Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
18.12.2018

Finanzmathematik

Blatt 10

Abgabe: 08.01.2019 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $\Omega = \{\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R} : \omega \text{ stetig}\}$. Definiere $d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n\geq 1} 2^{-n} \max_{t\in[0,n]}(|\omega_1(t) - \omega_2(t)| \wedge 1)$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist und dass (Ω, d) ein vollständiger und separabler metrischer Raum ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei Ω wie in Aufgabe 1. Für $\delta > 0$ und $\omega \in \Omega$ definieren wir

$$m(\omega, \delta) = \sup_{s,t\in[0,1], |t-s|\leq\delta} |\omega(t) - \omega(s)|.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\delta > 0$ die Abbildung $\omega \mapsto m(\omega, \delta)$ stetig in dem metrischen Raum (Ω, d) aus Aufgabe 1 ist. Zeigen Sie außerdem, dass für jedes $\omega \in \Omega$, $\delta \mapsto m(\omega, \delta)$ monoton wachsend ist und $\lim_{\delta \searrow 0} m(\omega, \delta) = 0$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Sei S ein topologischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge in S wieder kompakt ist.

(b) Sei S ein topologischer Hausdorff Raum (insbesondere sind kompakte Mengen in S auch abgeschlossen). Es sei $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge nichtleerer, kompakter Mengen in S, sodass $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$. Zeigen Sie, dass $\bigcap_n C_n \neq \emptyset$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei $(\mathbb{P}_n)_n$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$

(ii) $\liminf_n \mathbb{P}_n(G) \geq \mathbb{P}(G)$ für alle $G \subset \mathbb{R}$ offen

(iii) $\limsup_n \mathbb{P}_n(C) \leq \mathbb{P}(C)$ für alle $C \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen

(iv) $\lim_n \mathbb{P}_n(A) = \mathbb{P}(A)$ für alle A, sodass $\mathbb{P}(\partial A) = 0$

(v) $\varphi_n(t) := \int e^{itx}\mathbb{P}_n(\mathrm{d}x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int e^{itx}\mathbb{P}(\mathrm{d}x) = \varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$

(vi) $F_n(t) = \mathbb{P}_n((-\infty, t]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}((-\infty, t]) = F(t)$ für alle Stetigkeitspunkte $t \in \mathbb{R}$ von F.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Entscheiden Sie mit Beweis, ob die folgenden Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathbb{P}_n$ schwach konvergieren.

(a) $\mathbb{P}_n = (1 - \frac{1}{n})\delta_{-1} + \frac{1}{n}\delta_{n^2}$

(b) $\mathbb{P}_n = (1 - n\sin(\frac{1}{n}))\mathcal{N}(0, n) + n\sin(\frac{1}{n})\mathcal{N}(\frac{1}{n}, 2)$

(c) $\mathbb{P}_n = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_{1-\frac{1}{n}} + \frac{1}{3}\delta_n$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass $\varphi(t) = e^{it\mu - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$ für $\mathbb{P} = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Es sei $\mathbb{P}$ ein festes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K = K(\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ existiert, sodass $\mathbb{P}(K) \geq 1 - \varepsilon$.

Bemerkung: Diese Aussage folgt direkt aus Prohorovs Theorem, aber wir benötigen einen direkten Beweis, der Prohorovs Theorem nicht benutzt.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Es sei $(f_n)_n$ eine Folge von stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, sodass (f_n) gleichmäßig beschränkt ist und $f_n \to f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es sei $(\mathbb{P}_n)_n$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, sodass $\mathbb{P}_n \Rightarrow \mathbb{P}$ schwach. Zeigen Sie, dass dann

$$\int f_n \mathrm{d}\mathbb{P}_n \longrightarrow \int f \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Es sei $(\mathbb{P}_n)_n$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen, welche zu einer Folge von stochastischen Prozessen $(X^{(n)})_n = (X_t^{(n)} : t \in [0,1])_n$ gehören. Dann ist $(\mathbb{P}_n)_n$ gleichmäßig straff genau dann, wenn

(a) $\sup_n \mathbf{E}^{\mathbb{P}_n}[|X_0^{(n)}|^\nu] < \infty$ für ein $\nu > 0$

(b) $\sup_n \mathbf{E}^{\mathbb{P}_n}[|X_t^{(n)} - X_s^{(n)}|^\alpha] \leq C|t-s|^{1+\beta}$ für zwei Konstanten $\alpha, \beta > 0$ und $0 \leq s < t \leq 1$.

Hinweis: Benutzen Sie Kolmogorovs Stetigkeits Theorem und das folgende Resultat, welches in der Vorlesung bewiesen wurde:
$(\mathbb{P}_n)_n$ ist gleichmäßig straff in $\mathcal{M}_1(\Omega)$, $\Omega = C[0,\infty)$ genau dann, wenn

- $\lim\limits_{\lambda \nearrow \infty} \sup_n \mathbb{P}_n[|\omega(0)| \geq \lambda] = 0$
- $\lim\limits_{\delta \searrow 0} \sup_n \mathbb{P}_n[\omega : m(\omega, \delta) > \epsilon] = 0$ für alle $\epsilon > 0$

mit m wie in Aufgabe 2.

Wir wünschen Allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr.