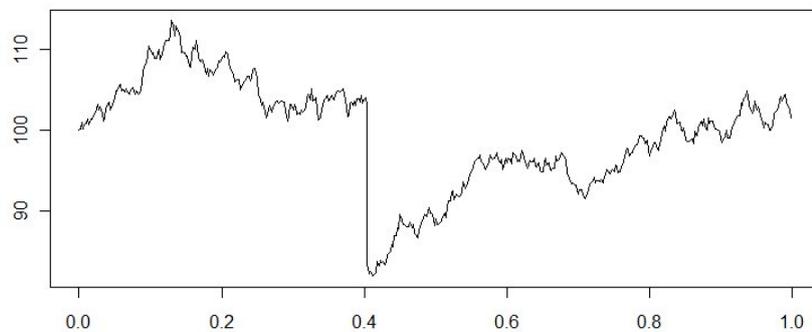


Zur Bewertung von Derivaten in einem Shot Noise-Modell



Diplomarbeit

vorgelegt von

Tamino Meyhöfer

Betreuer: PD Dr. Volkert Paulsen
Institut für Mathematische Statistik
Fachbereich 10 - Mathematik und Informatik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis	iii
Einleitung	v
1 Überblick	1
2 Shot Noise-Prozesse	9
2.1 Grundlegendes	9
2.2 Girsanov-Transformation	13
3 Das Shot Noise-Modell	27
3.1 Der Preisprozess im Shot Noise-Modell	27
3.2 Stochastische Volatilität	32
3.3 Äquivalente Martingalmaße	37
3.4 Das risikoneutrale Modell	50
4 Optionsbewertung	57
4.1 Optionsbewertung in einem affinen Sprung-Diffusions-Modell	57
4.1.1 Die Transformierten einer affinen Sprung-Diffusion	58
4.1.2 Bewertung europäischer Standard-Optionen	70
4.1.3 Bewertung geometrisch asiatischer Optionen	74
4.2 Optionsbewertung im Shot Noise-Modell	76
5 Kalibrierung	85
6 Ausblick	91
A Punktprozesse	93
B Daten-CD	99
Literaturverzeichnis	101

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1.1	Implizite Volatilität von DAX-Optionen	3
1.2	Modellübersicht	7
2.1	Shot Noise-Prozesse mit exponentieller Wirkungsfunktion	12
2.2	Hawkes-Prozess	25
3.1	Shot Noise-Sprung-Diffusion	29
5.1	Abweichungen SV-Modell	89
5.2	Abweichungen SDSV-Modell	89
5.3	Abweichungen SNSV-Modell	90

Tabellenverzeichnis

5.1	Kalibrierungsergebnisse	88
-----	-----------------------------------	----

Einleitung

Bisweilen ist an den Finanzmärkten ein Phänomen zu beobachten, welches in der Fachliteratur als *Market Overreaction* und *Mean Reversion* bekannt ist. Dieser Begriffsbildung steht folgende Überlegung zu Grunde: Nach der Veröffentlichung neuer, stark kursrelevanter Nachrichten wird eine sprunghafte Anpassung der Aktienkurse erwartet. Diese Anpassung kann aber je nach Wichtigkeit der Nachricht durch eine Überreaktion (*Overreaction*) unverhältnismäßig ausfallen. Nachdem sich der Markt beruhigt hat, entwickelt sich der Preis wieder in Richtung eines angemessenen Niveaus. Es findet also eine Gegenbewegung zur Kurssprungrichtung statt (*Mean Reversion*). Dabei ist dieser Effekt grundsätzlich in beide Richtungen denkbar. Auf der einen Seite könnten schlechte Nachrichten Kurssprünge nach unten auslösen, die durch Panikverkäufe noch verstärkt werden. Die tatsächliche Unterbewertung könnte jedoch im folgenden Investoren anlocken, was wiederum für steigende Kurse sorgen sollte. Auf der anderen Seite ist es möglich, dass ein mit einer besonders guten Nachricht verbundener Aufwärtssprung durch anschließende Gewinnmitnahmen wieder abgeschwächt wird.

In der Tat gibt es empirische Studien, die sich mit diesem Thema auseinandersetzen, wobei eine Mehrzahl derer auf eine Tendenz der Investoren zur Überreaktion auf neu eintreffende Nachrichten hindeutet.¹ Entgegen der Annahme der Informationseffizienz hätte die Unterstellung derartiger Effekte zur Folge, dass Kurse zum Teil prognostizierbar wären. So müssten „historische Verlierer“, d.h. Aktien, bei denen in der Vergangenheit Abwärtssprünge aufgetreten sind, in der Zukunft verhältnismäßig besser abschneiden als „historische Gewinner“. Allein dies sollte eine genauere Analyse motivieren.

Betrachtet man die in der finanzmathematischen Literatur geläufigen Erweiterungen des allseits bekannten Black-Scholes-Modell, stellt man schnell fest, dass die oben beschriebenen Effekte bei der Modellierung keine Berücksichtigung finden. Zwar werden bei den sogenannten Sprung-Diffusions-Modellen Kurssprünge miteinbezogen, jedoch folgt der Preisprozess nach einem Sprung weiterhin einer gewöhnlichen Diffusion. Eine Modellierung von *Market Overreaction* und *Mean Reversion* stellt somit eine Erweiterung dieser Modelle dar und kann durch die Verwendung sogenannter *Shot Noise-Prozesse*, die ein eintreffendes Signal (Kurssprung) mit Hilfe einer Wirkungsfunktion (Kompensation) weiterverarbeiten, auf

¹vgl. [Tho08] S.111 f.

elegante Art und Weise gewährleistet werden.²

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Das erste Kapitel vermittelt einführend die grundsätzliche Idee, wie das oben beschriebene Phänomen in ein Modell übertragen werden kann. Dabei wird zusätzlich das resultierende Shot Noise-Modell in den Kontext bereits geläufiger Finanzmarktmodelle eingeordnet. Im zweiten Kapitel werden die angesprochenen Shot Noise-Prozesse eingeführt und untersucht. Insbesondere die Ausführungen zur Girsanov-Transformation für Shot Noise-Prozesse im zweiten Abschnitt werden sich später bei der Modellierung in Kapitel 3 und vor allem bei der dortigen Untersuchung des Modells unter risikoneutralen Maßen als hilfreich erweisen. Letzteres ist für die spätere Bewertung von Derivaten unerlässlich. Da das Modell einen unvollständigen Markt beschreibt, kann kein eindeutiges Martingalmaß bestimmt werden. Im Allgemeinen erhält man stattdessen unendlich viele. Es wird sich aber herausstellen, dass das Modell unter einer gewissen Klasse von risikoneutralen Maßen eine affine Struktur besitzt. Bei der Bewertung von Derivaten kann deshalb auf die entsprechende Theorie von Duffie et al. ([DPS00]) zurückgegriffen werden. Diese stellt unter der recht allgemeinen Voraussetzung von affinen Sprungdiffusionen eine nahezu geschlossene Lösung für einige Optionspreise bereit - „nahezu“ nur deshalb, da die Lösung die Berechnung eines i.A. nicht explizit lösbaren Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen voraussetzt. Das vierte Kapitel beinhaltet eine Erläuterung dieser Theorie. Anschließend wird diese auf das Shot Noise-Modell übertragen. Dabei werden auch einige Spezialfälle des Modells genauer beleuchtet. Das fünfte Kapitel setzt schließlich die bis dahin gewonnenen Ergebnisse numerisch um. Indem untersucht wird, wie genau tatsächlich beobachtete Marktpreise mit den Modellpreisen übereinstimmen, lässt sich eine Aussage über die Güte des Modells treffen. Dafür wird eine Kalibrierung der Modellparameter an Marktdaten vorgenommen. Um die Güte schließlich besser einordnen zu können, werden die so gewonnenen Ergebnisse mit denen von bereits geläufigen Modellen wie dem *Heston-Modell* oder dem *Bates-Modell*, die beide Spezialfälle des Shot Noise-Modells darstellen, verglichen.

Zum Verständnis der Arbeit werden Kenntnisse über stochastische Prozesse und stochastische Analysis vorausgesetzt, die über den üblichen Stoffumfang einer Vorlesung über zeitstetige Finanzmathematik, die diese Themen meist nur für stetige Prozesse behandeln, etwas hinausgehen. Auf eine vollständige Wiedergabe der Grundlagen in dieser Arbeit wird jedoch zu Gunsten einer genaueren Analyse des Modells verzichtet. Für eine ausführliche Darstellung der stochastischen Integration sei auf das Werk von Protter [Pro05] verwiesen, welches auch in der Arbeit an entsprechenden Stellen als Referenz gebraucht wird. Für diese Arbeit notwendige Resultate über Punktprozesse stammen größtenteils aus [Bre81].

²Dies entspricht der Vorgehensweise in [ASS08] oder [SS07].

An dieser Stelle möchte ich herzlich PD Dr. Paulsen für die Bereitstellung dieses interessanten Themas und die gute Betreuung während der Anfertigung dieser Diplomarbeit danken. Außerdem gilt mein Dank all denjenigen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

1 Überblick

Um das zu untersuchende Shot Noise-Modell besser einordnen zu können, werden im Folgenden einige bereits sehr bekannte Finanzmarktmodelle kurz beschrieben. Danach wird eine erste Idee zur Modellierung des in der Einleitung beschriebenen Sachverhaltes gegeben, welche die weitere Vorgehensweise motivieren soll.

Während der gesamten Arbeit werden *kontinuierliche Finanzmarktmodelle* zugrunde gelegt. Diese erlauben einen Handel über eine Periode $[0, T]$, $T < \infty$ mit zwei Finanzgütern. Von diesen zwei Finanzgütern ist eines die sog. *risikolose Anlage*. Der Preisprozess für diese ist durch

$$\beta_t = \exp(rt), \quad t \in [0, T],$$

für ein $r > 0$ gegeben und lässt sich als festverzinsliche Anlage mit kontinuierlicher Verzinsung mit Rate r interpretieren.¹ Das zweite Finanzgut ist eine *risikobehaftete Anlage* deren Preisprozess durch ein \mathcal{F}_t -adaptiertes Semimartingal $(S_t)_{t \in [0, T]}$ mit Anfangswert $S_0 = x$, $x > 0$ gegeben ist. $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ stellt dabei eine Filtration des zugrunde gelegten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ dar, die die *Usual Conditions*² erfüllt. P bezeichnet das sogenannte *Real World Measure* oder auch *statistische Maß*, d.h. dasjenige Maß, welches mit den am Markt tatsächlich beobachteten Daten assoziiert werden kann.

Ist H eine \mathcal{F}_T -messbare Zufallsgröße, so kann mit dieser ein Claim beschrieben werden, der zum Zeitpunkt T eine zufällige Auszahlung H liefert. Möchte man in einem *arbitragefreien* Finanzmarktmodell, d.h. in einem Finanzmarktmodell, in dem keine risikolosen Gewinne durch den Handel von Wertpapieren erzeugt werden können,³ den Anfangswert eines solchen Claims bestimmen, wird dazu ein sog. *risikoneutrales Maß* herangezogen.

Definition 1.1. Ein zu P äquivalentes W-Maß Q heißt *risikoneutrales Maß* oder auch *äquivalentes Martingalmaß*, wenn der Prozess $(\beta_t^{-1}S_t)_{t \in [0, T]}$ ein lokales Q -Martingal ist.

¹Insbesondere wird angenommen, dass Soll- und Habenzinssatz gleich sind.

² \mathcal{F}_0 enthält alle P -Nullmengen von \mathcal{F}_T und die Filtration ist rechtsstetig. Vgl. [Pro05] Definition S.3.

³Für eine genaue Definition des Begriffes *Arbitrage* vgl. [JYC09] S.80 ff., insbesondere Definition 2.1.4.2 S.85.

Faire Preise für den Claim zu bestimmen, ist bei Kenntnis eines risikoneutralen Maßes gleichbedeutend damit, den Erwartungswert der diskontierten Claimauszahlungen unter eben diesem, also

$$E^Q(\beta_T^{-1}H) \quad (1.1)$$

zu berechnen. Ist das beschriebene Finanzmarktmodell unvollständig, so ist das risikoneutrale Maß nicht eindeutig bestimmt. Dann liefert (1.1) für jedes dieser risikoneutralen Maße einen arbitragefreien Preis.

Verschiedene Modelle lassen sich nun über die unterschiedliche Ausgestaltung des Semimartingals, d.h. des Preisprozesses, charakterisieren. Ausgangspunkt für alle hier behandelten Modelle stellt das *Black-Scholes-Modell* dar, welches deshalb zuerst erläutert werden soll.

Black-Scholes-Modell

Beim Black-Scholes-Modell (kurz BSM) ist der Preisprozess gegeben durch einen geometrischen Wienerprozess mit Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilität $\sigma > 0$, d.h.

$$S_t = x \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right), \quad t \in [0, T], \quad (1.2)$$

wobei $W = (W_t)_{t \geq 0}$ einen Wienerprozess bezeichnet. Alternativ lässt sich der Preisprozess auch durch die von (1.2) gelöste stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x,$$

beschreiben.

Die einfache Gestalt des BSM bietet auf der einen Seite den Vorteil, dass Optionspreise äußerst einfach bestimmt werden können, auf der anderen Seite können einige grundlegende empirische Ergebnisse nicht hinreichend durch dieses Modell erklärt werden. So besitzen entgegen der Annahme des BSM die Renditen keine Normalverteilung, sondern weisen eine negative Schiefe in ihrer Verteilung auf. Neben dem Problem, dass plötzliche Kurssprünge durch das BSM nicht wiedergegeben werden können, da der Preisprozess stetige Pfade hat, betrifft der wohl bekannteste Kritikpunkt die *implizite Volatilität*. Die in der verwendeten Preisgleichung (1.2) enthaltene Volatilität σ wird als konstant angenommen. Wäre dies tatsächlich der Fall, so müsste die implizite Volatilität, die sich bei gegebenem Zinssatz, Optionspreis und gegebener Laufzeit einer europäischen Option direkt aus der Bewertungsformel ergibt, konstant sein.⁴ Tatsächlich ist bei der Auswertung echter Finanzmarktdaten aber oftmals eine Veränderung des impliziten Volatilitätsniveaus über verschiedene Basispreise gleicher Laufzeit beobachtbar. Dieser als *Smile-Effekt* bekannte

⁴Vgl. [Ir103] S. 170 ff.

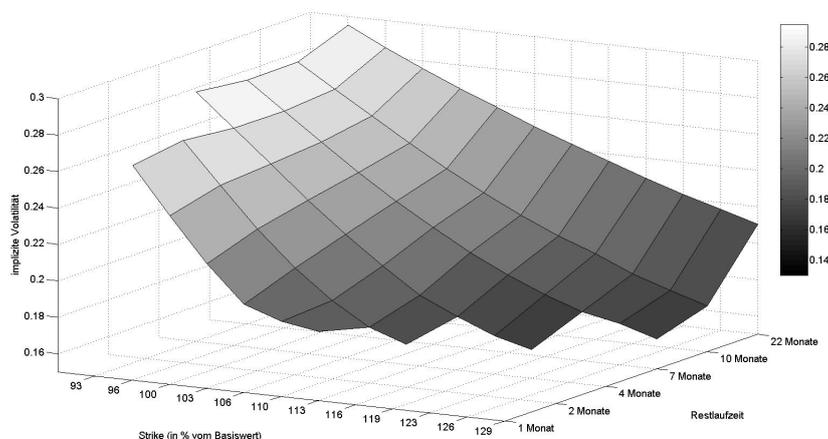


Abbildung 1.1. Zeigt die implizite Volatilität von DAX-Optionen mit Moneyness zwischen 93 und 129 % und Restlaufzeit zwischen einem Monat und ca. zwei Jahren. Deutlich erkennbar sind der Skew-Effekt und die Zeitstruktur der impliziten Volatilität.

Sachverhalt stellt sich beispielsweise bei Währungsoptionen häufig so dar, dass die implizite Volatilität bei *deep in the money*- und *deep out of the money*-Optionen signifikant höher ist, als bei *at the money*-Optionen. Bei Aktienindexoptionen ist ein asymmetrischer Verlauf typisch, wonach Optionen mit niedrigem Ausübungspreis eine deutlich höhere implizite Volatilität haben. Diese Schiefe der Volatilität in Abhängigkeit der Ausübungspreise ist auch als *Skew-Effekt* bekannt.⁵ Neben den Ausübungspreis-bezogenen Ungenauigkeiten ergibt sich außerdem eine Diskrepanz bei Betrachtung der Restlaufzeit. Dieser Effekt wird als *Zeitstruktur* der impliziten Volatilität bezeichnet. So ist die implizite Volatilität bei Optionen mit längerer Restlaufzeit oftmals höher, als bei Optionen mit kurzer Restlaufzeit.

Abbildung 1.1 veranschaulicht die eben beschriebenen Phänomene graphisch. Sie zeigt die implizite Volatilität von DAX-Optionen mit unterschiedlicher Laufzeit und unterschiedlichen Ausübungspreisen.⁶ Letztere sind im Verhältnis zum Preis des Basisgutes (Moneyness) dargestellt. Es ist sowohl ein deutlicher Skew-Effekt, nämlich fallende Volatilität mit steigender Moneyness, als auch die Zeitstruktur zu erkennen.

Diesen Beobachtungen Rechnung tragend, wurden Modelle entwickelt, die besagte Effekte nachbilden können. Im Wesentlichen handelt es sich dabei um zwei grundlegende Erweiterungen:

- Modelle mit Sprüngen im Aktienpreis (*Sprung-Diffusions-Modelle*),

⁵Vgl. [Tho08] S.143 ff.

⁶Datengrundlage dieser Abbildung sind die in Kapitel 5 zur Kalibrierung benutzten Marktdaten.

- Modelle mit *stochastischer Volatilität*, d.h. die Volatilität wird fortan nicht mehr als konstant angenommen, sondern folgt stochastischen Prozessen.

Sprung-Diffusions-Modelle

Bei den *Sprung-Diffusions-Modellen* (kurz SDM) wird der Preisprozess für das zweite Finanzgut um eine Sprungkomponente erweitert. Ausgehend vom BSM erhält man bei einem solchen Vorgehen dann

$$S_t = x \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right), \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

als Preisprozess. $N = (N_t)_{t \geq 0}$ ist dabei ein adaptierter Poissonprozess mit Intensität $\lambda > 0$ und Sprungzeiten $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots$. Offensichtlich stimmen dann die Sprungzeiten des Preisprozesses mit denen des Poissonprozesses überein. Die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sind unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen und erzeugen eine zufällige Sprunghöhe. Üblicherweise wird angenommen, dass W , N und die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ voneinander stochastisch unabhängig sind.

Bezeichne des Weiteren $U_t := \sum_{i=1}^{N_t} U_i \mathbf{1}_{(T_{i-1}, T_i]}(t)$ die stückweise konstante, linksstetige Interpolation der $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $u_t := \exp(U_t)$ und S_{t-} den linksseitigen Limes von S in t , d.h. $\lim_{s \uparrow t} S_s$. Für ein Finanzgut, welches dem Prozess aus (1.3) folgt, gilt dann folgendes: Treten keine Sprünge auf, so verhält sich der Preis des Finanzgutes wie im BSM mit erwarteter Rendite μ und konstanter Volatilität σ . Findet zum Zeitpunkt t ein Sprung statt, so ergibt sich als absolute Sprunghöhe $\Delta S_t = S_t - S_{t-} = S_{t-}(u_t - 1)$, was einer relativen Sprunghöhe von $u_t - 1$ entspricht. Man beachte, dass wegen $u_t = \exp(U_t) > 0$ stets die Positivität des Aktienpreises sichergestellt ist.

Verschiedene SDM lassen sich durch die Verteilung der Sprunghöhen charakterisieren. Im Sprung-Diffusions-Modell von Merton (1976), der als erster das BSM durch Sprünge erweiterte, sind die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ normalverteilt. Kou (2002) hingegen unterstellt eine doppelte Exponentialverteilung.

Die durch (1.3) gelöste stochastische Differentialgleichung ist durch

$$dS_t = S_{t-} (\mu dt + \sigma dW_t + (u_t - 1) dN_t), \quad S_0 = x,$$

gegeben.

Stochastische Volatilitätsmodelle

Modelle in denen die Volatilität nicht mehr konstant ist oder einer bzgl. der Zeit deterministischen Funktion folgt, sondern einen zufälligen Verlauf hat, werden als *stochastische Volatilitätsmodelle* (kurz SVM) bezeichnet. Eines der bekanntesten

dieser Modelle ist das *Heston-Modell*. Die Volatilität $(v_t)_{t \in [0, T]}$ folgt dort einem Wurzel-diffusionsprozess. Der Aktien-Preisprozess gleicht jenem aus dem BSM. Das Heston-Modell ist also durch folgende stochastische Differentialgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t (\mu dt + \sqrt{v_t} dW_t), & S_0 &= x, \\ dv_t &= \kappa_v(\theta_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} d\bar{W}_t, & v_0 &= w, \\ [W, \bar{W}]_t &= \rho t, \end{aligned}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$, $\rho \in [-1, 1]$, $\kappa_v, \theta_v, \sigma_v, x, w > 0$ und $2\kappa_v\theta_v \geq \sigma_v^2$. Sowohl W als auch \bar{W} sind Wienerprozesse. Der Wienerprozess des Volatilitätsprozesses \bar{W} und der des Preisprozesses W dürfen dabei korreliert sein. Zwei Wienerprozesse W^1 und W^2 heißen korreliert mit Korrelation ρ , wenn $[W^1, W^2]_t = \rho t$ für alle $t \geq 0$ gilt. Eine negative Wahl von ρ ermöglicht es das Phänomen des *Leverage-Effektes*, wonach fallende Kurse die Volatilität der Märkte erhöhen, mathematisch zu erfassen. Die Bedingung $2\kappa_v\theta_v \geq \sigma_v^2$ stellt sicher, dass die Volatilität fast sicher strikt positiv bleibt.

Grundsätzlich sind bei den stochastischen Volatilitätsmodellen auch andere Ansätze möglich, da die Volatilität auch mit Hilfe anderer Prozesse modelliert werden kann. Als Beispiel lassen sich hier das Modell von Hull and White (1987), in dem die Volatilität einem geometrischen Wienerprozess folgt, oder das Modell von Scott (1987), der zur Modellierung der Volatilität einen Vasicek-Prozess benutzt, anführen. Der Ansatz von Heston ist jedoch wohl der populärste unter diesen.

Da die Volatilität kein gehandeltes Finanzgut ist, sind Modelle mit stochastischer Volatilität unvollständig. Dies hat insbesondere zur Folge, dass kein eindeutiges risikoneutrales Maß für die Bewertung von Derivaten zur Verfügung steht, sondern i.A. unendlich viele.⁷

Sprung-Diffusions-Modelle mit stochastischer Volatilität

Empirische Studien wie z.B. [ABL02] stellen fest, dass nur Modelle, die beide genannten Erweiterungen enthalten, Finanzmarktdaten hinreichend erklären können. Der Aktienpreisprozess beinhaltet also eine Sprungkomponente und die Volatilität folgt einem stochastischen Prozess wie in den SVM. Solche Modelle werden als *Sprung-Diffusions-Modelle mit stochastischer Volatilität* (kurz SDSVM) bezeichnet. Als Beispiel sei eine Kombination aus der Sprung-Diffusion-Modell von Merton und dem Heston-Modell angeführt, die von Bates (1996) untersucht wurde. Es ergibt

⁷Vgl. [JYC09] S.393.

sich das folgende System an stochastischen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-} (\mu dt + \sqrt{v_t} dW_t + (u_t - 1) dN_t), \quad S_0 = x, \\ dv_t &= \kappa_v(\theta_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} d\bar{W}_t, \quad v_0 = w, \\ [W, \bar{W}]_t &= \rho t, \end{aligned}$$

mit Parametern wie oben.

Shot Noise-Modelle

Sei nun das Augenmerk auf die in der Einleitung vorgestellte Idee gelegt. Diese sah vor, dass auftretende Sprünge eine Kompensation erfahren, d.h. unmittelbar nach einem Sprung tritt eine Wirkung in die Gegenrichtung auf. Mathematisch ließe sich dieses durch

$$U_i h(t - T_i) \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}$$

beschreiben, wobei U_i einen Sprung zum Zeitpunkt T_i darstellt und h eine Funktion gemäß derer sich die Sprunghöhe in der Folgezeit weiterentwickelt. Soll der Sprung eine Kompensation erfahren, so ist an eine fallende Funktion h zu denken. Wendet man diese Idee nun auf die Preisgleichung (1.3) aus dem SDM an, erhält man

$$S_t = x \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i h(t - T_i) \right), \quad t \in [0, T]. \quad (1.4)$$

Eine Interpretation der Preisgleichung ist dann in analoger Weise zu der des SDM gegeben mit dem Unterschied, dass sich die Effekte auf den Preis, die durch die Sprünge aufgetreten sind, nicht konstant fortsetzen, sondern sich gemäß der Funktionsvorschrift von h weiterentwickeln. Prozesse der Form $\sum_{i=1}^{N_t} U_i h(t - T_i)$ werden auch *Shot Noise-Prozesse* genannt und im folgenden Kapitel genauer untersucht. Ein Modell, welches die Preisgleichung (1.4) erfüllt, wird deshalb im Folgenden als *Shot Noise-Modell* (kurz SNM) bezeichnet. Entsprechend zu vorher lässt sich auch ein SNM um das Konzept der stochastischen Volatilität erweitern, was dann zu einem *Shot Noise-Modell mit stochastischer Volatilität* (kurz SNSVM) führt.

Offensichtlich ist das SNM eine Erweiterung der SDM und das SNSVM eine Erweiterung des SDSVM. Abbildung 1.2 veranschaulicht nochmals graphisch durch welche Erweiterungen man die verschiedenen Modelle erhält. Umgekehrt gehen die entsprechenden Modelle alle aus dem SNSVM hervor, indem man etwa die Wirkungsfunktion $h \equiv 1$ benutzt, die Volatilität konstant wählt oder die Intensität des Sprungprozesses gleich 0 setzt.

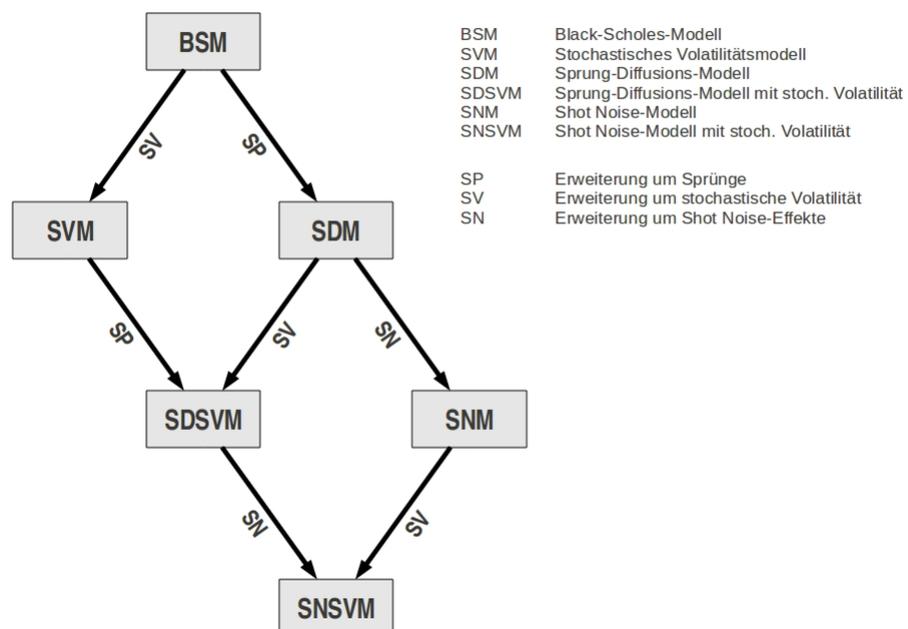


Abbildung 1.2. Zeigt wie die verschiedenen Modelle als einfache Erweiterung auseinander hervorgehen.

2 Shot Noise-Prozesse

Dieses Kapitel thematisiert die bereits im Überblick genannten *Shot Noise-Prozesse*. Im ersten Abschnitt werden zunächst einige grundlegende Eigenschaften nachgewiesen. Darauf aufbauend soll im zweiten Abschnitt die Girsanov-Transformation für einen Shot Noise-Prozess beleuchtet werden. Die in diesem Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse werden dann im folgenden Kapitel die Konstruktion von risikoneutralen Maßen erleichtern. Für dieses Kapitel erforderliche Grundkenntnisse über (markierte) Punktprozesse sind aus [Bre81] entnommen und in Anhang A zusammengefasst.

2.1 Grundlegendes

Definition 2.1. Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein W-Raum und darauf $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten, quadratintegrierbaren Zufallsgrößen mit Werten in \mathbb{R} und Verteilung ν mit $\nu(\{0\}) = 0$. Sei N ein von den $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängiger, homogener Poissonprozess mit Sprungzeiten $0 < T_1 < T_2 < \dots$ und Intensität $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Des Weiteren sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine auf \mathbb{R}^+ stetig differenzierbare Funktion mit $h(t) = 0$, für $t < 0$. Dann heißt

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i h(t - T_i), \quad t \in [0, T], \quad (2.1)$$

Shot Noise-Prozess (kurz SNP) mit *Wirkungsfunktion* h , Sprüngen $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und Intensität λ .

Bemerkung 2.2.

1. Im Folgenden wird ein SNP mit der Gestalt aus (2.1), d.h. ein SNP mit Wirkungsfunktion h , unabhängigen, identisch ν -verteilten Sprüngen $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und Intensität λ auch kurz als SNP mit Charakteristik (h, ν, λ) bezeichnet.
2. In dieser Arbeit wird eine recht spezielle Definition des SNP benutzt, welche wegen ihrer Gestalt (Multiplikation von zufälligen Sprüngen mit der Wirkungsfunktion) auch genauer als *multiplikativer* Shot Noise-Prozess bezeichnet wird. Es sind jedoch weitreichende Verallgemeinerungen denkbar. So könnte man beispielsweise die deterministische Funktion h durch einen stochastischen Prozess ersetzen, welcher von den Sprungzeiten und Sprunghöhen

eines markierten Punktprozesses (nicht zwangsläufig ein Poissonprozess) abhängt.¹

3. Im allgemeinen Fall ist die Existenz eines SNP bzw. dessen Wohldefiniertheit nicht trivial. Im vorliegenden Fall wird diese jedoch durch die spezielle Gestalt der Funktion h gesichert (siehe Satz 2.3).
4. Anschaulich kann man einen SNP als einen Effekt interpretieren, der durch eine neue, unvermittelt eintreffende Information hervorgerufen wird und sich im Laufe der Zeit ändert. Die Änderung wird durch die Funktion h beschrieben. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, können hierdurch Kurssprünge mit anschließender Kompensation modelliert werden. In diesem Fall müsste h monoton fallend auf \mathbb{R}^+ sein.

Da die in dieser Arbeit betrachteten Finanzmarktmodelle alle einen endlichen Zeithorizont T besitzen, wird nur der auf $[0, T]$ eingeschränkte Prozess $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ untersucht. Des Weiteren wird in diesem Kapitel stets der W -Raum $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ mit der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ zu Grunde gelegt. Dabei sei $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ die vervollständigte natürliche Filtration von Y , d.h. $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N}, Y_s : s \leq t)$, $t \in [0, T]$, (\mathcal{N} enthält alle P -Nullmengen von \mathcal{F}_T). Diese Filtration erfüllt insbesondere die Usual Conditions.²

Satz 2.3. *Der Shot Noise-Prozess Y aus (2.1) ist càdlàg³ und lokal von beschränkter Variation. Y ist somit ein Semimartingal bzgl. seiner natürlichen Filtration.*

Beweis: Um die Eigenschaften nachweisen zu können, muss zunächst gezeigt werden, dass der Prozess aus (2.1) wohldefiniert ist. Dies wird im vorliegenden Fall durch die spezielle Gestalt von h sichergestellt. So ist nämlich $Y_0 = 0$, wegen $h(t) = 0$ für $t < 0$. Des Weiteren ist nun einerseits h stetig, also auf $[0, T]$ beschränkt, und die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sind integrierbar, also P -f.s. endlich. Andererseits ist N als Poissonprozess nichtexplodierend. Es ist also $Y_t < \infty$ P -f.s. für alle $t \in [0, T]$.

Die càdlàg-Eigenschaft ergibt sich aus der Tatsache, dass sowohl N als Poissonprozess als auch die Funktion h càdlàg sind.⁴ Dass Y lokal von beschränkter Variation ist, folgt mittels der stetigen Differenzierbarkeit von h auf \mathbb{R}^+ , der lokal beschränkten Variation des Poissonprozesses und der Integrierbarkeit der Sprünge $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Y ist also càdlàg, lokal von beschränkter Variation und adaptiert bzgl. seiner

¹Vgl. [SS07].

²Vgl. [Pro05] Theorem I.3.25, S.16.

³càdlàg ist ein französisches Akronym von „continue à droite, limitée à gauche“, d.h. rechtsstetig mit linksseitigen Limiten. Ein stochastischer Prozess wird also càdlàg genannt, wenn fast sicher jeder Pfad rechtsstetig ist und linksseitige Limiten besitzt.

⁴Vgl. Satz A.2.

natürlichen Filtration. Y ist somit ein Semimartingal bzgl. seiner natürlichen Filtration.⁵ \square

Bevor gleich weitere wichtige Eigenschaften des SNP vorgestellt werden, zunächst noch ein wichtiges Beispiel.

Beispiel 2.4. Sei Y ein wie in (2.1) definierter SNP, wobei h die spezielle Gestalt

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ \exp(-ct) & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}, \quad c \geq 0$$

habe. Für $t \in [0, T]$ gilt dann

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i \exp(-c(t - T_i)) = \exp(-ct) \sum_{i=1}^{N_t} U_i \exp(cT_i).$$

Y_t hängt hier also über die Wirkungsfunktion h nur von $\sum_{i=1}^{N_t} U_i \exp(cT_i)$ insgesamt ab, was eine wesentliche Vereinfachung darstellt. Im Allgemeinen ist nämlich die Kenntnis über jedes Paar (T_i, U_i) , mit $T_i \leq t$, von Nöten um Y_t bestimmen zu können. Man erhält also durch die Wahl einer exponentiellen Wirkungsfunktion eine gewisse *Gedächtnislosigkeit* des Shot Noise-Prozess. In der Tat kann man zeigen, dass ein multiplikativer SNP genau dann markovsch ist, wenn die Wirkungsfunktion eine exponentielle Gestalt hat.⁶

Satz 2.5. Seien $Z_t := h(0) \sum_{i=1}^{N_t} U_i$, für $t \geq 0$ und f die càglàd⁷-Version des Prozesses $t \mapsto \sum_{i=1}^{N(t)} U_i h'(t - T_i)$, dann erfüllt Y die folgende stochastische Differentialgleichung:

$$dY_t = dZ_t + f_t dt, \quad t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

Beweis: Da h laut Voraussetzung stetig differenzierbar ist, ergibt sich die càdlàg-Eigenschaft von $\sum_{i=1}^{N_t} U_i h'(t - T_i)$ analog zu Satz 2.3 und damit auch die Existenz

⁵Je nach Vorgehensweise bei der Einführung von Semimartingalen und deren Theorie folgt dies entweder direkt aus der Definition eines Semimartingales (Vgl. [Jac87] Definition 4.21 S.43) oder ist eine nachzuweisende Eigenschaft (Vgl. [Pro05] Theorem 7, S.55).

