Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker Winter Semester 2018/19
30.10.2018

Finanzmathematik

Blatt 3

Abgabe: 06.11.2018 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Seien $u > m > d > 0$, $r > -1$, $s_0 > 0$ und $p_1, p_2, p_3 > 0$ mit $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ bezeichne den Wahrscheinlichkeitsraum gegeben durch

$$\Omega = \{u, m, d\}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbf{P} = p_1\delta_u + p_2\delta_m + p_3\delta_d.$$

Ferner sei $\bar{S} = (B_t, S_t)_{t\in\{0,1\}}$ der Finanzmarkt gegeben durch

$$B_t = (1+r)^t \quad \text{und} \quad S_t(\omega) = \begin{cases} s_0, & \text{falls } t = 0 \\ s_0\omega, & \text{falls } t = 1 \end{cases}$$

(a) Geben Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße an.

(b) Folgern Sie, dass der Finanzmarkt $\bar{S}$ genau dann arbitragefrei ist, wenn $d < 1 + r < u$.

(c) Konstruieren Sie für $1 + r \leq d$ und $1 + r \geq u$ jeweils eine Arbitrage.

(d) Berechnen Sie für ein Martingalmaß $\mathbf{Q}$ die Dichte bezüglich $\mathbf{P}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

(a) Sei $Y = X_1 - X_0$ und $\mathcal{K} = \{H \cdot Y : H \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbf{P}, \mathbb{R}^d)\}$, dann gilt

$$\mathcal{K} \cap L^0_+ = \{0\} \Leftrightarrow (\mathcal{K} - L^0_+) \cap L^0_+ = \{0\}$$

(b) Für $W \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, \mathbb{R}^n)$ existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ mit $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbf{P}} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und $W \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q}, \mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Bitte entnehmen Sie die Definitionen von L^p und L^0_+ der Seite ii des Skriptes aus dem Wintersemester 2013/14.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachten Sie einen arbitragefreien Finanzmarkt $\bar{S} = (S^0, S) = (S^0_t, S_t)_{t\in\{0,...,T\}}$. Seien $\bar{H}$ und $\bar{K}$ zwei selbstfinanzierende Handelsstrategien, sodass $V_T(\bar{H}) = V_T(\bar{K})$, $\mathbf{P}$-f.s. Zeigen Sie, dass für alle $t \in \{0, ..., T\}$ $\mathbf{P}$-f.s.,

$$V_t(\bar{H}) = V_t(\bar{K}).$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Zeigen Sie:

(a) Sei $(X_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,...,T\}}$-Martingal mit $\mathbf{E}[X_0] = c$, dann gilt $\mathbf{E}[X_t] = c$ für $t = 0, ..., T$.

(b) Sei $(X_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,...,T\}}$-Supermartingal und sei nun umgekehrt $E[X_t] = c$ für $t = 0, ..., T$, so ist $(X_t)_{t\in\{0,...,T\}}$ bereits ein $(\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,...,T\}}$-Martingal.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst für festes t, $X_t - c$ und nutzen Sie die Supermartingaleigenschaft. Definieren Sie dann $Y_{t-1} := X_{t-1} - \mathbf{E}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ und nutzen Sie ein Argument aus dem Beweis des FTAP 1.