Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
27.11.2018

Finanzmathematik

Blatt 7

Abgabe: 04.12.2018 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Falls $X_1, X_2 \sim \mathrm{Ber}(p)$ (d.h. $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = p$ für $p \in [0,1]$), dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Bin}(2,p)$ (die Zähldichte einer $\mathrm{Bin}(n,p)$-verteilten ZV ist gegeben durch $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$)

(b) Falls $X_1 \sim \mathrm{Normal}(\mu, \sigma^2)$ (d.h. die Dichte der Verteilung von X_1 ist gegeben durch $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\}$) und $X_2 \sim \mathrm{Normal}(\nu, \tau^2)$, dann ist $c_1X_1 + c_2X_2 \sim \mathrm{Normal}\,(c_1\mu + c_2\nu, c_1^2\sigma^2 + c_2^2\tau^2)$.

(c) Falls $X_1, X_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ (d.h. die Dichte der Verteilung von X_1 ist gegeben durch $f(x) = 1_{\{x>0\}}\lambda \exp\{-\lambda x\}$), dann ist $X_1 + X_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$ (die Dichte einer $\Gamma(p,b)$-verteilten ZV ist gegeben durch $f(x) = 1_{\{x>0\}} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$).

(d) Sei $X_1 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ (d.h. die Zähldichte der Verteilung von X_1 ist gegeben durch $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$), und $X_2 \sim \mathrm{Poi}(\mu)$, dann ist $X_1 + X_2 \sim \mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass, falls für alle $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}[e^{itY}]$, dann gilt $X \stackrel{(d)}{=} Y$. Es gibt aber auch die Möglichkeit, die Aussagen ohne diesen Satz zu beweisen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bewerten Sie im arbitragefreien T-Perioden-Binomialmodell die forward starting call option mit der Auszahlung

$$\left(\frac{S_T}{S_{T_0}} - K\right)^+$$

wobei $T_0 < T$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei $t \in \{0, ..., T-1\}$ und $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{M}$ mit Dichteprozessen $(Z_t), (Z_t^1), (Z_t^2)$ bzgl. $\mathbf{P}$. Wir definieren für $B \in \mathcal{F}_t$ das Maß $\tilde{\mathbf{Q}}$ auf $\mathcal{F}_T$ durch

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{Q}}}{\mathrm{d}\mathbf{P}} = Z_t\left(1_B \frac{Z_T^1}{Z_t^1} + 1_{B^c} \frac{Z_T^2}{Z_t^2}\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass der Dichteprozess $\tilde{Z}$ von $\tilde{\mathbf{Q}}$ gegeben ist durch

$$\tilde{Z}_s := \begin{cases} Z_s, & s \le t \\ Z_t\big(1_B \frac{Z_s^1}{Z_t^1} + 1_{B^c} \frac{Z_s^2}{Z_t^2}\big), & s > t. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\tilde{\mathbf{Q}}$ ein äquivalentes Martingalmaß ist.