⁶Vgl. [GS05] Proposition 3.10.

⁷Während càdlàg das französische Akronym für „continue à droite, limitée à gauche“ ist, ist càglàd das Akronym für „continue à gauche, limitée à droite“ und bezeichnet also Prozesse, deren Pfade fast sicher linksstetig sind und rechtsseitige Limiten besitzen.

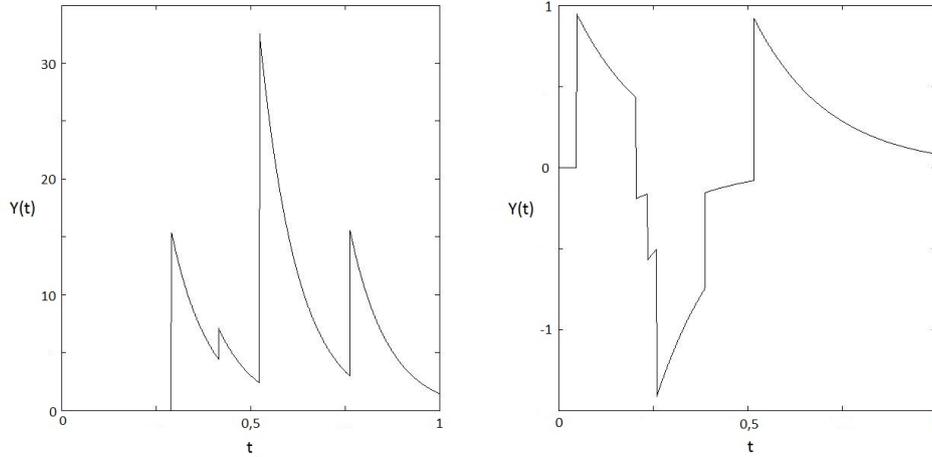


Abbildung 2.1. Zeigt den Plot von zwei Shot Noise-Prozessen. Beim linken Plot ist $h(t) = \exp(-10t)$, $\lambda = 5$, $\nu = \text{Exp}(10)$, beim rechten Plot $h(t) = \exp(-5t)$, $\lambda = 4$, $\nu = R(-1, 1)$.

einer càglàd-Version. Außerdem gilt für $\Delta > 0$

$$\begin{aligned}
& Y_{t+\Delta} - Y_t \\
&= \sum_{i=1}^{N_{t+\Delta}} U_i h(t + \Delta - T_i) - \sum_{i=1}^{N_t} U_i h(t - T_i) \\
&= \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i h(t + \Delta - T_i) + \sum_{i=1}^{N_t} U_i h(t + \Delta - T_i) - U_i h(t - T_i) \\
&= h(0) \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i + \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i \underbrace{(h(t + \Delta - T_i) - h(0))}_{= \int_{T_i}^{t+\Delta} h'(u - T_i) du} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \underbrace{(h(t + \Delta - T_i) - h(t - T_i))}_{= \int_t^{t+\Delta} h'(u - T_i) du} \\
&= h(0) \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i + \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i \int_{T_i}^{t+\Delta} h'(u - T_i) du + \sum_{i=1}^{N_t} U_i \int_t^{t+\Delta} h'(u - T_i) du.
\end{aligned}$$

Wegen $h(t) \equiv 0$ für $t < 0$, ist auch $h'(t) \equiv 0$ für $t < 0$. Außerdem ist $T_i > t$ für $i \geq N_t + 1$, weshalb sich

$$\sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i \int_{T_i}^{t+\Delta} h'(u - T_i) du = \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i \int_t^{t+\Delta} h'(u - T_i) du \quad (2.3)$$

ergibt. Auf $\{N_T < \infty\}$ gilt deshalb

$$(2.3) = \int_t^{t+\Delta} \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i h'(u - T_i) du = \int_t^{t+\Delta} \sum_{i=N_t+1}^{N_u} U_i h'(u - T_i) du. \quad (2.4)$$

Da N ein Poissonprozess, also nichtexplodierend ist, gilt $P(\{N_T < \infty\}) = 1$. Es folgt somit die P -fast sichere Gleichheit

$$\begin{aligned} Y_{t+\Delta} - Y_t &= h(0) \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i + \int_t^{t+\Delta} \sum_{i=N_t+1}^{N_u} U_i h'(u - T_i) du + \int_t^{t+\Delta} \sum_{i=1}^{N_t} U_i h'(u - T_i) du \\ &= h(0) \sum_{i=N_t+1}^{N_{t+\Delta}} U_i + \int_t^{t+\Delta} \sum_{i=1}^{N_u} U_i h'(u - T_i) du \\ &= \int_t^{t+\Delta} dZ_u + \int_t^{t+\Delta} f(u) du \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, wobei das stochastische Integral bzgl. Z pfadweise als Stieltjes-Integral definiert ist durch $\int_0^t 1 dZ_s := \sum_{n=1}^{\infty} h(0) U_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{N_t} h(0) U_n$.⁸ Mit $\Delta \rightarrow 0$ folgt schließlich die Behauptung. \square

Bemerkung 2.6. Im Folgenden sei noch auf eine alternative Darstellungsweise des in Satz 2.5 auftretenden Prozesses $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ hingewiesen, die im folgenden Abschnitt benutzt wird. Diese greift auf die Theorie für *markierte Punktprozesse* zurück, die in Anhang A zusammengefasst ist.

Die Doppelfolge $(T_n, U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Definition 2.1 kann als markierter Punktprozess interpretiert werden. Sei $p(dt, dx)$ das Zufallsmaß dieses markierten Punktprozesses, dann ist mit der Notation aus (A.1.)

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(0)x p(dt, dx) = \sum_{n=1}^{\infty} h(0)U_n \mathbf{1}_{\{T_n \leq t\}} = Z_t. \quad (2.5)$$

Der markierte Punktprozess $(T_n, U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die (P, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\lambda, \nu(dx))$.⁹

2.2 Girsanov-Transformation

In diesem Abschnitt wird die Girsanov-Transformation für einen Shot Noise-Prozess beleuchtet. Es wird also untersucht, ob es ein zu P äquivalentes W -Maß gibt, unter

⁸Vgl. Bemerkung A.11.

⁹Für Details sei auf Anhang A verwiesen. Vgl. insbesondere Definitionen A.8, A.7 und A.14.

welchem ein SNP aus Definition 2.1 ein lokales Martingal ist und wie ein derartiges W-Maß aussieht. Zunächst muss jedoch noch die nötige Vorarbeit in Form von drei Lemmata geleistet werden. Dieser Abschnitt orientiert sich dabei bis einschließlich Satz 2.10 an der Vorgehensweise in [Kü02]. Mit den darauf folgenden Ergebnissen soll auf das folgende Kapitel hingearbeitet werden.

Lemma 2.7. *Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine (komponentenweise) monoton wachsende, beschränkte und von unten halbstetige Funktion, d.h. für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine Umgebung U von x , so dass $g(y) > g(x) - \epsilon$ für alle $y \in U$ gilt. Seien F, H Verteilungsfunktionen auf \mathbb{R}^n , wobei F_i und H_i die i -te Marginalverteilung von F bzw. H bezeichne. Angenommen es ist*

$$F_1(x_1) \geq H_1(x_1) \quad \text{für alle } x_1 \in \mathbb{R}$$

und für $i = 2, \dots, n$

$$F_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) \geq H_i(x_i | x_1, \dots, x_{i-1}) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_i \in \mathbb{R},$$

dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) F(dx_1, \dots, dx_n) \leq \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) H(dx_1, \dots, dx_n).$$

Beweis: Falls $n = 1$, erhält man durch die Halbstetigkeit von unten von g und dessen Monotonie, dass

$$g(x_1) > t \Leftrightarrow x_1 > g^{-1}(t), \quad \text{mit} \quad g^{-1}(t) := \inf \{x \in \mathbb{R} | g(x) > t\}.$$

Daraus ergibt sich direkt

$$\int_{\mathbb{R}} g(x_1) F(dx_1) = \int_{\mathbb{R}} 1 - F(g^{-1}(t)) dt \leq \int_{\mathbb{R}} 1 - H(g^{-1}(t)) dt = \int_{\mathbb{R}} g(x_1) H(dx_1)$$

und somit auch die Behauptung für den Fall $n = 1$.

Um die Behauptung für den Fall $n > 1$ zu beweisen, schreibe man das Integral über \mathbb{R}^n als iteriertes Integral über \mathbb{R} bezüglich der verschiedenen Marginalverteilungen und wende dann sukzessive den ersten Fall an. Dies stellt sich genauer wie folgt dar:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) F(dx_1, \dots, dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_n) F_n(dx_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \dots F_1(dx_1) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_n) H_n(dx_n | x_1, \dots, x_{n-1}) F_{n-1}(dx_{n-1} | x_1, \dots, x_{n-2}) \dots F_1(dx_1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} g(x_1, \dots, x_n) H_n(dx_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \dots H_1(dx_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) H(dx_1, \dots, dx_n).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.8. Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein W -Raum, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$, $\epsilon > 0$ und $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus \mathcal{F} mit $P(A_{k+1} | \sigma(A_1, \dots, A_k)) \geq \epsilon$, für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathbb{1}_{A_k} = \infty$, P -f.s.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$X_n := \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k} \quad \text{und} \quad \tilde{X}_n := \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\tilde{A}_k},$$

wobei $(\tilde{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Mengen ist mit $P(\tilde{A}_k) = \epsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wähle $c > 0$ fest und definiere dazu

$$B_{c,1} := \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq c\} \quad \text{und} \quad B_{c,2} := \{n \in \mathbb{N} : a_n < c\}.$$

1. Fall: $|B_{c,1}| = \infty$

Für alle $m \in B_{c,1}$ ist $P(|a_m \mathbb{1}_{\tilde{A}_m}| \geq c) = \epsilon$ und deshalb

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|a_k \mathbb{1}_{\tilde{A}_k}| \geq c) = \infty.$$

2. Fall: $|B_{c,1}| < \infty$

Insbesondere gilt

$$\sum_{m \in B_{c,2}} a_m = \infty.$$

Definiere dann für alle $k \in \mathbb{N}$

$$C_{k,c} := a_k \mathbb{1}_{\tilde{A}_k} \mathbb{1}_{\{a_k \mathbb{1}_{\tilde{A}_k} < c\}}.$$

Für jedes $m \in B_{c,2}$ ist $E(C_{m,c}) = a_m \epsilon$ und es folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} E(C_{k,c}) \geq \sum_{m \in B_{c,2}} a_m \epsilon = \infty.$$

Insgesamt folgt mit dem Dreireihensatz (vgl. [GS77] Satz 2.2.9, S.126), dass $\tilde{X}_n \rightarrow \infty$ P -f.s. für $n \rightarrow \infty$. Indem man für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{R}^+$ Lemma 2.7

auf die Verteilungsfunktionen von (X_1, \dots, X_n) und $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ und die monoton wachsende, beschränkte und von unten halbstetige Funktion

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \sum_{k=1}^n a_k x_k > s \\ 0, & \text{falls } \sum_{k=1}^n a_k x_k \leq s \end{cases}$$

angewendet, erhält man $P(\tilde{X}_n > s) \leq P(X_n > s)$. Daraus folgt $X_n \xrightarrow{P} \infty$ und schließlich mit dem Teilfolgenkriterium für die P -fast sichere Konvergenz und der Monotonie der X_n , dass $X_n \rightarrow \infty$ P -f.s. für $n \rightarrow \infty$. \square

Lemma 2.9. *Seien (Ω, \mathcal{F}, P) ein W -Raum und $(\hat{T}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit $\hat{T}_0 = 0$ P -f.s. und unabhängigen, identisch exponentialverteilten Zuwächsen. Sei außerdem $(\tilde{W}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine von den $(\hat{T}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unabhängige Folge unabhängiger, identisch verteilter, nichtnegativer Zufallsgrößen mit $E\tilde{W}_0 < \infty$ und $P(\tilde{W}_0 > 0) = 1$. Dann ist die durch*

$$\tilde{T}_0 := 0, \quad \tilde{T}_n := \tilde{T}_{n-1} + \frac{\hat{T}_n - \hat{T}_{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} \tilde{W}_i}, \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nichtexplodierend, d.h. $\tilde{T}_n \uparrow \infty$ P -f.s. für $n \rightarrow \infty$.

Beweis: Man kann o.B.d.A. annehmen, dass die $\hat{T}_i - \hat{T}_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$ standard-exponentialverteilt ($\lambda = 1$) sind. Definiere die Filtration

$$\tilde{\mathcal{F}}_i := \sigma(\tilde{T}_j, j = 0, \dots, i, (\tilde{W}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}), \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgrund des starken Gesetzes der großen Zahlen konvergiert für P -f.a. $\omega \in \Omega$ die Folge $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{W}_i(\omega)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und ist somit für P -f.a. $\omega \in \Omega$ beschränkt. Es existiert also eine $\tilde{\mathcal{F}}_0$ -messbare reelle Zufallsgröße $C > 0$ P -f.s. mit

$$\sum_{i=0}^n \tilde{W}_i \leq nC \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \quad P\text{-f.s.} \quad (2.6)$$

Daraus ergibt sich für alle $i \in \mathbb{N}$

$$P\left(\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i > \frac{\ln 2}{iC} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_i\right) \geq \frac{1}{2}, \quad (2.7)$$

denn

$$\begin{aligned}
P\left(\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i > \frac{\ln 2}{iC} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_i\right) &= P\left(\frac{\hat{T}_{i+1} - \hat{T}_i}{\sum_{j=0}^i \tilde{W}_j} > \frac{\ln 2}{iC} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_i\right) \\
&\geq P\left(\frac{\hat{T}_{i+1} - \hat{T}_i}{iC} > \frac{\ln 2}{iC} \middle| \tilde{\mathcal{F}}_i\right) \\
&= P(\hat{T}_{i+1} - \hat{T}_i > \ln 2) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile wurde lediglich die Definition der $(\tilde{T}_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ benutzt. Bei der zweiten Zeile wurde (2.6) ausgenutzt. In der dritten und vierten Zeile ging ein, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ der Zuwachs $\hat{T}_{i+1} - \hat{T}_i$ unabhängig von $\tilde{\mathcal{F}}_i$ und exponentialverteilt ist. Des Weiteren ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{T}_n = \sum_{i=0}^{n-1} (\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i > \frac{\ln 2}{iC}\}} \frac{\ln 2}{iC} \quad (2.8)$$

und

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{iC} = \infty\right) = 1. \quad (2.9)$$

Indem man (2.7), (2.8) und (2.9) auf Lemma 2.8 anwendet, ergibt sich

$$P\left(\sum_{i=0}^{\infty} (\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i) = \infty\right) \geq P\left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_i > \frac{\ln 2}{iC}\}} \frac{\ln 2}{iC} = \infty\right) = 1$$

und somit schließlich $\tilde{T}_n \uparrow \infty$ P -f.s. für $n \rightarrow \infty$. \square

Nachdem die nötige Vorarbeit geleistet wurde, kann nun die Existenz und Gestalt eines äquivalenten Martingalmaßes untersucht werden.

Satz 2.10. *Angenommen es gilt $h(0) \neq 0$, dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$, so dass Y auf $[0, T]$ ein lokales Martingal bzgl. Q ist.*

Beweis: Da dieser Beweis etwas länger ist, soll zunächst ein Überblick über die Vorgehensweise gegeben werden. Dazu sei zunächst an die Aussage von Satz 2.5 erinnert, dass die Dynamik von Y durch einen Sprungprozess Z und einen Driftanteil f festgelegt wird. Gäbe es ein äquivalentes W -Maß Q bzgl. welchem besagter Sprungprozess Z den Kompensator $-f$ besäße, wäre Y ein lokales Q -Martingal.

Im ersten Schritt wird deshalb unter Zuhilfenahme von Satz A.17 ein mögliches Maß konstruiert, welches die oben beschriebenen Eigenschaften hat. Um den Beweis abzuschließen muss allerdings noch nachgewiesen werden, dass das vermeintliche W-Maß Q tatsächlich eines ist, worauf der zweite und dritte Schritt des Beweises verwendet werden.

1. Schritt:

Um Satz A.17 anwenden zu können, muss das Modell zunächst in Einklang mit der Notation aus Anhang A gebracht werden.¹⁰ Dazu sei auf Bemerkung 2.6 verwiesen. Man betrachte also den markierten Punktprozess $(T_n, U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Zufallsmaß $p(dt, dx)$ und (P, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\lambda, \nu(dx))$. Für diesen gilt dann

$$Z_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(0)x p(ds, dx). \quad (2.10)$$

Als nächstes definiere für $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\phi(t, x) := \begin{cases} \frac{EU_1^+}{EU_1^-}, & \text{falls } f_t \leq 0 \text{ und } x < 0 \\ 1 - \frac{f_t}{\lambda h(0)EU_1^+}, & \text{falls } f_t \leq 0 \text{ und } x \geq 0 \\ 1 + \frac{f_t}{\lambda h(0)EU_1^-}, & \text{falls } f_t > 0 \text{ und } x < 0 \\ \frac{EU_1^-}{EU_1^+}, & \text{falls } f_t > 0 \text{ und } x \geq 0 \end{cases}, \quad (2.11)$$

wobei o.B.d.A. angenommen werden kann, dass $EU_1^-, EU_1^+ > 0$ gilt.¹¹ Nach Konstruktion in Satz 2.5 ist f càglàd und somit previsibel, d.h. \mathcal{P} -messbar. Folglich muss ϕ $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}$ -messbar sein,¹² d.h. ϕ ist previsibel im Sinne von Definition A.10. Außerdem gilt $\phi > 0$ und

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |x| \phi(s, x) \lambda \nu(dx) ds < \infty \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Setze dafür $C_1 = \max\left(\frac{EU_1^+}{EU_1^-}, \frac{EU_1^-}{EU_1^+}, 1\right)$ und $C_2 = \min\left(\lambda h(0)EU_1^+, \lambda h(0)EU_1^-\right)$.

¹⁰Für einen Beweis von Satz A.17 siehe auch Satz 3.11.

¹¹Ersetze ansonsten den kritischen Term durch eine beliebige Konstante $K > 0$. Da $\nu(\{0\}) = 0$, muss in der Tat entweder EU^+ oder EU^- strikt positiv sein. Falls $EU^- = 0$ ($EU^+ = 0$) ist also $U^- \equiv 0$ ($U^+ \equiv 0$) und somit $\nu(\{\mathbb{R}^-\}) = 0$ ($\nu(\{\mathbb{R}^+\}) = 0$). Dann spielt das Verhalten von ϕ auf \mathbb{R}^- (\mathbb{R}^+) keine Rolle.

¹² \mathcal{B} bezeichnet die borelsche σ -Algebra.

Dann ist $\phi(t, x) \leq C_1 + \frac{|f(t)|}{C_2}$ und man erhält für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |x| \phi(s, x) \lambda \nu(dx) ds &\leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |x| \left(C_1 + \frac{|f(s)|}{C_2} \right) \lambda \nu(dx) ds \\
&= \int_0^t \lambda \left(C_1 + \frac{|f(s)|}{C_2} \right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} |x| \nu(dx)}_{=E(|U_1|)} ds \\
&= t \lambda C_1 E(|U_1|) + \frac{\lambda E(|U_1|)}{C_2} \int_0^t |f(s)| ds \\
&< \infty \quad P\text{-f.s.}
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung ergibt sich wegen der vorher gemachten Abschätzung von ϕ . Die Abschätzung gegen Unendlich erhält man wie in Satz 2.3, da h stetig differenzierbar ist. Des Weiteren gilt für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} h(0) x \phi(t, x) \lambda \nu(dx) \\
&= h(0) \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^-} x \phi(t, x) \nu(dx) + \int_{\mathbb{R}^+} x \phi(t, x) \nu(dx) \right) \\
&= \begin{cases} h(0) \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^-} x \frac{EU_1^+}{EU_1^-} \nu(dx) + \int_{\mathbb{R}^+} x \left(1 - \frac{f(t)}{\lambda h(0) EU_1^+} \right) \nu(dx) \right), & \text{falls } f(t) \leq 0, \\ h(0) \lambda \left(\int_{\mathbb{R}^-} x \left(1 + \frac{f(t)}{\lambda h(0) EU_1^-} \right) \nu(dx) + \int_{\mathbb{R}^+} x \frac{EU_1^-}{EU_1^+} \nu(dx) \right), & \text{falls } f(t) > 0, \end{cases} \\
&= \begin{cases} h(0) \lambda \left(-EU^+ + EU^+ \left(1 - \frac{f(t)}{\lambda h(0) EU_1^+} \right) \right), & \text{falls } f(t) \leq 0, \\ h(0) \lambda \left(-EU_1^- \left(1 + \frac{f(t)}{\lambda h(0) EU_1^-} \right) + EU^- \right), & \text{falls } f(t) > 0, \end{cases} \\
&= -f(t). \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Nun definiere mit Hilfe von ϕ für $t \in [0, T]$

$$L_t := \exp \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (1 - \phi(s, x)) \lambda \nu(dx) ds \right) \prod_{n \in \mathbb{N}} \phi(T_n, U_n) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}. \tag{2.14}$$

Analog zu (2.12) erhält man auch

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \phi(s, x) \lambda \nu(dx) ds < \infty \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Falls $EL_T = 1$ ist, folgt mit Satz A.17 nun, dass durch $\frac{dQ}{dP} = L_T$ ein zu P äquivalentes W-Maß Q definiert wird, bezüglich welchem $p(dt, dx)$ den (Q, \mathcal{F}_t) -Intensitätskern $\lambda_t^Q(dx) = \phi(t, x)\lambda\nu(dx)$ besitzt.

Wegen (2.12) kann Korollar A.16 für $q(dt, dx) = p(dt, dx) - \lambda_t^Q(dx) ds$ und den \mathcal{F}_t -previsiblen Prozess $H(s, x) = h(0)x$ angewendet werden. Zusammen mit (2.10) und (2.13) ergibt sich schließlich aus Satz 2.5, dass

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(0)x q(ds, dx) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(0)x p(ds, dx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(0)x \lambda_s^Q(dx) ds \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(0)x p(ds, dx) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h(0)x \phi(s, x)\lambda\nu(dx) ds \\ &= Z_t + \int_0^t f_s ds = Y_t \end{aligned}$$

ein lokales Q -Martingal ist.

2. Schritt:

Es bleibt zu zeigen, dass $EL_T = 1$ gilt. Dazu definiere man sich eine Folge von Stoppzeiten $\tau_n := \inf \{t \geq 0 \mid |f_{t+}| > n\}$, $n \in \mathbb{N}$, für die $|f_{\tau_n}| \leq n$ gilt.¹³ Sei des Weiteren

$$\phi^n(t, x) := \phi(t, x)\mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(t) + \mathbf{1}_{(\tau_n, T]}(t).$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert dann eine endliche Konstante K_n mit

$$(\phi^n(t, x))^2 \leq K_n, \quad \text{für alle } t \in [0, T] \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Deshalb erhält man für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, T]$

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi^n(t, x))^2 \nu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}} K_n \nu(dx) = K_n.$$

Außerdem gilt für alle $0 < M < \infty$

$$E(L_0 \exp(MN_T)) = \exp(\lambda T (\exp(M) - 1)) < \infty,$$

da N_T poissonverteilt ist mit Parameter λT . Man kann nun Satz A.18 anwenden und erhält für jedes n , dass $E(L_T^n) = 1$, wobei $(L_t^n)_{t \in [0, T]}$ der analog zu (2.14) über ϕ^n definierte Dichtequotientenprozess von Q^n sei, d.h. $\frac{dQ^n}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = L_t^n$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 1 = E(L_T^n) &= E(L_T^n \mathbf{1}_{\{\tau_n \geq T\}} + L_T^n \mathbf{1}_{\{\tau_n < T\}}) \\ &= E(L_T \mathbf{1}_{\{\tau_n \geq T\}}) + E(L_T^n \mathbf{1}_{\{\tau_n < T\}}) \\ &= E(L_T \mathbf{1}_{\{\tau_n \geq T\}}) + Q^n(\tau_n < T). \end{aligned} \tag{2.15}$$

¹³ f_{t+} bezeichne dabei die càdlàg-Version von f . Da die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ die Usual Conditions erfüllt und damit insbesondere rechtsstetig ist und die Menge $\{x : x > n\}$ offen ist, sind die τ_n auch tatsächlich Stoppzeiten. Vgl. [Irl03] Korollar 6.7, S.129.

Da außerdem $P(\tau_n \geq T) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$ aus $P(\sup_{t \in [0, T]} |f(t)| < \infty) = 1$ folgt, muss schließlich noch $Q^n(\tau_n < T) \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$ gezeigt werden. Dann ist nämlich auch $EL_T = 1$.

3. Schritt:

Das weitere Vorgehen in diesem Beweis zielt darauf ab nachzuweisen, dass ein speziell konstruierter Punktprozess \tilde{N} P -nichtexplodierend ist. Daraus wird es dann möglich sein $Q^n(\tau_n < T) \rightarrow 0$, für $n \rightarrow \infty$ zu folgern.

Sei zunächst durch F_U die Verteilungsfunktion der $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gekennzeichnet, d.h. $F_U(x) = \nu((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$ und durch $F_U^{-1}(y) := \inf \{x \in \mathbb{R} | F_U(x) \geq y\}$, $y \in (0, 1)$ dessen Pseudo-Inverse. Als nächstes definiere man (auf einem möglicherweise neuen W-Raum, der wiederum $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ genannt wird) die Folge $(U_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ durch

$$U_i^* := \mathbb{1}_{A_i} F_U^{-1}(pV_i) + \mathbb{1}_{A_i^c} F_U^{-1}(p + (1-p)\bar{V}_i), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (2.16)$$

wobei $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\bar{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in \mathbb{N}}$ drei unabhängige Folgen von jeweils unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen seien. Dabei seien V_1 und \bar{V}_1 gleichverteilt auf $(0, 1)$ und A_1 habe die Wahrscheinlichkeit $p := P(A_1) = F_U(0)$. Wie man leicht einsieht, sind auch die $(U_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt. Aus

$$\begin{aligned} P(U_1^* \leq x) &= P\left(\mathbb{1}_{A_1} F_U^{-1}(pV_1) + \mathbb{1}_{A_1^c} F_U^{-1}(p + (1-p)\bar{V}_1) \leq x\right) \\ &= pP\left(V_1 \leq \frac{F_U(x)}{p}\right) + (1-p)P\left(\bar{V}_1 \leq \frac{F_U(x) - p}{1-p}\right) \\ &= F_U(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

folgt außerdem, dass U_1^* die Verteilung ν besitzt. Man kann deshalb im Folgenden o.B.d.A. die Folge $(U_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ mit der Folge $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ identifizieren.

Die Konstruktion dient dabei dem Zweck, dass unter einem W-Maß Q^n , welches man wie im vorherigen Schritt aus ϕ^n erhält, die Zufallsvariablen $V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N}$ weiterhin unabhängig und gleichverteilt auf $(0, 1)$ sind. Nur die Verteilung der $(\mathbb{1}_{A_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ändert sich. Ähnlich zu U_i definiere man nun

$$\tilde{U}_i := -F_U^{-1}(pV_i) \vee F_U^{-1}(p + (1-p)\bar{V}_i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Da $F_U^{-1}(pV_i) \leq 0$ auf A_i für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, ist $\tilde{U}_i \geq |U_i|$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Weiter seien

$$c_1 := \sup_{t \in [0, T]} |h'(t)|, \quad c_2 := [h(0)(EU_1^+ \wedge EU_1^-)]^{-1}, \quad c_3 := \max\left(\frac{EU_1^+}{EU_1^-}, \frac{EU_1^-}{EU_1^+}\right).$$

Definiere damit die aufsteigende Folge $(\tilde{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ rekursiv durch

$$\tilde{T}_1 := \frac{\hat{T}_1}{\lambda}, \quad \tilde{T}_{n+1} := \tilde{T}_n + \frac{\hat{T}_{n+1} - \hat{T}_n}{\lambda c_3 + c_2 c_1 \sum_{i=1}^n \tilde{U}_i}, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei die Zuwächse der Folge $(\tilde{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (unter P) unabhängig, identisch standard-exponentialverteilt seien. Nach Lemma 2.9 ist der Punktprozess $(\tilde{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ nicht-explodierend unter P , wodurch man

$$0 \leq \tilde{f}_t := c_1 \cdot \sum_{i \geq 1} \tilde{U}_i \mathbb{1}_{\{\tilde{T}_i < t\}} < \infty \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

und mit $\tilde{\tau}_n := \inf \{t \geq 0 \mid \tilde{f}_{t+} > n\}$, $n \in \mathbb{N}$, auch

$$P(\tilde{\tau}_n < T) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow 0 \quad (2.17)$$

erhält.

Sei nun Q^n für ein $n \in \mathbb{N}$ wie in Schritt 1 definiert. Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ ist dann für alle positiven $\sigma(V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N})$ -messbaren Zufallsgrößen A und für alle $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned} & P(\tilde{T}_{m+1} > (\tilde{T}_m + A) \wedge T \mid \tilde{T}_1 \in B_1, \dots, \tilde{T}_m - \tilde{T}_{m-1} \in B_m; \sigma(V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N})) \\ &= P(\tilde{T}_{m+1} > (\tilde{T}_m + A) \wedge T \mid \tilde{T}_1 \in B_1, \dots, \tilde{T}_m - \tilde{T}_{m-1} \in B_m; \sigma(V_i, \bar{V}_i, i = 1, \dots, m)) \\ &\leq Q^n(T_{m+1} > (T_m + A) \wedge T \mid T_1 \in B_1, \dots, T_m - T_{m-1} \in B_m; \sigma(V_i, \bar{V}_i, i = 1, \dots, m)) \\ &= Q^n(T_{m+1} > (T_m + A) \wedge T \mid T_1 \in B_1, \dots, T_m - T_{m-1} \in B_m; \sigma(V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N})). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Ungleichung ergibt sich leicht, wenn man die Intensitäten von N unter Q^n und des Zählprozesses \tilde{N} von $(\tilde{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unter P auf den stochastischen Intervallen $(T_m, T_{m+1}] \cap [0, T]$ bzw. $(\tilde{T}_m, \tilde{T}_{m+1}] \cap [0, T]$ vergleicht. Des Weiteren ist $\tilde{T}_{m+1} - \tilde{T}_m$ P -unabhängig und $T_{m+1} - T_m$ Q -unabhängig von $\sigma(V_i, \bar{V}_i, i = m+1, m+2, \dots)$, wodurch sich die beiden Gleichungen ergeben. Die erste Unabhängigkeit ergibt sich direkt aus der Definition von $(\tilde{T}_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Die zweite aus der speziellen Form von ϕ aus (2.11) und der Definition der $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in (2.16). Wendet man Lemma 2.7 auf $g(x_1, \dots, x_m) = \mathbb{1}_{\{x_m > T\}}$ und die unter $\sigma(V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N})$ bedingten Verteilungsfunktionen von $(\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_m)$ unter P und (T_1, \dots, T_m) unter Q an, so ergibt sich für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit Hilfe von (2.18), dass

$$P(\tilde{T}_m > t \mid V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N}) \leq Q^n(T_m > t \mid V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N}) \quad \text{für alle } t \in [0, T] \quad (2.19)$$

und weiter

$$\begin{aligned} Q^n(\tau_n < T) &\leq Q^n \left(\sup_{t \in [0, T]} \left| \sum_{i=1}^{N_t} h'(t - T_i) U_i \right| > n \right) \\ &\leq Q^n \left(c_1 \sum_{i=1}^{N_T} |U_i| > n \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Q^n \left(Q^n \left(c_1 \sum_{i=1}^{N_T} |U_i| > n \mid V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N} \right) \right) \\
&= P \left(Q^n \left(c_1 \sum_{i=1}^{N_T} |U_i| > n \mid V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N} \right) \right) \\
&\leq P \left(Q^n \left(c_1 \sum_{i=1}^{N_T} \tilde{U}_i > n \mid V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N} \right) \right) \\
&\leq P \left(P \left(c_1 \sum_{i=1}^{N_T} \tilde{U}_i > n \mid V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N} \right) \right) \\
&= P(\tilde{f}_T > n). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Die ersten zwei Ungleichungen sind lediglich Abschätzungen. Die zweite Gleichung ergibt sich daraus, dass die $V_i, \bar{V}_i, i \in \mathbb{N}$ unter Q die gleiche Verteilung besitzen wie unter P . Die dritte Ungleichung ergibt sich aus $|U_i| \leq \tilde{U}_i, i \in \mathbb{N}$ und die vierte aus (2.19). Mit (2.17) folgt schließlich die Behauptung. \square

Bemerkung 2.11.

1. Offensichtlich ist Q nicht eindeutig. Würde man in (2.11) ϕ beispielsweise wie folgt definieren

$$\phi(t, x) := \begin{cases} \frac{a EU_1^+}{EU_1^-}, & \text{falls } f_t \leq 0 \text{ und } x < 0, \\ a - \frac{f_t}{\lambda h(0) EU_1^+}, & \text{falls } f_t \leq 0 \text{ und } x \geq 0, \\ b + \frac{f_t}{\lambda h(0) EU_1^-}, & \text{falls } f_t > 0 \text{ und } x < 0, \\ \frac{b EU_1^-}{EU_1^+}, & \text{falls } f_t > 0 \text{ und } x \geq 0, \end{cases} \tag{2.21}$$

mit $a, b > 0$, erhielte man ebenfalls ein äquivalentes Maß unter welchem Y ein lokales Martingal wäre.

2. Eine heuristische Erklärung dafür, dass ein äquivalentes Martingalmaß für Y existiert, der Markt mit einem Finanzgut Y also arbitragefrei ist, kann durch folgenden Gedanken gegeben werden. Sobald ein Investor die durch einen vorangegangenen Sprung erzeugte Drift ausnutzen will, muss er auch das Risiko tragen, dass ein weiterer Sprung unmittelbar bevorsteht. Andersherum könnte man sagen, die Drift des Shot Noise-Prozesses stellt eine Risikoprämie für das bezüglich dem risikoneutralen Maß nach dem Sprung erhöhte Risiko für weitere Sprünge dar.

Eine in Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie oft gemachte Voraussetzung ist die Unabhängigkeit von auftretenden Zufallsgrößen und deren identische Verteilung, da diese Annahme analytische Ergebnisse stark vereinfacht oder überhaupt erst ermöglicht. Eine interessante Frage im Kontext dieser Arbeit ist daher, ob oder wann die Eigenschaft der unabhängigen, identisch verteilten Sprünge bei einem Maßwechsel von P nach Q erhalten bleibt. Bislang wurde nur gezeigt, dass überhaupt irgendein zu P äquivalentes Maß Q existiert, bzgl. welchem der SNP Y ein lokales Martingal bildet. Ein Blick auf (2.21) zeigt, dass die Verteilung für einen Sprung zum Zeitpunkt t von f_t abhängt. f_t wiederum ist i.A. vom jeweiligen Zeitpunkt und der jeweiligen Höhe aller vorangegangenen Sprünge abhängig. Das bedeutet, dass die u.i.v.-Eigenschaft unter Q i.A. nicht gewährleistet werden kann. Die gute Nachricht jedoch ist, dass es unter gewissen Einschränkungen möglich ist, ein äquivalentes Martingalmaß zu konstruieren, unter welchem die Sprünge unabhängig, identisch verteilt bleiben.

