).$$

4.2 Die Besselsche Ungleichung

Zuerst wiederholen wir einen Begriff aus Analysis II.

Definition 4.5. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $\|.\|\colon V \to \mathbb{R}$, sodass

(i) $\|v\| \geqslant 0$ für alle $v \in V$ und $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.

(ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Bemerkung 4.6.

- Wenn $\langle .,. \rangle \colon V \times V \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt auf V ist, dann definiert die Abbildung $\| \cdot \| \colon V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V. *(Übungsblatt 4.)*

  Im Beispiel des Vektorraums $C_L(\mathbb{R})$ versehen mit dem Skalarprodukt gegeben durch $\langle f, g \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx$ erhalten wir die Norm

  $$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

  Die Norm $\| \cdot \|_2$ ist ein Spezialfall der p-Norm $\|.\|_p$ für $1 \leqslant p < \infty$:

  $$\|f\|_p := \left(\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

  Die p-Norm kommt nicht auf oben erwähnter Weise von einem Skalarprodukt, außer wenn $p = 2$.

- Es gilt die Cauchy-Schwarzungleichung: Für alle $v, w \in V$ gilt:

  $$|\langle v, w \rangle| \leqslant \sqrt{\langle v, v \rangle} \sqrt{\langle w, w \rangle} = \|v\| \|w\|.$$

  (Übungsblatt 4.)

Lemma 4.7. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine L-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ integrierbar ist, und sei $\omega = \frac{2\pi}{L}$. Seien $c_k = \langle f, e_k \rangle$, mit $k \in \mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von f. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\|f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Beweis. Setzen wir $g := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$, so gilt:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} c_k = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2.$$

Ähnlich erhalten wir $\langle g, f \rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$ und $\langle g, g \rangle = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} \|f - g\|_2^2 &= \langle f - g, f - g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \langle g, f \rangle - \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle \\ &= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2. \end{aligned}$$

□

Satz 4.8 (Besselsche Ungleichung)**.** Sei f wie in Lemma 4.7. Dann gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Beweis. Nach Lemma 4.7 gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \leqslant \|f\|_2^2. \tag{5}$$

Da die Folge $(s_n)_n$ mit $s_n := \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2$ monoton wachsend und nach (5) beschränkt ist, so konvergiert (nach Analysis I) die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$ und es gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

□

4.3 Konvergenzbegriffe für Fourierreihen

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine L-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ integrierbar ist. Wie oben schreiben wir

$$Sf(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

für die Fourierreihe von f und

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega x} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$$

für die Partialsummen der Fourierreihe von f.

Definition 4.9.

(i) Die Fourierreihe Sf **konvergiert** gegen f **im Punkt** $x_0 \in \mathbb{R}$, falls $\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = f(x_0)$.

(ii) Die Fourierreihe Sf **konvergiert punktweise** gegen f, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = f(x)$.

(iii) Die Fourierreihe Sf **konvergiert im quadratischen Mittel** (oder **in der L^2-Norm**) gegen f, falls $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\|_2 = 0$.

(iv) Die Fourierreihe Sf **konvergiert gleichmäßig** gegen f, falls

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in[0,L]} |f(x) - S_N f(x)| = 0.$$

Korollar 4.10 (Korollar von Lemma 4.7)**.** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine L-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ integrierbar ist. Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:

(i) $S_N f$ konvergiert in der L^2-Norm gegen f.

(ii) $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$

Beweis. Nach Lemma 4.7 gilt:

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \|f - \sum_{k=-N}^{N} c_k e_k\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2.$$

Es gilt $\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\|_2^2 = 0$ genau dann, wenn $\lim_{N\to\infty} \|f\|_2^2 - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 = 0$. □

Lemma 4.11 (Lemma von Riemann-Lebesgue)**.** Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine L-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, L]$ integrierbar ist. Seien a_n, b_n und c_n die Fourierkoeffizienten von f. Dann gelten:

$$\lim_{k\to\infty} |c_k| = \lim_{k\to-\infty} |c_k| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |b_n| = 0.$$

Beweis. Nach Satz 4.8 ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} = |c_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + |c_{-k}|^2$ (absolut) konvergent, also gilt: $\lim_{k\to\infty} |c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = 0$. Es folgt:

$$\lim_{k\to\infty} |c_k| = \lim_{k\to-\infty} |c_k| = 0.$$

Die Aussagen über a_n und b_n folgen aus den Relationen zwischen a_n, b_n und c_n. □

Bemerkung 4.12. Die folgenden Aussagen sind bekannt aus Analysis I und II.

- Sei I ein Intervall und sei $(f_n\colon I \to \mathbb{K})_n$ eine Folge von Funktionen. Falls die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{K}$ konvergiert, so konvergiert die Folge punktweise gegen f. Die Umkehrung ist falsch.
- Sei I ein Intervall und sei $(f_n\colon I \to \mathbb{K})_n$ eine Folge von Funktionen. Falls die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{K}$ konvergiert, so konvergiert die Folge im quadratischen Mittel gegen f. Die Umkehrung ist falsch.

5 Konvergenz von Fourierreihen im quadratischen Mittel

Wir betrachten die Konvergenz von Fourierreihen im quadratischen Mittel.

Bemerkung 5.1.

Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine L-periodische Funktion, so ist die Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\tilde{f}(x) = f(\frac{L}{2\pi}x)$ periodisch mit Periode 2π.

Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, so ist die Funktion $\tilde{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $\tilde{g}(x) = g(\frac{2\pi}{L}x)$ periodisch mit Periode L.

Wir können uns also ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall von 2π-periodischen Funktionen einschränken.

Zuerst beweisen wir das folgende Lemma. Der Beweis ist relativ technisch, benutzt aber nur elementare Methoden.

Lemma 5.2. Für $x \in [0, 2\pi]$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis. Seien $\alpha < a < b < \beta$ reelle Zahlen und sei $f\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$F(t) := \int_a^b f(x)\sin(tx)dx.$$

Sei $t \neq 0$. Es gilt:

$$F(t) = -\frac{1}{t} f(x)\cos(tx)\Big|_a^b + \frac{1}{t}\int_a^b f'(x)\cos(tx)dx.$$

Da f und f' auf $[\alpha, \beta]$ stetig sind, existiert ein $M > 0$, sodass $|f(x)| \leqslant M$ und $|f'(x)| \leqslant M$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$, also gilt:

$$|F(t)| \leqslant \frac{2M}{|t|} + \frac{M}{|t|}(b - a).$$

Es folgt, dass

$$\lim_{|t| \to \infty} F(t) = 0. \tag{6}$$

Diese Konvergenz ist gleichmäßig in a, b, da $\alpha < a < b < \beta$.

