Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
16.10.2018

Finanzmathematik

Blatt 0

Die Lösungen dieses Zettels müssen Sie nicht abgeben. Bitte bereiten Sie die Lösungen dennoch für die Besprechung in der Übung am 22.10.2018 bzw. 23.10.2018 vor.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ und $X, Y, X_1, X_2, ...$ seien integrierbar. Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des bedingten Erwartungswerts:

1) Linearität
$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y|\mathcal{G}] = \alpha\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] + \beta\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2) Positivität
$$X \geq 0 \quad \mathbb{P}-\text{f.s.} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0 \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

3) Turmeigenschaft
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1]|\mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

4) Glättungsregel
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

5) Herausziehen von Bekanntem
X, Y seien nichtnegativ, dann gilt
$$Y \text{ ist } \mathcal{G}-\text{messbar} \Rightarrow \mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

6) Unabhängigkeit
$$X \text{ ist unabhängig von } \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

7) Monotone Konvergenz
$$X_n \nearrow X \quad \mathbb{P}-\text{f.s.} \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \nearrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

8) Majorisierte Konvergenz
$$X_n \to X \quad \mathbb{P}-\text{f.s. und } \sup_{n\geq 1}|X_n| \in L^1(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathbb{E}[X_n|\mathcal{G}] \to \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad \mathbb{P}-\text{f.s.}$$

Hinweis: Sie dürfen für Eigenschaft 5 benutzen:
Seien X, Y nichtnegativ und Y sei $\mathcal{G}$-messbar, dann ist Y genau dann eine Version des bedingten Erwartungswerts $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$, falls $\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YZ]$ für alle nichtnegativen $\mathcal{G}$-messbaren Z.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1 $\mu \ll \nu$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F})$

2 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ s.d. $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\nu(A) < \delta \Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$$

Aufgabe 3

Es sei $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Falls $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ f.s. und $\mathbb{E}[Y|X] = X$ f.s., dann gilt $X = Y$ f.s.