Korollar 2.12. *Angenommen es ist $h(0) > 0$, $h'(t) \leq 0$ für alle $t \geq 0$ und die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sind alle entweder P -f.s. positiv oder negativ, dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$, so dass Y bzgl. Q ein lokales Martingal auf $[0, T]$ ist und $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auch unter Q eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen ist.*

Beweis: Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sämtlich P -f.s. positiv sind. Da außerdem $h \geq 0$ und $h'(t) \leq 0$ für alle $t \geq 0$, folgt $f_t \leq 0$ P -f.s. für alle $t \in [0, T]$. Außerdem hat ν keine Masse auf \mathbb{R}^- . Man kann deshalb anstelle von ϕ aus (2.11)

$$\tilde{\phi}_t := 1 - \frac{f_t}{\lambda h(0) E U_1^+}, \quad t \in [0, T],$$

wählen und damit analog zu (2.10) ein W -Maß Q konstruieren, welches die erforderlichen Eigenschaften besitzt (der Beweis hierzu läuft ansonsten analog zum vorherigen Satz). Da $\tilde{\phi}$ unabhängig von x ist, ist $p(dt, dx)$ ein Punktprozess mit (Q, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\tilde{\phi}_t \lambda, \nu(dx))$. Insbesondere ist für alle $i \in \mathbb{N}$ die bedingte Verteilung $Q(U_i \in A | \mathcal{F}_{T_i-}) = \nu(A)$, $A \in \mathcal{B}$, unabhängig von T_i . Die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ müssen deshalb auch unter Q unabhängig, identisch verteilt sein. \square

Bemerkung 2.13.

1. Auf die Bedingung, dass die $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ entweder negativ oder positiv sind, kann nicht verzichtet werden. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass nur dann die Intensität des Punktprozesses unter Q strikt positiv ist, wenn f strikt positiv bzw. negativ ist.
2. Korollar 2.12 liefert ein Maß Q , bzgl. welchem der Zählprozess $N = N(\mathbb{R})$

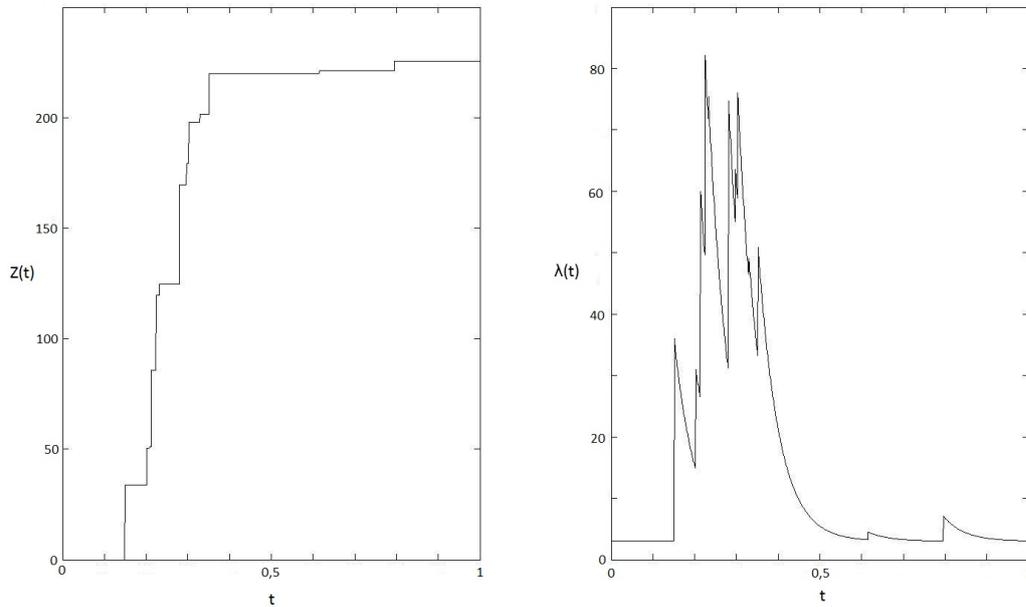


Abbildung 2.2. Zeigt einen Hawkes-Prozesses. Der linke Plot beschreibt den Verlauf von $Z(t) = \sum_{i=1}^{N_t} U_i$, der rechte zeigt die Entwicklung der Intensität λ des unterliegenden Punktprozesses N .

eine Q -Intensität der Form

$$\lambda_t^Q = \underbrace{\tilde{\phi}_t \lambda \nu(\mathbb{R})}_{=1} = \lambda - \frac{f_t}{h(0)EU_1^+} = \lambda - \frac{1}{h(0)EU_1^+} \sum_{i=1}^{N_{t-}} U_i h'(t - T_i) \quad (2.22)$$

hat. Da der Punktprozess unter Q nichtexplodierend ist, gilt insbesondere $\lambda_t^Q < \infty$ für alle $t \in [0, T]$. Ausgehend von einer Grundintensität λ regt sich der Punktprozess also selbst an, da jeder Sprung die Intensität im Folgenden, gemäß der Funktionsvorschrift $-h' > 0$ erhöht. Solche Prozesse sind auch unter dem Namen *Hawkes-Prozesse* bekannt, für Details sei auf [Haw71] verwiesen. Abbildung 2.2 veranschaulicht den Verlauf eines Hawkes-Prozesses. Es ist deutlich die selbstanregende Struktur zu erkennen.

Abschließend wird die Situation aus Beispiel 2.4 wieder aufgegriffen.

Beispiel 2.14. In Beispiel 2.4 wurde vorausgesetzt, dass Y ein SNP mit Charakteristik (h, ν, λ) ist, wobei h die spezielle Gestalt

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0, \\ \exp(-ct) & \text{falls } t \geq 0 \end{cases}$$

hat, mit $c > 0$. Sei nun zusätzlich angenommen, dass $\nu(\mathbb{R}^-) = 0$, d.h. die Voraussetzungen für Korollar 2.12 sind erfüllt. Zunächst ergibt sich für alle $t \in [0, T]$

$$f_t = \sum_{i=1}^{N_{t-}} U_i h'(t - T_i) = -c \sum_{i=1}^{N_{t-}} U_i \exp(-c(t - T_i)) = -cY_{t-}.$$

Wird nun ein Maß Q gemäß Korollar 2.12 konstruiert, so hat der Punktprozess $(T_n, U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Q -Intensität

$$\lambda_t^Q = \lambda^* + \delta c Y_{t-},$$

für geeignete $\lambda^*, \delta > 0$ (vgl. (2.22)). Bezeichne im Folgenden $(\bar{\lambda}_t^Q)_{t \in [0, T]}$ die rechtsstetige Version von $(\lambda_t^Q)_{t \in [0, T]}$, d.h.

$$\bar{\lambda}_t^Q = \lambda^* + \delta c Y_t.$$

Dann gilt mit der Notation aus Satz 2.5, dass

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_t^Q &= \lambda^* + \delta c Y_t \\ &= \lambda^* + \delta c \left(Z_t + \int_0^t \sum_{i=1}^{N_{s-}} -c U_i \exp(-c(s - T_i)) ds \right) \\ &= \lambda^* + \delta c \left(Z_t + \int_0^t -c \frac{1}{\delta c} (\bar{\lambda}_{s-}^Q - \lambda^*) ds \right) \\ &= \lambda^* - c \int_0^t (\bar{\lambda}_{s-}^Q - \lambda^*) ds + \delta c Z_t. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$d\bar{\lambda}_t^Q = c(\lambda^* - \bar{\lambda}_{t-}^Q) + \delta c dZ_t, \quad \bar{\lambda}_0^Q = \lambda^*.$$

Zum Ende des Kapitels seien die wichtigen Ergebnisse nochmals zusammengefasst. Ausgehend von der Definition eines SNP (Definition 2.1) wurde in Satz 2.10 gezeigt, dass ein zu P äquivalentes Maß existiert, bzgl. welchem der SNP ein lokales Martingal bildet. Unter weiteren Einschränkungen (vgl. Korollar 2.12) erhielt man zudem die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes Q , unter welchem die Sprünge des SNP weiterhin unabhängig und identisch verteilt sind. Neben dieser, für analytische Zwecke oft sehr hilfreichen Eigenschaft wurde ein wichtiges Beispiel herausgearbeitet. So hat sich herausgestellt, dass unter der Annahme einer exponentiellen Wirkungsfunktion die Q -Intensität des unterliegenden Punktprozesses eine besonders einfache Gestalt annimmt. Vor dem Hintergrund, dass in der Finanzmathematik Bewertungen mit Hilfe äquivalenter Martingalmaße durchgeführt werden, gewinnt diese Erkenntnis an Bedeutung.

3 Das Shot Noise-Modell

Im ersten Kapitel wurde bereits eine Idee zur Modellierung eines Finanzmarktes gegeben, welcher den in der Einleitung angesprochenen Phänomenen der Market Overreaction und Mean Reversion Rechnung trägt. Es wurde angeregt dafür Shot Noise-Prozesse zu verwenden, welche daraufhin im letzten Kapitel untersucht wurden. Die dort erhaltenen Ergebnisse sollen nun gewinnbringend bei der genauen Modellierung und Untersuchung des resultierenden Modells eingebracht werden.

Im ersten Abschnitt werden dazu die Grundannahmen in ein mathematisches Modell übertragen. Dieses wird dann im zweiten Abschnitt durch das Konzept der stochastischen Volatilität erweitert. Da diese Arbeit darauf abzielt Derivate zu bewerten, muss das Modell unter risikoneutralen Maßen untersucht werden. Dazu wird zunächst festgestellt, wie sich das Modell unter einem allgemeinen Maßwechsel verhält. Danach ist man in der Lage eine Klasse von Martingalmaßen zu identifizieren, die zum einen analytisch handhabbare Ergebnisse zulässt, die zum anderen aber noch recht allgemeine Voraussetzungen erfüllt. Dabei werden die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Kapitel natürlich eine wichtige Rolle spielen.

Dort wurde bereits als wichtiges Beispiel das Verhalten eines SNP unter einer exponentiellen Wirkungsfunktion genauer untersucht. Dieser Spezialfall wird auch in der weiteren Analyse des SNM eine große Rolle spielen. Für eine möglichst allgemeine Darstellung werden jedoch, soweit es keinen großen Mehraufwand darstellt, zunächst die Eigenschaften für alle nichtnegativen Wirkungsfunktionen gezeigt, die monoton fallend sind. Dies stellt insofern keine Einschränkung dar, als dass die ursprüngliche Problemstellung dieses Modells die Untersuchung etwaiger Mean Reversion-Effekte war, die bereits eine fallende Wirkungsfunktion implizieren.

3.1 Der Preisprozess im Shot Noise-Modell

Im ersten Kapitel wurde angeregt (vgl. (1.4)), dass der Preisprozess die Form

$$S_t = \tilde{S}_t \exp(Y_t), \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

besitzen soll. Dabei ist Y ein Shot Noise-Prozess und \tilde{S} ein geometrischer Wienerprozess mit Drift μ , Volatilität σ und Anfangswert $\tilde{S}_0 = x$, wie er im BSM auftritt (vgl. (1.2)).

Wie bereits erwähnt, wird das Modell später unter einem risikoneutralen Maß untersucht. Korollar 2.12 hat für den Fall von einfachen Shot Noise-Prozessen ge-

zeigt, dass sich das Verhalten der „risikoneutralisierten Version“ unter gewissen Annahmen stark vereinfacht. Es ist zu erwarten, dass sich diese Eigenschaft auf einen Prozess der Form (3.1) überträgt. Eine Voraussetzung war, dass die Sprünge entweder sämtlich positiv oder negativ sein müssen. Allerdings würde es nur wenig Sinn ergeben sich bei der Modellierung eines Finanzmarktes auf ausschließlich positive oder aber negative Sprünge zu beschränken. Ein möglicher Ausweg ist es einen zweidimensionalen SNP (Y^+, Y^-) zu betrachten, wobei (Y^\pm) zwei unabhängige SNP mit Charakteristik $(h^\pm, \nu^\pm, \lambda^\pm)$ sind. Dabei seien sowohl ν^+ als auch ν^- Verteilungen auf \mathbb{R}^+ und h^+ und h^- Funktionen wie in Definition 2.1, die zudem monoton fallend sind auf \mathbb{R}^+ . Definiere dann

$$Y_t := Y_t^+ - Y_t^-, \quad t \in [0, T]. \quad (3.2)$$

Y ist dann wiederum ein SNP mit Positivteil Y^+ und Negativteil Y^- .¹ Bei einer Maßtransformation, so die Idee, können Positiv- und Negativteil dann unabhängig voneinander im Sinne von Korollar 2.12 „risikoneutralisiert“ werden.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Aufwärts- und Abwärts Sprünge exponentialverteilt sind mit Parametern ξ_\pm (mit Erwartungswert $1/\xi_\pm$), wobei $\xi_+ > 1$ und $\xi_- > 0$.² Die Bedingung $\xi_+ > 1$ stellt dabei sicher, dass $E(\exp(U^+)) < \infty$.

Seien des Weiteren N^\pm die zu Y^\pm gehörigen Poissonprozesse mit konstanter Intensität $\lambda^\pm \in \mathbb{R}^+$ und Sprungzeiten $0 < T_1^+ < T_2^+ < \dots$ bzw. $0 < T_1^- < T_2^- < \dots$, dann liefert Einsetzen von (3.2) in (3.1) nun

$$S_t = x \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \times \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t^+} U_i^+ h^+(t - T_i^+) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t^-} -U_i^- h^-(t - T_i^-) \right). \quad (3.3)$$

Aufgrund der Stetigkeit der anderen Komponenten stimmen die Sprungzeitpunkte von S mit denen von N^+ und N^- überein, d.h. es ist

$$\Delta S_t = S_t - S_{t-} = S_{t-} \left((\exp(U_i^+ h^+(0)) - 1) \Delta N_t^+ + (\exp(-U_i^- h^-(0)) - 1) \Delta N_t^- \right).$$

Für einen Aktienpreis, der dem Prozess aus (3.3) folgt, gilt also Folgendes: Treten keine Sprünge auf, so verhält sich der Aktienpreis wie im Black-Scholes-Modell, d.h. es ergibt sich eine erwartete Rendite μ mit konstanter Volatilität σ . Tritt zum Zeitpunkt $T_i^\pm = t$ ein Sprung auf, so verändert sich der Preis der Aktie um

¹Genau genommen wäre dazu eine leichte Verallgemeinerung von Definition 2.1 notwendig, da die Wirkungsfunktion nun vom Vorzeichen der Sprünge abhängt.

²Diese Vorgehensweise entspricht der von [Kuo02].

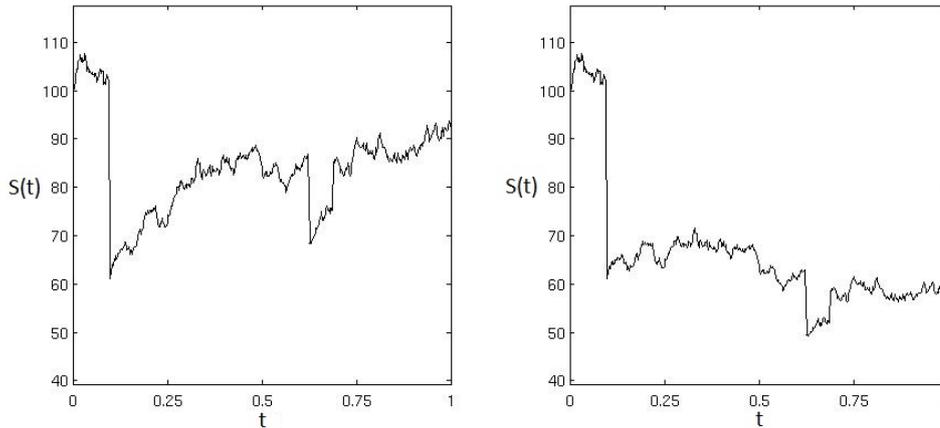


Abbildung 3.1. Zeigt eine Shot Noise-Sprung-Diffusion (vgl. Definition 3.4) mit $x = 100$ und Parametern $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $\lambda^+ = 1$, $\lambda^- = 1$. Die Sprünge sind jeweils $\text{Exp}(10)$ -verteilt. Links ist $h^+(t) = e^{-5t}$, $h^-(t) = e^{-2t}$ und rechts $h^+(t) \equiv h^-(t) \equiv 0$.

$S_{t-}(\exp(\pm U_i^\pm h^\pm(0)) - 1)$, was im Falle eines positiven Sprunges einer relativen Veränderung von $\exp(U_i^+ h^+(0)) - 1 > 0$ und im Falle eines negativen Sprunges einer relativen Veränderung von $\exp(-U_i^- h^-(0)) - 1 < 0$ entspricht. Es ist zu beachten, dass stets $\exp(-U_i^- h^-(0)) - 1 > -1$ ist. Dadurch ist sichergestellt, dass der Aktienpreis S_t auch trotz eines Abwärtssprunges positiv bleibt. In der Folgezeit nach einem Sprung wird dieser gemäß der Funktionsvorschrift von h kompensiert. Falls $h(t) \rightarrow 0$, für $t \rightarrow \infty$, bedeutet dies, dass der Sprung über lange Sicht (beinahe) vollständig kompensiert wird. Wie sich gleich in Satz 3.1 zeigen wird, schlägt sich dieses in der Dynamik des Aktienpreises durch eine zusätzliche Drift in Höhe von $\pm U_i^\pm h^\pm(t - T_i^\pm)$ nieder.

Abbildung 3.1 veranschaulicht graphisch den Verlauf einer Sprung-Diffusion. Dabei sind in beiden Fällen die Zuwächse durch den Wienerprozess und die Sprungprozesse gleich. Links treten nach den Sprüngen Shot Noise-Effekte gemäß den Wirkungsfunktionen $h^+(t) = e^{-5t}$ und $h^-(t) = e^{-2t}$ auf. Rechts bleiben diese Effekte durch die Wahl von $h^+(t) \equiv h^-(t) \equiv 0$ aus.

Wie schon im ersten Kapitel erwähnt, wird hier nur ein kontinuierliches Finanzmarktmodell mit endlichem Handelszeitraum $[0, T]$ mit $T < \infty$ untersucht. Deshalb werden auch nur die auf $[0, T]$ eingeschränkten Prozesse betrachtet. Der zugrunde gelegte W -Raum ist $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, die die Usual Conditions erfüllt und bzgl. der W und Y^\pm adaptiert sind. P bezeichnet dabei das statistische Maß.

Bevor gleich die Dynamik des Preisprozesses S unter P erläutert wird, sei noch darauf hingewiesen, dass mit den Doppelfolgen $(T_n^\pm, U_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenso wie im zweiten Kapitel Punktprozesse mit (P, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\lambda^\pm, \nu^\pm(du))$ assoziiert werden können.

Satz 3.1. *Sei S wie in (3.3), dann ist S ein Semimartingal und die Dynamik von S in $t \in [0, T]$ ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} dS_t = & S_{t-} \left(\left(\mu + f_t^+ - f_t^- \right) dt + \sigma dW_t \right. \\ & \left. + \left(\exp(U_t^+) - 1 \right) dN_t^+ + \left(\exp(-U_t^-) - 1 \right) dN_t^- \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei

$$f_t^\pm = \sum_{i=1}^{N_{t-}^\pm} U_i^\pm h'(t - T_i^\pm), \quad t \in [0, T].$$

Beweis: Um ein wenig Schreibarbeit zu sparen, wird im Beweis angenommen, dass der Prozess aus (3.3) nur durch einen Shot Noise-Prozess $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i h(t - T_i)$, $t \in [0, T]$, beeinflusst wird. Bei einer Aufteilung in Negativ- und Positivteil läuft der Beweis vollkommen analog ab.

Die Behauptung kann mit Hilfe der partiellen Integrationsformel für Semimartingale gezeigt werden.³ Demnach ist, vorausgesetzt, dass \tilde{S} und $\exp(Y)$ Semimartingale sind, auch $\tilde{S} \exp(Y)$ ein Semimartingal mit

$$d\left(\tilde{S}_t \exp(Y_t)\right) = \exp(Y_{t-}) d\tilde{S}_t + \tilde{S}_{t-} d(\exp(Y_t)) + d[\tilde{S}, \exp(Y)]_t, \quad t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

In den folgenden drei Schritten werden $d(\exp(Y_t))$, $d\tilde{S}_t$ und $d[\tilde{S}, \exp(Y)]_t$ untersucht. In einem vierten Schritt können die dort erhaltenen Ergebnisse auf (3.5) angewendet werden.

1. Aus Satz 2.3 ist bereits bekannt, dass Y ein càdlàg-Prozess von lokal beschränkter Variation ist und somit ein rein unstetiges Semimartingal,⁴ d.h. es ist $[Y, Y]_t^c = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Außerdem ist \exp eine reelle \mathcal{C}^2 -Funktion. Die Ito-Formel⁵ besagt, dass dann auch $\exp(Y)$ ein Semimartingal ist und für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} d\exp(Y_t) &= \exp(Y_{t-}) dY_t + \frac{1}{2} \exp(Y_{t-}) d[Y, Y]_t^c \\ &\quad + \left(\exp(Y_t) - \exp(Y_{t-}) - \exp(Y_{t-}) \Delta Y_t \right) dN_t \\ &= \exp(Y_{t-}) dY_t + \left(\exp(Y_t) - \exp(Y_{t-}) - \exp(Y_{t-}) \Delta Y_t \right) dN_t \end{aligned}$$

gilt, da die Sprünge von $\exp(Y)$ aufgrund der Gestalt von Y natürlich mit denen von N übereinstimmen. Satz 2.5 liefert außerdem

$$dY_t = f_t dt + U_t dN_t.$$

³Vgl. [Pro05] Korollar II.6.2, S.68.

⁴Vgl. [Pro05] Definition und Theorem II.6.26, S.71.

⁵Vgl. [Pro05] Theorem II.7.32, S.78.

Zusammen ergibt sich für $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} d \exp(Y_t) &= \exp(Y_{t-}) dY_t + (\exp(Y_{t-} + \Delta Y_t) - \exp(Y_{t-}) - \exp(Y_{t-}) \Delta Y_t) dN_t \\ &= \exp(Y_{t-}) f_t dt + \exp(Y_{t-}) U_t dN_t + \exp(Y_{t-} + U_t) dN_t \\ &\quad - \exp(Y_{t-}) dN_t - \exp(Y_{t-}) U_t dN_t \\ &= \exp(Y_{t-}) (f_t dt + (\exp(U_t) - 1) dN_t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

2. \tilde{S} ist ein geometrischer Wienerprozess, es ist also ein Semimartingal und erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-} (\mu dt + \sigma dW_t). \quad (3.7)$$

3. Zum einen ist \tilde{S} stetig, woraus $[\tilde{S}, \tilde{S}]_t = [\tilde{S}, \tilde{S}]_t^c$, bzw. $\Delta \tilde{S}_t = 0$ für alle $t \in [0, T]$ folgt. Zum anderen ist $\exp(Y)$, wie auch Y , ein rein unstetiges Semimartingal. Deshalb ergibt sich für die quadratische Kovariation von \tilde{S} und $\exp(Y)$, dass⁶

$$[\tilde{S}, \exp(Y)]_t = \tilde{S}_0 \exp(Y_0) + \sum_{0 < s \leq t} \underbrace{\Delta \tilde{S}_s \Delta \exp Y_s}_{=0} = \tilde{S}_0 \exp(Y_0), \quad \text{für alle } t \in [0, T],$$

wobei die Stetigkeit von \tilde{S} ausgenutzt wurde. Insbesondere folgt

$$d[\tilde{S}, \exp(Y)]_t = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (3.8)$$

4. Für (3.5) gilt nun unter Berücksichtigung von (3.6), (3.7) und (3.8)

$$\begin{aligned} d(\tilde{S}_t \exp(Y_t)) &= \exp(Y_{t-}) \tilde{S}_{t-} (\mu dt + \sigma dW_t) \\ &\quad + \tilde{S}_{t-} \exp(Y_{t-}) (f_t dt + (\exp(U_t) - 1) dN_t) \\ &= S_{t-} (\mu dt + \sigma dW_t) + S_{t-} (f_t dt + (\exp(U_t) - 1) dN_t) \\ &= S_{t-} ((\mu + f_t) dt + \sigma dW_t + (\exp(U_t) - 1) dN_t), \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt. \square

Definition 3.2. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ ein W-Raum mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, die die Usual Conditions erfüllt. Weiter seien $(W_t)_{t \geq 0} = (W_t^1, \dots, W_t^n)_{t \geq 0}$ ein n -dimensionaler \mathcal{F}_t -adaptierter Wienerprozess und $p^j(ds, dz)$, $j = 1, \dots, m$ Zufallsmaße (assoziiert mit markierten \mathcal{F}_t -adaptierten Punktprozessen), und μ, σ^i, γ^j für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ \mathcal{F}_t -previsible Prozesse, so dass für alle $t \in [0, T]$

$$\int_0^t |\mu_s| ds < \infty, \quad \int_0^t (\sigma_s^i)^2 ds < \infty, \quad \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\gamma^j(s, x)| \lambda_s^j(dx) ds < \infty \quad P\text{-f.s.},$$

⁶Vgl. [Pro05] Theorem II.6.28, S.75.

wobei $\lambda_t^j(dx)$ den \mathcal{F}_t -Intensitätskern von $p^j(dt, dx)$ bezeichne. Dann heißt ein Prozess der Form

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu_s ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_s^i dW_s^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \int_{\mathbb{E}} \gamma^j(s, x) p^j(ds, dx)$$

(allgemeiner) Sprung-Diffusionsprozess.

Bemerkung 3.3.

1. Die Definition einer Sprung-Diffusion lässt sich leicht auf den d -dimensionalen Fall ($d \in \mathbb{N}$) erweitern, indem man annimmt, dass μ, σ, γ d -dimensionale Prozesse sind.
2. Man stellt leicht fest, dass der Prozess aus (3.3) mit der Dynamik aus (3.4) ein Sprung-Diffusionsprozess ist, was die folgende Definition motiviert.

Definition 3.4. Ein Sprung-Diffusionsprozess mit der Form aus (3.3) heißt *Shot Noise-Sprung-Diffusionsprozess* (kurz SNSD).

Es wäre nun möglich, das im ersten Kapitel angeregte SNM mit Hilfe einer SNSD zu erklären. Dieses stellt jedoch lediglich einen Spezialfall eines Shot Noise-Modells mit stochastischer Volatilität dar, auf welches in dem folgenden Abschnitt hingearbeitet wird.

3.2 Stochastische Volatilität

Im ersten Kapitel wurde bereits festgehalten, dass bei der Modellierung von Finanzmärkten nicht nur das Konzept der Preissprünge sondern zudem auch das der stochastischen Volatilität berücksichtigt werden sollte. In diesem Zusammenhang wurden das Heston- und das Bates-Modell genannt, welche bei der Modellierung der stochastischen Volatilität auf einen *Wurzel-Diffusionsprozess* (*Square Root Diffusion*) zurückgreifen, der dann an die Stelle der konstanten Volatilität σ aus dem BSM tritt. Diese Vorgehensweise wird bei dem Shot Noise-Modell übernommen. Zunächst sei die Definition und eine kurze Zusammenfassung der wichtigen Eigenschaften des Wurzel-Diffusionsprozess gegeben.

Definition 3.5. Es seien reelle Parameter $\kappa \geq 0, \theta > 0, \sigma \in \mathbb{R}$ und ein Wienerprozess $(W_t^v)_{t \geq 0}$ gegeben. Ein stochastischer Prozess $(v_t)_{t \geq 0}$ heißt *Wurzel-Diffusionsprozess* (kurz WDP) mit Parametern κ, θ, σ , wenn er die stochastische Differentialgleichung

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v$$

mit Startbedingung v_0 löst.

Die Wirkungsweisen der einzelnen Parameter sind leicht wie folgt zu interpretieren:

- θ ist das Gleichgewichtsniveau des Prozesses. Ist $v_t < \theta$, so hat der Prozess eine positive Drift und im Fall $v_t > \theta$ eine negative. Das bedeutet, dass der Prozess immer wieder zum Niveau θ zurückgezogen wird.
- κ gibt die Geschwindigkeit der Regulierung in Richtung Gleichgewichtsniveau wieder.
- σ ist die Volatilität des Prozesses und bestimmt somit wie stark die Schwankungen des Wienerprozesses auf den Prozess übertragen werden.

Des Weiteren hat ein WDP noch folgende wichtige Eigenschaft.

Satz 3.6. *Sei $(v_t)_{t \geq 0}$ ein WDP mit Parametern κ, θ, σ und positiver Startbedingung v_0 . Dann ist v P -f.s. nichtnegativ, d.h. es gilt $P(v_t \geq 0) = 1$ für alle $t \geq 0$. Ist des Weiteren die Stabilitätsbedingung $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ erfüllt, so ist v P -f.s. strikt positiv.*

Beweis: Für einen Beweis sei lediglich darauf hingewiesen, dass diese Eigenschaft für einen WDP aus den Pfadeneigenschaften von *quadratischen Besselprozessen*⁷ folgt, indem man zeigt, dass ein WDP mit Parametern κ, θ, σ mit Hilfe eines quadratischen Besselprozesses der Dimension $\frac{4\kappa\theta}{\sigma^2} \geq 2$ dargestellt werden kann.⁸ \square

Der Wienerprozess W^v des WDP soll mit dem des Aktienpreisprozesses im Shot Noise-Modell, also W , korreliert sein. Folgendes Lemma wird sich als nützlich erweisen um dies besser handhaben zu können.

Lemma 3.7. *Seien W^1 und W^2 unabhängige Wienerprozesse und $\rho \in [-1, 1]$, dann ist der durch*

$$W_t^3 := \rho W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^2, \quad t \in [0, T], \quad (3.9)$$

definierte Prozess ein Wienerprozess und für alle $t \in [0, T]$ gilt $[W^1, W^3]_t = \rho t$.

Beweis: Der erste Teil folgt leicht mit Hilfe der *Lévy-Charakterisierung* von Wienerprozessen.⁹ Demnach ist ein Prozess $X = (X^1, \dots, X^d)$ genau dann ein d -dimensionaler Wienerprozess, wenn er ein stetiges lokales Martingal ist mit

$$[X^i, X^j]_t = t\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq j \\ t, & \text{falls } i = j \end{cases}. \quad (3.10)$$

Mit W^1 und W^2 ist natürlich auch W^3 ein stetiges Martingal. Außerdem gilt $[W^1, W^1]_t = [W^2, W^2]_t = t$ und $[W^1, W^2]_t = [W^2, W^1]_t = 0$ für alle $t \geq 0$, da

⁷Vgl. [JYC09] Abschnitt 6.1.3.

⁸Vgl. [JYC09] Proposition 6.3.1.1, S.357.

⁹Vgl. [Pro05] Theorem 39, S.86.

(W^1, W^2) ein zweidimensionaler Wienerprozess ist. Zusammen mit der Bilinearität von $[\cdot, \cdot]$ ergibt dies

$$\begin{aligned} [W^3, W^3]_t &= [\rho W^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W^2, \rho W^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W^2]_t \\ &= [\rho W^1, \rho W^1]_t + [\sqrt{1 - \rho^2} W^2, \sqrt{1 - \rho^2} W^2]_t + 2[\rho W^1, \sqrt{1 - \rho^2} W^2]_t \\ &= \rho^2 \underbrace{[W^1, W^1]_t}_{=t} + (1 - \rho^2) \underbrace{[W^2, W^2]_t}_{=t} + 2\rho \sqrt{1 - \rho^2} \underbrace{[W^1, W^2]_t}_{=0} \\ &= \rho^2 t + (1 - \rho^2)t = t. \end{aligned}$$

Die zweite Eigenschaft folgt ähnlich, denn

$$[W^1, W^3]_t = [W^1, \rho W^1 + \sqrt{1 - \rho^2} W^2]_t = \rho \underbrace{[W^1, W^1]_t}_{=t} + \sqrt{1 - \rho^2} \underbrace{[W^1, W^2]_t}_{=0} = \rho t.$$

□

Nachdem die nötige Vorarbeit geleistet wurde, kann schließlich das Shot Noise-Modell mit stochastischer Volatilität, bzgl. des statistischen Maßes P angegeben werden:

Definition 3.8. Als *Shot Noise-Modell mit stochastischer Volatilität (kurz SNSVM)* wird ein kontinuierliches Finanzmarktmodell mit endlichem Zeithorizont T und zwei Finanzgütern bezeichnet. Das erste Finanzgut β ist dabei eine risikolose Anlage mit stetiger Verzinsung zum Zinssatz r , d.h.

$$\beta_t = \exp(rt), \quad t \in [0, T].$$

Das zweite Finanzgut wird durch den positiven Anfangspreis $S_0 = x$ und die Dynamik des Aktienpreises und dessen Volatilität festgelegt. Diese sind durch

$$\begin{aligned} dS_t &= S_{t-} \left(\left(\mu + f_t^+ - f_t^- \right) dt + \sqrt{v_t} \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\exp(U_t^+) - 1 \right) dN_t^+ + \left(\exp(-U_t^-) - 1 \right) dN_t^- \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$dv_t = \kappa_v(\theta_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t, \quad v_0 = w \quad (3.12)$$

gegeben, wobei

$$f_t^\pm = \sum_{i=1}^{N_{t-}^\pm} U_i^\pm h'^\pm(t - T_i^\pm), \quad t \in [0, T].$$

Dabei gilt:

- W und \bar{W} sind Wienerprozesse.

- N^+ und N^- sind Poissonprozesse mit Intensität λ^+ bzw. λ^- und Sprungzeiten $0 < T_1^+ < T_2^+ < \dots$ bzw. $0 < T_1^- < T_2^- < \dots$.
- Die Sprünge U_1^\pm, U_2^\pm, \dots sind unabhängig, identisch $\text{Exp}(\xi_\pm)$ -verteilt, wobei $\xi_+ > 1, \xi_- > 0$.
- Die Prozesse W, \bar{W}, N^+, N^- und die Zufallsgrößen $(U_i^+)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(U_i^-)_{i \in \mathbb{N}}$ sind voneinander unabhängig.
- $h^\pm : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sind nichtnegative Funktionen mit $h \equiv 0$ auf \mathbb{R}^- und stetig differenzierbar und monoton fallend auf \mathbb{R}^+ .
- $\rho \in [-1, 1], \mu, r \in \mathbb{R}, \kappa_v, \theta_v, \sigma_v, w > 0$ und $2\kappa_v\theta_v \geq \sigma_v^2$.
- Alle Zufallsgrößen und Prozesse sind auf dem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ definiert, die die Usual Conditions erfüllt.

