Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
20.11.2018

Finanzmathematik

Blatt 6

Abgabe: 27.11.2018 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $K > 0$. Geben Sie jeweils eine möglichst explizite Formel für den Wert

(a) einer digitalen Option, welche 1 Euro ausschüttet, wenn der Wert der Aktie zur Maturität T über K liegt

(b) eines Straddle mit Ausübungspreis K

im arbitragefreien Binomialmodell an.

Allgemeine endliche Finanzmarktmodelle sind auf natürliche Weise mit Bäumen assoziiert. Es sei ein endliches Finanzmarktmodell mit Numeraire gegeben. Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

- Eine Menge $A \in \mathcal{F}_t \setminus \{\emptyset\}$ heißt t-Atom, wenn für $B \in \mathcal{F}_t$ mit $B \subset A$ bereits $B \in \{\emptyset, A\}$ gilt.
- Betrachten Sie die Menge
$$\mathbb{T} := \{(t, A) : t \in \{0, ..., T\},\ A \text{ ist } t-\text{atomar}\}.$$
Wir nennen $(t, A) \in \mathbb{T}$ Vater von $(t+1, B) \in \mathbb{T}$, wenn $B \subset A$, entsprechend heißt $(t+1, B)$ Kind von (t, A).
- Die Menge $\mathbb{T}$ wird zu einem Graphen, indem jeweils Väter mit ihren Kindern mittels Kanten verbunden werden, d.h. die Kantenmenge ist gegeben durch
$$\mathbb{E} := \big\{\{v, w\} \in \mathbb{T}^2 : v \text{ ist Vater von } w\big\}.$$
Für eine (ungerichtete) Kante $\{v, w\} \in \mathbb{E}$ schreiben wir meist $\langle v, w\rangle := \{v, w\}$.
- Ein Pfad der Länge $l \in \mathbb{N}_0$ in $\mathbb{T}$ ist eine Folge $v_0, ..., v_l \in \mathbb{T}$, sodass $\langle v_{i-1}, v_i\rangle \in \mathbb{E}$ für alle $i = 1, ..., l$.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass bis auf $(0, \Omega)$ jeder Knoten $w \in \mathbb{T}$ genau einen Vater hat und der Graph zusammenhängend ist (d.h. jedes Paar von Knoten ist durch einen Pfad verbunden).

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}$ ein Baum ist, d.h. dass es keine Kreise gibt. Ein Kreis ist ein Pfad $v_0, ..., v_l$ mit
$$l \in \mathbb{N},\ v_0 = v_l \text{ und } \langle v_0, v_1\rangle, ..., \langle v_{l-1}, v_l\rangle \text{ paarweise verschieden}$$

(c) Für einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten $\mathbb{R}^d$-wertigen stochastischen Prozess X sei
$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &: \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d\\ (t, A) &\mapsto X_t(\omega) \text{ mit } \omega \in A.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Zeigen Sie nun umgekehrt, dass jede Abbildung $\mathfrak{X} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$ eindeutig einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten stochastischen Prozess definiert.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

(a) Eine Abbildung $Q : \mathbb{E} \to (0,1)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $v \in \mathbb{V} \setminus \mathbb{V}_T$

$$\sum_{w:w \text{ Kind von } v} Q(\{v,w\}) = 1$$

gilt, definiert ein zu $\mathbf{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß via

$$\mathbf{Q}(\{\omega\}) = \prod_{t=1}^{T} Q(\{(\omega_1, ..., \omega_{t-1}), (\omega_1, ..., \omega_t)\})$$

für alle $\omega = (\omega_1, ..., \omega_T) \in \Omega$. Umgekehrt lässt sich jedes zu $\mathbf{P}$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß auf diese Weise darstellen.

(b) Jede Abbildung $\mathbf{X} : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definiert einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten Prozess (X_t) via

$$X_t(\omega) := \mathbf{X}((\omega_1, ..., \omega_t)) \quad \text{für } \omega \in \Omega$$

und jeder adaptierte Prozess lässt sich auf diese Weise darstellen.

(c) Ein adaptierter Prozess (X_t) (mit Darstellung $\mathbf{X}$) ist genau dann ein Martingal unter dem Maß $\mathbf{Q}$ (mit Darstellung Q wie in Teil (a)), wenn gilt

$$\sum_{w:w \text{ Kind von } v} Q(\{v,w\})(\mathbf{X}(w) - \mathbf{X}(v)) = 0.$$