Sei nun $x \in (0, 2\pi)$. Benutzen wir

$$\int_\pi^x \cos(kt)dt = \frac{1}{k}\sin(kt)\Big|_\pi^x = \frac{1}{k}\sin(kx)$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2}\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2} \qquad \text{(umschreiben in Exponentialfunktionen)},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\pi}^{x} \cos(kt)dt \\
&= \int_{\pi}^{x} \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)dt \\
&= \int_{\pi}^{x} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{2} \right) dt \\
&= \int_{\pi}^{x} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right) dt - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Aus (6) folgt, dass

$$\int_{\pi}^{x} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \right) dt \to 0, \qquad \text{wenn } n \to \infty,$$

also für $x \in (0, 2\pi)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}.$$

Diese Reihe konvergiert auf jedem Intervall $[\delta, 2\pi - \delta]$ mit $0 < \delta < \pi$ gleichmäßig.

Für $x \in [0, 2\pi]$ definieren wir

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[0, 2\pi]$ (Weierstraßsches Majorantenkriterium). Bemerken Sie, dass $(\frac{\cos(kx)}{k^2})' = -\frac{\sin(kx)}{k}$, also $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + C$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz und da $\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx = 0$ für alle $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, erhalten wir

$$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{k^2} dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi x^2}{4} + Cx \bigg|_0^{2\pi}.$$

Es folgt, dass $C = \frac{\pi^2}{6}$. $\square$

Lemma 5.3. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, sodass $f|_{[0,2\pi]}$ eine Treppenfunktion ist. Dann konvergiert die Fourierreihe Sf im quadratischen Mittel gegen f.

Beweis. Aus Korollar 4.10 ist bekannt, dass Sf genau dann im quadratischen Mittel gegen f konvergiert, wenn $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|_2^2$, wobei c_k die Fourierkoeffizienten von f sind.

Wir betrachten zunächst die spezielle Treppenfunktion $\mathbf{1}_{[0,\alpha]}$ mit $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für die Fourierkoeffizienten gilt:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha} dx = \frac{\alpha}{2\pi} \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha} e^{-ikx} dx = \frac{i}{2k\pi}(e^{-ik\alpha} - 1) \text{ für } k \neq 0.$$

Für $k \neq 0$ gilt

$$|c_k|^2 = \frac{1}{4k^2\pi^2}(e^{-ik\alpha} - 1)(e^{ik\alpha} - 1) = \frac{1}{4k^2\pi^2}(2 - e^{ik\alpha} - e^{-ik\alpha}) = \frac{1}{2k^2\pi^2}(1 - \cos(k\alpha)),$$

also mit Lemma 5.2 erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=\infty}^{\infty}|c_k|^2 &= \frac{\alpha^2}{4\pi^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\pi^2}(1-\cos(k\alpha))\\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k\alpha)}{k^2}\\ &= \frac{\alpha^2}{4\pi^2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\pi\alpha}{2}+\frac{\pi^2}{6}\right)\\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\\ &= \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Damit haben wir das Lemma für $\mathbf{1}_{[0,\alpha]}$ bewiesen.

Sei jetzt $I\subset[0,2\pi]$ ein beliebiges Intervall. Zunächst bemerken wir, dass es für die Fourierreihe von $\mathbf{1}_I$ und $\|\mathbf{1}_I\|_2$ egal ist, ob I offen, abgeschlossen oder halboffen ist. Sei nun $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die auf $[0,2\pi]$ integrierbar ist, und seien $c_k(g)$, mit $k\in\mathbb{Z}$, die Fourierkoeffizienten von g. Sei $y\in\mathbb{R}$ und setze $g^y(x):=g(x+y)$. Die Funktion g^y ist 2π-periodisch und auf $[0,2\pi]$ integrierbar. Für die Fourierkoeffizienten $c_k(g^y)$ gilt:

$$\begin{aligned}c_k(g^y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x+y)e^{-ikx}dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_y^{2\pi+y}g(u)e^{-ik(u-y)}du\\ &= \frac{e^{iky}}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(x)e^{-ikx}dx\\ &= e^{iky}c_k(g).\end{aligned}$$

Es folgt, dass $|c_k(g^y)|^2=|c_k(g)|^2$ und $\|g^y\|_2^2=\|g\|_2^2$, also (sei $\ell(I)$ die Länge des Intervalls I)

$$\|\mathbf{1}_I\|_2^2=\|\mathbf{1}_{[0,\ell(I))}\|_2^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(\mathbf{1}_{[0,\ell(I))})|^2=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k(\mathbf{1}_I)|^2.$$

Das Lemma folgt also auch für $\mathbf{1}_I$. Da jede Treppenfunktion als Linearkombination von solchen Funktionen geschrieben werden kann, ist das Lemma bewiesen. □

Satz 5.4. Sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die auf $[0,2\pi]$ integrierbar ist. Dann konvergiert Sf im quadratischen Mittel gegen f.

Beweis. Sei $f=u+iv$ mit $u,v\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dann sind u,v periodisch mit Periode 2π und integrierbar auf $[0,2\pi]$. Für jedes $N\in\mathbb{N}$ gilt: $S_Nf=S_Nu+iS_Nv$. Deshalb genügt es, den Satz für reellwertige Funktionen $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zu zeigen.

Sei also $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, die auf $[0,2\pi]$ integrierbar ist. Da f integrierbar ist, ist f beschränkt, also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $|f(x)|\leqslant 1$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon>0$. Da f integrierbar ist, existieren Treppenfunktionen $\varphi,\psi\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ mit

$$-1\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)\leqslant 1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und
$$\int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{8}.$$
Sei $g := f - \varphi$. Dann gilt $g \geqslant 0$ und $|g(x)|^2 \leqslant |\psi(x) - \varphi(x)|^2 \leqslant 2(\psi(x) - \varphi(x))$ für alle $x \in [0, 2\pi]$, also gilt:
$$\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \leqslant 2 \int_0^{2\pi} (\psi(x) - \varphi(x))dx \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}.$$
Für die Partialsummen gilt: $S_N f = S_N \varphi + S_N g$.

Da φ eine Treppenfunktion ist, existiert nach Lemma 5.3 ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geqslant N_0$ gilt:
$$\|\varphi - S_N \varphi\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$
und nach Lemma 4.7 gilt:
$$\|g - S_N g\|_2^2 \leqslant \|g\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}.$$
Es folgt, dass
$$\|f - S_n f\|_2 \leqslant \|\varphi - S_n \varphi\|_2 + \|g - S_n g\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

□

6 Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

6.1 Eine hinreichende Bedingung für gleichmäßige Konvergenz

Unter bestimmten Bedingungen können wir gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen zeigen.

Definition 6.1. Eine stetige 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, falls eine Unterteilung $0 = x_0 < \ldots < x_m = 2\pi$ existiert, sodass $f\Big|_{[x_{j-1},x_j]}$ für alle $j = 1, \ldots, m$ stetig differenzierbar ist.

Lemma 6.2. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion, sodass für die Fourierkoeffizienten c_k von f gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Dann konvergiert Sf gleichmäßig gegen f.

Beweis. In den Übungen (Übungsblatt 5) wird gezeigt, dass für ein solches f die Fourierreihe in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen einen Wert $g(x)$ konvergiert und dass Sf gleichmäßig gegen die entsprechende Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ konvergiert. Da g der gleichmäßige Limes einer Folge von stetigen Funktionen (nämlich die Partialsummen $S_N f$) ist, ist g stetig. Nach Satz 5.4 konvergiert Sf im quadratischen Mittel gegen f. Es folgt, dass für alle n gilt:

$$\|f - g\|_2 = \|f - S_n f + S_n f - g\|_2 \leqslant \|f - S_n f\|_2 + \|S_n f - g\|_2.$$

Da die beiden Summanden $\|f - S_n f\|_2$ und $\|S_n f - g\|_2$ gegen 0 konvergieren (wenn $n \to \infty$) folgt, dass $\|f - g\|_2 = 0$. Da f und g stetig sind, muss gelten: $f \equiv g$. □

Satz 6.3. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische und stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann konvergiert Sf gleichmäßig gegen f.

Beweis. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische und stückweise stetig differenzierbare Funktion mit Fourierkoeffizienten c_k und stückweise Unterteilung $0 = x_0 < \ldots < x_n = 2\pi$ wie in Definition 6.1.

Sei $\varphi_j\colon [x_{j-1}, x_j] \to \mathbb{C}$ die (stetige) Ableitung von f auf $[x_{j-1}, x_j]$ und sei $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die 2π-periodische Funktion, die auf alle $[x_{j-1}, x_j)$ mit φ_j übereinstimmt. Seien γ_k die Fourierkoeffizienten von φ.

Nach der Besselschen Ungleichung gilt: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 \leqslant \|\varphi\|_2 < \infty$, also gilt:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)e^{-ikx}dx = \frac{i}{k} f(x)e^{-ikx}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{i}{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi(x)e^{-ikx}dx.$$

Für $k \neq 0$ gilt also:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{i}{2k\pi}\sum_{j=1}^{m} f(x)e^{-ikx}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{i}{2k\pi}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{j-1}}^{x_j}\varphi(x)e^{-ikx}dx \\ &= -\frac{i}{k}\gamma_k. \end{aligned}$$

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt: $|\alpha\beta| \leqslant \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$, also erhalten wir:

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2\right).$$

Der Satz folgt jetzt direkt durch Anwendung von Lemma 6.2. □

6.2 Eine hinreichende Bedingung für punktweise Konvergenz

Definition 6.4. Sei $N \in \mathbb{N}_0$. Die Funktion $D_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ heißt der **Dirichlet-Kern**[1] von Grad N.

Bemerkung 6.5. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$D_N(x) = 1 + \sum_{k=1}^{N}(e^{ikx} + e^{-ikx}) = 1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(kx).$$

Wenn N groß wird, bekommt D_N hohe Spitzen um den Punkten 0, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, …. Die Funktion D_N ist dann klein außerhalb kleinen Umgebungen dieser Punkte. Die Graphen der ersten Glieder der Folge $(D_N)_N$ sind in Abbildung 6.2 dargestellt.

Der Beweis des folgenden Lemmas ist eine Übung (Übungsblatt 6).

Lemma 6.6. Sei $N \in \mathbb{N}_0$.

(i) Für alle $x \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt:

$$D_N(x) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}.$$

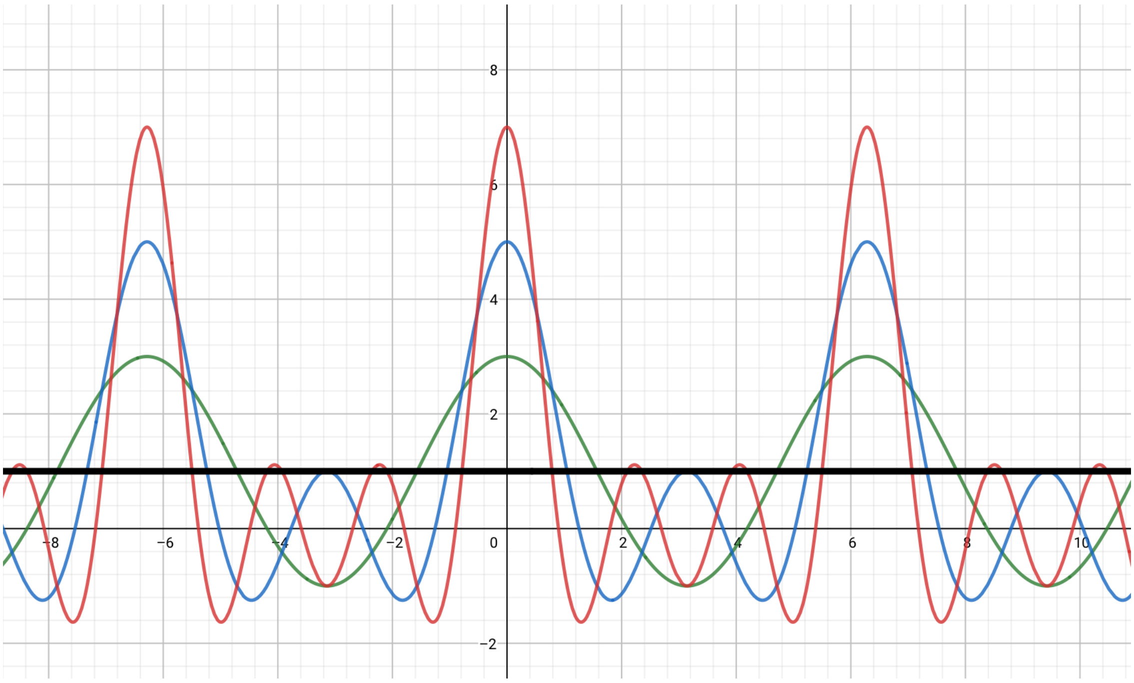
Für alle $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt:$D_N(x) = 2N + 1$.