Bemerkung 3.9. Dieses Modell beinhaltet sowohl Sprünge als auch stochastische Volatilität und beschreibt deshalb einen sog. *unvollständigen Markt*. Dabei ist die Volatilität über ρ mit dem Preisprozess korreliert. Indem ρ negativ gewählt wird, ist es möglich den Leverage-Effekt mathematisch zu erfassen, wonach fallende Kurse die Volatilität des Marktes erhöhen. Die Sprünge im Preisprozess tragen der Beobachtung Rechnung, dass sich Preise (z.B. durch das Eintreffen neuer relevanter Informationen) plötzlich ändern können. Die Besonderheit dieses Modells liegt darin, dass es Shot Noise-Effekte berücksichtigt. Diese können als Überreaktion (auf neue Informationen) mit anschließender Kompensation interpretiert werden.

Wird in obiger Definition die Volatilität v konstant gleich σ gewählt, so erhält man ein einfaches Shot Noise-Modell.

Abschließend für diesen Abschnitt wird gezeigt, dass ein Prozess, der die Differentialgleichung aus (3.11) löst, eine ähnliche Gestalt wie der Prozess aus (3.3) hat. Die Definition eines SNSVM führt also die Intuition fort, mit der der Preisprozess für ein einfaches SNM entwickelt wurde.

Satz 3.10. *Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung aus (3.11) ist gegeben durch*

$$S_t = x \exp \left(\mu t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sqrt{v_s} d\bar{W}_s \right) \\ \times \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t^+} U_i^+ h^+(t - T_i^+) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t^-} -U_i^- h^-(t - T_i^-) \right), \quad t \in [0, T].$$

Beweis: Definiere für $t \in [0, T]$

$$\tilde{S}_t := x \exp \left(\mu t - \frac{1}{2} \int_0^t v_s ds + \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sqrt{v_s} d\bar{W}_s \right).$$

Zeigt man nun, dass

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \left(\mu dt + \sqrt{v_t} \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t \right) \right), \quad t \in [0, T], \quad \tilde{S}_0 = x \quad (3.13)$$

gilt, so folgt die Behauptung mit Hilfe der partiellen Integrationsformel für stochastische Integrale wie in Satz 3.1.

Betrachte dazu $X_t := \exp(\mu t)$, $t \in [0, T]$ als Lösung von $dX_t = X_t \mu dt$. Insbesondere folgt $dX_t^{-1} = -X_t^{-1} \mu dt$. Sei $\hat{S} := \tilde{S}/x$, wobei \tilde{S} eine Lösung von (3.13) sei. Mittels partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} dX_t^{-1} \hat{S}_t &= X_t^{-1} d\hat{S}_t + \hat{S}_t dX_t^{-1} + \underbrace{d[\hat{S}, X^{-1}]_t}_{=0} \\ &= X_t^{-1} \hat{S}_t \mu dt + X_t^{-1} \hat{S}_t \sqrt{v_t} \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t \right) - \hat{S}_t X_t^{-1} \mu dt \\ &= X_t^{-1} \hat{S}_t \sqrt{v_t} \left(\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t \right), \quad X_0^{-1} \hat{S}_0 = 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Lösung von (3.14) ist das sog. *stochastische Exponential* oder auch *Doléans-Dade-Exponential*¹⁰ von

$$\mathcal{W}_t := \rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sqrt{v_s} d\bar{W}_s, \quad t \in [0, T],$$

und lässt sich aufgrund der Stetigkeit von \mathcal{W} bestimmen durch

$$\begin{aligned} X_t^{-1} \hat{S}_t &= \exp \left(\mathcal{W}_t - \frac{1}{2} [\mathcal{W}, \mathcal{W}]_t \right) \\ &= \exp \left(\rho \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s + \sqrt{1 - \rho^2} \int_0^t \sqrt{v_s} d\bar{W}_s \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^t (\rho \sqrt{v_s})^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t (\sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{v_s})^2 ds \right), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass (W, \bar{W}) ein zweidimensionaler Wienerprozess ist und $v_t < \infty$ für alle $t \in [0, T]$. Multipliziert man beide Seiten obiger Gleichung mit $X_t \cdot x$ folgt schließlich die Behauptung. \square

¹⁰Vgl. [Pro05] Theorem II.8.37, S.84.

3.3 Äquivalente Martingalmaße

Nachdem in den letzten Abschnitten das Modell unter dem statistischen Maß erklärt wurde, soll nun darauf hingearbeitet werden, eine Bewertungsgrundlage für Derivate zu finden, d.h. für Finanzinstrumente, deren Preise aus dem der Aktie abgeleitet werden. Zur Bewertung werden, wie im ersten Kapitel bereits erwähnt, risikoneutrale Maße herangezogen. Da ein unvollständiger Markt zugrunde gelegt wird (stochastische Volatilität, Sprünge), ergibt sich nicht nur die Existenz eines bestimmten risikoneutralen Maßes, sondern gleich die unendlich vieler.¹¹ Eines von diesen dann als „Richtiges“ oder „Bestes“ auszuwählen, ist i.A. jedoch nicht möglich, da mit Hilfe eines *jeden* dieser risikoneutralen Maße ein arbitragefreier Preis bestimmt werden kann.

Ein möglicher Ansatz ein „Bestes“ auszuwählen, bestünde darin, das risikoneutrale Maß anhand der Nutzenfunktion eines *repräsentativen* Investors zu optimieren. Ein Weiterer wäre die Bestimmung des sog. *minimalen Martingalmaßes*. Dieses stellt das Gegenstück zu einer Hedgingstrategie dar, die das lokale quadratische Risiko minimiert.¹²

Der hier verfolgte Ansatz, welcher im Sinne eines besseren Verständnisses zunächst kurz zusammengefasst wird, sieht vor, die Dynamik des Modells unter einer Klasse in Frage kommender risikoneutraler Maße zu parametrisieren, um dann durch eine Kalibrierung an Marktdaten das durch den Markt „gegebene“ risikoneutrale Maß zu erhalten. In diesem Sinne ist es auf der einen Seite von Interesse eine möglichst große Klasse von Maßen zu beschreiben. Denn die Anpassung ist natürlich umso genauer, je allgemeiner die Maße sind, d.h. je größer die Klasse der betrachteten Maße ist. Auf der andere Seite ist zu erwarten, dass die analytische Handhabbarkeit mit einer wachsenden Klasse von Maßen abnimmt und eine Parametrisierung schwieriger wird.

Um jedoch zunächst überhaupt in Frage kommende Maße zu erhalten, werden in Satz 3.11 Prozesse der Form

$$\begin{aligned}
 L_t = & \exp \left(\int_0^t \vartheta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \vartheta_s^2 ds + \int_0^t \bar{\vartheta}_s d\bar{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \bar{\vartheta}_s^2 ds \right) \\
 & \times \exp \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \psi_s^+ g^+(u) \right) \lambda^+ \nu^+(du) ds \right) \prod_{n=1}^{N_t^+} \psi_{T_n^+}^+ g^+(U_n^+) \\
 & \times \exp \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \psi_s^- g^-(u) \right) \lambda^- \nu^-(du) ds \right) \prod_{n=1}^{N_t^-} \psi_{T_n^-}^- g^-(U_n^-) \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

¹¹Unter gewissen technischen Voraussetzungen ist die Existenz eines risikoneutralen Maßes äquivalent zur Arbitragefreiheit. Vgl. [JYC09] S.85 ff. für Details.

¹²Vgl. [JYC09] S.547 ff., Details bezogen auf den Fall, dass der Preisprozess Shot Noise-Effekten unterliegt, finden sich in [ASS08] und [SS07].

für geeignete previsible Prozesse ϑ , $\bar{\vartheta}$, ψ^\pm und geeignete Funktionen g^\pm betrachtet. Diese Prozesse stellen unter gewissen technischen Voraussetzungen strikt positive Martingale dar, weshalb mittels $\frac{dQ}{dP} = L_T$ ein zu P äquivalentes W-Maß Q auf \mathcal{F}_T definiert werden kann. Es wird sich herausstellen, dass unter einem solchen Maß Q die Wienerprozesse W und \bar{W} die Drift ϑ bzw. $\bar{\vartheta}$ haben, d.h.

$$W_t^Q = W_t - \int_0^t \vartheta_s ds \quad \text{und} \quad \bar{W}_t^Q = \bar{W}_t - \int_0^t \bar{\vartheta}_s ds \quad (3.16)$$

sind Wienerprozesse bzgl. Q . Des Weiteren haben die Punktprozesse $(T_n^\pm, U_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ die Q -Charakteristik $(\lambda^\pm \psi_t^\pm, g^\pm(u) \nu^\pm(du))$. Die Drifts und veränderten Sprungintensitäten und -verteilungen können nun anschaulich als *Risikoprämien* für das Diffusionsrisiko bzw. Sprungrisiko interpretiert werden.¹³

Es wird sich herausstellen, dass die Risikoprämien die Gleichgewichtsbedingung

$$r = \mu + f_t^+ - f_t^- + \sqrt{v_t} \left(\rho \vartheta_t + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{\vartheta}_t \right) + \bar{u}_+ \psi_t^+ \lambda^+ + \bar{u}_- \psi_t^- \lambda^- \quad (3.17)$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s., erfüllen müssen, damit Q risikoneutral ist. Dabei ist $\bar{u}_\pm = E^Q(\exp(\pm U_1^\pm) - 1)$.

Wie bereits erwähnt, ist man darauf bedacht, den Spagat zwischen guter Anpassung und analytischer Handhabbarkeit zu machen. Die lediglich durch Bedingung (3.17) eingeschränkte Klasse von W-Maßen ist allerdings immer noch sehr groß. Insbesondere wäre das Verhalten der stochastischen Volatilität oder der Punktprozesse unter einem dieser W-Maße sehr allgemein. Um eine leichtere Analyse zu ermöglichen, wird daher die in der finanzmathematischen Literatur oft gemachte Annahme einer linearen Risikoprämie für das Volatilitätsrisiko übernommen.¹⁴ Dies erreicht man, indem man $\vartheta = c\sqrt{v}$ setzt. Dadurch ergibt sich insbesondere, dass v auch unter Q einem Wurzeldiffusionsprozess folgt. Angelehnt an das zweite Kapitel sollen an die Sprungrisikoprämie zweierlei Bedingungen geknüpft werden. Zum einen soll die Unabhängigkeit der Sprünge unter Q erhalten bleiben. Zum anderen wird (nur) die lineare Abhängigkeit der Intensität von der jeweiligen momentanen Shot Noise-Wirkung erlaubt, d.h. ψ_t^\pm ist linear in f_t^\pm .¹⁵ Intuitiv ließe sich dieser Ansatz also wie in Bemerkung 2.11 interpretieren. Die Tatsache, dass ψ^+ und ψ^- dann

¹³Die veränderte Sprungintensität ist als Risikoprämie für die Ungewissheit der Sprunghäufigkeit aufzufassen, die veränderte Sprungverteilung als Risikoprämie für die Ungewissheit der Sprunghöhe.

¹⁴Vgl. [DPS00],[Hes93],[Pan02]). Unter gewissen Voraussetzungen an die Nutzenfunktion eines repräsentativen Investors kann in der Tat eine lineare Risikoprämie gerechtfertigt werden (vgl. [Hes93], [CIR85]). Für den Fall, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist, kann man die lineare Form der Risikoprämie dennoch als gute Näherung auffassen, was unter der Prämisse der analytischen Handhabbarkeit bereits als Rechtfertigung ausreichen sollte.

¹⁵Die lineare Abhängigkeit sichert später die affine Struktur des Modells. Grundsätzlich wäre es denkbar die lineare Abhängigkeit auf beispielsweise die stochastische Volatilität zu erweitern. Vgl. dazu Fußnote auf S.77.

voneinander unabhängig sind, lässt sich durch die Idee, dass das Eintreffen guter Nachrichten unabhängig vom Eintreffen schlechten Nachrichten ist, rechtfertigen.

Zunächst benötigt man ein zu Satz A.17 analoges Resultat für den Fall, dass zwei unabhängige Wienerprozesse und zwei unabhängige Punktprozesse betrachtet werden.

Satz 3.11. *Es sei ein SNSVM wie in Definition 3.8 mit den Wienerprozessen $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$ und $(W_t)_{t \geq 0}$ und Punktprozessen $(T_n^\pm, U_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ mit (P, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\lambda^\pm, \nu^\pm(du))$ gegeben. Seien des Weiteren \mathcal{F}_t -adaptierte, previsible reelle Prozesse $(\vartheta_t)_{t \geq 0}$, $(\bar{\vartheta}_t)_{t \geq 0}$, $(\psi_t^\pm)_{t \geq 0}$ und messbare positive Funktionen $g^\pm : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gegeben, mit*

$$\int_{\mathbb{R}} g^\pm(u) \nu^\pm(du) = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(\pm u) g^\pm(u) \nu^\pm(du) < \infty, \quad (3.18)$$

$$\int_0^t \lambda^\pm \psi_s^\pm ds < \infty \quad \text{und} \quad \psi_t^\pm > 0, \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T], \quad (3.19)$$

$$\int_0^t \vartheta_s^2 ds < \infty, \quad \int_0^t \bar{\vartheta}_s^2 ds < \infty \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \quad (3.20)$$

Definiere $(L_t)_{t \geq 0}$ durch

$$\begin{aligned} L_t := & \exp\left(\int_0^t \vartheta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \vartheta_s^2 ds\right) \exp\left(\int_0^t \bar{\vartheta}_s d\bar{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \bar{\vartheta}_s^2 ds\right) \\ & \times \exp\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \psi_s^+ g^+(u)\right) \lambda^+ \nu^+(du) ds\right) \prod_{n=1}^{N_t^+} \psi_{T_n^+}^+ g^+(U_n^+) \\ & \times \exp\left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \psi_s^- g^-(u)\right) \lambda^- \nu^-(du) ds\right) \prod_{n=1}^{N_t^-} \psi_{T_n^-}^- g^-(U_n^-). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Vorausgesetzt es ist $EL_T = 1$, dann gelten folgende Aussagen:

1. L ist ein Martingal auf $[0, T]$ und durch $\frac{dQ}{dP} = L_T$ wird ein zu P äquivalentes W -Maß Q auf \mathcal{F}_T definiert.

2. Durch

$$W_t^Q := W_t - \int_0^t \vartheta_s ds, \quad \bar{W}_t^Q := \bar{W}_t - \int_0^t \bar{\vartheta}_s ds, \quad t \in [0, T],$$

werden zwei unabhängige Q -Wienerprozesse definiert und die Punktprozesse $(T_n^\pm, U_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ haben die Q -Charakteristik $(\lambda^\pm \psi_t^\pm, g^\pm(u) \nu^\pm(du))$.

3. Q ist risikoneutral, wenn

$$r = \mu + f_t^+ - f_t^- + \sqrt{v_t} \left(\rho \vartheta_t + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{\vartheta}_t \right) + \bar{u}_+ \psi_t^+ \lambda^+ + \bar{u}_- \psi_t^- \lambda^- \quad (3.22)$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. gilt, mit $\bar{u}_\pm = E^Q(\exp(\pm U_1^\pm) - 1)$.

Beweis:

Zu 1: Da sowohl $\psi_t^\pm > 0$ P -f.s. für alle $t \in [0, T]$ als auch $g^\pm(u) > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}$, ist auch $L_t > 0$ P -f.s. für alle $t \in [0, T]$. Laut Voraussetzung ist außerdem $E(L_T) = 1$. Deshalb folgt mit dem Satz von Radon-Nikodym,¹⁶ dass Q ein zu P äquivalentes W -Maß ist. Es bleibt zu zeigen, dass $(L_t)_{t \in [0, T]}$ ein Martingal ist. Sei dafür $p^\pm(dt, du)$ das Zählmaß des Punktprozesses $(T_n^\pm, U_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ und

$$q^\pm(dt, du) := p^\pm(dt, du) - \lambda^\pm \nu^\pm(du) dt. \quad (3.23)$$

Definiere weiter

$$M_t^\pm := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^\pm g^\pm(u) - 1 \right) q^\pm(ds, du), \quad t \in [0, T].$$

Da

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |\psi_s^\pm g^\pm(u) - 1| \lambda^\pm \nu^\pm(du) ds \\ & \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^\pm g^\pm(u) + 1 \right) \lambda^\pm \nu^\pm(du) ds \\ & = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \psi_s^\pm g^\pm(u) \lambda^\pm \nu^\pm(du) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \lambda^\pm \nu^\pm(du) ds \\ & \stackrel{(3.18)}{=} \int_0^t \psi_s^\pm \lambda^\pm ds + t \lambda^\pm \quad P\text{-f.s.} \\ & \stackrel{(3.19)}{<} \infty \quad P\text{-f.s.}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

sind $(M_t^+)_{t \in [0, T]}$ und $(M_t^-)_{t \in [0, T]}$ gemäß Korollar A.16 lokale P -Martingale. Wegen (3.20) sind auch $(V_t)_{t \in [0, T]}$ und $(\bar{V}_t)_{t \in [0, T]}$, mit

$$V_t := \int_0^t \vartheta_s dW_s \quad \text{und} \quad \bar{V}_t := \int_0^t \bar{\vartheta}_s d\bar{W}_s, \quad t \in [0, T],$$

lokale P -Martingale. Insgesamt ist also auch $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ mit

$$Z_t = V_t + \bar{V}_t + M_t^+ + M_t^-, \quad t \in [0, T], \quad (3.25)$$

¹⁶Vgl. [Als05] Satz 13.9, S.55.

ein lokales P -Martingal. Nachfolgend wird durch

$$L_t = \exp\left(Z_t - \frac{1}{2}[Z, Z]_t^c\right) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta Z_s) \exp(-\Delta Z_s) \quad \text{für alle } t \in [0, T] \quad (3.26)$$

gezeigt, dass L das stochastische Exponential von Z ist. Da Z ein lokales P -Martingal ist mit $\Delta Z_t > -1$ für alle $t \in [0, T]$ folgt aus den Eigenschaften des stochastischen Exponentials, dass L ein positives lokales P -Martingal ist und somit ein Supermartingal.¹⁷ Schließlich folgt aus $EL_0 = 1 = EL_T$ die Martingaleigenschaft von L . Es bleibt nachzuweisen, dass L tatsächlich das stochastische Exponential von Z ist, d.h. dass (3.26) gilt.

(i) Offensichtlich sind sowohl M^+ als auch M^- und somit auch $M^+ + M^-$ càdlàg-Prozesse von beschränkter Variation, weshalb $[M^+ + M^-, M^+ + M^-]^c = 0$ ist. V und \bar{V} hingegen sind stetig. Wie im Beweis zu Satz 3.1 erhält man deshalb $[V + \bar{V}, M^+ + M^-]^c = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} [Z, Z]_t^c &= [V + \bar{V}, V + \bar{V}]_t^c + 2 \underbrace{[V + \bar{V}, M^+ + M^-]_t^c}_{=0} + \underbrace{[M^+ + M^-, M^+ + M^-]_t^c}_{=0} \\ &= [V, V]_t + 2[V, \bar{V}]_t + [\bar{V}, \bar{V}]_t \\ &= \int_0^t \vartheta_s^2 d \underbrace{[W, W]_s}_{=s} + 2 \int_0^t \vartheta_s \bar{\vartheta}_s d \underbrace{[W, \bar{W}]_s}_{=0} + \int_0^t \bar{\vartheta}_s^2 d \underbrace{[\bar{W}, \bar{W}]_s}_{=s} \\ &= \int_0^t \vartheta_s^2 ds + \int_0^t \bar{\vartheta}_s^2 ds \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} &\prod_{0 < s \leq t} (1 + \Delta Z_s) \exp(-\Delta Z_s) \\ &= \prod_{i=1}^{N_t^+} (1 + \Delta Z_{T_i^+}) \exp(-\Delta Z_{T_i^+}) \prod_{i=1}^{N_t^-} (1 + \Delta Z_{T_i^-}) \exp(-\Delta Z_{T_i^-}) \\ &= \prod_{i=1}^{N_t^+} \left(1 + \psi_{T_i^+}^+ g^+(U_i^+) - 1\right) \exp\left(-\left(\psi_{T_i^+}^+ g^+(U_i^+) - 1\right)\right) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{N_t^-} \left(1 + \psi_{T_i^-}^- g^-(U_i^-) - 1\right) \exp\left(-\left(\psi_{T_i^-}^- g^-(U_i^-) - 1\right)\right) \end{aligned}$$

¹⁷Vgl. [JYC09] S.532.

$$\begin{aligned}
&= \left(\prod_{i=1}^{N_t^+} \psi_{T_i^+}^+ g^+(U_i^+) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t^+} - \left(\psi_{T_i^+}^+ g^+(U_i^+) - 1 \right) \right) \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^{N_t^-} \psi_{T_i^-}^- g^-(U_i^-) \right) \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t^-} - \left(\psi_{T_i^-}^- g^-(U_i^-) - 1 \right) \right) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{N_t^+} \psi_{T_i^+}^+ g^+(U_i^+) \right) \exp \left(- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^+ g^+(u) - 1 \right) p^+(ds, du) \right) \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^{N_t^-} \psi_{T_i^-}^- g^-(U_i^-) \right) \exp \left(- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^- g^-(u) - 1 \right) p^-(ds, du) \right). \quad (3.28)
\end{aligned}$$

(iii) Mit (3.27) und (3.28) erhält man unter Berücksichtigung von (3.23) für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned}
&\exp \left(Z_t - \frac{1}{2} [Z, Z]_t^c \right) \prod_{s \leq t} (1 + \Delta Z_s) \exp(-\Delta Z_s) \\
&= \exp \left(\int_0^t \vartheta_s dW_s + \int_0^t \bar{\vartheta}_s d\bar{W}_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^+ g^+(u) - 1 \right) q^+(ds, du) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^- g^-(u) - 1 \right) q^-(ds, du) - \frac{1}{2} \int_0^t \vartheta_s^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t \bar{\vartheta}_s^2 ds \right) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{N_t^+} \psi_{T_i^+}^+ g^+(U_i^+) \times \exp \left(- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^+ g^+(u) - 1 \right) p^+(ds, du) \right) \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{N_t^-} \psi_{T_i^-}^- g^-(U_i^-) \times \exp \left(- \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_s^- g^-(u) - 1 \right) p^-(ds, du) \right) \\
&= L_t.
\end{aligned}$$

Zu 2: Der zweite Punkt ist eine spezielle Version des Theorems von Girsanov-Meyer. Die allgemeine Version besagt insbesondere: Sind P und Q äquivalente W-Maße mit $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = L_t$ für $t \geq 0$ und X ein lokales P -Martingal, dann ist

$$X_t - \int_0^t \frac{1}{L_s} d[X, L]_s, \quad t \geq 0 \quad (3.29)$$

ein lokales Q -Martingal.¹⁸

¹⁸Vgl. [Pro05] Theorem III.8.39, S.134.

(i) Die Wienerprozesse

Die Behauptung, dass W^Q und \bar{W}^Q Q -Wienerprozesse sind, wird mit Hilfe der Levy-Charakterisierung für Wienerprozesse bewiesen. Man zeigt also im Folgenden, dass W^Q und \bar{W}^Q stetige lokale Martingale mit $[W^Q, W^Q]_t = [\bar{W}^Q, \bar{W}^Q]_t = t$ und $[W^Q, \bar{W}^Q]_t = 0$ sind. Betrachte hierzu den durch

$$\widetilde{W}_t := W_t - \int_0^t \frac{1}{L_s} d[L, W]_s$$

definierten Prozess $(\widetilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$. Dieser ist wegen (3.29) ein lokales Q -Martingal. Um als nächstes $[L, W]$ zu berechnen, nutzt man, wie schon im Beweis von Aussage 1 aus, dass L das stochastische Exponential von Z ist. Es ist also für alle $t \in [0, T]$

$$L_t = 1 + \int_0^t L_{s-} dZ_s$$

und deshalb auch¹⁹

$$[L, W]_t = \int_0^t L_{s-} d[Z, W]_s.$$

Des Weiteren ist für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} [Z, W]_t &= \int_0^t \vartheta_s d \underbrace{[W, W]_s}_s + \int_0^t \bar{\vartheta}_s d \underbrace{[\bar{W}, W]_s}_{=0} + \underbrace{[M^+, W]_t}_{=0} + \underbrace{[M^-, W]_t}_{=0} \\ &= \int_0^t \vartheta_s ds. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man

$$\int_0^t \frac{1}{L_s} d[L, W]_s = \int_0^t \frac{L_{s-}}{L_s} \vartheta_s ds = \int_0^t \vartheta_s ds \quad P\text{-f.s.},$$

da die Menge der Unstetigkeitsstellen von L P -f.s. endlich ist. Schließlich folgt, dass

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t \frac{1}{L_s} d[L, W]_s = W_t - \int_0^t \vartheta_s ds = W_t^Q$$

für alle $t \in [0, T]$, d.h. W^Q ist ein stetiges lokales Q -Martingal. Gleiches folgt analog für \bar{W}^Q . Da sowohl $\int_0^t \vartheta_s ds$ als auch $\int_0^t \bar{\vartheta}_s ds$ Prozesse von lokal beschränkter Variation sind, ergibt sich schließlich für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} [W^Q, W^Q]_t &= [W, W]_t = t, \\ [\bar{W}^Q, \bar{W}^Q]_t &= [\bar{W}, \bar{W}]_t = t \end{aligned}$$

¹⁹vgl. [Pro05] Theorem II.6.29, S.75.

und

$$[W^Q, \bar{W}^Q]_t = [W, \bar{W}]_t = 0.$$

Wie bereits oben erwähnt, folgt nun mit Hilfe der Levy-Charakterisierung für Wienerprozesse, dass (W^Q, \bar{W}^Q) ein zweidimensionaler Q -Wienerprozess ist.

(ii) Die Punktprozesse

Der Beweis für diesen Teil funktioniert genau so, wie der von Satz A.17. Man zeigt, dass der Punktprozess $(T_n^+, U_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ die Q -Charakteristik $(\lambda^+ \psi_t^+, g^+(u) \nu^+(du))$ besitzt. Da der Beweis für den zweiten Punktprozess völlig gleich ist, reicht dies, um Aussage 2 zu beweisen.

Es muss also

$$E^Q \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(s, u) p^+(ds, du) \right) = E^Q \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(s, u) \lambda^+ \psi_s^+ g^+(u) \nu^+(du) ds \right)$$

für jeden nichtnegativen \mathcal{F}_t -previsiblen Prozess H (vgl. Definition A.10) nachgewiesen werden. Hierbei bezeichne E^Q den Erwartungswert bzgl. des durch L_T definierten W -Maßes Q , woraus sich auch direkt die Gleichung

$$E^Q \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(s, u) p^+(ds, du) \right) = E \left(L_T \int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(s, u) p^+(ds, du) \right)$$

ergibt. Weiter ist²⁰

$$E \left(L_T \int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(s, u) p^+(ds, du) \right) = E \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_s H(s, u) p^+(ds, du) \right). \quad (3.30)$$

Da N^+ unabhängig von N^- ist, sind die Sprungzeiten der beiden Poissonprozesse P -f.s. verschieden. Somit gilt für jedes T_n^+ auf $\{T_n^+ < \infty\}$, dass

$$L_{T_n^+} = L_{T_n^+ -} \psi_{T_n^+}^+ g^+(U_n^+) \quad P\text{-f.s.}$$

Zusammen mit Satz A.15 folgt

$$\begin{aligned} (3.30) &= E \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_{s-} H(s, u) \psi_s^+ g^+(u) p^+(ds, du) \right) \\ &= E \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_{s-} H(s, u) \psi_s^+ g^+(u) \lambda^+ \nu^+(du) ds \right) \\ &= E \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} L_s H(s, u) \psi_s^+ g^+(u) \lambda^+ \nu^+(du) ds \right) \end{aligned}$$

²⁰Vgl. [Bre81] Theorem 19, Appendix A2.

$$\begin{aligned}
&= E \left(L_T \int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(s, u) \psi_s^+ g^+(u) \lambda^+ \nu^+(du) ds \right) \\
&= E^Q \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} H(s, u) \psi_s^+ g^+(u) \lambda^+ \nu^+(du) ds \right).
\end{aligned}$$

Zu 3: Per Definition ist das W-Maß Q risikoneutral, wenn $\bar{S}_t := e^{-rt} S_t$, $t \in [0, T]$ ein lokales Q -Martingal ist. Mit partieller Integration und (3.11) ergibt sich, dass

$$\begin{aligned}
d\bar{S}_t = S_{t-} &\left((\mu - r + f_t^+ - f_t^-) dt + \sqrt{v_t} (\rho dW_t + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t) \right. \\
&\left. + (\exp(U_t^+) - 1) dN_t^+ + (\exp(-U_t^-) - 1) dN_t^- \right). \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Durch Aussage 2 ist bekannt, dass die Punktprozesse $(T_n^\pm, U_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Zählmaßen $p^\pm(dt, du)$ die Q -Charakteristik $(\psi_t^\pm \lambda^\pm, g^\pm(u) \nu^\pm(du))$ haben. Insbesondere haben die $(U_i^\pm)_{i \in \mathbb{N}}$ unter Q die Verteilung $g^\pm \nu^\pm$. Mit den gleichen Argumenten wie in (2.12) und unter Bedingung (3.18) erhält man

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\exp(\pm u) - 1) \lambda^\pm \psi_s^\pm g^\pm(u) \nu^\pm(du) ds < \infty \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Aus Korollar A.16 folgt dann, dass

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_t^+ &:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\exp(u) - 1) q^+(ds, du) \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\exp(u) - 1) p^+(ds, du) - \underbrace{\int_0^t \lambda^+ \psi_s^+ \int_{\mathbb{R}} (\exp(u) - 1) g^+(u) \nu^+(du) ds}_{E^Q(\exp(U_1^+) - 1)} \\
&= \int_0^t (\exp(U_s^+) - 1) dN_s^+ - \int_0^t \bar{u}_+ \lambda^+ \psi_s^+ ds, \quad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

ein lokales Q -Martingal ist. Analog erhält man dasselbe Resultat für

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_t^- &:= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\exp(-u) - 1) q^-(ds, du) \\
&= \int_0^t (\exp(-U_s^-) - 1) dN_s^- - \int_0^t \bar{u}_- \lambda^- \psi_s^- ds.
\end{aligned}$$

In differentieller Schreibweise bedeutet das

$$d\widehat{M}_t^+ = (\exp(U_t^+) - 1) dN_t^+ - \bar{u}_+ \psi_t^+ \lambda^+ dt, \quad (3.32)$$

$$d\widehat{M}_t^- = (\exp(-U_t^-) - 1) dN_t^- - \bar{u}_- \psi_t^- \lambda^- dt. \quad (3.33)$$

Außerdem ist (W^Q, \bar{W}^Q) ein zweidimensionaler Q -Wienerprozess mit

$$dW_t^Q = dW_t - \vartheta_t dt \quad \text{und} \quad d\bar{W}_t^Q = d\bar{W}_t - \bar{\vartheta}_t dt. \quad (3.34)$$

Setzt man (3.32) bis (3.34) in Gleichung (3.31) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} d\bar{S}_t = & S_{t-} \left(\mu - r + f_t^+ - f_t^- + \sqrt{v_t} \left(\rho \vartheta_t + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{\vartheta}_t \right) + \bar{u}_+ \psi_t^+ \lambda^+ + \bar{u}_- \psi_t^- \lambda^- \right) dt \\ & + S_{t-} \sqrt{v_t} \rho dW_t^Q + S_{t-} \sqrt{v_t} \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t^Q + S_{t-} d\widehat{M}_t^+ + S_{t-} d\widehat{M}_t^-. \end{aligned}$$

Mit W^Q , \bar{W}^Q , \widehat{M}^+ und \widehat{M}^- ist auch \bar{S} ein lokales Martingal, wenn der Driftterm P -f.s. konstant gleich 0 ist, d.h. wenn

$$\mu + f_t^+ - f_t^- + \sqrt{v_t} \left(\rho \vartheta_t + \sqrt{1 - \rho^2} \bar{\vartheta}_t \right) + \bar{u}_+ \psi_t^+ \lambda^+ + \bar{u}_- \psi_t^- \lambda^- = r,$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. □

Satz 3.11 liefert unter der Voraussetzung $E(L_T) = 1$ also eine ganze Klasse von möglichen risikoneutralen Maßen, welche nur durch die noch recht allgemeinen Bedingungen (3.18) bis (3.20) und (3.22) beschränkt wird. In der Einleitung zu diesem Abschnitt wurde bereits darauf hingewiesen, dass die Bedingungen nicht ausreichen, um eine analytisch handhabbare Klasse von risikoneutralen Maßen zu erhalten, weshalb weitere Beschränkungen benötigt werden. Diese werden im nächsten Satz genauer untersucht. Dabei wird wiederum unterstellt, dass die Bedingung $E(L_T) = 1$ erfüllt ist, was natürlich zunächst einmal gar nicht der Fall sein muss, sondern streng genommen vorher nachzuweisen wäre. Letzteres wird dann in Satz 3.13 nachgeholt.

Satz 3.12. *Gegeben sei die Situation aus Satz 3.11 mit*

$$\vartheta_t := c\sqrt{v_t}, \quad c < \frac{\kappa_v}{\sigma_v}, \quad (3.35)$$

$$\bar{\lambda}_t^+ := \lambda^+ \psi_t^+ := \theta_+ - \sigma_+ f_t^+, \quad \theta_+ > 0, \quad \sigma_+ \geq 0, \quad (3.36)$$

$$\bar{\lambda}_t^- := \lambda^- \psi_t^- := \theta_- - \sigma_- f_t^-, \quad \theta_- > 0, \quad \sigma_- \geq 0, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_t := & - \frac{\mu - r + \bar{u}_+ \theta_+ + \bar{u}_- \theta_- + f_t^+ (1 - \bar{u}_+ \sigma_+) - f_t^- (1 + \bar{u}_- \sigma_-)}{\sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{v_t}} \\ & - \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} c \sqrt{v_t}, \end{aligned} \quad (3.38)$$

für alle $t \in [0, T]$ und

$$g^\pm(u) := \frac{\bar{\xi}_\pm}{\xi_\pm} \exp\left((- \bar{\xi}_\pm + \xi_\pm)u\right), \quad u \in \mathbb{R}, \quad \text{mit } \bar{\xi}_+ > 1, \bar{\xi}_- > 0. \quad (3.39)$$

Dann gilt:

1. $(v_t)_{t \in [0, T]}$ ist auch unter Q ein WDP, dessen Parameter die Stabilitätsbedingung aus Satz 3.6 erfüllen.
2. Die $(U_i^\pm)_{i \in \mathbb{N}}$ sind unter Q jeweils unabhängig, identisch $\text{Exp}(\bar{\xi}_\pm)$ -verteilt.
3. Q ist ein äquivalentes Martingalmaß.

Beweis: Zunächst sei festgehalten, dass sowohl $(\bar{\lambda}_t^\pm)_{t \in [0, T]}$ als auch $(\vartheta_t)_{t \in [0, T]}$ \mathcal{F}_t -adaptierte previsible Prozesse sind, die die Bedingungen (3.19) (vgl. Beweis zu Satz 2.10) und (3.20) erfüllen. Des Weiteren ergibt sich durch die Previsibilität und die \mathcal{F}_t -Adaptiertheit der Prozesse ϑ , f^+ und f^- auch die von $\bar{\vartheta}$. Außerdem gilt

$$\int_0^t (\bar{\vartheta}_s)^2 ds < \infty \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T]$$

da $0 < v_t < \infty$ P -f.s. und

$$f_t^\pm \leq \sum_{i=1}^{N_t^\pm} U_i h'(0) < \infty \quad P\text{-f.s.} \quad \text{für alle } t \in [0, T].$$

Es sind also alle Voraussetzungen an $\bar{\vartheta}$ aus Satz 3.11 erfüllt. Satz 3.11 kann deshalb unter der Annahme, dass $E(L_T) = 1$ gilt, angewendet werden.

