Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
06.11.2018

Finanzmathematik

Blatt 4

Abgabe: 13.11.2018 bis 16:00 Uhr

Kauf- und Verkaufsoptionen:

- Eine Kaufoption (Call) gibt das Recht, ein Basisfinanzgut (Underlying) zu einem im voraus bestimmten festen Preis, dem Ausübungspreis (Strike), während (amerikanische Option) oder am Ende der Laufzeit/Fälligkeit (europäische Option) der Option zu kaufen.
- Eine Verkaufsoption (Put) gibt das Recht, ein Basisgut zu einem im voraus bestimmten Preis, während (USA) oder am Ende der Laufzeit (EU) der Option zu verkaufen.

Eine Option ist ein unbedingtes Termingeschäft, da keine Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht. Die Auszahlungsfunktion beschreibt den Gewinn, der durch Einlösen der Option zur Maturität T erzielt werden kann.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Geben Sie die Auszahlungsfunktionen A in Abhängigkeit des Endwertes S_T und des Strikes K einer

(a) europäischen Call-Option

(b) europäischen Put-Option

an und tragen Sie die Auszahlung gegen den Wert der Aktie S_T in einem Koordinatensystem ab.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathbf{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, sodass für alle $n \in \{1, ..., N\}$, $\mathbf{P}(\{\omega_n\}) > 0$. Betrachten Sie ein arbitragefreies Ein-Perioden Marktmodell mit diskontiertem Preisprozess $X = (X^1, ..., X^d)$. Wir nehmen zusätzlich an, dass die d Vektoren $(X_1^i(\omega_k) - X_0^i(\omega_k))_{k=1,...,N} \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, ..., d$ linear unabhängig sind. Die Menge der äquivalenten Martingalmaße sei mit $\mathcal{M}$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass $d < N$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ einelementig ist, wenn $d = N - 1$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ nicht einelementig ist, wenn $d < N - 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbf{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-adaptierter, integrierbarer stochastischer Prozess. Zeigen Sie:

(a) Es existieren ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-Martingal $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und ein $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$-previsibler Prozess $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $A_0 = 0$, sodass
$$X = M + A.$$

(b) Zeigen Sie, dass die obige Zerlegung fast sicher eindeutig ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Es seien A und B zwei konvexe, disjunkte, abgeschlossene Mengen in $\mathbb{R}^N$, sodass entweder A oder B kompakt ist. Dann existieren $v \neq 0$ und $c_1 < c_2$, sodass

$$\langle x, v\rangle > c_2 \quad \text{und} \quad \langle y, v\rangle < c_1$$

für alle $x \in A$ und $y \in B$.

(b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, falls die Kompaktheit nicht vorausgesetzt ist.