(ii) Es gelten:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_N(x)dx = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} D_N(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} D_N(x)dx = \frac{1}{2}.$$

[1] Der Begriff Kern hat hier nicht die Bedeutung, die sie aus der linearen Algebra kennen.

Abbildung 2: Die Graphen der Funktionen D_0 (schwarz), D_1 (grün), D_2 (blau) und D_3 (rot).



Lemma 6.7. Für jede 2π-periodische Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die auf $[0, 2\pi]$ integrierbar ist, gilt:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) D_N(x-y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) D_N(y) dy.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
S_N f(x) &= \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-y)} dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) D_N(x-y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) D_N(u) du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) D_N(u) du.
\end{aligned}$$

□

Satz 6.8. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die auf $[-\pi, \pi]$ integrierbar ist und die in $x_0 \in (-\pi, \pi)$ differenzierbar ist. Dann konvergiert Sf im Punkt x_0 gegen $f(x_0)$.

Dieser Satz gilt a posteriori für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für $t \in (-\pi, \pi)$, sei

$$F(t) := \begin{cases} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t}, & \text{falls } t \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi), \\ -f'(x_0), & \text{falls } t = 0. \end{cases}$$

Wegen der Differenzierbarkeit von f im Punkt x_0 ist die Funktion F in einer Umgebung von 0 beschränkt. Zudem ist die Funktion F für jedes kleine $\delta > 0$ integrierbar auf $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$. Nach einem Resultat aus Analysis I ist F deshalb integrierbar auf $[-\pi, \pi]$. Nach Lemma 6.7 gilt: $S_N f(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) dt$.

Umschreiben liefert:

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(x_0 - t) D_N(t) dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \left(f(x_0 - t) - f(x_0)\right) D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} F(t) t D_N(t) dt. \end{aligned}$$

Bemerken Sie, dass $tD_N(t) = \frac{t \sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{1}{2}t)}$ und dass die Funktion $t \mapsto \frac{t}{\sin(\frac{1}{2}t)}$ auf $[-\pi, \pi]$ stetig ist.

Schreiben wir $\sin((N + \frac{1}{2})t) = \sin(Nt)\cos(\frac{t}{2}) + \cos(Nt)\sin(\frac{t}{2})$, so folgt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} F(t) t D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} F(t) \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})} \cos(\frac{t}{2}) \sin(Nt) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} F(t) t \cos(Nt) dt.$$

Wegen des Lemmas von Riemann–Lebesgue konvergieren die beiden letzten Summanden gegen 0, wenn $N \to \infty$, also

$$\lim_{N \to \infty} S_N f(x_0) = f(x_0).$$

□

Bemerkung 6.9. Die Konvergenz von Sf in einem Punkt x_0 hängt ausschließlich vom Verhalten von f in einer Umgebung von x_0 ab, obwohl für die Bestimmung von $S_N f$ die Funktion f über das ganze Intervall $[0, 2\pi]$ integriert wird.

6.3 Eine überall stetige aber nirgendwo differenzierbare Funktion

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die überall stetig, aber nirgendwo differenzierbar ist. Die Funktion F wurde zum ersten Mal von Weierstraß betrachtet und ist explizit als Fourierreihe definiert.

Sei $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion gegeben durch

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2^{3m} x)}{2^m}. \tag{7}$$

Offenbar gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:
$$\left| \frac{\sin(2^{3m}x)}{2^m} \right| \leqslant 2^{-m}.$$
Da die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m}$ konvergiert, konvergiert die rechte Seite von (7) nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ und da F der gleichmäßige Limes einer Folge von stetigen Funktionen ist, ist F stetig.

Jetzt betrachten wir die Differenzierbarkeit. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$, sei $x_{n,k} := 2^{-3n}\frac{k\pi}{2}$. Wir betrachten zunächst die Funktion F in den Punkten $x_{n,k}$.

Falls $m > n$, so gilt:
$$\sin(2^{3m}x_{n,k}) = \sin(2^{3m-3n-1}k\pi) = 0.$$
Zudem gilt:
$$\sin(2^{3n}x_{n,k}) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade,} \\ \pm 1, & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir:
$$F_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin(2^{3m})}{2^m}.$$
Es folgt, dass
$$F(x_{n,k}) = F_{n-1}(x_{n,k}) + \frac{\sin(k\pi/2)}{2^n}.$$
Die Funktion F_{n-1} ist differenzierbar und die Ableitung ist gegeben durch
$$F'_{n-1}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} 2^{2m}\cos(2^{3m}x).$$
Es folgt, dass
$$|F'_{n-1}(x)| \leqslant \sum_{m=0}^{n-1} 2^{2m} = \frac{2^{2n}-1}{2^2-1} < \frac{2^{2n}}{3}.$$
Wenden wir jetzt den Mittelwertsatz (Analysis I) auf F_{n-1} auf dem Intervall $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ an, so erhalten wir:
$$|F_{n-1}(x_{n,k+1}) - F_{n-1}(x,k)| \leqslant \frac{2^{2n}}{3}|x_{n,k+1} - x_{n,k}| = \frac{2^{2n}}{3}\frac{2^{-3n}\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{6}2^{-n}.$$
Da $|\sin((k+1)\frac{\pi}{2}) - \sin(k\frac{\pi}{2})| = 1$, erhalten wir
$$|F(x_{n,k+1}) - F(x,k)| \geqslant \left| \frac{1}{2^n} - |F_{n-1}(x_{n,k+1}) - F_{n-1}(x,k)| \right| \geqslant (1 - \frac{\pi}{6})2^{-n}.$$
Daher folgt, dass
$$\left| \frac{F(x_{n,k+1}) - F(x,k)}{x_{n,k+1} - x_{n,k}} \right| \geqslant (1 - \frac{\pi}{6})2^{-n}\frac{2^{3n+1}}{\pi} > 2^{2n-2}. \tag{8}$$
Wir sehen also, dass die Steigung der Sekante zwischen nahe gelegenen Punkten des Graphen von F sehr groß werden kann.

Nehmen wir jetzt an, dass F in einem Punkt $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, also existiert ein $M \geqslant 0$ und ein $\delta > 0$, sodass

$$\left|\frac{F(x) - F(a)}{x - a}\right| \leqslant M \tag{9}$$

für alle $x \neq a$ mit $|x - a| < \delta$. Da F beschränkt ist, kann man (gegebenenfalls nach Wahl eines größeren δs) annehmen, dass (9) für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ gilt.