Zu 1: Für v gilt per Definition

$$dv_t = \kappa_v(\theta_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t. \quad (3.40)$$

Nach Satz 3.11 ist W^Q mit

$$W_t^Q = W_t - \int_0^t \vartheta_s ds = W_t - \int_0^t c \sqrt{v_s} ds, \quad t \in [0, T]$$

ein Q -Wienerprozess. Einsetzen in (3.40) liefert

$$\begin{aligned} dv_t &= \kappa_v(\theta_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} \left(dW_t^Q + c \sqrt{v_t} dt \right) \\ &= (\kappa_v(\theta_v - v_t) + \sigma_v c v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^Q \\ &= (\kappa_v \theta_v - (\kappa_v - \sigma_v c) v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^Q. \end{aligned}$$

Da $\kappa_v, \sigma_v > 0$ und $c < \frac{\kappa_v}{\sigma_v}$ ist auch $\kappa_v - \sigma_v c > 0$. Dann lässt sich obige Gleichung umformen zu

$$dv_t = (\kappa_v - \sigma_v c) \left(\frac{\kappa_v \theta_v}{\kappa_v - \sigma_v c} - v_t \right) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^Q.$$

Demnach ist $(v_t)_{t \in [0, T]}$ ein WDP bzgl. Q mit Parametern

$$\bar{\kappa}_v = \kappa_v - \sigma_v c, \quad \bar{\theta}_v = \frac{\kappa_v \theta_v}{\kappa_v - \sigma_v c} \quad \text{und} \quad \sigma_v \quad \text{mit} \quad \bar{\kappa}_v, \bar{\theta}_v, \sigma_v > 0.$$

Schließlich erhält man leicht

$$2\bar{\kappa}_v\bar{\theta}_v = 2(\kappa_v - \sigma_v c) \frac{\kappa_v \theta_v}{\kappa_v - \sigma_v c} = 2\kappa_v \theta_v \geq \sigma_v^2,$$

wodurch die Stabilitätsbedingung erfüllt ist.

Zu 2: Gemäß Satz 3.11 haben die Punktprozesse $(T_n^\pm, U_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ die (Q, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\bar{\lambda}_t^\pm, \bar{\nu}^\pm(du))$, mit $\bar{\nu}^\pm := g^\pm \nu^\pm$. Insbesondere ist $\bar{\nu}^\pm$ also konstant bzgl. t . Daraus folgt, dass die $(U_i^\pm)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig, identisch $\bar{\nu}^\pm$ -verteilt sind. Aus der genauen Gestalt von g und der Tatsache, dass $\nu^\pm = \text{Exp}(\xi_\pm)$, folgt $\bar{\nu}^\pm = \text{Exp}(\bar{\xi}_\pm)$. Insbesondere erfüllt g die Bedingungen aus (3.18).

Zu 3: Aus Satz 3.11 folgt, dass Q risikoneutral ist, wenn die Gleichgewichtsbedingung (3.22) erfüllt ist, also

$$r = \mu + f_t^+ - f_t^- + \rho c v_t + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{v_t} \bar{\vartheta}_t + \bar{u}_+(\theta_+ - \sigma_+ f_t^+) + \bar{u}_-(\theta_- - \sigma_- f_t^-),$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. Da $v_t > 0$ P -f.s., kann man dies umformen zu

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_t &= -\frac{\mu - r + f_t^+ - f_t^- + \bar{u}_+(\theta_+ - \sigma_+ f_t^+) + \bar{u}_-(\theta_- - \sigma_- f_t^-)}{\sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{v_t}} - \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} c \sqrt{v_t} \\ &= -\frac{\mu - r + \bar{u}_+ \theta_+ + \bar{u}_- \theta_- + f_t^+(1 - \bar{u}_+ \sigma_+) - f_t^-(1 + \bar{u}_- \sigma_-)}{\sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{v_t}} - \frac{\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}} c \sqrt{v_t}, \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. □

Wie bereits erwähnt, ist es nicht von vornherein klar, dass mit Hilfe der Prozesse aus Satz 3.12 tatsächlich ein W -Maß definiert werden kann, d.h. dass dann $EL_T = 1$ gilt. Diese Eigenschaft wird im folgenden Satz untersucht.

Satz 3.13. *Es seien $\vartheta, \bar{\vartheta}, \bar{\lambda}^\pm, g^\pm$ wie in (3.35) bis (3.39). Dann gilt $E(L_T) = 1$, mit $(L_t)_{t \in [0, T]}$ wie in (3.21).*

Beweis: Die Vorgehensweise in diesem Beweis ist angelehnt an die aus Schritt 2 und 3 im Beweis zu Satz 2.10. Man betrachtet also wieder eine Stoppzeitenfolge

$$\tau_n := \inf \{t \geq 0 \mid |f_{t+}^+| > n \text{ oder } |f_{t+}^-| > n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

und definiert L^n analog zu L mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \vartheta_t^n &:= \vartheta_t \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(t), \quad t \in [0, T], \\ \bar{\vartheta}_t^n &:= \bar{\vartheta}_t \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(t), \quad t \in [0, T], \\ \phi_\pm^n(t, u) &:= \psi_t^\pm g^\pm(u) \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(t) + \mathbf{1}_{(\tau_n, T]}(t), \quad t \in [0, T], \quad u \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei wieder Q^n das durch L_T^n definierte Maß. Wie in Schritt 3 im Beweis zu Satz 2.10 folgt dann $Q^n(\tau_n < T) \rightarrow 0$ P -f.s. für $n \rightarrow \infty$ und damit wie in (2.15),

dass $EL_T = 1$, falls $EL_T^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es bleibt also zu zeigen, dass $EL_T^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren Konstanten $C_n^1, C_n^2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\left| \bar{\vartheta}_t^n \right| \leq \left| -\frac{C_n^1}{\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v_t}} - \frac{\rho c \sqrt{v_t}}{\sqrt{1-\rho^2}} \right| := \left| \hat{\vartheta}_t^n \right|, \quad \text{für alle } t \in [0, T] \quad (3.41)$$

und

$$\phi_n^\pm(t, u) \leq C_n^2 g^\pm(u) + 1, \quad \text{für alle } t \in [0, T] \quad \text{und } u \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

Sei des Weiteren für $n \in \mathbb{N}$

$$I_n^\pm := \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left(\phi_n^\pm(t, u) \log \left(\phi_n^\pm(t, u) \right) - \left(\phi_n^\pm(t, u) - 1 \right) \right) \lambda^\pm dt \nu^\pm(du).$$

Dann ist L^n ein Martingal auf $[0, T]$, wenn²¹

$$E \left(\exp \left(\frac{1}{2} [L^n, L^n]_T^c + I_n^+ + I_n^- \right) \right) < \infty. \quad (3.43)$$

Da

$$[L^n, L^n]_T^c = \int_0^T (\vartheta_t^n)^2 dt + \int_0^T (\bar{\vartheta}_t^n)^2 dt \stackrel{(3.41)}{\leq} \int_0^T (\vartheta_t^n)^2 dt + \int_0^T (\hat{\vartheta}_t^n)^2 dt$$

und $\hat{\vartheta}$ unabhängig ist von I_n^\pm , ist (3.43) insbesondere dann erfüllt, wenn

$$E \left(\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T (\vartheta_t^n)^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T (\hat{\vartheta}_t^n)^2 dt \right) \right) E \left(\exp \left(I_n^+ + I_n^- \right) \right) < \infty \quad (3.44)$$

Die Abschätzung des ersten Erwartungswertes gegen unendlich entspricht dem Nachweis der *Novikov-Bedingung* im Heston-Modell, bei dem auf die Verteilungseigenschaften des Wurzel-Diffusionsprozess zurückgegriffen werden kann.²² Die Abschätzung des zweiten Erwartungswertes ergibt sich aus (3.42) und der speziellen Gestalt von g^\pm . \square

Satz 3.13 zeigt also, dass alle potenziellen W-Maße, die gemäß Satz 3.11 definiert werden und die Bedingungen aus Satz 3.12 erfüllen, auch tatsächlich äquivalente Martingalmaße sind. Dies ermöglicht es, das Shot Noise-Modell unter der eben beschriebenen Klasse von Martingalmaßen zu parametrisieren.

²¹Vgl. [LM78] Theorem IV.3.

²²Für Details vgl. [WH06].

3.4 Das risikoneutrale Modell

Dieser Abschnitt fasst die Ergebnisse aus dem letzten Abschnitt zusammen und verdeutlicht deren Konsequenzen für das SNSVM. Sei dazu mit $\mathcal{M}_P(S)$ die Klasse der zu P äquivalenten W -Maße Q bezeichnet, welche gemäß Satz 3.11 definiert werden und die Bedingungen aus Satz 3.12 erfüllen.

Satz 3.14. *Gegeben sei ein SNSVM wie in Definition 3.8 und $Q \in \mathcal{M}_P(S)$, dann gilt für $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} dS_t = & S_{t-} \left(\left(r - \bar{u}_+ \bar{\lambda}_t^+ - \bar{u}_- \bar{\lambda}_t^- \right) dt + \sqrt{v_t} \left(\rho dW_t^Q + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t^Q \right) \right. \\ & \left. + \left(\exp(U_t^+) - 1 \right) dN_t^+ + \left(\exp(-U_t^-) - 1 \right) dN_t^- \right), \quad S_0 = x, \quad (3.45) \\ dv_t = & \bar{\kappa}_v (\bar{\theta}_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^Q, \quad v_0 = w, \end{aligned}$$

mit

$$\bar{u}_+ = \frac{\xi_+}{\xi_+ - 1} - 1, \quad \bar{u}_- = \frac{\xi_-}{\xi_- + 1} - 1, \quad \bar{\lambda}_t^+ = (\theta_+ - \sigma_+ f_t^+), \quad \bar{\lambda}_t^- = (\theta_- - \sigma_- f_t^-).$$

Dabei gilt

- W^Q, \bar{W}^Q sind Q -Wienerprozesse.
- N^\pm sind Zählprozesse mit Q -Intensität $\bar{\lambda}^\pm$.
- Die Sprünge $(U_i^\pm)_{i \in \mathbb{N}}$ sind unter Q unabhängig, identisch $\text{Exp}(\bar{\xi}_\pm)$ -verteilt.
- $r \in \mathbb{R}$, $\rho \in [-1, 1]$, $\bar{\xi}_+ > 1$, $\bar{\kappa}_v, \bar{\theta}_v, \sigma_v, w, x, \bar{\xi}_-, \theta_\pm, \sigma_\pm > 0$ und $2\bar{\kappa}_v \bar{\theta}_v \geq \sigma_v^2$.

Beweis: Die Aussage des Satzes ergibt sich direkt aus den Sätzen 3.11 und 3.12. \square

Mit Satz 3.14 erhält man also eine vollständige Parametrisierung des SNSVM unter der Klasse $\mathcal{M}_P(S)$. Eine in der finanzmathematischen Literatur übliche Vorgehensweise ist, anstelle des Preises S_t , $t \in [0, T]$ den logarithmierten Preis $s_t := \log(S_t)$, $t \in [0, T]$ zu betrachten.

Korollar 3.15. *Gegeben sei die Situation aus Satz 3.14. Dann hat der Log-Preis $s_t = \log(S_t)$ folgende Dynamik unter Q :*

$$\begin{aligned} ds_t = & \left(r - \bar{u}_+ \bar{\lambda}_t^+ - \bar{u}_- \bar{\lambda}_t^- - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} \left(\rho dW_t^Q + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t^Q \right) \\ & + U_t^+ dN_t^+ - U_t^- dN_t^-. \end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Ito-Formel. $(S_t)_{t \in [0, T]}$ ist strikt positiv, das bedeutet insbesondere, dass $(s_t)_{t \in [0, T]}$ wohldefiniert ist. Die Ito-Formel kann also auf die Funktion \log und das Semimartingal S angewendet werden und man erhält für $t \in [0, T]$

$$s_t - s_0 = \int_0^t \frac{1}{S_{s-}} dS_s + \int_0^t -\frac{1}{2(S_{s-})^2} d[S, S]_s^c + \sum_{\substack{0 < s \leq t, \\ \Delta S_s \neq 0}} \log S_s - \log S_{s-} - \frac{1}{S_{s-}} \Delta S_s. \quad (3.46)$$

Nun sei zunächst festgehalten, dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\Delta S_{T_i^+} = S_{T_i^+} \left(\exp(U_i^+) - 1 \right) \quad \text{und} \quad \Delta S_{T_i^-} = S_{T_i^-} \left(\exp(-U_i^-) - 1 \right)$$

gilt. Damit folgt einerseits

$$\frac{1}{S_{T_i^+}} \Delta S_{T_i^+} = \exp(U_i^+) - 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{S_{T_i^-}} \Delta S_{T_i^-} = \exp(-U_i^-) - 1$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \log(S_{T_i^\pm}) - \log(S_{T_i^\pm-}) &= \log\left(S_{T_i^\pm-} + \Delta S_{T_i^\pm}\right) - \log(S_{T_i^\pm-}) \\ &= \log\left(S_{T_i^\pm-} \exp(\pm U_i^\pm)\right) - \log(S_{T_i^\pm-}) \\ &= \pm U_i^\pm, \end{aligned}$$

Da die Sprungzeitpunkte von S mit denen von N^+ und N^- übereinstimmen, ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{0 < s \leq t, \\ \Delta S_s \neq 0}} \log(S_s) - \log(S_{s-}) - \frac{1}{S_{s-}} \Delta S_s \\ &= \int_0^t U_s^+ - \left(\exp(U_s^+) - 1\right) dN_s^+ + \int_0^t -U_s^- - \left(\exp(-U_s^-) - 1\right) dN_s^-. \quad (3.47) \end{aligned}$$

Mit (3.45), (3.47) und $d[S, S]_t^c = S_{t-}^2 v_t dt$ erhält man aus (3.46)

$$\begin{aligned} s_t &= s_0 + \int_0^t r - \bar{u}_+ \bar{\lambda}_s^+ - \bar{u}_- \bar{\lambda}_s^- ds + \int_0^t \rho \sqrt{v_s} dW_s^Q + \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{v_s} d\bar{W}_s^Q \\ &\quad + \int_0^t (\exp(U_s^+) - 1) dN_s^+ + \int_0^t (\exp(-U_s^-) - 1) dN_s^- + \int_0^t -\frac{1}{2} v_s ds \\ &\quad + \int_0^t U_s^+ - (\exp(U_s^+) - 1) dN_s^+ + \int_0^t -U_s^- - (\exp(-U_s^-) - 1) dN_s^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= s_0 + \int_0^t r - \bar{u}_+ \bar{\lambda}_s^+ - \bar{u}_- \bar{\lambda}_s^- - \frac{1}{2} v_s ds + \int_0^t \sqrt{v_s} dW_s^Q + \int_0^t \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{v_s} d\bar{W}_s^Q \\
&\quad + \int_0^t U_s^+ dN_s^+ - \int_0^t U_s^- dN_s^-,
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Korollar 3.16. *Gegeben sei die Situation aus Satz 3.14 mit $h^\pm(t) = \exp(-\kappa_\pm t)$, $\kappa_\pm \geq 0$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
ds_t &= \left(r - \bar{u}_+ \tilde{\lambda}_{t-}^+ - \bar{u}_- \tilde{\lambda}_{t-}^- - \frac{1}{2} v_t \right) dt + \sqrt{v_t} \left(\rho dW_t^Q + \sqrt{1 - \rho^2} d\bar{W}_t^Q \right) \\
&\quad + U_t^+ dN_t^+ - U_t^- dN_t^-, \quad s_0 = \log(x),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$dv_t = \bar{\kappa}_v (\bar{\theta}_v - v_t) dt + \sigma_v \sqrt{v_t} dW_t^Q, \quad v_0 = w, \tag{3.49}$$

$$d\tilde{\lambda}_t^+ = \kappa_+ \left(\theta_+ - \tilde{\lambda}_{t-}^+ \right) + \sigma_+ \kappa_+ U_t^+ dN_t^+, \quad \tilde{\lambda}_0^+ = \theta_+, \tag{3.50}$$

$$d\tilde{\lambda}_t^- = \kappa_- \left(\theta_- - \tilde{\lambda}_{t-}^- \right) + \sigma_- \kappa_- U_t^- dN_t^-, \quad \tilde{\lambda}_0^- = \theta_-, \tag{3.51}$$

wobei $\bar{\lambda}_t^\pm = \tilde{\lambda}_{t-}^\pm$, $t \in [0, T]$.

Beweis: Die ersten beiden Gleichungen erhält man direkt aus Satz 3.14 und Korollar 3.15 für den Fall, dass $\tilde{\lambda}_{t-}^\pm = \bar{\lambda}_t^\pm$. Nach Satz 3.14 gilt außerdem

$$\bar{\lambda}_t^+ = \theta_+ - \sigma_+ \sum_{i=1}^{N_{t-}^+} -\kappa_+ \exp(-\kappa_+(t - T_i^+)) U_i^+$$

und

$$\bar{\lambda}_t^- = \theta_- - \sigma_- \sum_{i=1}^{N_{t-}^-} -\kappa_- \exp(-\kappa_-(t - T_i^-)) U_i^-.$$

Wie in Beispiel 2.14 ergeben sich daraus die Gleichungen (3.50) und (3.51) und $\tilde{\lambda}_{t-}^\pm = \bar{\lambda}_t^\pm$, $t \in [0, T]$. \square

Die Vorgehensweise $\tilde{\lambda}^\pm$ anstelle von $\bar{\lambda}^\pm$ zu betrachten, ist der Tatsache geschuldet, dass die Intensität eines Punktprozesses per Definition previsibel ist. Die durch die Gleichungen (3.50) und (3.51) beschriebenen Prozesse sind jedoch rechtsstetig und deshalb im Allgemeinen nicht previsibel. $\bar{\lambda}^\pm$ hingegen, als deren linksstetige Version ist previsibel. Da die Punktprozesse N^\pm Q -nichtexplodierend sind, gilt $\bar{\lambda}_t^\pm \neq \tilde{\lambda}_t^\pm$ für nur endlich viele $t \in [0, T]$.

Nutzt man die spezielle Gestalt einer exponentiellen Wirkungsfunktion aus, erhält man, wie in Korollar 3.16 gezeigt, eine verhältnismäßig einfache Gestalt des

SNSVM unter einem risikoneutralen Maß $Q \in \mathcal{M}_P(S)$. Genauer gesagt erhält man eine sog. *affine Sprungdiffusion*, wie die folgende Definition und der nachfolgende Satz zeigen werden.

Definition 3.17. Es sei X eine d -dimensionale Sprung-Diffusion auf dem Zustandsraum $D \subset \mathbb{R}^d$ mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_{s-}) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma^i(X_{s-}) dW_s^i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \widehat{U}_t^j dN_t^j,$$

wobei zusätzlich folgende Bedingungen erfüllt sind:

- Für $\mu : D \rightarrow \mathbb{R}^d$ gilt $\mu(x) = K_0 + K_1 \cdot x$, mit $K = (K_0, K_1) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d \times d}$.
- Für $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^d) : D \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ist $(\sigma(x)\sigma(x)^T)_{ij} = (H_0)_{ij} + (H_1)_{ij} \cdot x$, mit $H = (H_0, H_1) \in \mathbb{R}^{d \times d} \times \mathbb{R}^{d \times d \times d}$, wobei $H_1 = (H_1^{(1)}, \dots, H_1^{(d)})$ und $H^{(k)}$ für jedes $k \in \{1, \dots, d\}$ eine $d \times d$ -Matrix mit $H_{ij}^{(k)} = H(i, j, k)$ ist.
- Für $j = 1, \dots, m$ hat $(N_t^j)_{t \geq 0}$ die Intensität $(\lambda^j(X_{t-}))_{t \geq 0}$. Dabei gilt $\lambda^j(x) = l_0^j + l_1^j \cdot x$, $l^i = (l_0^i, l_1^i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ und die Sprünge $\widehat{U}_i^j = (\widehat{U}_{i,1}^j, \dots, \widehat{U}_{i,d}^j)$, $i \in \mathbb{N}$ sind unabhängig identisch $\hat{\nu}^j$ -verteilt ($\hat{\nu}^j$ Verteilung auf \mathbb{R}^d) mit analytischer Transformierten $\varphi^j(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(zu) d\hat{\nu}^j(u)$, $z \in \mathbb{C}^d$.²³

Dann nennt man X *affine Sprung-Diffusion (kurz ASD)* mit *Charakteristik* $\chi = (K, H, l, \varphi)$, wobei $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$.

Bemerkung 3.18.

1. H_1 kann als d -dimensionaler Vektor verstanden werden, dessen Einträge $d \times d$ -Matrizen sind. $H_{i,j}^{(k)}$ bezeichnet also den Eintrag der k -ten Matrix an der Stelle (i, j) .
2. Eine mögliche Erweiterung der Definition einer affinen Sprungdiffusion ist die Zeitabhängigkeit der Koeffizienten K, H und l .²⁴ Da dies hier jedoch nicht benötigt wird, genügt auch die spezielle Version aus Definition 3.17. Des Weiteren wäre nach einer allgemeineren Definition auch eine affine Struktur der Zinsrate r zulässig.²⁵ Die Zinsrate im SNSVM (vgl. Definition 3.8) wird jedoch als konstant angenommen, weshalb die spezielle Definition ausreicht.

²³Details zu analytischen Transformierten finden sich in [Als05] Kapitel VII.

²⁴Vgl. Appendix B in [DPS00].

²⁵Vgl. [DPS00] Abschnitt 2.2.

3. λ_t hängt von $X_{t-} = \lim_{s \uparrow t} X_s$ und nicht von X_t selbst ab. Das liegt daran, dass die Intensität eines Punktprozesses gemäß ihrer Definition ein previsibler Prozess ist. X ist jedoch nicht notwendigerweise previsibel im Gegensatz zu dessen linksstetiger Version. Bei den Funktionen μ und σ kann auch X_t eingesetzt werden, da aufgrund der Stetigkeit der Integratoren und der Tatsache, dass $X_{t-} \neq X_t$ nur für P -f.s. endlich viele $t \in [0, T]$ gilt, die Integrale übereinstimmen.

Satz 3.19. *Gegeben sei ein SNSVM wie in Definition 3.8 mit $h^\pm(t) = \exp(-\kappa_\pm t)$, $t \geq 0$, $\kappa_\pm \geq 0$, und $Q \in \mathcal{M}_P(S)$. Dann ist $(X_t)_{t \in [0, T]} = (s_t, v_t, \tilde{\lambda}_t^+, \tilde{\lambda}_t^-)_{t \in [0, T]}^\top$ unter Q eine affine Sprungdiffusion im Sinne von Definition 3.17 mit Charakteristik*

$$\chi = (K, H, l^+, l^-, \varphi^+, \varphi^-), \quad (3.52)$$

wobei

$$K_0 = \begin{pmatrix} r \\ \bar{\kappa}_v \bar{\theta}_v \\ \kappa_+ \theta_+ \\ \kappa_- \theta_- \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\bar{u}^+ & -\bar{u}^- \\ 0 & -\bar{\kappa}_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_- \end{pmatrix},$$

$$H_0 = 0, \quad H_1 = \left(0 \left| \begin{array}{cccc} 1 & \rho\sigma_v & 0 & 0 \\ \rho\sigma_v & \sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| 0 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right),$$

$$l_0^+ = 0, \quad l_0^- = 0, \quad l_1^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_1^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^+(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\bar{\xi}_+}{\bar{\xi}_+ - z_1 - \kappa_+ \sigma_+ z_3}, \quad \varphi^-(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{\bar{\xi}_-}{\bar{\xi}_- + z_1 - \kappa_- \sigma_- z_4}$$

Beweis: Die Gestalt von K_0, K_1, l_0^\pm und l_1^\pm kann man direkt aus dem System der stochastischen Differentialgleichungen in Korollar 3.16 ablesen. Zudem ist

$$\sigma(s_t, v_t, \tilde{\lambda}_t^+, \tilde{\lambda}_t^-) = \sqrt{v_t} \begin{pmatrix} \rho & \sqrt{1 - \rho^2} & 0 & 0 \\ \sigma_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \sigma(X_t)\sigma(X_t)^\top &= \sqrt{v_t} \begin{pmatrix} \rho & \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 \\ \sigma_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \sqrt{v_t} \begin{pmatrix} \rho & \sigma_v & 0 & 0 \\ \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= v_t \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_v & 0 & 0 \\ \rho\sigma_v & \sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

woraus sich direkt H_0 und H_1 ergeben. Es bleibt noch die spezielle Gestalt der Transformierten nachzuweisen. Dabei genügt es nur die Aussage für φ^+ zu zeigen, da der Beweis für φ^- fast völlig identisch ist.

Sei zunächst festgehalten, dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\widehat{U}_i^+ = (U_i^+, 0, \kappa_+ \sigma_+ U_i^+, 0) \quad (3.53)$$

gilt, also insbesondere $\widehat{U}_{i,3}^+ = \kappa_+ \sigma_+ \widehat{U}_{i,1}^+$. Bezeichnet $\hat{\nu}^+$ die Verteilung der $(\widehat{U}_i^+)_{i \in \mathbb{N}}$, $\bar{\nu}^+ = g^+ \nu^+$ die Verteilung der $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $\bar{\varphi}^+$ die analytische Transformierte von $\bar{\nu}^+$, dann folgt

$$\begin{aligned} \varphi^+(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \int_{\mathbb{R}^4} \exp(z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 + z_4 u_4) \hat{\nu}^+(du_1, du_2, du_3, du_4) \\ &\stackrel{(3.53)}{=} \int_{\mathbb{R}^4} \exp(z_1 u_1 + z_2 0 + z_3 \sigma_+ \kappa_+ u_1 + z_4 0) \hat{\nu}^+(du_1, du_2, du_3, du_4) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(z_1 u_1 + z_3 \sigma_+ \kappa_+ u_1) \bar{\nu}^+(du_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp(u_1 (z_1 + \sigma_+ \kappa_+ z_3)) \bar{\nu}^+(du_1) \\ &= \bar{\varphi}^+(z_1 + \sigma_+ \kappa_+ z_3). \end{aligned}$$

Mit dem Hinweis, dass $\bar{\nu}^+$ eine Exponentialverteilung mit Parameter ξ_+ ist, folgt nun die Behauptung. \square

Die Erkenntnis, dass das SNSVM mit exponentiellen Wirkungsfunktionen unter jedem $Q \in \mathcal{M}_P(S)$ eine affine Sprung-Diffusion beschreibt, ermöglicht es bei der Bewertung von Derivaten auf eine entsprechende Theorie für affine Sprung-Diffusionen zurückzugreifen, die in einer Arbeit von Duffie et al. (2000) beschrieben wurde. Genau dieser Ansatz wird im nächsten Kapitel erläutert um ihn schließlich auf das SNSVM anzuwenden.

4 Optionsbewertung

Im vorangegangenen Kapitel wurde ein Shot Noise-Finanzmarktmodell mit stochastischer Volatilität vorgestellt. Ausgehend von der Modellierung unter dem statistischen Maß konnte die Dynamik unter einer speziellen Klasse von äquivalenten Martingalmaßen parametrisiert werden. Es ist bekannt, dass die Bewertung eines Derivates mit Hilfe eines jeden dieser risikoneutralen Maße zu einem arbitragefreien Preis führt. Allerdings blieb die Frage danach, wie diese Bewertung durchgeführt werden kann bislang offen. In [DPS00] wurde diese Frage für eine spezielle Klasse von Sprung-Diffusionen, nämlich der der affinen Sprung-Diffusionen beantwortet. Wie Definition 3.17 zeigt, zeichnet sich eine affine Sprung-Diffusion grob gesagt dadurch aus, dass sowohl die Drift, die quadratische Volatilität als auch die Sprungintensität alle eine affine Struktur bzgl. des jeweiligen Zustandes der Sprung-Diffusion aufweisen. Unter dieser noch recht allgemeinen Klasse von Prozessen ist es dennoch möglich eine nahezu geschlossene Lösung für den Preis einiger Derivate zu bestimmen - „nahezu“ nur deshalb, da im allgemeinen Fall zur Berechnung des Preises ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen gelöst werden muss. Dessen analytische Lösung ist im Allgemeinen zwar nicht möglich, so aber immerhin dessen numerische.

Dieses Kapitel soll zunächst den oben zusammengefassten Ansatz von Duffie et. al. wiedergeben. Am Ende des Kapitels werden die Resultate auf das SNSVM angewendet.

4.1 Optionsbewertung in einem affinen Sprung-Diffusions-Modell

Der genannte Ansatz von Duffie et. al. zur Bewertung von Optionen beschränkt sich auf die Klasse der affinen Sprung-Diffusionen, vgl. Definition 3.17. Im nächsten Abschnitt wird sich herausstellen, dass unter gewissen technischen Voraussetzungen die charakteristische Funktion einer affinen Sprung-Diffusion X_T gegeben \mathcal{F}_t , $t \leq T$ eine affine Struktur besitzt. Genauer bedeutet das, dass

$$E(\exp(iuX_T)|\mathcal{F}_t) = \exp(\alpha(T-t, iu) + \beta(T-t, iu)X_t), \quad u \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

für Koeffizienten $\alpha(\cdot, iu)$ und $\beta(\cdot, iu)$ gilt. Diese Koeffizienten lassen sich durch ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen charakterisieren, was schließlich

eine Berechnung der Transformierten erlaubt.¹

Diesem eigentlich informellen Ansatz steht ein mathematisch exakter gegenüber, bei dem ein affiner Prozess ein Markovprozess ist, für den Gleichung (4.1) erfüllt ist. Unter gewissen Regularitätsbedingungen für α und β erfüllen diese eine allgemeine gewöhnliche Riccati-Differentialgleichung. Aus der speziellen Gestalt der gewöhnlichen Differentialgleichung ergibt sich schließlich, dass X eine Sprung-Diffusion ist, deren Koeffizienten eine affine Struktur wie in Definition 3.17 besitzen. Für Details sei auf [DFS03] verwiesen. Insbesondere in Theorem 2.12 wird die Rechtfertigung für die hier gewählte Vorgehensweise erbracht.

4.1.1 Die Transformierten einer affinen Sprung-Diffusion

Wie der Titel des Kapitels bereits verrät, soll eine Möglichkeit zur Optionsbewertung gefunden werden, wenn der Basiswert einer Option einer ASD folgt. Dafür muss man Aussagen über die Verteilung der ASD treffen können, was mit der im folgenden Satz eingeführten Transformierten ermöglicht wird.

Vorher sei noch angemerkt, dass die folgenden Resultate, im Sinne einer leichteren Notation, zunächst nur für den Fall $m = 1$ gezeigt werden, d.h. für den Fall, dass die Sprung-Diffusion nur von einem Punktprozess abhängt. Am Ende können die Ergebnisse problemlos auf den Fall $m > 1$ übertragen werden.

Satz und Definition 4.1. *Sei $r \in \mathbb{R}$, X eine d -dimensionale ASD mit Charakteristik $\chi = (K, H, l, \varphi)$ wie in Definition 3.17, die sich gutmütig verhalte, d.h. es sind folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) *Die gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$\dot{\beta}(t) = -K_1^\top \beta(t) - \frac{1}{2} \beta(t)^\top H_1 \beta(t) - l_1 (\varphi(\beta(t)) - 1) \quad (4.2)$$

und

$$\dot{\alpha}(t) = r - K_0 \beta(t) - \frac{1}{2} \beta(t)^\top H_0 \beta(t) - l_0 (\varphi(\beta(t)) - 1) \quad (4.3)$$

mit den Randbedingungen $\beta(T) = u$, $u \in \mathbb{C}^d$ und $\alpha(T) = 0$ werden eindeutig durch α und β gelöst.

(ii) $E \left(\int_0^T |\gamma_t| dt \right) < \infty$, wobei $\gamma_t = \Psi_{t-} (\varphi(\beta(t)) - 1) \lambda(X_{t-})$, $t \in [0, T]$.

(iii) $E \left(\int_0^T \beta(t)^2 \|\sigma(X_{t-})\|^2 \Psi_{t-}^2 dt \right) < \infty$, wobei $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm sei.

¹Ist X eine d -dimensionale ASD so bezeichne uX_T in 4.1, wie auch allgemein im Folgenden Kapitel xy , für $x, y \in \mathbb{C}^d$ stets das gewöhnliche euklidische Skalarprodukt, d.h. $xy = \sum_{k=1}^d x_k \bar{y}_k$ für $x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{C}^d$.

(iv) $E(|\Psi_T| < \infty)$,

wobei $\Psi_t := \Psi(X_t, t) := e^{-rt + \alpha(t) + \beta(t)X_t}$, $t \in [0, T]$.

Die Abbildung $\psi^\chi : \mathbb{C}^d \times D \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, die durch

$$\psi^\chi(u, X_t, t, T) := E\left(e^{-r(T-t) + uX_T} \middle| \mathcal{F}_t\right), \quad t \leq T \quad (4.4)$$

definiert wird, heißt Transformierte von χ und lässt sich berechnen durch:

$$\psi^\chi(u, x, t, T) = e^{\alpha(t) + \beta(t)x}.$$

Für den Beweis von Satz 4.1 werden zwei Hilfsresultate benutzt, die nachfolgend in Lemma 4.2 und 4.3 präsentiert werden. Mit Hilfe dieser ergibt sich dann, dass unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 Ψ ein Martingal ist. Der Rest des Beweises von Satz 4.1 stellt sich dann wie folgt dar:

Beweis: Angenommen Ψ ist ein Martingal auf $[0, T]$. Ψ_t ist also insbesondere integrierbar und es gilt $\Psi_t = E(\Psi_T | \mathcal{F}_t)$ für alle $t \in [0, T]$. Die Multiplikation beider Seiten mit $\exp(rt)$ liefert

$$\begin{aligned} e^{\alpha(t) + \beta(t) \cdot X_t} &= E\left(e^{rt} \Psi_T \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= E\left(e^{rt} e^{-rT\alpha(T) + \beta(T) \cdot X_T} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= E\left(e^{-r(T-t) + \alpha(T) + \beta(T) \cdot X_T} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\ &= E\left(e^{-r(T-t) + u \cdot X_T} \middle| \mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

wobei beim letzten Schritt die Randbedingungen von α und β ausgenutzt wurden, nämlich $\alpha(T) = 0$ und $\beta(T) = u$. Letztlich ergibt sich dann aus (4.4)

$$e^{\alpha(t) + \beta(t) \cdot X_t} = \psi^\chi(u, X_t, t, T).$$

□

Lemma 4.2. Seien $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Sprungzeiten von N . Dann ist unter den Voraussetzungen von Satz 4.1

$$J_t := \sum_{0 < T_i \leq t} \Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-} - \int_0^t \gamma_s ds \quad (4.5)$$

ein Martingal auf $[0, T]$.

