Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
13.11.2018

Finanzmathematik

Blatt 5

Abgabe: 20.11.2018 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeichnen Sie die Auszahlungsfunktion in Abhängigkeit des Endwertes S_T einer Aktie der folgenden europäischen Optionen und erläutern Sie, warum man mit diesen handelt:

(a) Bear Call Spread, d.h. es werden auf das selbe underlying S zum selben Ausübungszeitpunkt T ein Call zum Strike K_1 gekauft und ein Call zum Strike $K_2 < K_1$ verkauft

(b) Straddle: Dabei wird eine Long-Position in eine Call-Option und eine Put-Option mit demselben Strike K eingegangen

Geben Sie außerdem die Funktionen wieder konkret an.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Trinomialmodell (Blatt 3, Aufgabe 1) mit $S_0 = 125$, $u = 1.2$, $m = 0.9$, $d = 0.8$ und $r = 0.1$. Berechnen Sie alle arbitragefreien Preise für einen Call bzw. Put zur Maturität $T = 1$ und Strike $K = 100$.

(b) Denken Sie noch einmal zurück an Blatt 4 Aufgabe 2. Erläutern Sie, warum die Ergebnisse der Aufgabenteile (b) und (c) auch im Trinomialmodell sowie Binomialmodell (Blatt 2 Aufgabe 1) wiederzufinden sind. Geben Sie dafür die Parameter d und N im jeweiligen Modell an und erklären Sie, welches Ergebnis auf das jeweilige Modell passt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es bezeichne $\bar{S} = (S^0, S)$ einen arbitragefreien Finanzmarkt und $\mathbf{Q} \in \mathcal{M}^0$ ein Bewertungsmaß, d.h. jedem Derivat C wird der Preis $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C]$ zugeordnet (vorausgesetzt der Wert ist endlich).

(a) Geben Sie eine Formel für den undiskontierten Wert einer Option mit Ausschüttung $\mathcal{C}$ zur Zeit T bei Verwendung des Bewertungsmaßes $\mathbf{Q}$ an.

(b) Arbeitet man nun mit dem Nummeraire S^d, so erhält man andere äquivalente Martingalmaße. Welches Bewertungsmaß $\mathbf{Q}^\star \in \mathcal{M}^d$ liefert die gleichen Preise bei der Bewertung?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Sei $\bar{S} = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)_{t \in \{0,...,T\}}$ ein Finanzmarkt, sodass für alle $t \in \{0, ..., T\}$, $S_t^d > 0$, $\mathbf{P}$-f.s. Statt die Preise auf den Preisprozess S^0 zu beziehen, kann man als Numeraire auch den Preisprozess S^d wählen. Es bezeichne $\mathcal{M}^0$ und $\mathcal{M}^d$ die äquivalenten Martingalmaße des Marktes $\bar{S}$ bezüglich des Numeraire S^0 bzw. S^d.
Sei $\mathbf{Q}^0 \in \mathcal{M}^0$. Zeigen Sie:

(a) Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{Q}^d$ mit

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}^d}{\mathrm{d}\mathbf{Q}^0} = \frac{X_T^d}{X_0^d}$$

liegt in $\mathcal{M}^d$. Hierbei bezeichnet für $i = 0, ..., d$, $(X_t^i)_{t\in\{0,...,T\}}$ den bezüglich S^0 diskontierten Preisprozess.

(b) Die so definierte Transformation $\mathbf{Q}^0 \mapsto \mathbf{Q}^d$ ist eine Bijektion zwischen $\mathcal{M}^0$ und $\mathcal{M}^d$.

Hinweis: Verzichten Sie dieses Mal auf den Beweis der Integrierbarkeit aus der Definition eines Martingals.