Sei nun n_0 so gewählt, dass $2^{2n_0-2} > M$. Dann existiert ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$x' := x_{n_0,k} \leqslant a < x_{n_0,k+1} =: x''.$$

Es folgt, dass

$$|F(x'') - F(a)| \leqslant M|x'' - a| \quad \text{und} \quad |F(x') - F(a)| \leqslant M|x' - a|,$$

also

$$|F(x'') - F(x')| \leqslant M|x'' - x'| < 2^{2n_0-2}|x'' - x'|,$$

was für das gewählte n_0 die Ungleichung (8) widerspricht.

Die Funktion F ist also in keinem Punkt differenzierbar.

7 Approximation stetiger Funktionen

In diesem Abschnitt beweisen wir, dass jede stetige periodische Funktion gleichmäßig durch eine Folge von trigonometrischen Polynomen approximiert werden kann.

Lemma 7.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ und für $n \in \mathbb{N}$, sei

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n).$$

Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant N$. Wähle $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $N_1 \geqslant N$ und

$$\left| \frac{1}{N_1} \left((a_1 - a) + \ldots + (a_N - a) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt für alle $n \geqslant N_1$:

$$\begin{aligned}
|\sigma_n - a| &= \left| \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) - a \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} \left((a_1 - a) + \ldots + (a_n - a) \right) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{n} \Big| (a_1 - a) + \ldots + (a_N - a) \Big| + \frac{1}{n} \Big| (a_{N+1} - a) + \ldots + (a_n - a) \Big| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n}(n - N)\frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Bemerken Sie, dass die umgekehrte Implikation im obigen Lemma nicht gilt. Zum Beispiel, sei $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $|\sigma_n| \leqslant \frac{1}{n} \to 0$, wenn $n \to \infty$, obwohl die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

Definition 7.2. Für $N \in \mathbb{N}$ heißt die Funktion $\sigma_N \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\sigma_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$ der N-te **Fejér-Kern**, wobei $D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$ der Dirichlet-Kern vom Grad n ist.

Lemma 7.3. Sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion, die auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ integrierbar ist. Dann gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_N(y) f(x - y) dy.$$

Beweis. Nach Lemma 6.7 gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) f(x - y) dy.$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_nf(x) &= \frac{1}{N}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y)f(x-y)dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(y)f(x-y)dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_N(y)f(x-y)dy.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 7.4. Wir schreiben

$$\sigma_Nf(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_nf(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_N(y)f(x-y)dy.$$

Angenommen, für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{N\to\infty} S_Nf(x) = f(x)$, so gilt nach Lemma 7.1:

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_Nf(x) = f(x).$$

Lemma 7.5. Für alle $N \in \mathbb{N}$ gelten:

(i)

$$\sigma_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N}\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}, & x \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},\\ N, & x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.\end{cases}$$

Insbesondere gilt: $\sigma_N(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_N(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sigma_N(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sigma_N(x)dx = 1.$$

Beweis. Für $x \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ gilt mit Lemma 6.6:

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) &= -\frac{1}{4}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)\left(e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{i(n+1)x} - e^{inx} - e^{-inx} + e^{-i(n+1)x}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\cos(nx) - \cos((n+1)x))\end{aligned}$$

und der Identität $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt für $N \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\sigma_N(x) &= \frac{1}{2N\sin^2(\frac{x}{2})} \sum_{n=0}^{N-1} (\cos(nx) - \cos((n+1)x)) \\
&= \frac{1}{2N\sin^2(\frac{x}{2})}(1 - \cos(Nx)) \\
&= \frac{1}{2N\sin^2(\frac{x}{2})}(1 - \cos(2\frac{Nx}{2})) \\
&= \frac{1}{2N\sin^2(\frac{x}{2})}(1 - (1 - 2\sin^2(\frac{Nx}{2}))) \\
&= \frac{1}{N}\frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}.
\end{aligned}
$$

Die übrigen Aussagen des Lemmas sind eine Übung. □

Satz 7.6. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion. Dann konvergiert $\sigma_N f$ gleichmäßig gegen f, wenn $N \to \infty$.

Beweis. Auf dem Intervall $[0, \pi]$ ist die Funktion gegeben durch $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ monoton wachsend. Damit folgt für $0 < \delta < \pi$: Ist $C_\delta := \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) > 0$, so folgt

$$
\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \geqslant C_\delta
$$

für alle $x \in [-\pi, \pi]$ mit $|x| \geqslant \delta$.

Es folgt, dass für alle $x \in [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ gilt:

$$
0 \leqslant \sigma_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leqslant \frac{1}{NC_\delta^2} \to 0,
$$

wenn $N \to \infty$, also konvergiert σ_N auf $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ gleichmäßig gegen 0 (nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium).

Nun gilt für alle $x \in [-\pi, \pi]$:

$$
\begin{aligned}
|\sigma_N f(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sigma_N(y)\,(f(x-y) - f(x))\,dy\right| \\
&\leqslant I_{1,N}^\delta + I_{2,N}^\delta + I_{3,N}^\delta
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
I_{1,N}^\delta &:= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\delta}^{\delta} \sigma_N(y)\,(f(x-y) - f(x))\,dy\right|, \\
I_{2,N}^\delta &:= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{-\delta} \sigma_N(y)\,(f(x-y) - f(x))\,dy\right|, \\
I_{3,N}^\delta &:= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\delta}^{\pi} \sigma_N(y)\,(f(x-y) - f(x))\,dy\right|.
\end{aligned}
$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da f stetig und 2π-periodisch ist, ist f auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig stetig und deshalb auch auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Es existiert also ein $\eta > 0$ mit $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in [-\eta, \eta]$. Wählen wir η für das obige δ, so erhalten wir

$$I_{1,N}^{\eta} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \sigma_N(y)|f(x-y) - f(x)|dy < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wähle nun $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sup_{\eta \leqslant |x| \leqslant \pi} \sigma_N(x) \leqslant \frac{1}{NC_\eta^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{3\|f\|_\infty}$ für alle $N \geqslant N_0$, wobei

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Da f stetig und 2π-periodisch ist, ist dieses Supremum endlich. (Es wird tatsächlich angenommen.)

Nun folgt für alle $N \geqslant N_0$:

$$I_{2,N}^{\eta} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\eta} \sigma_N(y)|f(x-y) - f(x)|dy \leqslant \frac{1}{2\pi}(\pi - \eta)\frac{\varepsilon}{3\|f\|_\infty} 2\|f\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die gleiche Rechnung ergibt $I_{3,N}^{\eta} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Korollar 7.7. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige 2π-periodische Funktion und sei $x \in \mathbb{R}$, sodass $Sf(x)$ konvergiert. Dann konvergiert $Sf(x)$ gegen $f(x)$.

Beweis. Wegen $\sigma_N f(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n f(x)$ folgt mit Lemma 7.1, dass wenn $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = a$, dann ist auch $f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = a$. □

Korollar 7.8. Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige 2π-periodische Funktionen mit den selben Fourierkoeffizienten, d.h. $c_k(f) = c_k(g)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: $f \equiv g$.

Beweis. Falls $c_k(f) = c_k(g)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so gilt: $S_N f = S_N g$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$. Deshalb gilt auch: $\sigma_N f = \sigma_N g$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Nun gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N g(x) = g(x).$$

□

8 Anwendung auf lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt wenden wir die Theorie von Fourierreihen an, um Lösungen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu beschreiben.

Definition 8.1. Eine **lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten** auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist eine Gleichung der Form

$$a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_m y^{(m)} = f \tag{10}$$

mit $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ und $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Eine **Lösung** der Gleichung (10) ist eine m mal stetig differenzierbare Funktion $y\colon I \to \mathbb{C}$, die die Gleichung (10) erfüllt.

Ist f eine 2π-periodische stetige Funktion, so gilt für jede 2π-periodische Lösung y für die Fourierkoeffizienten c_k (mit $k \in \mathbb{Z}$):

$$\sum_{l=0}^{m} a_l (ik)^l c_k(y) = \sum_{l=0}^{m} a_l c_k(y^{(l)}) = c_k\left(\sum_{l=0}^{m} a_l y^{(l)}\right) = c_k(f).$$

Schreiben wir $p(z) = \sum_{l=0}^{m} a_l z^l$, so folgt also:

$$p(ik) c_k(y) = c_k(f) \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Gilt nun $p(ik) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so gilt:

$$c_k(y) = \frac{c_k(f)}{p(ik)} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Diese Formel druckt die Fourierkoeffizienten der Lösung y von (10) in Fourierkoeffizienten der gegebenen Funktion f aus. Als Lösungsansatz erhalten wir damit

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(f)}{p(ik)} e^{ikx} \tag{12}$$

für eine mögliche 2π-periodische Lösung von (10).

Beispiel 8.2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' - y = \cos(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt $p(z) = z^2 - 1$ und $p(ik) = (ik)^2 - 1 \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Da $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ gilt:

$$c_k(\cos) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt:

$$c_k(y) = \begin{cases} -\frac{1}{4}, & k = \pm 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also $y(x) = -\frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix}) = -\frac{1}{2}\cos(x)$.

Durch Einseitzen sehen wir, dass dieses y in der Tat die Differentialgleichung $y'' - y = \cos(x)$ löst.

Wir widmen uns jetzt der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{ikx}$ in (12).

Satz 8.3. Seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^N(|g(k)| + |g(-k)|) < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx} = g(0) + \sum_{k=1}^{\infty}(g(k)e^{ikx} + g(-k)e^{-ikx})$$

gleichmäßig gegen eine N mal stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $c_k(y) = g(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Für diesen Satz benötigen wir folgendes Lemma (Analysis I):

Lemma 8.4. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ und $f, g\colon I \to \mathbb{C}$ Funktionen mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n' - g\|_\infty = 0$. Dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$.

Folgendes Lemma ist eine Umformulierung eines Resultats, dessen Beweis Teil von Übungsblatt 6 war.

Lemma 8.5. Sei $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|g(k)| + |g(-k)|) < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}$$

gleichmäßig gegen eine stetige 2π-periodische Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und es gilt: $c_k(y) = g(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Das obige Lemma zeigt der Fall $N = 0$ von Satz 8.3.

Beweis von Satz 8.3. Seien $N \in \mathbb{N}_0$ und $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^N(|g(k)| + |g(-k)|) < \infty.$$

Es folgt, dass auch

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|g(k)| + |g(-k)|) < \infty.$$

Setze $G_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} g(k)e^{ikx}$. Nach Lemma 8.5 existiert eine stetige 2π-periodische Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $G_m \to y$ gleichmäßig, wenn $m \to \infty$ und $c_k(y) = g(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir beweisen per Induktion, dass die Funktion y N-mal stetig differenzierbar ist und dass

$$y^{(N)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^N g(k)e^{ikx}, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Der Fall $N = 0$ ist Lemma 8.5, also sei $N > 0$ und nehmen wir an, dass die Behauptung für alle $l < N$ gilt. Dann gilt:

$$y^{(N-1)}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^{N-1} g(k)e^{ikx}.$$

Für $N \in \mathbb{N}$ sei

$$H_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} (ik)^{N-1} g(k)e^{ikx}.$$

Dann gilt

$$H_m'(x) = \sum_{k=-m}^{m} (ik)^N g(k)e^{ikx} = \sum_{k=-m}^{m} h(k)e^{ikx}$$

mit $h(k) = (ik)^N g(k)$. Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|h(k)| + |h(-k)|) < \infty.$$

Wegen Lemma 8.5 folgt, dass die Folge $(H_m')_m$ gleichmäßig gegen die Funktion $h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{ikx}$ konvergiert. Da H_m auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen y^{N-1} konvergiert, folgt mit Lemma 8.4, dass $y^{(N-1)}$ stetig differenzierbar ist und dass

$$y^{(N)}(x) = \lim_{m\to\infty} H_m'(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^N g(k)e^{ikx}.$$

$\square$

Korollar 8.6. Sei $p(z) = \sum_{l=0}^{m} a_l z^l$ ein Polynom mit $a_m \neq 0$ und sei $p(ik) \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Ist $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, sodass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g(k)| < \infty$ und ist $c_k(y) = \frac{g(k)}{p(ik)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so konvergiert die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{ikx}$$

gleichmäßig gegen eine m mal stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Der Beweis dieses Korollars ist eine Übung.

9 Die Fouriertransformation auf $\mathbb{R}$

9.1 Uneigentliche Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

In Analysis I und II wurden uneigentliche Integrale behandelt. Wir wiederholen kurz die Definition eines uneigentlichen Integrals der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem kompakten Interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ integrierbar ist und sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig. Falls die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx$$

und

$$\int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

konvergieren, so heißt das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergent und wir definieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl von c.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion mit Realteil $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Imaginärteil $v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

ist konvergent, wenn die Integrale $\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} v(x)dx$ konvergent sind. In dem Fall definieren wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} v(x)dx.$$

9.2 Grundlegende Definitionen

Definition 9.1. Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt mäßig fallend, falls ein $A > 0$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2}.$$

Wir schreiben $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ für die Menge aller stetigen mäßig fallenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Die Menge $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum bezüglich der üblichen Operationen.