Beweis: J ein Martingal auf $[0, T]$ ist, wenn neben Bedingung (ii) und (iv) für alle $0 \leq t \leq s \leq T$

$$E \left(\sum_{0 < T_i \leq s} \Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-} - \int_0^s \gamma_u du \middle| \mathcal{F}_t \right) = \sum_{0 < T_i \leq t} \Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-} - \int_0^t \gamma_u du$$

gilt, oder

$$E \left(\sum_{t < T_i \leq s} \Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-} \middle| \mathcal{F}_t \right) = E \left(\int_t^s \gamma_u du \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Um dieses nachzuweisen, sei zunächst festgehalten, dass aufgrund der Stetigkeit der Funktionen \exp , α und β

$$\begin{aligned} \Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-} &= e^{-rT_i + \alpha(T_i) + \beta(T_i)X_{T_i}} - e^{-r(T_i-) + \alpha(T_i-) + \beta(T_i-)X_{T_i-}} \\ &= e^{-rT_i + \alpha(T_i) + \beta(T_i)(X_{T_i-} + \Delta X_{T_i})} - e^{-rT_i + \alpha(T_i) + \beta(T_i)X_{T_i-}} \\ &= e^{-rT_i + \alpha(T_i) + \beta(T_i)X_{T_i-}} (e^{\beta(T_i)\Delta X_{T_i}} - 1) \\ &= \Psi_{T_i-} (e^{\beta(T_i)\Delta X_{T_i}} - 1) \end{aligned} \quad (4.6)$$

für alle $T_i \leq T$ gilt. Berücksichtigt man, dass Ψ_{T_i-} $\sigma(X_{T_i-}, T_i)$ -messbar ist, so erhält man für $0 \leq t \leq s \leq T$ durch die Glättungsregel und (4.6), dass

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{t < T_i \leq s} (\Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-}) \middle| \mathcal{F}_t \right) &= E \left(\sum_{t < T_i \leq s} E(\Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-} | X_{T_i-}, T_i) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &\stackrel{(4.6)}{=} E \left(\sum_{t < T_i \leq s} E \left(\Psi_{T_i-} (e^{\beta(T_i)\Delta X_{T_i}} - 1) \middle| X_{T_i-}, T_i \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E \left(\sum_{t < T_i \leq s} \Psi_{T_i-} E \left(e^{\beta(T_i)\Delta X_{T_i}} - 1 \middle| X_{T_i-}, T_i \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E \left(\sum_{t < T_i \leq s} \Psi_{T_i-} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\beta(T_i) \cdot z} \nu(dz) - 1 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E \left(\sum_{t < T_i \leq s} \Psi_{T_i-} (\varphi(\beta(T_i)) - 1) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E \left(\int_t^s \Psi_{u-} (\varphi(\beta(u)) - 1) dN_u \middle| \mathcal{F}_t \right). \end{aligned}$$

Da $(\Psi_{t-}(\varphi(\beta(t)) - 1))_{t \in [0, T]}$ aufgrund der Linkstetigkeit ein \mathcal{F}_t -previsibler Prozess ist und der Zählprozess N die Intensität $(\lambda(X_{t-}))_{t \in [0, T]}$ hat, folgt mit Bedingung (i) von Satz 4.1 durch Korollar A.16, dass

$$E \left(\int_t^s \Psi_{u-} (\varphi(\beta(u)) - 1) dN_u \middle| \mathcal{F}_t \right) = E \left(\int_t^s \Psi_{u-} (\varphi(\beta(u)) - 1) \lambda(X_{u-}) du \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Dabei ist zu beachten, dass die Gleichung zunächst nur jeweils für den Real- und den Imaginär-Teil des Integrals gilt. Jedenfalls folgt schließlich für alle $t \leq s \in [0, T]$

$$E \left(\sum_{t < T_i \leq s} (\Psi_{T_i} - \Psi_{T_i-}) \middle| \mathcal{F}_t \right) = E \left(\int_t^s \Psi_{u-} (\varphi(\beta(u)) - 1) \lambda(X_{u-}) du \middle| \mathcal{F}_t \right),$$

also dass J ein Martingal auf $[0, T]$ ist. \square

Lemma 4.3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4.1 ist Ψ ein Martingal auf $[0, T]$.*

Beweis: Durch Bedingung (iv) aus Satz 4.1 ist bereits die Integrierbarkeit gegeben. Um nachzuweisen, dass Ψ ein Martingal ist, muss also noch $E(\Psi_s | \mathcal{F}_t) = \Psi_t$ für alle $t \leq s \in [0, T]$ gezeigt werden. Dafür wende man zunächst die Ito-Formel auf die Funktion $\Psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $(x_1, \dots, x_d, t) \mapsto e^{-rt + \alpha(t) + \beta_1(t)x_1 + \dots + \beta_d(t)x_d}$ und das Semimartingal $(X_t, t) = (X_t^1, \dots, X_t^d, t)$ an. Man beachte, dass die Ito-Formel auch auf komplexwertige Funktionen f übertragen werden kann, indem man sie jeweils für den Real- und Imaginärteil der Funktion anwendet. Bezeichnen α^R, α^I und β^R, β^I Real- und Imaginärteil von α bzw. β , so lässt sich $\Psi_t = \Psi(X_t, t)$ darstellen durch

$$\begin{aligned} \Psi_t &= e^{-rt + \alpha(t) + \beta(t)X_t} \\ &= e^{-rt + \alpha^R(t) + \beta^R(t)X_t} \left(\cos(\alpha^I(t) + \beta^I(t)X_t) + i \sin(\alpha^I(t) + \beta^I(t)X_t) \right), \end{aligned}$$

woraus sich

$$\Psi_t^R = e^{-rt + \alpha^R(t) + \beta^R(t)X_t} \cos(\alpha^I(t) + \beta^I(t)X_t)$$

als Realteil und

$$\Psi_t^I = e^{-rt + \alpha^R(t) + \beta^R(t)X_t} \sin(\alpha^I(t) + \beta^I(t)X_t)$$

als Imaginärteil von Ψ ergeben. Die Ito-Formel kann nun jeweils auf die Funktionen Ψ^R und Ψ^I angewendet werden, die beide zweifach stetig partiell differenzierbar in

x und einmal stetig partiell differenzierbar in t sind. Insgesamt erhält man dann

$$\begin{aligned}\Psi_t - \Psi_0 &= \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) dX_s^i + \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial s}(X_{s-}, s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \int_0^t \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}, s) d[X^i, X^j]_s^c \\ &\quad + \int_0^t \Psi(X_s, s) - \Psi(X_{s-}, s) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) \Delta X_s^i dN_s.\end{aligned}$$

Des Weiteren seien μ_i bzw. $\sigma_i = (\sigma_{i,1}, \dots, \sigma_{i,d})$ die i -te Komponente der Funktion μ bzw. σ . Dann ist $[X^{(i)}, X^{(j)}]_s^c = [\sigma_i(X)W, \sigma_j(X)W]_s = \int_0^t \sigma_i(X_{s-}) \sigma_j^\top(X_{s-}) ds$ für alle $1 \leq i, j \leq d$, da $W = (W^1, \dots, W^d)$ ein d -dimensionaler Wienerprozess ist und es ist für alle $1 \leq i \leq d$

$$dX_t^i = \mu_i(X_{t-}) dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(X_{t-}) dW_s^j + \Delta X_t^i dN_t, \quad t \in [0, T].$$

Damit folgt, dass

$$\begin{aligned}\Psi_t - \Psi_0 &= \sum_{i=1}^d \left(\int_0^t \mu_i(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) ds + \int_0^t \sigma_i(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) dW_s \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \Delta X_s^i \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) dN_s \right) + \int_0^t \frac{\partial \Psi}{\partial s}(X_{s-}, s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \int_0^t \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}, s) \sigma_i(X_{s-}) \sigma_j^\top(X_{s-}) ds \\ &\quad + \int_0^t \Psi(X_s, s) - \Psi(X_{s-}, s) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) \Delta X_s^i dN_s \\ &= \int_0^t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s}(X_{s-}, s) + \sum_{i=1}^d \mu_i(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}, s) \sigma_i(X_{s-}) \sigma_j^\top(X_{s-}) \right) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) dW_s + \sum_{\substack{0 < s \leq t, \\ \Delta X_s \neq 0}} \Psi(X_s, s) - \Psi(X_{s-}, s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(4.5)}{=} \int_0^t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s}(X_{s-}, s) + \sum_{i=1}^d \mu_i(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}, s) \sigma_i(X_{s-}) \sigma_j^\top(X_{s-}) + \gamma_s \right) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) dW_s + J_t.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Durch Lemma 4.2 ist bereits bekannt, dass J ein Martingal ist. Mit Blick auf die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = \left(-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)x \right) \Psi(x, t), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(x, t) = \beta_i(t) \Psi(x, t), \quad i \in \{1, \dots, d\}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) = \beta_i(t) \beta_j(t) \Psi(x, t), \quad i, j \in \{1, \dots, d\}, \tag{4.10}$$

insbesondere (4.9), erkennt man, dass wegen Bedingung (iii) aus Satz 4.1 auch das Integral bzgl. W ein Martingal ist. Denn für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ ist

$$\int_0^\cdot \sigma_i(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) dW_s = \int_0^\cdot \underbrace{\sum_{j=1}^d \sigma_{i,j}(X_{s-}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_{s-}, s) dW_s^j}_{:= \eta_{ij}(X_{s-}, s)} \tag{4.11}$$

ein Martingal, wenn für alle $i, j \in \{1, \dots, d\}$ und für alle $t \in [0, T]$

$$E \left(\int_0^t |\eta_{ij}(X_{s-}, s)|^2 ds \right) = E \left(\int_0^t \Re(\eta_{ij}(X_{s-}, s))^2 + \Im(\eta_{ij}(X_{s-}, s))^2 ds \right) < \infty,$$

wobei \Re den Realteil und \Im den Imaginärteil bezeichne.² Nun ist aber

$$\begin{aligned}
&E \left(\int_0^t \Re(\eta_{ij}(X_{s-}, s))^2 + \Im(\eta_{ij}(X_{s-}, s))^2 ds \right) \\
&\stackrel{(4.9)}{=} E \left(\int_0^t \Re(\sigma_{i,j}(X_{s-}) \beta_i(t) \Psi_{s-})^2 + \Im(\sigma_{i,j}(X_{s-}) \beta_i(t) \Psi_{s-})^2 ds \right)
\end{aligned}$$

²Vgl. [JYC09] Proposition 1.5.1.1, S.37.

$$\begin{aligned}
&\leq E \left(\int_0^t \Re(\|\sigma(X_{s-})\|\beta_i(t)\Psi_{s-})^2 + \Im(\|\sigma(X_{s-})\|\beta_i(t)\Psi_{s-})^2 ds \right) \\
&= E \left(\int_0^t \|\sigma(X_{s-})\|^2 \beta_i(t)^2 \Psi_{s-}^2 ds \right) \\
&\stackrel{(iii)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Ψ ist demnach ein Martingal auf $[0, T]$, wenn das erste Integral aus (4.7) für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. gleich 0 ist. Dies wiederum ist dann der Fall, wenn der Integrand P -f.s. konstant gleich 0 ist, also wenn

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi}{\partial t}(X_t, t) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i \partial x_j}(X_t, t) \sigma_i(X_t) \sigma_j^\top(X_t) \\
+ \sum_{i=1}^d \mu_i(X_t) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}(X_t, t) + \Psi(X_t, t) \lambda(X_t) (\varphi(\beta(t) - 1)) = 0, \quad (4.12)
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. Durch Einsetzen der partiellen Ableitungen aus (4.8) bis (4.10) erhält man

$$\begin{aligned}
(4.12) &= \left(-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)X_t \right) \Psi(X_t, t) + \sum_{i=1}^d \mu_i(X_t) \beta_i(t) \Psi(X_t, t) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \beta_i(t) \beta_j(t) \Psi(X_t, t) \sigma_i(X_t) \sigma_j^\top(X_t) + \Psi(X_t, t) \lambda(X_t) (\varphi(\beta(t) - 1)). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Als nächstes sei noch

$$\sum_{i=1}^d \mu_i(X_t) \beta_i(t) = \mu^\top(X_t) \beta(t) \quad (4.14)$$

und

$$\sum_{1 \leq i, j \leq d} \beta_i(t) \beta_j(t) \sigma_i(X_t) \sigma_j^\top(X_t) = \beta^\top(t) \sigma(X_t) \sigma^\top(X_t) \beta(t) \quad (4.15)$$

festgehalten. Gleichung (4.13) lässt sich um $\Psi(X_t, t) \neq 0$ kürzen. Zusammen mit (4.14) und (4.15) ergibt sich

$$\begin{aligned}
(4.13) &= \left(-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)X_t \right) + \frac{1}{2} \beta^\top(t) \sigma(X_t) \sigma^\top(X_t) \beta(t) \\
&\quad + \mu^\top(X_t) \beta(t) + \lambda(X_t) (\varphi(\beta(t) - 1)).
\end{aligned}$$

Indem man schließlich noch die affine Struktur von μ , $\sigma\sigma^\top$ und λ (vgl. Definition 3.17) ausnutzt, erhält man als hinreichende Bedingung dafür, dass Ψ ein Martingal ist, dass

$$\begin{aligned} \left(-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)X_t\right) + \frac{1}{2}\beta^\top(t)(H_0 + H_1X_t)\beta(t) \\ + (K_0 + K_1X_t)^\top\beta(t) + (l_0 + l_1X_t)(\varphi(\beta(t)) - 1) = 0, \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. Man betrachte nun die Terme mit und ohne X_t getrennt voneinander. Die Gleichung ist also insbesondere dann erfüllt, wenn

$$-r + \dot{\alpha}(t) + \frac{1}{2}\beta^\top(t)H_0\beta(t) + K_0^\top\beta(t) + l_0(\varphi(\beta(t)) - 1) = 0$$

und

$$\dot{\beta}(t) + \frac{1}{2}\beta^\top(t)H_1\beta(t) + K_1^\top\beta(t) + l_1(\varphi(\beta(t)) - 1) = 0.$$

Die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen aus (4.2) und (4.3) sind also eine hinreichende Bedingung dafür, dass Ψ ein Martingal ist. \square

Nachfolgend wird noch eine Verallgemeinerung der Transformierten ψ untersucht. Dazu folgender

Satz und Definition 4.4. *Sei $r \in \mathbb{R}$ und X eine ASD mit Charakteristik $\chi = (K, H, l, \varphi)$, die sich erweitert gutmütig verhalte, d.h.:*

- (i) χ verhält sich gutmütig in (u, T) , d.h. die Bedingungen (i) bis (iv) aus Satz 4.1 sind erfüllt.
- (ii) Die Sprungtransformierte φ ist in $\beta(t)$ differenzierbar für alle $t \in [0, T]$ und die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{B}(t) = -K_1^\top B(t) - \beta(t)^\top H_1 B(t) - l_1 \nabla \varphi(\beta(t)) B(t) \quad (4.16)$$

und

$$\dot{A}(t) = -K_0 B(t) - \beta(t)^\top H_0 B(t) - l_0 \nabla \varphi(\beta(t)) B(t) \quad (4.17)$$

mit den Randbedingungen $B(T) = v$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $A(T) = 0$ werden eindeutig durch A und B gelöst, wobei $\nabla \varphi(c)$ den Gradienten von $\varphi(c)$ bzgl. $c \in \mathbb{C}^d$ bezeichne.

- (iii) $E\left(\int_0^T |\tilde{\gamma}_t| dt\right) < \infty$, mit $\tilde{\gamma}_t = \Phi_t(\varphi(\beta(t)) - 1)\lambda(X_t) + \Psi_t \nabla \varphi(\beta(t)) B(t)$, $t \in [0, T]$.

$$(iv) E\left[\int_0^T \|\sigma(X_{t-})\|^2 (\Phi_{t-}\beta(t) + \Psi_{t-}B(t))^2 dt\right] < \infty.$$

$$(v) E(|\Phi_T|) < \infty,$$

wobei $\Phi_t := (A(t) + B(t)X_t)\Psi_t$, $t \in [0, T]$ (Ψ wie in Satz 4.1).

Die Abbildung $\phi^x : \mathbb{R}^d \times \mathbb{C}^d \times D \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ die durch

$$\phi^x(v, u, X_t, t, T) := E \left(e^{-r(T-t)} v X_T e^{u X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right), \quad t \leq T \quad (4.18)$$

definiert wird heißt erweiterte Transformierte von χ und lässt sich berechnen durch:

$$\phi^x(v, u, x, t, T) = \psi^x(u, x, t, T) (A(t) + B(t)x),$$

mit ψ^x wie in Satz 4.1.

Beweis: Der Beweis funktioniert im Wesentlichen genau wie der von Satz 4.1. Man muss zeigen, dass Φ ein Martingal auf $[0, T]$ ist. Dann gilt $\Phi_t = E(\Phi_T | \mathcal{F}_t)$ für alle $t \in [0, T]$ und deshalb auch

$$\begin{aligned} (A(t) + B(t)X_t) \psi^x(u, X_t, t, T) &= (A(t) + B(t)X_t) e^{rt} \Psi_t \\ &= e^{rt} \Phi_t \\ &= E \left(e^{rt} \Phi_T \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E \left(e^{-r(T-t)} (A(T) + B(T)X_T) e^{\alpha(T) + \beta(T)X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= E \left(e^{-r(T-t)} v X_T e^{u X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\ &= \phi^x(v, u, X_t, t, T), \end{aligned}$$

wobei beim vorletzten Schritt die Randbedingungen $\alpha(T) = A(T) = 0$, $\beta(T) = u$ und $B(T) = v$ ausgenutzt wurden.

Es bleibt also zu zeigen, dass Φ ein Martingal ist. Dies kann durch eine analoge Vorgehensweise zu Lemma 4.2 und 4.3 erreicht werden.

1. Schritt: Man zeigt, dass $\tilde{J}_t = \sum_{0 < T_i \leq t} \Phi_{T_i} - \Phi_{T_i-} - \int_0^t \tilde{\gamma}_s ds$ ein Martingal auf $[0, T]$ ist, wobei $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ wiederum die Sprungzeiten von N bezeichne.

Zunächst sei festgehalten, dass wegen der Stetigkeit von \exp , α , β , A und B und unter Hinweis auf (4.6) für alle $T_i \leq T$

$$\begin{aligned} &\Phi_{T_i} - \Phi_{T_i-} \\ &= (A(T_i) + B(T_i)X_{T_i}) \Psi_{T_i} - (A(T_i-) + B(T_i-)X_{T_i-}) \Psi_{T_i-} \\ &= (A(T_i) + B(T_i)(X_{T_i-} + \Delta X_{T_i})) \Psi_{T_i-} e^{\beta(T_i) \Delta X_{T_i}} - (A(T_i) + B(T_i)X_{T_i-}) \Psi_{T_i-} \\ &= (A(T_i) + B(T_i)X_{T_i-}) \Psi_{T_i-} \left(e^{\beta(T_i) \Delta X_{T_i}} - 1 \right) + B(T_i) \Delta X_{T_i} \Psi_{T_i-} e^{\beta(T_i) \Delta X_{T_i}} \\ &= \Phi_{T_i-} \left(e^{\beta(T_i) \Delta X_{T_i}} - 1 \right) + B(T_i) \Delta X_{T_i} \Psi_{T_i-} e^{\beta(T_i) \Delta X_{T_i}} \end{aligned}$$

gilt. Daraus ergibt sich dann in analoger Vorgehensweise zu Lemma 4.2 für alle $0 \leq t \leq s \leq T$

$$\begin{aligned}
& E \left(\sum_{t < T_i \leq s} \Phi_{T_i} - \Phi_{T_i-} \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= E \left(\sum_{t < T_i \leq s} E \left(\Phi_{T_i} - \Phi_{T_i-} \middle| X_{T_i-}, T_i \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= E \left(\sum_{t < T_i \leq s} E \left(\Phi_{T_i-} \left(e^{\beta(T_i) \Delta X_{T_i}} - 1 \right) + B(T_i) \Delta X_{T_i} \Psi_{T_i-} e^{\beta(T_i) \Delta X_{T_i}} \middle| X_{T_i-}, T_i \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= E \left(\sum_{t < T_i \leq s} \Phi_{T_i-} \left(\varphi(\beta(T_i)) - 1 \right) + B(T_i) \Psi_{T_i-} \nabla \varphi(\beta(T_i)) \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= E \left(\int_t^s \Phi_{u-} \left(\varphi(\beta(u)) - 1 \right) + B(u) \Psi_{u-} \nabla \varphi(\beta(u)) dN_u \middle| \mathcal{F}_t \right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde im vorletzten Schritt ausgenutzt, dass φ laut Voraussetzung in $\beta(t)$ differenzierbar ist für alle $t \leq T$. Mit Bedingung (iii) folgt dann wie in Lemma 4.2, dass

$$\begin{aligned}
& E \left(\int_t^s \Phi_{u-} \left(\varphi(\beta(u)) - 1 \right) + B(u) \Psi_{u-} \nabla \varphi(\beta(u)) dN_u \middle| \mathcal{F}_t \right) \\
&= E \left(\int_t^s \Phi_{u-} \left(\varphi(\beta(u)) - 1 \right) + B(u) \Psi_{u-} \nabla \varphi(\beta(u)) \lambda(X_{u-}) du \middle| \mathcal{F}_t \right)
\end{aligned}$$

und schließlich die Martingaleigenschaft von \tilde{J} auf $[0, T]$.

2. Schritt: Wie in Lemma 4.3 wendet man die Ito-Formel auf die Funktion

$$\begin{aligned}
\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{C} \\
(x, t) &\mapsto (A(t) + B(t)x) e^{-rt} e^{\alpha(t) + \beta(t)x}
\end{aligned}$$

(bzw. jeweils auf deren Real- und Imaginärteil) und das Semimartingal (X_t, t) an. Mit den gleichen Argumenten wie in Lemma 4.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \Phi_t - \Phi_0 \\
&= \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial x^{(i)}} dX_s^i + \int_0^t \frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \int_0^t \frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial x_i \partial x_j} d[X^{(i)}, X^{(j)}]_s^c \\
&+ \int_0^t \Phi_s - \Phi_{s-} - \sum_{i=1}^d \frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial x_i} \Delta X_s^i dN_s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial s} + \sum_{i=1}^d \mu_i(X_{s-}) \frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i(X_{s-}) \sigma_j^\top(X_{s-}) + \tilde{\gamma}_s \right) ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i(X_{s-}) \frac{\partial \Phi_{s-}}{\partial x_i} dW_s + \tilde{J}_t.
\end{aligned}$$

Nun betrachtet man wieder die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_i}$ für $i = 1, \dots, d$ und $\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}$ für $1 \leq i, j \leq d$. Diese lassen sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial (A(t)\Psi(x,t) + B(t)x\Psi(x,t))}{\partial t} \\
&= \dot{A}(t)\Psi(x,t) + A(t) \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} + x \left(\dot{B}(t)\Psi(x,t) + B(t) \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \right) \\
&= (\dot{A}(t) + x\dot{B}(t))\Psi(x,t) + (A(t) + xB(t)) \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} \\
&\stackrel{(4.8)}{=} (\dot{A}(t) + x\dot{B}(t))\Psi(x,t) + (A(t) + xB(t)) \left(-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t)x \right) \Psi(x,t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x_i} &= \frac{\partial (A(t)\Psi(x,t) + B(t)x\Psi(x,t))}{\partial x_i} \\
&= A(t) \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x_i} + B(t) \frac{\partial (x\Psi(x,t))}{\partial x_i} \\
&= (A(t) + xB(t)) \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x_i} + B_i(t)\Psi(x,t) \\
&\stackrel{(4.9)}{=} (A(t) + xB(t)) \beta_i(t)\Psi(x,t) + B_i(t)\Psi(x,t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial (\Psi(x,t)(B_i(t) + (A(t) + xB(t))\beta_i(t)))}{\partial x_j} \\
&= \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x_j} (B_i(t) + (A(t) + xB(t))\beta_i(t)) + \Psi(x,t) B_j(t) \beta_i(t) \\
&\stackrel{(4.10)}{=} (B_i(t)\beta_j(t) + B_j(t)\beta_i(t))\Psi(x,t) + (A(t) + xB(t))\beta_i(t)\beta_j(t)\Psi(x,t).
\end{aligned}$$

Wegen Bedingung (iv) ist das Integral bzgl. W ein Martingal, was sich wiederum durch eine zu Lemma 4.3 entsprechende Argumentation leicht nachvollziehen lässt. Ebenso ist auch \tilde{J} ein Martingal (1. Schritt). Als hinreichende Bedingung für die Martingaleigenschaft von Φ ergibt sich also, dass der Driftterm P -f.s. für alle $t \in$

$[0, T]$ gleich 0 ist, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_i(X_t) \sigma_j^\top(X_t) + \sum_{i=1}^d \mu_i(X_t) \frac{\partial \Phi_t}{\partial x_i} \\ + \Phi_t (\varphi(\beta(t)) - 1) \lambda(X_t) + \Psi_t \nabla \varphi(\beta(t)) B(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. Einsetzen der partiellen Ableitungen liefert

$$\begin{aligned} (4.19) = & \Psi_t \left(\dot{A}(t) + \dot{B}(t) X_t + (A(t) + B(t) X_t) \left(-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) X_t \right) \right) \\ & + \sum_{i=1}^d \mu_i(X_t) \left(\Psi_t \left(B_i(t) + (A(t) + B(t) X_t) \beta_i(t) \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \left(2B_i(t) \beta_j(t) \Psi_t + (A(t) + B(t) X_t) \beta_i(t) \beta_j(t) \Psi_t \right) \sigma_i(X_t) \sigma_j^\top(X_t) \\ & + \Phi_t \left(\varphi(\beta(t)) - 1 \right) \lambda(X_t) + \Psi_t \nabla \varphi(\beta(t)) B(t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Mit

$$\sum_{i=1}^d \mu_i(X_t) \left(B_i(t) + (A(t) + B(t) X_t) \beta_i(t) \right) = \mu^\top(X_t) \left(B(t) + (A(t) + B(t) X_t) \beta(t) \right)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq d} \left(2B_i(t) \beta_j(t) + (A(t) + B(t) X_t) \beta_i(t) \beta_j(t) \right) \sigma_i(X_t) \sigma_j^\top(X_t) \\ = \beta^\top(t) \sigma(X_t) \sigma^\top(X_t) \beta(t) (A(t) + B(t) X_t) + 2\beta(t)^\top \sigma(X_t) \sigma^\top(X_t) B(t) \end{aligned}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} (4.20) = & (A(t) + B(t) X_t) \left(-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) X_t + \frac{1}{2} \beta^\top(t) \sigma(X_t) \sigma^\top(X_t) \beta(t) \right. \\ & \left. + \lambda(X_t) (\varphi(\beta(t)) - 1) \right) + \dot{A}(t) + \dot{B}(t) X_t + \mu^\top(X_t) B(t) + \\ & \beta(t) \sigma(X_t) \sigma^\top(X_t) B(t) + \lambda(X_t, t) \left(\nabla \varphi(\beta(t)) B(t) \right). \end{aligned}$$

Nun ist aber bereits

$$-r + \dot{\alpha}(t) + \dot{\beta}(t) X_t + \frac{1}{2} \beta^\top(t) \sigma(X_t) \sigma^\top(X_t) \beta(t) + \lambda(X_t) (\varphi(\beta(t)) - 1) = 0,$$

da sich χ gutmütig verhält und sich die Gleichheit wie in Lemma 4.3 aus der speziellen Gestalt von α und β ergibt. Es bleibt also

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) + \dot{B}(t)X_t + \mu^\top(X_t)B(t) + \beta(t)\sigma(X_t)\sigma^\top(X_t)B(t) \\ + \lambda(X_t) (\nabla\varphi(\beta(t))B(t)) = 0, \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$, P -f.s. nachzuweisen. Nutzt man wie im Beweis zu Lemma 4.3 die affine Gestalt von μ , σ und λ aus und betrachtet die Terme mit und ohne X_t gesondert, folgt die Gleichheit aus den Differentialgleichungen (4.16) und (4.17) von A bzw. B . \square

4.1.2 Bewertung europäischer Standard-Optionen

Der folgende Satz stellt die Brücke zwischen dem allgemeinen Resultat über die Transformierte aus Satz 4.1 und der Bewertung von Optionen dar.

Satz 4.5. *Es sei eine ASD X gegeben mit Charakteristik χ und Anfangswert X_0 und $r \in \mathbb{R}$. Für $T \in [0, \infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}^n$ verhalte sich $\chi = (K, H, l, \theta)$ gutmütig in $(a + ivb, T)$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Außerdem sei*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi^\chi(a + ivb, X_0, 0, T)| dv < \infty. \quad (4.21)$$

Definiere $G_{a,b}(\cdot; X_0, T, \chi)$ durch

$$G_{a,b}(y, X_0, T, \chi) = E \left((e^{-rT+aX_T}) \mathbb{1}_{\{b \cdot X_T \leq y\}} \right), \quad y \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} G_{a,b}(y; X_0, T, \chi) &= \frac{\psi^\chi(a, X_0, 0, T)}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Im[\psi^\chi(a + ivb, X_0, 0, T)e^{-ivy}]}{v} dv, \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei $\Im[c]$ den Imaginärteil von $c \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

Beweis: Unter den gegebenen Voraussetzungen, insbesondere der Gutmütigkeit von χ in (a, T) , gilt

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} G_{a,b}(y; x, T, \chi) = \psi^\chi(a, x, 0, T) < \infty \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} G_{a,b}(y; x, T, \chi) = 0. \quad (4.24)$$

Da zudem $G_{a,b}(y_1; x, T, \chi) \leq G_{a,b}(y_2; x, T, \chi)$ für $y_1 \leq y_2$, ist $G_{a,b}(\cdot; x, T, \chi)$ aus (4.22) wohldefiniert. Ferner wird dadurch deutlich, dass durch $G_{a,b}$ ein endliches

Maß festgelegt wird. Des Weiteren stellt sich mittels partieller Integration für Stieltjes-Integrale heraus, dass

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ivy} dG_{a,b}(y, X_0, T, \chi) = \psi^\chi(a + ivb, X_0, 0, T). \quad (4.25)$$

Für $0 < \tau < \infty$ und ein festes $y \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$\begin{aligned} I(\tau) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{ivy} \psi^\chi(a - ivb, x, 0, T) - e^{-ivy} \psi^\chi(a + ivb, x, 0, T)}{iv} dv \\ &\stackrel{(4.25)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{ivy} \int_{\mathbb{R}} e^{-ivz} dG_{a,b}(z, x, T, \chi) - e^{-ivy} \int_{\mathbb{R}} e^{ivz} dG_{a,b}(z, x, T, \chi)}{iv} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iv(z-y)} - e^{iv(z-y)}}{iv} dG_{a,b}(z, x, T, \chi) dv \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{iv(z-y)} - e^{-iv(z-y)}}{2\pi iv} dv dG_{a,b}(z, x, T, \chi), \end{aligned} \quad (4.26)$$

wobei in der letzten Zeile der Satz von Fubini angewendet wurde. Dies ist möglich, da durch $G_{a,b}$ wie oben erwähnt ein endliches Maß induziert wird und die Funktion $(z, t) \mapsto \frac{e^{iv(z-y)} - e^{-iv(z-y)}}{iv}$ beschränkt ist auf $\mathbb{R} \times [-\tau, \tau]$ für alle $\tau > 0$. Indem man

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

definiert, kann man das innere Intergral von (4.26) unter Berücksichtigung von $\frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \sin(a)$, $a \in \mathbb{R}$, nun wie folgt schreiben:

$$f_\tau(z) = \int_{-\tau}^{\tau} \frac{e^{iv(z-y)} - e^{-iv(z-y)}}{iv} dv = \frac{\operatorname{sgn}(z-y)}{\pi} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{\sin(v|z-y|)}{v} dv. \quad (4.27)$$

Da $\int_0^\infty \frac{\sin(at)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ für alle $a > 0$, folgt

$$f_\tau(z) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \begin{cases} 1, & \text{falls } y < z \\ 0, & \text{falls } y = z, \\ -1, & \text{falls } y > z \end{cases}$$

also $f_\tau(z) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(z-y)$. Die $f_\tau, \tau > 0$ sind wegen

$$\sup \left\{ \left| \int_x^y \frac{\sin t}{\pi t} dt \right| : x, y \in \mathbb{R} \right\} \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{\pi t} dt \leq 2$$

gleichmäßig beschränkt und man erhält mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz, dass

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow \infty} I(\tau) &= - \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(z - y) dG_{a,b}(z, x, T, \chi) \\
&= - \left(\int_{(y, \infty)} dG_{a,b}(z, x, T, \chi) - \int_{(-\infty, y)} dG_{a,b}(z, x, T, \chi) \right) \\
&= - \int_{\mathbb{R}} dG_{a,b}(z, x, T, \chi) + \int_{(-\infty, y)} dG_{a,b}(z, x, T, \chi) \\
&\quad + \int_{(-\infty, y]} dG_{a,b}(z, x, T, \chi) \\
&= - \psi^\chi(a, x, 0, T) + G_{a,b}(y, x, T, \chi) + G_{a,b}(y-, x, T, \chi). \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Da $\frac{e^{iav} - e^{ibv}}{2\pi iv} \leq M|a - b|$ für $a, b, v \in \mathbb{R}$ und geeignetes $M > 0$ erhält man aufgrund der majorisierten Konvergenz mit (4.21), dass

$$\begin{aligned}
&G_{a,b}(y, x, T, \chi) - G_{a,b}(y-, x, T, \chi) \\
&= \lim_{\tilde{y} \uparrow y} (G_{a,b}(y, x, T, \chi) + G_{a,b}(y-, x, T, \chi) - G_{a,b}(\tilde{y}, x, T, \chi) - G_{a,b}(\tilde{y}-, x, T, \chi)) \\
&= \lim_{\tilde{y} \uparrow y} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(e^{ivy} - e^{i\tilde{y}v})\psi^\chi(a - ivb, x, 0, T) - (e^{-ivy} - e^{-i\tilde{y}v})\psi^\chi(a + ivb, x, 0, T)}{2\pi iv} dv \\
&\leq \lim_{\tilde{y} \uparrow y} M|y - \tilde{y}| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\chi(a - ivb, x, 0, T)| + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi^\chi(a + ivb, x, 0, T)| \right) \\
&= 0. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

(4.28) in Verbindung mit (4.29) ergibt dann

$$\begin{aligned}
G_{a,b}(y, x, T, \chi) &= \frac{\psi^\chi(a, x, 0, T)}{2} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ivy}\psi^\chi(a - ivb, x, 0, T) - e^{-ivy}\psi^\chi(a + ivb, x, 0, T)}{iv} dv \\
&= \frac{\psi^\chi(a, x, 0, T)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Im[e^{-ivy}\psi^\chi(a + ivb, x, 0, T)]}{v} dv \tag{4.30}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\psi^\chi(a, x, 0, T)}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Im[e^{-ivy}\psi^\chi(a + ivb, x, 0, T)]}{v} dv, \tag{4.31}$$

wobei die bekannte Rechenregel für komplexe Zahlen $\Im[z] = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ angewendet und

$$e^{ivy}\psi^\chi(a - ivb, x, 0, T) = \overline{e^{-ivy}\psi^\chi(a + ivb, x, 0, T)}.$$

□

Nach der nötigen Vorarbeit, kann mit der Optionsbewertung fortgefahren werden. Dazu sei im Folgenden nochmals kurz zusammengefasst, was überhaupt unter einer Option verstanden wird und wie man deren Preis bestimmt.

Definition 4.6. Mit einer *europäischen (Standard-)Option* erwirbt deren Käufer das Recht, aber nicht die Pflicht, am *Laufzeitende* eine bestimmte Menge eines *Gutes (Basiswert)* zu einem im Voraus festgelegten *Ausübungspreis (Strike)* zu kaufen oder zu verkaufen. Beim Kaufrecht wird die Option als *Call*, beim Verkaufsrecht als *Put* bezeichnet. Der Verkäufer der Option erhält den Kaufpreis. Er ist im Falle der Ausübung verpflichtet, den Basiswert zum vorher bestimmten Preis zu verkaufen (Call) bzw. zu kaufen (Put).³

Eine europäische Call-Option mit Basiswert X , Strike K und Laufzeit T zahlt dementsprechend am Verfallsdatum, also zum Zeitpunkt T den Betrag $(X_T - K)^+$. Ein (arbitragefreier) Preis der Option zum Zeitpunkt 0 kann deshalb durch

$$C(K, T, X) = E^Q \left(e^{-rT} (S_T - K) \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}} \right) \quad (4.32)$$

gebildet werden, wobei r die risikolose Zinsrate ist und Q ein risikoneutrales Maß.

Satz 4.7. *Es sei eine d -dimensionale ASD X gegeben mit Q -Charakteristik χ und Anfangswert X_0 , wobei Q ein risikoneutrales Maß mit risikoneutraler Zinsrate r sei. Dann ist*

$$C(K, T, \chi) = G_{\epsilon(i), -\epsilon(i)}(-\ln(K), X_0, T, \chi) - KG_{0, -\epsilon(i)}(-\ln(K), X_0, T, \chi),$$

mit G wie in (4.23), ein arbitragefreier Preis zum Zeitpunkt 0 eines europäischen Calls mit Basiswert $\exp(X_i)$, $i \in \{1, \dots, d\}$, Ausübungspreis K und Laufzeit T , vorausgesetzt, dass

1. χ sich gutmütig in $(\epsilon(i) - iv\epsilon(i), T)$ und $(-iv\epsilon(i), T)$ für alle $v \in \mathbb{R}^+$ verhält und
2. $\int_{\mathbb{R}} \psi^\chi(\epsilon(i) - iv\epsilon(i), X_0, 0, T) dv < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}} \psi^\chi(-iv\epsilon(i), X_0, 0, T) dv < \infty$,

wobei $\epsilon(i) \in \mathbb{R}^d$ als i -te Komponente eine 1 hat und alle anderen Einträge gleich 0 sind.

³Der Zusatz Standard oder auch häufig *Plain Vanilla* dient zur Abgrenzung gegenüber exotischen Optionen. Wird nur von einer (europäischen) Option oder einem (europäischen) Call/Put gesprochen, ist damit im Folgenden immer die Standard-Option gemeint. Das Attribut *europäisch* beschreibt die Ausübungsart der Option (nur am Ende der Laufzeit). Alternativ gibt es auch *amerikanische* Optionen. Diese können *während* der gesamten Laufzeit ausgeübt werden.

Beweis: Für den Call-Preis gilt

$$\begin{aligned} C(K, T, \chi) &\stackrel{(4.32)}{=} E^Q \left(e^{-rT} (e^{X_i} - K) \mathbf{1}_{\{X_i \geq \ln(K)\}} \right) \\ &= E^Q \left(e^{-rT} e^{X_i} \mathbf{1}_{\{X_i \geq \ln(K)\}} \right) - E^Q \left(e^{-rT} \mathbf{1}_{\{X_i \geq \ln(K)\}} \right) \\ &= G_{\epsilon(i), -\epsilon(i)}(-\ln(K), X_0, T, \chi) - G_{0, -\epsilon(i)}(-\ln(K), X_0, T, \chi). \end{aligned}$$

Satz 4.5 besagt, dass unter den Voraussetzungen 1 und 2

$$G_{\epsilon(i), -\epsilon(i)}(-\ln(K), X_0, T, \chi) = E^Q(e^{-rT} e^{X_i} \mathbf{1}_{\{X_i \geq \ln(K)\}})$$

und

$$G_{0, -\epsilon(i)}(-\ln(K), X_0, T, \chi) = E^Q \left(e^{-rT} \mathbf{1}_{\{X_i \geq \ln(K)\}} \right)$$

wohldefiniert sind und gemäß (4.23) berechnet werden können. \square

Bemerkung 4.8. Der Preis für einen europäischen Put P ergibt sich aus der Put-Call-Parität, gemäß derer sich der Preis eines Puts aus dem eines Calls C wie folgt berechnen lässt:

$$P = C + K \cdot \exp(-rT) - S_0,$$

wobei T der Ausübungszeitpunkt, S_0 der Startpreis des Basisgutes und K der Ausübungspreis ist.

4.1.3 Bewertung geometrisch asiatischer Optionen

Neben europäischen Standard-Optionen, lassen sich mit Hilfe der Transformierten aus dem vorletzten Abschnitt auch andere Optionen bewerten. Als Beispiel für eine *exotische* Option, sei hier kurz die *geometrische asiatische Option* behandelt. Das Hauptmerkmal asiatischer Optionen ist, dass der Wert der Option nicht über den aktuellen Kurs des Basisgutes bestimmt wird, sondern über den durchschnittlichen Kurs während der Laufzeit. Dabei ist zunächst einmal nicht festgelegt, welche Ausübungsart die Option hat. Hier wird angenommen, dass es sich um eine Option vom europäischen Typ (Ausübung nur am Laufzeitende) handelt. Der Nameszusatz geometrisch (alternativ arithmetisch) drückt aus, welcher Durchschnittswert berechnet wird. Im Falle einer geometrischen asiatischen Option wird also der geometrische Mittelwert bestimmt, d.h. $\hat{S} = \left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{1/n}$. Dieser ist oftmals deshalb leichter zu bestimmen, da in vielen Modellen, wie auch hier, nur der logarithmierte Preis betrachtet wird und $\hat{S} = \exp(\ln(\hat{S})) = \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(S_{t_i})\right) = \exp(\bar{s})$, wobei \bar{s} den arithmetischen Mittelwert des logarithmierten Preises $s = \ln(S)$ des Basisgutes S bezeichne. Während in der Praxis natürlich immer nur endlich viele Beobachtungszeitpunkte $(t_i)_{i=1, \dots, n}$ zur Berechnung des Optionswertes herangezogen werden, geht

man bei der mathematischen Modellierung davon aus, dass ein geometrischer asiatischer Call mit Strike K zum Laufzeitende T einen Betrag $(1/T \int_0^T \ln(S_t)dt - K)^+$ auszahlt. Das bedeutet, dass der Wert der Option zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben ist durch

$$e^{-rT} E \left(\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t)dt - K \right) \mathbb{1}_{\{\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t)dt \geq K\}} \right). \quad (4.33)$$

Der Optionswert lässt sich mit Hilfe der erweiterten Transformierten aus Satz 4.4 und einem zu Satz 4.5 entsprechenden Resultat bestimmen. Ähnlich zum letzten Abschnitt betrachtet man also die Funktion

$$\tilde{G}_{d,a,b}(y, X_0, T, \chi) = E \left(e^{-rT} dX_T e^{aX_T} \mathbb{1}_{\{bX_T \leq y\}} \right). \quad (4.34)$$

Für diese ergibt sich die folgende Aussage:

Satz 4.9. *Es sei X eine ASD mit Charakteristik χ und Anfangswert X_0 und $r \in \mathbb{R}$. Für $T \in [0, \infty)$ und $a, b, d \in \mathbb{R}^n$ verhalte sich $\chi = (K, H, l, \theta)$ erweitert gutmütig in $(d, a + ivb, T)$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Außerdem sei*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi^\chi(d, a + ivb, X_0, 0, T)| dv < \infty.$$

Dann ist $\tilde{G}_{d,a,b}(\cdot; x, T, \chi)$ aus (4.34) wohldefiniert und gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{d,a,b}(y; X_0, T, \chi) &= \frac{\phi^\chi(d, a, X_0, 0, T)}{2} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Im[\phi^\chi(d, a + ivb, X_0, 0, T) e^{-ivy}]}{v} dv, \end{aligned} \quad (4.35)$$

wobei $\Im[c]$ den Imaginärteil von $c \in \mathbb{C}$ bezeichnet.

Beweis: Zu Beginn des Beweises zeigt man wieder, dass $\tilde{G}_{d,a,b}(y, X_0, T, \chi)$ monoton wachsend ist in y mit $\lim_{y \rightarrow -\infty} \tilde{G}_{d,a,b}(y, X_0, T, \chi) = 0$, $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{G}_{d,a,b}(y, X_0, T, \chi) = \phi^\chi(d, a, X_0, 0, T) < \infty$ und

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ivy} d\tilde{G}_{d,a,b}(y, X_0, T, \chi) = \phi^\chi(d, a + ivb, X_0, 0, T).$$

Ersetzt man dann ψ durch ϕ und G durch \tilde{G} , ist der Rest des Beweises eine Kopie des Beweises von Satz 4.5. \square

Satz 4.9 ermöglicht es nun die Frage zu klären, wie der Preis einer geometrischen asiatischen Option bestimmt werden kann.

Satz 4.10. *Es sei eine d -dimensionale ASD X gegeben mit Q -Charakteristik χ und Anfangswert X_0 , wobei Q ein risikoneutrales Maß mit risikoneutraler Zinsrate r bezeichne. Sei des Weiteren $Y_t = \int_0^t X_s^i ds$ und $\tilde{X} = (X, Y)$. Dann ist \tilde{X} wieder eine ASD mit Charakteristik $\tilde{\chi}$ und ein arbitragefreier Preis einer geometrischen asiatischen Call-Option mit Basiswert $\exp(X_i)$, Ausübungspreis K und Ausübungsdatum T lässt sich berechnen durch*

$$C_{ga}(K, T, \chi) = \frac{1}{T} \tilde{G}_{\epsilon(n+1), 0, -\epsilon(n+1)}(-KT, \tilde{X}_0, T, \tilde{\chi}) - KG_{0, -\epsilon(i)}(-KT, \tilde{X}_0, T, \tilde{\chi}),$$

mit G wie in (4.23) und \tilde{G} wie in (4.35), vorausgesetzt, dass

1. $\tilde{\chi}$ sich für alle $v \in \mathbb{R}^+$ erweitert gutmütig in $(\epsilon(n+1), -iv\epsilon(n+1), T)$ und gutmütig in $(-iv\epsilon(i), T)$ verhält und
2. $\int_{\mathbb{R}} \phi^x(\epsilon(n+1), -iv\epsilon(n+1), X_0, 0, T) dv < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}} \psi^x(-iv\epsilon(n+1), X_0, 0, T) dv < \infty$.

Beweis: Dass $\tilde{X} = (X, Y)$ mit $Y_t = \int_0^t X_s^i ds$ wieder eine ASD darstellt, ist gemäß Definition klar. Sei nun $\tilde{\chi}$ die Q -Charakteristik von \tilde{X} , dann folgt mit (4.34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \tilde{G}_{\epsilon(n+1), 0, -\epsilon(n+1)}(-KT, \tilde{X}_0, T, \tilde{\chi}) &= \frac{1}{T} E \left(e^{-rt} \epsilon(n+1) X_T \mathbf{1}_{\{-\epsilon(n+1)X_T \leq -KT\}} \right) \\ &= e^{-rt} E \left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t^i dt \mathbf{1}_{\{\frac{1}{T} \int_0^T X_t^i dt \geq K\}} \right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} KG_{0, -\epsilon(n+1)}(-KT, \tilde{X}_0, T, \tilde{\chi}) &= KE \left(e^{-rt} \mathbf{1}_{\{-\epsilon(n+1)X_T \leq -KT\}} \right) \\ &= KE \left(e^{-rt} \mathbf{1}_{\{\frac{1}{T} \int_0^T X_t^i dt \geq K\}} \right). \end{aligned}$$

Zusammen mit (4.33) ergibt sich dann die Behauptung. \square

4.2 Optionsbewertung im Shot Noise-Modell

Nun werden die Ergebnisse aus den letzten beiden Kapiteln miteinander verknüpft. In Kapitel 3 (vgl. Satz 3.19) wurde schon festgehalten, dass ein SNSVM mit exponentiellen Wirkungsfunktionen unter einem $Q \in \mathcal{M}_P(S)$ eine affine Sprung-

Diffusion mit Charakteristik $\chi = (K, H, l^+, l^-, \varphi^+, \varphi^-)$ ist, wobei

$$K_0 = \begin{pmatrix} r \\ \bar{\kappa}_v \bar{\theta}_v \\ \kappa_+ \theta_+ \\ \kappa_- \theta_- \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\bar{u}^+ & -\bar{u}^- \\ 0 & -\bar{\kappa}_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa_- \end{pmatrix},$$

$$H_0 = 0, \quad H_1 = \left(0 \left| \begin{array}{cccc} 1 & \rho\sigma_v & 0 & 0 \\ \rho\sigma_v & \sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. 0 \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \right),$$

$$l_0^+ = 0, \quad l_0^- = 0, \quad l_1^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_1^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\varphi^+(z_1, z_2, z_3, z_4) = \varphi^{\bar{v}^+}(z_1 + \sigma_+ \kappa_+ z_3), \quad \varphi^-(z_1, z_2, z_3, z_4) = \varphi^{\bar{v}^-}(-z_1 + \sigma_- \kappa_- z_4),$$

und $\varphi^{\bar{v}^\pm}$ die Transformierte der Verteilung \bar{v}^\pm sei. Darauf werden jetzt die Resultate aus diesem Kapitel angewendet.

Korollar 4.11. *Die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen aus (4.2) und (4.3) haben die Form ⁴*

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta}_1(t) \\ \dot{\beta}_2(t) \\ \dot{\beta}_3(t) \\ \dot{\beta}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\beta_1(t) - \frac{1}{2}\beta_1(t)^2 + \bar{\kappa}_v \beta_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_v^2 \beta_2(t)^2 - \rho\sigma_v \beta_1(t)\beta_2(t) \\ -\phi^{\bar{v}^+}(\beta_1(t) + \sigma_+ \kappa_+ \beta_3(t)) + 1 + \bar{u}^+ \beta_1(t) + \kappa_+ \beta_3(t) \\ -\phi^{\bar{v}^-}(-\beta_1(t) + \sigma_- \kappa_- \beta_4(t)) + 1 + \bar{u}^- \beta_1(t) + \kappa_- \beta_4(t) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

und

$$\dot{\alpha}(t) = r - \beta_1(t)r - \beta_2(t)\bar{\kappa}_v \bar{\theta}_v - \beta_3(t)\kappa_+ \theta_+ - \beta_4(t)\kappa_- \theta_-. \quad (4.37)$$

⁴Würde man bei den Q -Sprungintensitäten nicht nur eine lineare Abhängigkeit in f_t^\pm sondern zusätzlich auch in v_t mit Parametern η_+, η_- , also $\lambda_t^\pm = \theta_\pm - \sigma_\pm f_t^\pm + \eta_\pm v_t$, ergäbe sich ein deutlich komplizierteres DGL-System, so würde sich z.B. für β_2 folgende Gleichung ergeben:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 = & \frac{1}{2}\beta_1 - \frac{1}{2}\beta_1^2 + \kappa_v \beta_2 - \frac{1}{2}\sigma_v^2 \beta_2^2 + \eta_+ \kappa_v \beta_3 - \frac{1}{2}\eta_+^2 \sigma_v^2 \beta_3^2 + \eta_- \kappa_v \beta_4 - \frac{1}{2}\eta_-^2 \sigma_v^2 \beta_4^2 \\ & - \left(\rho\sigma_v \beta_1 \beta_2 + \eta_+ \rho\sigma_v \beta_1 \beta_3 + \eta_- \rho\sigma_v \beta_1 \beta_4 + \sigma_v^2 \eta_+ \beta_2 \beta_3 + \sigma_v^2 \eta_- \beta_2 \beta_4 + \eta_+ \eta_- \sigma_v^2 \beta_3 \beta_4 \right). \end{aligned}$$

Beweis: Für den Beweis muss man lediglich die Koeffizienten aus Satz 3.19 in die Gleichungen (4.2) und (4.3) einsetzen. Im Folgenden seien $\dot{\alpha}(t)$, $\dot{\beta}(t)$ und $\beta_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$ abgekürzt durch $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ und β_i , $i = 1, \dots, 4$.

Mit (4.3) erhält man nun wegen $H_0 = 0$, $l_0^\pm = 0$

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= r - \begin{pmatrix} r & \bar{\kappa}_v \bar{\theta}_v & \kappa_+ \theta_+ & \kappa_- \theta_- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \\ &= r - \beta_1 r - \beta_2 \bar{\kappa}_v \bar{\theta}_v - \beta_3 \kappa_+ \theta_+ - \beta_4 \kappa_- \theta_-.\end{aligned}$$

Mit Gleichung (4.2) ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\bar{\kappa}_v & 0 & 0 \\ -\bar{u}_+ & 0 & -\kappa_+ & 0 \\ -\bar{u}_- & 0 & 0 & -\kappa_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & \rho \sigma_v & 0 & 0 \\ \rho \sigma_v & \sigma_v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\phi^{\bar{v}^+} (\beta_1 + \sigma_+ \kappa_+ \beta_3) - 1 \right) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\phi^{\bar{v}^-} (-\beta_1 + \sigma_- \kappa_- \beta_4) - 1 \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \beta_1 + \bar{\kappa}_v \beta_2 \\ \bar{u}_+ \beta_1 + \kappa_+ \beta_3 \\ \bar{u}_- \beta_1 + \kappa_- \beta_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ (\beta_1 + \rho \sigma_v \beta_2) \beta_1 + (\rho \sigma_v \beta_1 + \sigma_v^2 \beta_2) \beta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi^{\bar{v}^+} (\beta_1 + \sigma_+ \kappa_+ \beta_3) - 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \phi^{\bar{v}^-} (-\beta_1 + \sigma_- \kappa_- \beta_4) - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \beta_1 - \frac{1}{2} \beta_1^2 + \bar{\kappa}_v \beta_2 - \frac{1}{2} \sigma_v^2 \beta_2^2 - \rho \sigma_v \beta_1 \beta_2 \\ -\phi^{\bar{v}^+} (\beta_1 + \sigma_+ \kappa_+ \beta_3) + 1 + \bar{u}_+ \beta_1 + \kappa_+ \beta_3 \\ -\phi^{\bar{v}^-} (-\beta_1 + \sigma_- \kappa_- \beta_4) + 1 + \bar{u}_- \beta_1 + \kappa_- \beta_4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Die Hauptaufgabe bei der Optionsbewertung nach dem hier verfolgten Ansatz besteht darin, das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen aus (4.2) bis (4.3) zu lösen um dann in einem nächsten Schritt das Integral aus (4.23) auszuwerten. Im allgemeinen Fall muss beides numerisch geschehen, da keine analytischen Lösungen für die Differentialgleichungen zur Verfügung stehen.

Möchte man das Endwertproblem aus (4.2) bis (4.3), mit $\alpha(T) = 0$ und $\beta(T) = u$ in ein Anfangswertproblem umwandeln, betrachtet man dazu die Funktionen $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, für die $\bar{\alpha}(T-t) = \alpha(t)$, $\bar{\beta}(T-t) = \beta(t)$ für $t \in [0, T]$ gilt. Für $\tau = T-t$ ist dann $\frac{\partial \beta(t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\beta}(\tau)}{\partial \tau}$, also $\frac{\partial \bar{\beta}(\tau)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\beta}(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\beta}(\tau)}{\partial \tau} \cdot (-1)$ und für $\bar{\alpha}$ entsprechend. $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ erfüllen also die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t}(\tau) = K_1^\top \bar{\beta}(\tau) + \frac{1}{2} \bar{\beta}(\tau)^\top H_1 \bar{\beta}(\tau) + l_1 \left(\phi(\bar{\beta}(\tau)) - 1 \right), \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial t}(\tau) = -r + K_0 \bar{\beta}(\tau) + \frac{1}{2} \bar{\beta}(\tau)^\top H_0 \bar{\beta}(\tau) + l_0 \left(\phi(\bar{\beta}(\tau)) - 1 \right) \quad (4.39)$$

mit $\bar{\beta}(0) = \beta(T) = u$ und $\bar{\alpha}(0) = \alpha(T) = 0$.

Im folgenden Beispiel wird gezeigt, dass in einigen speziellen Fällen eine analytische Lösung der auftretenden Differentialgleichungen möglich ist und somit eine geschlossene Formel für den Preis einer europäischen Option verfügbar ist. Dies ist unter anderem dann der Fall, wenn keine Sprünge auftreten oder wenn die Wirkungsfunktion konstant ist.

Beispiel 4.12.

1. Fall: keine Sprünge

Falls keine Sprünge auftreten, vereinfacht sich das System der zu lösenden Differentialgleichungen zu

$$\dot{\bar{\beta}}_1(\tau) = 0, \quad (4.40)$$

$$\dot{\bar{\beta}}_2(\tau) = -\frac{1}{2} \bar{\beta}_1(\tau) + \frac{1}{2} \bar{\beta}_1(\tau)^2 - \bar{\kappa} \bar{\beta}_2(\tau) + \frac{1}{2} \sigma_v^2 \bar{\beta}_2(\tau)^2 + \rho \sigma_v \bar{\beta}_1(\tau) \bar{\beta}_2(\tau), \quad (4.41)$$

$$\dot{\bar{\alpha}}(\tau) = -r + \bar{\beta}_1(\tau)r + \bar{\beta}_2(\tau)\bar{\kappa}\bar{\theta}, \quad (4.42)$$

wobei $\dot{\bar{\beta}}$ die Ableitung von $\bar{\beta}$ nach t bezeichne (für α entsprechend). Im Folgenden wird, sofern Missverständnisse ausgeschlossen sind, $\dot{\bar{\beta}}_2(\tau)$ durch $\dot{\bar{\beta}}_2$ abgekürzt. Wegen (4.40) ist $\bar{\beta}_1$ konstant. Da zudem $\bar{\beta}_1(0) = u$ gilt, ist $\bar{\beta}_1(\tau) \equiv u$ und (4.41) vereinfacht sich zu

$$\dot{\bar{\beta}}_2 = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2 - \bar{\kappa}\bar{\beta}_2 + \frac{1}{2}\sigma_v^2\bar{\beta}_2^2 + \rho\sigma_v u\bar{\beta}_2 = -\frac{1}{2}a + \bar{\beta}_2 b + \frac{\bar{\beta}_2^2 \sigma_v^2}{2}, \quad \dot{\bar{\beta}}_2(0) = 0,$$

wobei $a := u(1-u)$ und $b := \sigma_v \rho u - \kappa_v$. Es liegt also eine Differentialgleichung der Form $y' = q_0(t) + q_1(t)y + q_2(t)y^2$ vor. Diese werden auch *riccatische Differentialgleichungen* genannt und besitzen die Lösung

$$y = -\frac{w'}{q_2 w},$$

sofern eine Funktion w mit $w(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$ existiert, die die Differentialgleichung

$$w'' - P(t)w' + Q(t)w = 0, \quad \text{mit} \quad P(t) = q_1(t) + \frac{q_2'(t)}{q_2(t)}, \quad Q(t) = q_2(t)q_0(t)$$

löst.⁵

Hier ist also $q_0 = -\frac{a}{2}$, $q_1 = b$, $q_2 = \frac{\sigma_v^2}{2}$, weshalb die Differentialgleichung

$$w'' - bw' - \frac{a\sigma_v^2}{4}w = 0$$

zu lösen ist. Wie man leicht nachvollziehen kann, besitzt die quadratische Gleichung

$$r^2 - br - \frac{a\sigma_v^2}{4} = 0$$

die (unter Umständen komplexen) Nullstellen $r_1 = \frac{1}{2}(b + \gamma)$ und $r_2 = \frac{1}{2}(b - \gamma)$ mit⁶ $\gamma = \sqrt{b^2 + a\sigma_v^2}$, weshalb w die Lösungen

$$w(t) = C_1 e^{\frac{b+\gamma}{2}t} + C_2 e^{\frac{b-\gamma}{2}t} = e^{\frac{b}{2}t} \left(C_1 e^{\frac{\gamma}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

besitzt. Damit $w \neq 0$ gilt, muss mindestens eine der Konstanten C_1, C_2 ungleich 0 sein. Für w' ergibt sich dann

$$w'(t) = C_1 \frac{b+\gamma}{2} e^{\frac{b+\gamma}{2}t} + C_2 \frac{b-\gamma}{2} e^{\frac{b-\gamma}{2}t} = \frac{e^{\frac{b}{2}t}}{2} \left(C_1 (b+\gamma) e^{\frac{\gamma}{2}t} + C_2 (b-\gamma) e^{-\frac{\gamma}{2}t} \right),$$

woraus

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_2(\tau) &= -\frac{w'(\tau)}{q_2 w(\tau)} \stackrel{q_2 = \frac{\sigma_v^2}{2}}{=} -\frac{2w'(\tau)}{\sigma_v^2 w(\tau)} = -\frac{1}{\sigma_v^2} \cdot \frac{C_2 (b-\gamma) e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} + C_1 (b+\gamma) e^{\frac{\gamma}{2}\tau}}{C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} + C_1 e^{\frac{\gamma}{2}\tau}} \\ &= -\frac{1}{\sigma_v^2} \cdot \frac{C_2 (b-\gamma) e^{-\gamma\tau} + C_1 (b+\gamma)}{C_2 e^{-\gamma\tau} + C_1} \end{aligned}$$

⁵Vgl. [Hil69] S. 273 ff.

⁶Genauer gesagt ist $\gamma = |\gamma^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\phi}{2}}$, wobei $|\gamma^2|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\phi}{2}}$ die Polarform der komplexen Zahl γ^2 sei. γ und $-\gamma$ sind also die 2-ten Wurzeln von γ^2 .

folgt. Da insbesondere $\bar{\beta}_2(0) = 0$ ist, muss auch $C_2(b-\gamma) + C_1(b+\gamma) = 0$ gelten. Nun kann o.B.d.A. angenommen werden, dass sowohl $b-\gamma \neq 0$ als auch $b+\gamma \neq 0$ gilt, da ansonsten $w' \equiv 0$ ist (in diesem Fall wäre $\bar{\beta}_2$ konstant). $C_2(b-\gamma) + C_1(b+\gamma) = 0$ ist also gleichbedeutend mit $C_2 = -C_1 \frac{b+\gamma}{b-\gamma}$. Einsetzen in obige Gleichung liefert dann

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_2(\tau) &= -\frac{1}{\sigma_v^2} \cdot \frac{C_2(b-\gamma)e^{-\gamma\tau} + C_1(b+\gamma)}{C_2e^{-\gamma\tau} + C_1} \\ &= -\frac{1}{\sigma_v^2} \cdot \frac{(b+\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})}{1 - \frac{b+\gamma}{b-\gamma}e^{-\gamma\tau}} \\ &= -\frac{(b+\gamma)(b-\gamma)}{\sigma_v^2} \cdot \frac{(1-e^{-\gamma\tau})}{b-\gamma - (b+\gamma)e^{-\gamma\tau}} \\ &= -\frac{(b^2-\gamma^2)}{\sigma_v^2} \cdot \frac{(1-e^{-\gamma\tau})}{-2\gamma + (b+\gamma) - (b+\gamma)e^{-\gamma\tau}} \\ &= -\frac{(b^2-\gamma^2)}{\sigma_v^2} \cdot \frac{(1-e^{-\gamma\tau})}{-2\gamma + (b+\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})}.\end{aligned}$$

Schließlich erhält man die Lösung

$$\bar{\beta}_2(\tau) = \frac{-a(1-e^{-\gamma\tau})}{2\gamma - (b+\gamma)(1-e^{-\gamma\tau})}, \quad (4.43)$$

mit

$$\gamma = \sqrt{b^2 + a\sigma_v^2}, \quad a = u(1-u) \quad \text{und} \quad b = \sigma_v\rho u - \kappa_v.$$

Die Differentialgleichung von $\bar{\alpha}$ lässt sich nun mit Hilfe des Ergebnisses für $\bar{\beta}_2$ lösen. Wie vorher kann angenommen werden, dass $\gamma - b \neq 0$, $\gamma + b \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ gilt, da sonst $w' \equiv 0$ und damit auch $\bar{\beta}_2 \equiv 0$. In diesem Fall wäre $\bar{\alpha} = (-r + ur)\tau$. Ist $\bar{\beta}_2 \neq 0$ erhält man allgemeiner

$$\bar{\alpha}(\tau) - \bar{\alpha}(0) = \int_0^\tau (-r + ur) ds + \kappa_v\theta_v \int_0^\tau \bar{\beta}_2(s) ds.$$

Aus $\bar{\alpha}(0) = 0$ folgt dann

$$\bar{\alpha}(\tau) = (-r + ur)\tau + \kappa_v\theta_v \int_0^\tau \bar{\beta}_2(s) ds.$$

Nun gilt

$$\frac{a}{\gamma - b} = \frac{a(\gamma + b)}{\gamma^2 - b^2} = \frac{a(\gamma + b)}{b^2 + a\sigma_v^2 - b^2} = \frac{(\gamma + b)}{\sigma_v^2} = -\frac{2}{\sigma_v^2} \cdot (-\gamma) \cdot \frac{\gamma + b}{2\gamma} \quad (4.44)$$

und zudem

$$\begin{aligned}
-a(1 - e^{-\gamma s}) &= -a \left(1 + \frac{b - \gamma}{\gamma - b} e^{-\gamma s} \right) = -a \left(1 + \frac{b - \gamma}{\gamma - b} e^{-\gamma s} - \frac{2\gamma}{\gamma - b} e^{-\gamma s} \right) \\
&= -a \left(\frac{2\gamma}{\gamma - b} \left(\frac{\gamma - b}{2\gamma} + \frac{\gamma + b}{2\gamma} e^{-\gamma s} \right) - \frac{2\gamma}{\gamma - b} e^{-\gamma s} \right) \\
&= -a \left(\frac{2\gamma}{\gamma - b} \left(1 - \frac{\gamma + b}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma s}) \right) - \frac{2\gamma}{\gamma - b} e^{-\gamma s} \right). \quad (4.45)
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \bar{\beta}_2(s) ds &\stackrel{(4.43)}{=} \int_0^\tau \frac{-a(1 - e^{-\gamma s})}{2\gamma - (b + \gamma)(1 - e^{-\gamma s})} ds \\
&\stackrel{(4.45)}{=} \int_0^\tau -\frac{a}{2\gamma} \cdot \frac{\frac{2\gamma}{\gamma - b} \left(1 - \frac{\gamma + b}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma s}) \right) - \frac{2\gamma}{\gamma - b} e^{-\gamma s}}{1 - \frac{\gamma + b}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma s})} ds \\
&= \int_0^\tau -\frac{a}{\gamma - b} + \frac{a}{\gamma - b} \cdot \frac{e^{-\gamma s}}{1 - \frac{\gamma + b}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma s})} ds \\
&\stackrel{(4.44)}{=} \int_0^\tau -\frac{\gamma + b}{\sigma_v^2} - \frac{2}{\sigma_v^2} \cdot \frac{-\gamma \left(\frac{\gamma + b}{2\gamma} \right) e^{-\gamma s}}{1 - \frac{\gamma + b}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma s})} ds \\
&= -\frac{\gamma + b}{\sigma_v^2} \cdot \tau - \frac{2}{\sigma_v^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma + b}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma \tau}) \right).
\end{aligned}$$

Dies ergibt schließlich

$$\bar{\alpha}(\tau) = (-r + ur)\tau - \kappa_v \theta_v \left(\frac{\gamma + b}{\sigma_v^2} \cdot \tau + \frac{2}{\sigma_v^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma + b}{2\gamma} (1 - e^{-\gamma \tau}) \right) \right), \quad (4.46)$$

mit

$$\gamma = \sqrt{b^2 + a\sigma_v^2}, \quad a = u(1 - u) \quad \text{und} \quad b = \sigma_v \rho u - \kappa_v.$$

Der Preis eines europäischen Calls mit Laufzeit T und Strike K ist in diesem Modell also gegeben durch

$$C(K, T, \xi) = G_{(1,0),-(1,0)}(-\ln(K), (x, v), T, \chi) - KG_{0,-(1,0)}(-\ln(K), (x, v), T, \chi)$$

mit G wie in (4.23), $\psi^x(u, (x, v), 0, T) = e^{\bar{\alpha}(T) + \bar{\beta}(T)v + ux}$ und $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ wie in (4.46) bzw. (4.43).

2. Fall: konstante Wirkungsfunktion ($\delta = 0$)

Für den Fall, dass das Modell Sprünge erlaubt, die Wirkungsfunktion allerdings konstant ist, ändern sich die Differentialgleichung von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ nicht (vgl. Korollar 4.11), weshalb (4.46) und (4.43) weiterhin ihre Gültigkeit behalten. Es ist jedoch noch eine dritte und vierte DGL der Form

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\beta}}_3(\tau) &= \varphi^{\bar{v}^+}(u) - 1 + \bar{u}_+ u, \\ \dot{\bar{\beta}}_4(\tau) &= \varphi^{\bar{v}^-}(u) - 1 + \bar{u}_- u\end{aligned}$$

zu lösen. $\dot{\bar{\beta}}_3$ und $\dot{\bar{\beta}}_4$ sind also konstant, weshalb leicht

$$\bar{\beta}_3(\tau) = \varphi^{\bar{v}^+}(u)\tau - (1 - \bar{u}_+ u)\tau, \bar{\beta}_4(\tau) = \varphi^{\bar{v}^-}(u)\tau - (1 - \bar{u}_- u)\tau$$

folgt. Der Optionspreis ergibt sich nun wie oben, mit dem Unterschied, dass

$$\psi^X(u, (x, v), 0, T) = e^{\bar{\alpha}(T) + \bar{\beta}(T)v + ux + \bar{\beta}_3(T)\lambda_+ + \bar{\beta}_4(T)\lambda_-}. \quad (4.47)$$

3. Fall: allgemeine Wirkungsfunktion ($\delta \geq 0$)

Im allgemeinen Fall verändern sich sowohl die DGL von α als auch die von β so, dass eine analytische Lösung nicht mehr gewährleistet ist. Deshalb muss man, wie bereits oben beschrieben, auf numerische Lösungsverfahren zurückgreifen. MATLAB-Programmcodes für die numerische Lösung, die auch im Rahmen des nächsten Kapitels benötigt werden, sind auf einer Daten-CD beigefügt.

5 Kalibrierung

Nachdem in den letzten Kapiteln die theoretischen Grundlagen geschaffen wurden, Derivate in einem Shot Noise-Modell zu bewerten, soll dieses nun angewendet werden. Konkret bedeutet dies, dass eine Kalibrierung an Marktdaten vorgenommen wird, welche die durch den Markt gegebenen (risikoneutralen) Modellparameter liefert. Dies kann sowohl für das SNSVM, als auch für dessen Spezialfälle, z.B. SDSVM (keine Shot Noise-Effekte) oder SVM (überhaupt keine Sprünge) vorgenommen werden. Vergleicht man schließlich die jeweiligen Modellpreise mit den tatsächlichen Marktpreisen, so ergibt sich ein Vergleich der verschiedenen Modelle.

