Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
23.10.2018

Finanzmathematik

Blatt 2

Abgabe: 30.10.2018 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Betrachten Sie das diskontierte Binomialmodell aus Beispiel 1.3.

(a) Seien $d < 1 + r < u$. Bestimmen Sie einen Parameter $p \in (0, 1)$, sodass der diskontierte Preisprozess $(X_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ ein Martingal ist. Ist dieser Parameter eindeutig? Für welche $p \in (0, 1)$ ist der Preisprozess $(X_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ ein Supermartingal bzw. ein Submartingal? Was passiert, wenn $1 + r$ nicht in (d, u) liegt?
(Bei einem Supermartingal gilt anstelle der Martingaleigenschaft nur $\mathbb{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq X_t$, bei einem Submartingal $\mathbf{E}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq X_t$. Ein Martingal ist somit zugleich ein Super- und ein Submartingal.)

(b) Stellen Sie für $S_0 = 125$, $T = 3$, $p = 0,75$, $u = 1,2$ und $d = 0,8$ den Preisprozess S als Binomialbaum dar und berechnen Sie mit diesem die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(S_3 = 216)$, $\mathbf{P}(S_3 = 144)$, $\mathbf{P}(S_3 = 96)$ und $\mathbf{P}(S_3 = 64)$.

(c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsgewichte des Preises S_t und des diskontierten Preises X_t (für das allgemeine Modell).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{Q}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Dichte Z bezüglich $\mathbf{P}$. Zeigen Sie, dass für eine Teil-σ-Algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ und eine nichtnegative oder $\mathbf{Q}$-integrierbare Zufallsvariable X gilt

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X|\mathcal{G}] = \frac{1}{\mathbf{E}[Z|\mathcal{G}]}\mathbf{E}[XZ|\mathcal{G}] \quad \mathbf{Q}-\text{f.s.}$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für nichtnegative Zufallsvariablen Y_1, Y_2 gilt:

$$\forall A \in \mathcal{F} : \int_A Y_1 \,\mathrm{d}\mathbf{P} = \int_A Y_2 \,\mathrm{d}\mathbf{P} \quad \Longrightarrow \quad Y_1 = Y_2 \;\mathbf{P}-\text{f.s.}$$

Ferner dürfen Sie verwenden, dass $\mathbf{E}[Z|\mathcal{G}]$ eine Dichte von $\mathbf{Q}\big|_{\mathcal{G}}$ bzgl. $\mathbf{P}\big|_{\mathcal{G}}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\mathbf{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und (X_t) ein adaptierter $\mathbb{R}^d$-wertiger Prozess. Dann ist $\mathbf{Q}$ ein Martingalmaß (d.h. unter $\mathbf{Q}$ ist jeder Prozess (X_t^i) ein $\mathbf{Q}$-Martingal) genau dann wenn für jeden beschränkten previsiblen $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozess H der Gewinn $G_T(H)$ integrierbar ist und

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[G_T(H)] = 0.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $\xi_1, \xi_2, ...$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit kanonischer Filtration $\mathbb{F} =$

$(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es sei $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$. Ferner existiere ein $\lambda_0 > 0$, sodass die Momenten erzeugende Funktion $M(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda\xi_1}]$ für $|\lambda| \le \lambda_0$ endlich ist. Sei $X_0 = 1$ und

$$X_n := \exp\Big(\lambda \sum_{j=1}^n \xi_j\Big) M(\lambda)^{-n},$$

dann gelten:

(a) $(X_n)_n$ ist ein $\mathbb{F}$-Martingal

(b) für $Y_n = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2} X_n\big|_{\lambda=0} = S_n^2 - 2nS_nM'(0) + n(n+1)M'(0)^2 - nM''(0)$ ist $(Y_n)_n$ ein $\mathbb{F}$-Martingal.

Hinweis: Es gelten $M'(0) = \mathbb{E}[\xi_1]$ und $M''(0) = \mathbb{E}[\xi_1^2]$.