Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
15.01.2019

Finanzmathematik
Blatt 12

Abgabe: 22.01.2019 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie $\mathbb{E}\big[|W_t - W_s|^{2n}\big]$ für $n \in \mathbb{N}$ und benutzen Sie Kolmogorov's Stetigkeits Theorem, um zu zeigen, dass

$$\frac{|W_t - W_s|}{|t-s|^{\delta}} \leq C \quad \text{a.s.},$$

wobei $\delta \in (0, 1/2)$ und $t, s \in [0, T]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $W = (W_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $T, a > 0$. Beweisen Sie:

$$\mathbb{P}(\sup_{0\leq t\leq T} W_t \geq a) = 2\mathbb{P}(W_T \geq a) = \mathbb{P}(|W_T| \geq a).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $Z_1, ..., Z_n$ unabhängig, identisch, Standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Ferner sei ein weiteres Maß definiert durch

$$\mathrm{d}\widetilde{\mathbb{P}} = \exp\Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i Z_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2\Big)\mathrm{d}\mathbb{P},$$

wobei $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $(Z_1, ..., Z_n)$ unter dem Maß $\widetilde{\mathbb{P}}$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Betrachten Sie das zeitstetige Modell von Black und Scholes: Es bezeichnen $(B_t)_{t\in[0,T]}$ (Bond) und $(S_t)_{t\in[0,T]}$ (Aktie) die Preisprozesse mit Parametern $s_0 > 0$, $\mu, r \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$. Ferner bezeichne $\mathbf{Q}$ das äquivalente Martingalmaß.

(a) Stellen Sie den diskontierten Preisprozess mithilfe einer $\mathbf{Q}$-Brownschen Bewegung dar.

(b) Verifizieren Sie mittels der Darstellung aus (a), dass $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein $\mathbf{Q}$-Martingal ist.

(c) Sei $K > 0$. Bewerten Sie die Option die zur Maturität T gegen die Aktie ausgetauscht wird, wenn deren Wert größer als K ist (andernfalls ist die Option wertlos). Stellen Sie den Wert mithilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung dar.

(d) Sei $K' \in (0, K)$. Bewerten Sie eine Call-Option mit Strike K' auf die in (c) angegebene Option. Stellen Sie den Wert mithilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung dar.

Aufgabe 5 (2* Punkte)

Seien $s \in [0, T)$ und $c > 0$. Zeigen Sie, dass der folgende Prozess eine Brownsche Bewegung mit Start in 0 ist:
$(W_{s+t} - W_s)_{t \in [0, T-s]}$.

Aufgabe 6 (1* Punkte)

Zeigen Sie, dass der folgende Prozess ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist:
$(W_t^2 - t)_{t \in [0, T]}$.