Allgemeines zur Kalibrierung

Ziel der Kalibrierung ist es also, anhand beobachteter Marktdaten die Parameter

$$\Theta = \left(v_0, \rho, \kappa_v, \theta_v, \sigma_v, \lambda_0^+, \lambda_0^-, \xi_+, \xi_-, \kappa_+, \kappa_-, \theta_+, \theta_-, \sigma_+, \sigma_- \right)$$

zu schätzen. Diese Aufgabe vereinfacht sich für den Fall, dass die Wirkungsfunktionen konstant sind zu

$$\Theta = \left(v_0, \rho, \kappa_v, \theta_v, \sigma_v, \lambda_0^+, \lambda_0^-, \xi_+, \xi_- \right)$$

und falls keine Sprünge auftreten zu

$$\Theta = (v_0, \rho, \kappa_v, \theta_v, \sigma_v).$$

Dabei müssen die folgenden Parameterbedingungen erfüllt sein:

- $\rho \in [-1, 1]$,
- $\xi_+ > 1$ (damit $E(\exp(U_1)) < \infty$),
- alle anderen Parameter nichtnegativ,
- $2\kappa_v\theta_v \geq \sigma^2$,
- $\lambda_0^\pm \geq \theta_\pm$.

Sind für N Call-Optionen die Daten $X_n = (K_n, S_n, \tau_n, r_n)$ für alle $n \in \{1, \dots, N\}$ gegeben, wobei

- K_n den Strike der Option,
- S_n den gegenwärtigen Preis des Basisgutes der Option,
- τ_n die Restlaufzeit der Option und
- r_n den risikolosen Zinssatz (für die Laufzeit τ_n)

bezeichnet, so kann gemäß Satz 4.7 der Modellpreis $C^{mod}(X_n, \Theta)$ bestimmt werden. Dabei wird insbesondere vorausgesetzt, dass die Bedingungen 1 und 2 aus Satz 4.7 erfüllt sind, ohne dies explizit zu überprüfen. Bezeichnet C_n^{mar} den Marktpreis der n -ten Option so kann des Weiteren jeder Kombination von Modellparametern Θ durch

$$\epsilon(X_n, \Theta, C_n^{mar}) := C^{mod}(X_n, \Theta) - C_n^{mar}$$

die Differenz zwischen Modell und Marktpreis zugeordnet werden. Ist der Marktpreis für die Optionen nicht verfügbar, so ersetzt man diesen durch gemittelte *Bid-Ask-Kurse*,¹ d.h. $C_n^{mar} = (C_n^{bid} + C_n^{ask})/2$.

Zur Datenkalibrierung bestimmt man das Minimum der Summe der gewichteten quadrierten Abweichungen unter allen zulässigen Parameterkombinationen, also

$$\min_{\Theta} \sum_{n=1}^N \omega_n (\epsilon(X_n, \Theta, C_n^{mar}))^2, \quad \omega_n \geq 0 \quad \text{für alle } n \in \{1, \dots, N\}.$$

Je nach Wahl des Gewichtungsfaktors ergibt sich also im Allgemeinen eine andere *optimale* Parameterkombination. Eine intuitive und sinnvolle Wahl des Gewichtungsfaktors ist der *Bid Ask Spread* (Geld-Brief-Spanne) der jeweiligen Option, d.h. $\omega_n = |C_n^{bid} - C_n^{ask}|$. Man erhält als zu minimierende Zielfunktion

$$k(\Theta) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{C_{modell}(X_n, \Theta) - C_{market,n}}{\sqrt{|C_{bid,n} - C_{ask,n}|}} \right)^2. \quad (5.1)$$

Berechnungen

Sämtliche Berechnungen wurden mit MATLAB durchgeführt und entsprechen der oben erklärten Vorgehensweise. Die Programmcodes sind auf einer Daten-CD beigefügt. Diese enthält ebenfalls die zur Kalibrierung benötigten Daten.

¹Der Bid (Briefkurs) bezeichnet den Kurs, zu dem ein Marktteilnehmer ein Wertpapier kaufen möchte. Der Ask (Geldkurs) gibt den Kurs an, zu dem ein Marktteilnehmer verkaufen möchte.

Daten

Der DAX ist der wichtigste deutsche Aktienindex. Er spiegelt die Entwicklung der dreißig größten und umsatzstärksten, an der Frankfurter Wertpapierbörse gelisteten Unternehmen wider. Üblicherweise wird unter der Bezeichnung DAX der Performance-Index, neben dem ebenfalls veröffentlichten Kursindex, verstanden. Bei einem Performance-Index werden ausgeschüttete Dividenden zum gewichteten Kurswert des Index hinzugerechnet. Erfolgt eine Ausschüttung an die Anleger, reduziert sich der Aktienkurs in der Regel um den Betrag der Dividende. Die Zahlungen werden beim Performance-Index nun jedoch dem Kurs unmittelbar wieder zugeschlagen, quasi so, als hätte keine Dividendenzahlung stattgefunden. Deshalb ist es möglich das in Kapitel 3 eingeführte SNSVM, in welchem ja keine Dividendenzahlungen vorgesehen sind, anzuwenden.

Indexoptionen, deren Basiswert der DAX ist, werden von der Eurex, einer Terminbörse für Finanzderivate, angeboten. Diese Optionen sind vom europäischen Typ. Ausführungstag ist üblicherweise der dritte Freitag des Verfallsmonats.²

Die hier genutzten Daten stammen vom 20.08.2010.³ Als Optionspreise wurden dabei aus Ermangelung an detaillierteren Daten die gemittelten Kurse aus aktuellen Bid- und Ask-Kursen von Eurex-Optionsscheinen für verschiedene Laufzeiten und Strikes genutzt. Die Laufzeiten reichen von ca. einem Monat (17. September 2010) bis ca. zwei Jahre (15. Juni 2012). Die Strikes decken den Bereich zwischen 5600 und 7400 ab. Der DAX notierte zu dieser Zeit bei 6026,30 Punkten. Als risikoloser Zinssatz wurden die Euribor-Sätze benutzt. Da die Sensitivität bzgl. des Zinssatzes relativ gering ist wurde nur auf den 12-Monats-Satz zurückgegriffen und darauf verzichtet, für die verschiedenen Laufzeiten unterschiedliche Euribor-Sätze zu benutzen. Der 12-Monats-Satz lag an besagtem Datum bei 1,420.

Ergebnisse

Anhand der beschriebenen Daten konnten das SVM, SDSVM und das SNSVM kalibriert werden. Das SVM und das SDSVM wurde jeweils einhundert mal kalibriert, wobei die Parameter-Anfangswerte jeweils zufällig gemäß einer Gleichverteilung auf dem Intervall zwischen unterer und oberer Parametergrenze gewählt wurden. Am Ende wurde das beste Ergebnis ausgewählt. Das SNSVM wurde aufgrund des erhöhten Rechenaufwandes lediglich fünf mal kalibriert.

Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Sie enthält die optimalen Parameterkombinationen für die drei verschiedenen Modelle und den jeweiligen Wert der Zielfunktion $k(\Theta)$.

²Weitere Informationen auf www.eurexchange.com/trading/products/IDX/DAX/ODAX.html erhältlich.

³Abgerufen am 20.08.2010 um 11:54 Uhr auf http://tool.boerse.de/Eurex-Optionen-846900-eurex/&WKN=846900&basis=alle&laufzeit=alle&typ_eurex=CALL.html#start_content.

Tabelle 5.1. *Ergebnisse der Kalibrierung*

	SV	SDSV	SNSV
κ_v	1,2684	2,8662	4,3616
θ_v	0,0900	0,0276	0,0179
σ_v	0,4778	0,3975	0,3124
ρ	-0,9030	-0,7770	-0,9558
v_0	0,0550	0,0458	0,0389
λ_0^+		34,5272	65,9339
λ_0^-		0,1828	0,5380
ξ_+		199,9993	176,4400
ξ_-		2,0746	3,9485
κ_+			15,7892
κ_-			2,6473
θ_+			65,9165
θ_-			0,3612
σ_+			2,6772
σ_-			3,0111
$k(\Theta)$	280,6	71,9	30,6

Es lässt sich festhalten, dass die Stärke der Anpassung wie erwartet dem Grad der Verallgemeinerung der Modelle folgt. Konkret bedeutet dies, dass das SNSV-Modell das weitaus beste Ergebnis liefert, gefolgt vom SDSV-Modell. Dabei ist hervorzuheben, dass das SNSVM die quadrierten gewichteten Abweichungen im Vergleich zum SDSVM mehr als halbiert. Bezogen auf die Abweichungen des SVM, die bei Weitem am höchsten sind, stellt letzteres jedoch nur eine Verbesserung auf verhältnismäßig geringem Niveau dar.

Die Abbildungen 5.1, 5.2 und 5.3 zeigen die gewichteten Abweichungen zwischen Markt- und Modellpreisen für die jeweiligen Parameterkombinationen aus Tabelle 5.1 bei verschiedenen Call-Optionen. Deren Auswertung ergibt, dass vor allem Optionen mit kurzer Laufzeit wie auch in the money-Optionen durch das SV-Modell nur schlecht angenähert werden. Die beiden anderen Modelle erzielen auch dort wesentlich genauere Ergebnisse, wobei die des SNSV-Modells flächendeckend am besten sind.

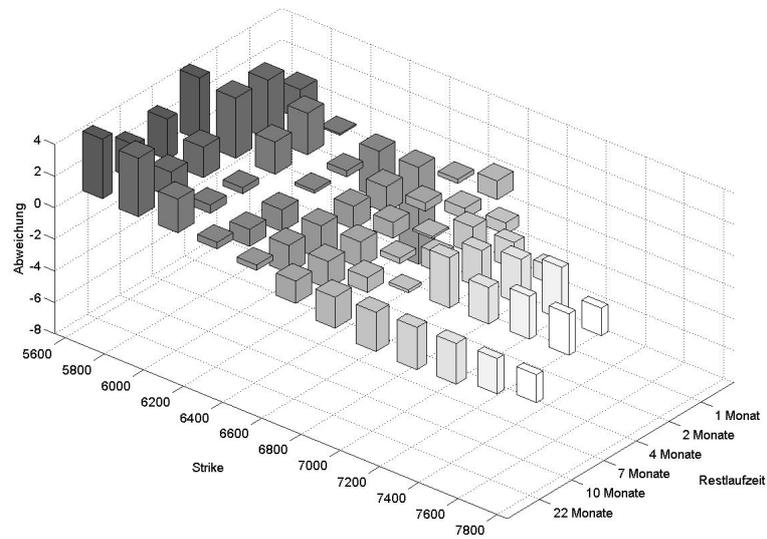


Abbildung 5.1. Zeigt die gewichteten Abweichungen von Markt- und Modellpreisen für das SV-Modell.

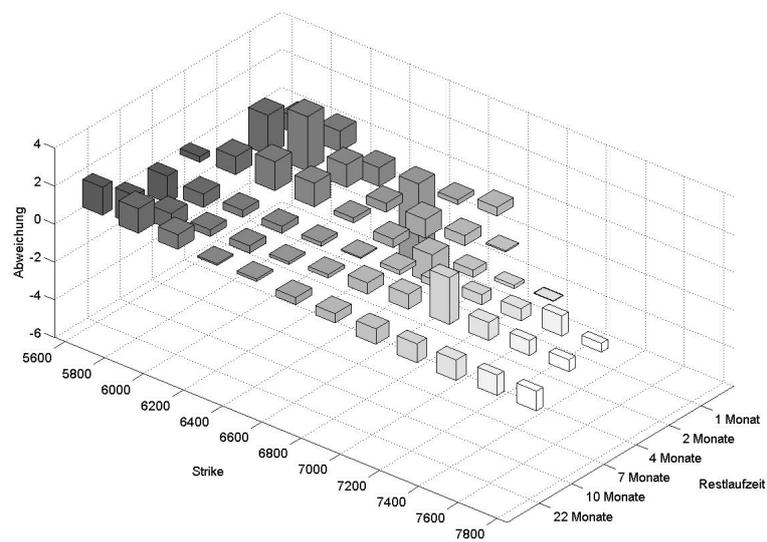


Abbildung 5.2. Zeigt die gewichteten Abweichungen von Markt- und Modellpreisen für das SDSV-Modell.

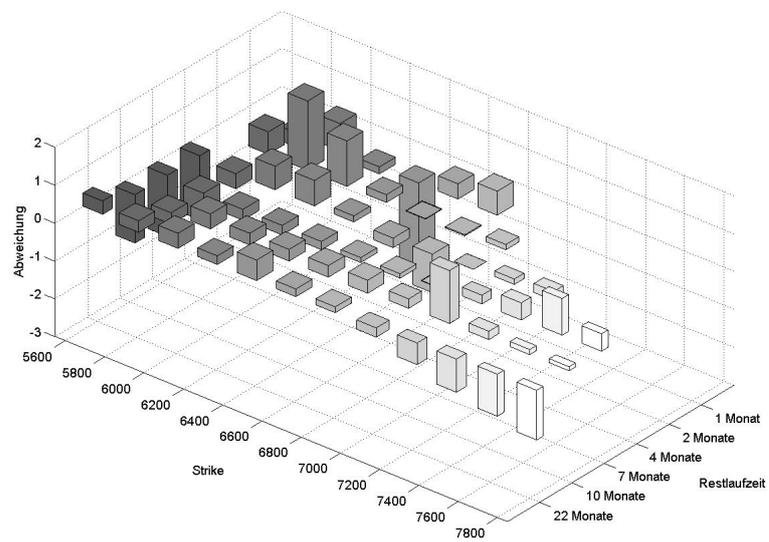


Abbildung 5.3. Zeigt die gewichteten Abweichungen von Markt- und Modellpreisen für das SNSV-Modell.

6 Ausblick

Am Anfang dieser Arbeit stand die Überlegung, dass Phänomene wie Market Overreaction und Mean Reversion durch ein Finanzmarktmodell erklärt werden sollen. Es zeigte sich, dass eine Modellierung derartiger Effekte durch Shot Noise-Prozesse vorgenommen werden kann, woraufhin in Kapitel 3 ein entsprechendes Shot Noise-Finanzmarktmodell mit stochastischer Volatilität entwickelt wurde. Unter gewissen Einschränkungen an die Klasse der risikoneutralen Maße konnte in Kapitel 4 eine Möglichkeit zur Bewertung von Derivaten gefunden werden. Diese Einschränkungen sahen vor, dass das Modell unter einem risikoneutralen Maß eine affine Struktur besitzt. In Kapitel 5 ergab ein abschließender Vergleich des Shot Noise-Modells mit einigen Spezialfällen, die ihrerseits bereits geläufige Finanzmarktmodelle darstellen, dass die Verallgemeinerung tatsächlich auch eine genauere Anpassung an Marktdaten ermöglicht. Es ist jedoch zu bedenken, dass sich eine genauere Anpassung zu Lasten der Schnelligkeit und Einfachheit der Berechnungsmethoden auswirkt. Dieses stellt auch stets ein Kriterium für Modelle dar, die das in dieser Arbeit Untersuchte weiter verallgemeinern. Dabei sind unter anderem folgende Erweiterungen denkbar:

Die Definition der Shot Noise-Prozesse in Kapitel 2 beschränkte sich auf den Spezialfall der multiplikativen SNP. Grundsätzlich könnten durch die Wahl anderer Wirkungsfunktionen oder -Prozesse deutlich komplexere Abhängigkeitsverhältnisse von Kurssprung und Kompensation modelliert werden. Als Beispiel sei

$$Y_t = \sum_i^{N_t} U_i h(t - T_i) + \int_0^t \alpha_s dW_s, \quad t \in [0, T],$$

genannt, wobei W ein Wienerprozess und α ein geeigneter (möglicherweise von Y abhängiger) Prozess ist. Shot Noise-Effekte sind in diesem Fall nicht mehr deterministisch sondern zufällig. Eine andere Verallgemeinerung kann dadurch erreicht werden, dass ein Sprung nicht vollständig kompensiert wird ($h(t) \rightarrow 0$, für $t \rightarrow \infty$), sondern nur ein, möglicherweise zufälliger Anteil. Bei der Bewertung von Derivaten wurde die Klasse der multiplikativen SNP nochmals durch die Wahl einer exponentiellen Wirkungsfunktion eingeschränkt, um dessen Gedächtnislosigkeit auszunutzen. Im Fall einer allgemeineren Wirkungsfunktion wird das Modell unter einer entsprechenden Klasse von risikoneutralen Maßen, wie sie in Abschnitt 3.3 erarbeitet wurde, jedoch nicht zwangsläufig eine affine Struktur aufweisen, weshalb der hier gewählte Bewertungsansatz im Allgemeinen nicht übertragen werden kann.

Die Verallgemeinerung der Risikoprämien stellt eine andere Möglichkeit zur Erweiterung dar. In dem hier untersuchten Modell ist die Prämie für das Volatilitätsrisiko linear in \sqrt{v} und die des Sprungintensitätsrisikos linear in f^\pm . Intuitiv ist es aber auch denkbar, dass eine erhöhte Volatilität mit einem erhöhten Sprungrisiko einhergeht, was eine Abhängigkeit der Risikoprämien zur Folge hätte.

Auf der einen Seite ist grundsätzlich bei allen vorgeschlagenen Erweiterung zu erwarten, dass sich die Anpassung an Marktdaten weiter verbessert. Auf der anderen Seite werden die entsprechenden Modelle schlechter analytisch handhabbar sein und einen wesentlich höheren Rechenaufwand bei der numerischen Auswertung in Anspruch nehmen.

A Punktprozesse

Im zweiten Kapitel werden einige Grundlagen über Punktprozesse genutzt, welche hier angegeben werden sollen. Die Darstellungen orientieren sich dabei im Wesentlichen an denen von Kapitel VIII in [Bre81]. Auf Beweise wird verzichtet, da eine detaillierte Darstellung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Für Details sei auf [Bre81] oder [JYC09] Kapitel 8 verwiesen.

Definition A.1 (Punktprozess). Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein W-Raum und $(T_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Zufallsgrößen mit Werten in $[0, \infty]$, so dass

$$T_0 = 0 \quad \text{und} \quad T_n < T_{n+1} \quad \text{für} \quad T_n < \infty,$$

so nennt man $(T_n)_{n \geq 0}$ einen *Punktprozess*. Der durch

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{t \geq T_n\}}$$

definierte Prozess $N = (N_t)_{t \geq 0}$, heißt *Zählprozess* von $(T_n)_{n \geq 1}$ oder auch oft vereinfacht *Punktprozess*. Setzt man $T := \sup_n T_n$, so heißt T *Explosionszeit* von N . Wenn $T = \infty$ P -f.s. gilt, heißt N *P -nichtexplodierend*.

Satz A.2.

1. Ein Punktprozess N ist genau dann adaptiert, wenn die zugehörigen Zufallsvariablen $(T_n)_{n \geq 1}$ Stoppzeiten sind.
2. Ein nichtexplodierender Punktprozess N ist càdlàg.

Ein besonderer und wichtiger Punktprozess ist der Poissonprozess:

Definition A.3. Ein adaptierter nichtexplodierender Punktprozess N heißt *Poissonprozess*, wenn

1. $N_t - N_s$ unabhängig ist von \mathcal{F}_s für alle s, t mit $0 \leq s < t < \infty$,
2. für alle s, t, u, v mit $0 \leq s < t < \infty$ und $0 \leq u < v < \infty$ sowie $t - s = v - u$ die Verteilung von $N_t - N_s$ gleich der Verteilung von $N_v - N_u$ ist.

Definition A.4 (Previsibilität). Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration des W-Raums (Ω, \mathcal{F}, P) . Die auf $(0, \infty) \times \Omega$ durch

$$(s, t] \times A, \quad 0 \leq s \leq t, \quad A \in \mathcal{F}_t$$

definierte σ -Algebra $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ heißt σ -Algebra der \mathcal{F}_t -previsiblen Ereignisse. Ein Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt \mathcal{F}_t -previsibel, wenn die Funktion $X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, (t, \omega) \mapsto X(t, \omega)$ messbar ist bezüglich der σ -Algebra $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$.

Bemerkung A.5. Jeder linksseitig stetige adaptierte Prozess ist previsibel.

Definition A.6 (Intensität eines Punktprozesses). Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ ein filtrierter W-Raum. Ein adaptierter Punktprozess N besitzt die *Intensität* $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wenn

1. $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ ein nichtnegativer \mathcal{F}_t -previsibler Prozess ist,
2. $\int_0^t \lambda_s ds < \infty$ P -f.s. für alle $t \geq 0$,
3. für jeden nicht-negativen \mathcal{F}_t -previsiblen Prozess C gilt

$$E \left(\int_0^\infty C_s dN_s \right) = E \left(\int_0^\infty C_s \lambda_s ds \right).$$

Dabei bezeichne $\int_0^\infty C_s dN_s$ das pfadweise definierte Lebesgue-Stieltjes-Integral.

Definition A.7 (Zufallsmaß). Sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein W-Raum. Ein *Zufallsmaß* μ auf dem Raum $\mathbb{R}^+ \times E$ ist eine Familie von positiven Maßen $(\mu(\omega, dt, dx); \omega \in \Omega)$ definiert auf $\mathbb{R}^+ \times E$, so dass für $[0, t] \times A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{E}$ die Abbildung $\omega \mapsto \mu(\omega; [0, t], A)$ \mathcal{F} -messbar ist und $\mu(\omega; \{0\} \times E) = 0$ erfüllt.

Definition A.8 (markierter Punktprozess). Eine Folge $(T_n, Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *markierter Punktprozess* mit *Marken* $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im *Markenraum* (E, \mathcal{E}) , wenn

1. $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Punktprozess ist,
2. (E, \mathcal{E}) ein messbarer Raum ist,
3. $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von E -wertigen Zufallsvariablen ist.

Mit jedem Punktprozess $(T_n, Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann durch

$$p([0, t], A) := N_t(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{Z_n \in A\}} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

ein Zufallsmaß $p(dt, dx)$ assoziiert werden.

Definition A.9 (Filtration eines Punktprozesses). $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ heißt *Filtration eines (markierten) Punktprozesses* N , wenn $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine nichtfallende Familie von σ -Algebren mit der Eigenschaft $\mathcal{F}_t^N \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $t \geq 0$ ist. Dabei ist die sog. *interne* oder *natürliche Filtration* $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ gegeben durch

$$\mathcal{F}_t^N := \sigma(N_s(A), 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{E}), \quad t \geq 0.$$

Definition A.10. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration und sei auf $(0, \infty) \times \Omega \times E$ die σ -Algebra $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t)$ definiert durch

$$\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{E}.$$

Eine Abbildung H mit

$$(t, \omega, z) \in (\mathbb{R}^+, \Omega, E) \mapsto H(t, \omega, z) \in \mathbb{R}$$

heiß (*E*-indiziert) \mathcal{F}_t -previsibel, wenn sie $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}_t)$ -messbar ist.

Bemerkung A.11. Häufig wird folgende Notation benutzt:

$$\int_0^\infty \int_E H(s, z) p(ds, dz) = \sum_{n=1}^\infty H(T_n, Z_n) \mathbb{1}_{\{T_n \leq \infty\}}, \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^t \int_E H(s, z) p(ds, dz) = \sum_{n=1}^\infty H(T_n, Z_n) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{N_t(E)} H(T_n, Z_n),$$

wobei \int_a^b interpretiert werden soll als $\int_{(a,b]}$, falls $b < \infty$ und als $\int_{(a,b)}$, falls $b = \infty$. $p(dt, dz)$ und $(T_n, Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ werden synonym benutzt und beide gleichsam als markierter Punktprozess bezeichnet.

Bemerkung A.12. Sei $H(t, z)$ ein \mathcal{F}_t -previsibler Prozess, $p(dt, dz)$ das Zufallsmaß des adaptierten Punktprozesses $(T_n, Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann wird alternativ auch folgende Notation benutzt:

$$\int_0^t \int_E H(s, z) p(ds, dx) = \int_0^t H(s, Z_s) dN_s$$

oder in differentieller Schreibweise

$$\int_E H(t, z) p(dt, dx) = H(t, Z_t) dN_t,$$

wobei $N_t = N_t(E) = p((0, t], E)$ die Gesamtzahl der Sprünge bis zum Zeitpunkt t darstellt und $Z_t := \sum_{n=1}^\infty U_n \mathbb{1}_{\{T_{n-1} < t \leq T_n\}}$, $t \geq 0$ die stückweise konstante, linksstetige (also insbesondere previsible) Interpolation der Folge $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Definition A.13 (Intensitätskern). Sei $p(dt, dz)$ ein markierter Punktprozess mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Sei des Weiteren angenommen, dass $(N_t(A))_{t \geq 0}$ für jedes $A \in \mathcal{E}$ die \mathcal{F}_t -Intensität $\lambda_t(A)$ besitzt, wobei $\lambda_t(\omega, dz)$ ein Kern von $(\Omega \times [0, \infty), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_+)$ nach (E, \mathcal{E}) sei. Man sagt dann, dass $\lambda_t(dz)$ der (P, \mathcal{F}_t) -Intensitätskern von $p(dt, dz)$ ist.

Definition A.14 (Charakteristik eines Punktprozesses). Sei $p(dt, dz)$ ein E -markierter Punktprozess mit (P, \mathcal{F}_t) -Intensitätskern $\lambda_t(dz)$, der die Form

$$\lambda_t(dz) = \lambda_t \Phi_t(dz), \quad t \geq 0,$$

besitze, wobei $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ ein nichtnegativer \mathcal{F}_t -previsibler Prozess und $\Phi_t(\omega, dz)$ ein stochastischer Kern von $(\Omega \times [0, \infty), \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_+)$ nach (E, \mathcal{E}) sei. Dann nennen wir $(\lambda_t, \Phi_t(dz))$ die (P, \mathcal{F}_t) -Charakteristik von $p(dt, dz)$.

Satz A.15 (Projektionssatz). Sei $p(dt, dz)$ ein E -markierter Punktprozess mit (P, \mathcal{F}_t) -Intensitätskern $\lambda_t(dz)$. Dann gilt für jeden nichtnegativen \mathcal{F}_t -previsiblen Prozess H

$$E \left(\int_0^\infty \int_E H(s, z) p(ds, dz) \right) = E \left(\int_0^\infty \int_E H(s, z) \lambda_t(dz) \right).$$

Korollar A.16. Sei $p(dt, dz)$ ein markierter Punktprozess mit (P, \mathcal{F}_t) -Intensitätskern $\lambda_t(dz)$. Sei außerdem H ein \mathcal{F}_t -previsibler Prozess, für den für alle $t \geq 0$ gilt

$$E \left(\int_0^t \int_E |H(s, z)| \lambda_t(dz) \right) < \infty \quad \text{bzw.} \quad \int_0^t \int_E |H(s, z)| \lambda_t(dz) < \infty \quad P\text{-f.s.},$$

dann ist, mit $q(ds, dz) = p(ds, dz) - \lambda_s(dz)ds$, $\int_0^t \int_E H(s, z) q(ds, dz)$ ein (P, \mathcal{F}_t) -Martingal bzw. ein lokales (P, \mathcal{F}_t) -Martingal.

Satz A.17. Sei $p(dt, dz)$ ein markierter Punktprozess mit (P, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\lambda_t, \Phi_t(dz))$. Seien μ_t und $h(t, z)$ zwei \mathcal{F}_t -previsiblen nichtnegative Prozesse, so dass gilt

$$\int_0^t \mu_s \lambda_s ds < \infty \quad P\text{-f.s.}, \quad t \geq 0,$$

$$\int_E h(t, z) \Phi_t(dz) = 1 \quad P\text{-f.s.}, \quad t \geq 0.$$

Definiere für jedes $t \geq 0$

$$L_t := L_0 \left(\prod_{n \geq 1} \mu_{T_n} h(T_n, Z_n) \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} \right) \exp \left(\int_0^t \int_E (1 - \mu_s h(s, z)) \lambda_s \Phi_s(dz) ds \right),$$

wobei L_0 eine nichtnegative \mathcal{F}_0 -messbare Zufallsvariable mit $E(L_0) = 1$. Dann gilt:

1. $(L_t)_{t \geq 0}$ ist ein nichtnegatives lokales (P, \mathcal{F}_t) -Martingal und ein (P, \mathcal{F}_t) -Supermartingal.
2. Vorausgesetzt $E(L_T) = 1$ für ein $T < \infty$, dann ist L ein (P, \mathcal{F}_t) -Martingal über $[0, T]$. Bezüglich dem durch $dQ/dP = L_T$ definierten W -Maß Q besitzt $p(dt, dz)$ auf $[0, T]$ die (P, \mathcal{F}_t) -Charakteristik $(\mu_t \lambda_t, h(t, z) \Phi_t(dz))$.

Satz A.18. *Es seien die Bedingungen aus Satz A.17 erfüllt. Außerdem existieren eine deterministische, monoton wachsende, reellwertige Funktion $B(t)$ und endliche Konstanten K_1, K_2, α , mit $\alpha > 1$, so dass für alle $t \in [0, T]$*

$$\int_E (\mu_s h(t, z))^\alpha \Phi_t(dz) \leq K_1 + K_2 \left(N_t + \int_0^t \lambda_s ds \right) \quad P\text{-f.s.}$$

und

$$\int_0^t \lambda_s ds \leq B(t) \quad P\text{-f.s.}$$

gilt. Desweiteren sei angenommen, dass für alle $0 < M < \infty$

$$E(L_0 \exp(MN_1)) < \infty.$$

Dann gilt $E(L_t) = 1$.

B Daten-CD

Die Berechnungen in Kapitel 5 wurden mit Hilfe der Software MATLAB durchgeführt. Die dazu notwendigen Programmcodes finden sich auf der beigefügten Daten-CD wieder. Diese enthält ebenfalls die dort verwendeten Marktdaten von DAX-Optionen.

Literaturverzeichnis

- [ABL02] ANDERSEN, Torben G. ; BENZONI, Luca ; LUND, Jesper: An Empirical Investigation of Continuous-Time Equity Return Models. In: *The Journal of Finance* 57 (2002), Nr. 3, S. 1239–1284
- [Als05] ALSMEYER, Gerold: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. 4. Auflage. Skripten zur Mathematischen Statistik Nr. 30, Universität Münster, 2005
- [ASS08] ALTMANN, Timo ; SCHMIDT, Thorsten ; STUTE, Winfried: A Shot Noise Model For Financial Assets. In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 11 (2008), Nr. 1, S. 87–106
- [Bat96] BATES, David S.: Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options. In: *The Review of Financial Studies* 9 (1996), Nr. 1, S. 69–107
- [Bre81] BREMAUD, Pierre: *Point processes and Queues: Martingale Dynamics*. New York : Springer, 1981
- [CIR85] COX, John C. ; INGERSOLL, Jonathan E. ; ROSS, Stephen A.: A Theory of the Term Structure of Interest Rates. In: *Econometrica* 53 (1985), Nr. 2, S. 385–407
- [DFS03] DUFFIE, Darrel ; FILIPOVIĆ, Damir ; SCHACHERMAYER, Walter: Affine Processes and Applications in Finance. In: *The Annals of Applied Probability* 13 (2003), Nr. 3, S. 984–1053
- [DPS00] DUFFIE, Darrel ; PAN, Jun ; SINGLETON, Kenneth: Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions. In: *Econometrica* 68 (2000), Nr. 6, S. 1343–1376
- [EGG09] ERRAIS, Eymen ; GIESECKE, Kay ; GOLDBERG, Lisa R.: *Affine Point Processes and Portfolio Credit Risk. Working paper*. 2009
- [GS77] GÄNSSLER, Peter ; STUTE, Winfried: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin : Springer, 1977
- [GS05] GASPAR, Raquel M. ; SCHMIDT, Thorsten: Quadratic Models for Portfolio Credit Risk with Shot-Noise Effects. In: *SSE/EFI Working paper Series in Economics and Finance* (2005), Nr. 616

- [Haw71] HAWKES, Alan G.: Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes. In: *Biometrika* 58 (1971), Nr. 1, S. 83–90
- [Hes93] HESTON, Steven L.: A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. In: *The Review of Financial Studies* 6 (1993), Nr. 2, S. 327–343
- [Hil69] HILLE, Einar: *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Reading, Mass. : Addison-Wesley Publishing Company, 1969
- [HW87] HULL, John ; WHITE, Alan: The pricing of options on assets with stochastic volatilities. In: *The Journal of Finance* 42 (1987), Nr. 2, S. 281–300
- [Irl03] IRLE, Albrecht: *Finanzmathematik*. 2. Auflage. Stuttgart : Teubner, 2003
- [Jac87] JACOD, Jean: *Limit theorems for stochastic processes*. Berlin : Springer, 1987
- [JYC09] JEANBLANC, Monique ; YOR, Marc ; CHESNEY, Marc: *Mathematical Methods for Financial Markets*. Dordrecht : Springer, 2009
- [KK04] KLÜPPENBERG, Claudia ; KÜHN, Christoph: Fractional Brownian motion as a weak limit of Poisson shot noise processes. In: *Stochastic Processes and their Applications* 113 (2004), Nr. 2, S. 333–351
- [Kuo02] KUO, S. G.: A Jump-Diffusion Model for Option Pricing. In: *Management Science* 48 (2002), Nr. 8, S. 1086–1101
- [Kü02] KÜHN, Christoph: *Shocks and Choices - an Analysis of Incomplete Market Models*, TU München, Diss., 2002
- [LM78] LÉPINGLE, Dominique ; MÉMIN, Jean: Sur l'intégrabilité uniforme des martingales exponentielles. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete* 42 (1978), S. 175–203
- [Mer76] MERTON, Robert C.: Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. In: *Journal of Financial Economics* 3 (1976), S. 125–144
- [Oak75] OAKES, David: The Makovian Self-Exciting Process. In: *Journal of Applied Probability* 12 (1975), Nr. 1, S. 69–77
- [Pan02] PAN, Jun: The jump-risk premia implicit in options: evidence from an integrated time-series study. In: *Journal of Financial Econometrics* 63 (2002), Nr. 1, S. 3–50
- [Pro05] PROTTER, Philip: *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2. Auflage. Berlin : Springer, 2005

-
- [Run03] RUNGALDIER, Wolfgang J.: Jump-Diffusion models. In: RACHEV, Svetlozar T. (Hrsg.): *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*. North Holland, 2003
- [Sco87] SCOTT, Louis O.: Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation, and an application. In: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22 (1987), Nr. 4, S. 419–438
- [SS07] SCHMIDT, Thorsten ; STUTE, Winfried: Shot-Noise Processes and the Minimal Martingale Measure. In: *Statistics and Probability Letters* 77 (2007), Nr. 12, S. 1332–1338
- [Tho08] THOMAS, Michael D.: *Die Volatilität der Finanzmärkte*. Hamburg : Verlag Dr. Kovač, 2008
- [WH06] WONG, Bernard ; HEYDE, C.C.: On Changes of Measure in Stochastic Volatility Models. In: *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* (2006), S. 1–13

Eidesstattliche Erklärung

Gemäß § 21 (6) der Diplomprüfungsordnung für den Studiengang Mathematik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster vom 15. Juli 1998 versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Münster, den 13. September 2010

Tamino Meyhöfer