Für $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ist das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

konvergent, da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

existiert (vgl. Analysis I und II).

Proposition 9.2. Es seien $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Dann gelten:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty}(af + bg)(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$.

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

(iii) $\delta\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

(iv) $\lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h) - f(x)|dx = 0$.

Die Beweise von (i) – (iii) sind elementar. Der Beweis von (iv) ist eine Übung.

Definition 9.3. Sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Die **Fouriertransformierte** von f ist die Funktion $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx. \tag{13}$$

Da f ein Element von $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ist, ist auch die Funktion $x \mapsto f(x)e^{-ix\xi}$ ein Element von $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Deshalb konvergiert das obige Integral.

Die Funktion $\widehat{f}$ ist beschränkt und stetig (Übung). Im Allgemeinen ist aber die Funktion $\widehat{f}$ nicht mäßig fallend.

Bemerkung 9.4. Das Integral (13) ergibt oft auch Sinn, wenn die Funktion f nicht in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ liegt. Wenn das Integral Sinn ergibt, nennen wir im Allgemeinen die Funktion $\widehat{f}$ definiert durch das Integral (13) die **Fouriertransformierte** von f. Insbesondere kann man also die Fouriertransformierte von beliebigen integrierbaren Funktionen f mit kompaktem Träger betrachten.

Bemerkung 9.5. Die Fouriertransformation $\widehat{f}$ einer beliebigen (nicht-periodischen) Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist eine Verallgemeinerung der Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ der Fourierkoeffizienten einer periodischen Funktion.

9.3 Der Schwartzraum und die Fouriertransformation

Definition 9.6. Der **Schwartzraum** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum bestehend aus unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, sodass $f, f', \ldots, f^{(l)}, \ldots$ **schnell fallend** sind, d.h. für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty.$$

Bemerken Sie, dass wenn $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann sind auch f' und $x \mapsto xf(x)$ Elemente von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beispiel 9.7. Die Funktion gegeben durch $f(x) = e^{-ax^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ für $a > 0$, aber die Funktion gegeben durch $g(x) = e^{-|x|}$ liegt nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, da sie in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Bemerkung 9.8. Eine unendlich oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die schnell fallend ist, ist nicht automatisch ein Element von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Zum Beispiel ist die Funktion definiert durch $f(x) = e^{-x^2}\sin(e^{x^2})$ schnell fallend (vgl. 9.7), ihre Ableitung $f'(x) = -2xe^{-x^2}\sin(e^{x^2}) + 2x\cos(e^{x^2})$ aber nicht.

Definition 9.9. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Die **Fouriertransformierte** von f ist die Funktion $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Notation: Wir schreiben $f(x) \rightsquigarrow \widehat{f}(\xi)$, wenn f von der Fouriertransformation auf $\widehat{f}$ abgebildet wird.

Proposition 9.10. Es seien $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Dann gelten:

(i) $f(x+h) \rightsquigarrow \widehat{f}(\xi) e^{ih\xi}$.

(ii) $f(x)e^{-ixh} \rightsquigarrow \widehat{f}(\xi + h)$.

(iii) $f(\delta x) \rightsquigarrow \delta^{-1} \widehat{f}(\delta^{-1}\xi)$.

(iv) $f'(x) \rightsquigarrow i\xi \widehat{f}(\xi)$

(v) $-ixf(x) \rightsquigarrow \widehat{f}'(\xi)$.

Beweis. Wir zeigen nur (iv) und (v). Für die Fouriertransformierte von f' gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} dx &= \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b f'(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ix\xi} \Big|_a^b - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (-i\xi) f(x) e^{-ix\xi} dx \right] \\ &= i\xi \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

Dies zeigt (iv).

Für (v) müssen wir zeigen, dass $\widehat{f}$ differenzierbar ist und dass $-ixf(x)$ von der Fouriertransformation auf $f'(\xi)$ abgebildet wird. Es seien $\varepsilon > 0$ und $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt:

$$\left| \frac{\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)}{h} - (\widehat{-ixf})(\xi) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \left[\frac{e^{-ixh} - 1}{h} + ix \right] dx \right|.$$

Da f und $x \mapsto xf(x)$ in $\mathcal{S}(R)$ liegen, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \geqslant N} |f(x)| dx \leqslant \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x| \geqslant N} |x||f(x)| dx \leqslant \varepsilon.$$

Zudem existiert ein $h_0 > 0$, sodass für $|x| \leqslant N$ und $|h| < h_0$ gilt:

$$\left| \frac{e^{-ixh} - 1}{h} + ix \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{N}.$$

Es folgt, dass ein $C > 0$ existiert, sodass

$$\begin{aligned} \left| \frac{\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)}{h} - (\widehat{-ixf})(\xi) \right| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \left[\frac{e^{-ixh} - 1}{h} + ix \right] dx \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-N}^{N} f(x) e^{-ix\xi} \left[\frac{e^{-ixh} - 1}{h} + ix \right] dx \right| + C\varepsilon \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2N \|f\|_\infty \frac{\varepsilon}{N} + C\varepsilon \\ &< C'\varepsilon \end{aligned}$$

für ein $C' > 0$. □

Der Beweis des folgenden Satzes ist eine Übung.

Satz 9.11. Falls $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, so gilt: $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Im Folgenden, sei $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die **Fouriertransformation**, d.h. die Abbildung, die $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ abbildet.

9.4 Die Umkehrformel

Wir untersuchen jetzt, ob wir die Fouriertransformation "umkehren" können.

Wir benutzen das folgende Standardintegral.

Lemma 9.12.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Proposition 9.13. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Dann gilt: $\mathcal{F}(f) = f$, d.h. $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

Beweis. Definiere

$$F(\xi) := \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-ix\xi}\,dx.$$

Nach Lemma 9.12 gilt $F(0) = 1$. Zudem gilt $f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x)$.

Nach Proposition 9.10.(v) und Proposition 9.10.(iv) gilt:

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix) f(x) e^{-ix\xi}\,dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ix\xi} \\ &= -\xi F(\xi). \end{aligned}$$

Setzen wir $G(\xi) = F(\xi)e^{\frac{x^2}{2}}$, dann gilt $G'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$, also G ist konstant. Da $F(0) = 1$ folgt, dass $G \equiv 1$ und somit $F(\xi) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. $\square$

Korollar 9.14. Für $\delta > 0$, sei $K_\delta(x) = \frac{\delta^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\delta}}$. Dann gilt: $\widehat{K_\delta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta x^2}{2}}$.

Beweis. Nach Anwendung von Proposition 9.10.(iii) auf Proposition 9.13 wird K_δ unter $\mathcal{F}$ auf $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} \sqrt{\delta} e^{-\frac{\delta x^2}{2}}$ abgebildet. $\square$

Der Beweis des folgenden Resultats ist elementar.

Proposition 9.15. Sei $\delta > 0$. Für die Funktion K_δ (wie oben) gilt:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)dx = 1$.

(ii) Für $\eta > 0$ gilt:

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{|x|>\eta} |K_\delta(x)|dx = 0.$$

Definition 9.16. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist die **Faltung** $f * g$ die Funktion gegeben durch

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

Bemerken Sie, dass für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und festes $x \in \mathbb{R}$ die Funktionen $t \mapsto f(t)g(x-t)$ und $t \mapsto f(t)g(x-t)$ schnell fallend sind.

Proposition 9.17. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\lim_{\delta \to 0} (f * K_\delta)(x) = f(x) \qquad \text{gleichmäßig in } x.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Bemerken Sie zuerst, dass f gleichmäßig stetig ist, also es existiert ein $\eta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \eta$.

Bemerken Sie auch, dass

$$(f * K_\delta)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) \left[f(x-t) - f(x) \right] dt.$$

Da $K_\delta(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt:

$$|(f * K_\delta)(x) - f(x)| \leqslant \int_{|t| \geqslant \eta} K_\delta(t) \left| f(x-t) - f(x) \right| dt + \int_{-\eta}^{\eta} K_\delta(t) \left| f(x-t) - f(x) \right| dt.$$

Nach Proposition 9.15 konvergiert das erste Integral gegen 0, wenn $\delta \to 0$ und das zweite Integral ist kleiner als ε aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit. $\square$

Proposition 9.18. Für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)dy.$$

Beweis. Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ stetig und gegeben sei ein $A > 0$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|F(x,y)| \leqslant \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

d.h. für festes x liegt die Funktion $y \mapsto F(x,y)$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ und für festes y liegt die Funktion $x \mapsto F(x,y)$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Aus Analysis II wissen wir, dass in diesem Fall die Funktionen $F_1, F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)dy$ und $F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)dx$ stetig sind und in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ liegen. Auch wissen wir, dass in dem Fall das Integral $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)dxdy$ existiert und dass folgendes gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)dy.$$

Seien jetzt $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ wie oben. Anwendung des obigen auf $F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)g(y)e^{-ixy}$ liefert $F_1(x) = f(x)\widehat{g}(x)$ und $F_2(y) = \widehat{f}(y)g(y)$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)dy.$$

$\square$

Wir können jetzt die Umkehrformel herleiten.

Satz 9.19. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Beweis. Zuerst beweisen wir, dass

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{14}$$

Sei dazu $G_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta x^2}{2}}$. Nach Proposition 9.10.(iii) gilt $\widehat{G_\delta} = K_\delta$ mit K_δ wie oben.

Nach Proposition 9.18 gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) G_\delta(\xi) d\xi.$$

Für $\delta \to 0$ wird die obige Gleichung die Gleichung (14).

Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und setze $F(y) := f(x+y)$. Dann gilt:

$$f(x) = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

□

9.5 Satz von Plancherel

Die Abbildung $\langle .,. \rangle \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$; vgl. Abschnitt 2.

Die Norm induziert von diesem Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir beweisen jetzt den Satz von Plancherel.

Satz 9.20. Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Beweis. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ setzen wir $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Dann gilt:

$$\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}.$$

Sei jetzt $h = f * \tilde{f}$. Dann gilt:

$$\widehat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} = \sqrt{2\pi} |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Auch gilt:

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

Deshalb folgt:

$$h(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Es folgt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

9.6 Poissonsche Summenformel

Satz 9.21. Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k).$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Wir setzen:

$$F(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k).$$

Diese Reihe konvergiert absolut und auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig. Deshalb ist F unendlich oft differenzierbar. Zudem ist F 2π-periodisch.

Betrachten wir jetzt die Fourierreihe von F, so erhalten wir:

$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ikx} dx$.

Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Es folgt, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x + 2\pi k) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Für $x = 0$ erhalten wir

$$\sqrt{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k).$$

□

Bemerkung 9.22. Die Poissonsche Summenformel (Satz 9.21) funktioniert auch für Funktionen $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, für die $\widehat{f}$ auch in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ liegt. Der Beweis bleibt gleich.

Beispiel 9.23. Sei $a > 0$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^{-a|x|}$. Die Funktion f liegt in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Für $\xi \in \mathbb{R}$ ist die Fouriertransformierte $\widehat{f}(\xi)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-i\xi x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos(\xi x) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \sin(\xi x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos(\xi x) dx,\end{aligned}$$

weil $x \mapsto e^{-a|x|}\sin(\xi x)$ eine ungerade Funktion ist. (Für $\xi = 0$ ist $x \mapsto e^{-a|x|}\sin(\xi x)$ sogar die Nullfunktion, also insbesondere sowohl ungerade als auch gerade.) Auch gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos(\xi x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(\xi x) dx,$$

weil $x \mapsto e^{-a|x|}\cos(\xi x)$ eine gerade Funktion ist.

Für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erhalten wir mithilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(\xi x) dx &= \frac{1}{\xi} e^{-ax} \sin(\xi x)\Big|_0^{\infty} + \frac{a}{\xi} \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin(\xi x) dx \\ &= 0 - 0 - \frac{a}{\xi^2} e^{-ax} \cos(\xi x)\Big|_0^{\infty} - \frac{a^2}{\xi^2} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(\xi x) dx,\end{aligned}$$

also

$$(1 + \frac{a^2}{\xi^2}) \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(\xi x) dx = \frac{a}{\xi^2}.$$

Insgesamt erhalten wir für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(\xi x) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{\xi^2} \frac{\xi^2}{a^2 + \xi^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \xi^2}.$$

Die obige Berechnung war für $\xi \neq 0$. Für $\xi = 0$ erhalten wir

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a}.$$

Es folgt, dass auch $\widehat{f}$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ liegt.

Mithilfe der Poissonschen Summenformel können wir für $a > 0$ die folgende Formel herleiten:

$$\frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + k^2}. \tag{15}$$

In der Tat, die Poissonsche Summenformel liefert:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi a|k|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}.$$

Umschreiben der linken Seite liefert:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi a|k|} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-2\pi a})^k - 1 = \frac{2}{1-e^{-2\pi a}} - 1 = \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}},$$

also erhalten wir (15).