Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker Winter Semester 2018/19
04.12.2018

Finanzmathematik
Blatt 8

Abgabe: 11.12.2018 bis 16:00 Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreies T-Perioden Finanzmarktmodell. Eine Chooser-Option ist eine Option, die dem Käufer das Recht gibt zum (festgelegten) Zeitpunkt $k < T$ nach Wahl entweder einen Call mit strike K und Maturität T oder einen Put mit gleichem strike und gleicher Maturität zu erhalten. Seien c_k bzw. p_k die Preise von Call- bzw. Putoption zum Zeitpunkt $k \leq T$. Zeigen Sie, dass die Auszahlung dieses Claims durch

$$C = (S_T - K)^+ 1_{\{c_k \geq p_k\}} + (K - S_T)^+ 1_{\{c_k < p_k\}}$$

beschrieben wird. Zeigen Sie ausserdem, dass der Preis der Chooseroption $p(C) = c(S_0, T, K) + p(S_0, k, K(1+r)^{T-k})$ erfüllt, wobei der erste Summand den Preis eines Calls mit Anfangsaktienkurs S_0, Maturität T, strike K bezeichne und der zweite Summand den Preis eines Puts mit Anfangsaktienkurs S_0, Maturität k und strike $K(1+r)^{T-k}$ bezeichne.

Hinweis: Benutzen Sie die Put-Call-Parität (Bemerkung 3.2).

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreies T-Perioden Finanzmarktmodell $\bar{S} = (S^0, S^1)$ auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ mit einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,\dots,T\}}$. Die risikolose Anleihe S^0 sei dabei durch $B_t := S_t^0 = (1+r)^t$ gegeben und wir schreiben S für die Aktie S^1. Es sei $\mathbf{Q}$ ein äquivalentes Martingalmaß in diesem Modell. Wir betrachten für eine Konstante $K > 0$ die Claims mit den Auszahlungen

$$C_t^E = (S_t - K)^+ \qquad \text{(europ. Call)}$$

$$C_t^A = \Big(\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} S_i - K\Big)^+ \qquad \text{(asiat. Call)}$$

in t.

(a) Zeigen Sie: $t \mapsto \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\big[\frac{C_t^E}{B_t}\big]$, $t = 0, \dots, T$ ist monoton wachsend (benutzen Sie die Jensensche Ungleichung für die bedingte Erwartung).

(b) Zeigen Sie:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\frac{C_t^A}{B_t}\Big] \leq \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\frac{C_i^E}{B_i}\Big]$$

(c) Folgern Sie:

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\frac{C_t^A}{B_t}\Big] \leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\Big[\frac{C_t^E}{B_t}\Big].$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten das T-Periodenbinomialmodell wie in der Vorlesung (d.h. S_{t+1} nimmt den Wert

$(1+u)S_t$, mit Wahrscheinlichkeit p und den Wert $(1+d)S_t$ mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ an und es ist $q = \frac{r-d}{u-d}$) mit der zusätzlichen Annahme, dass $(1+u)(1+d) = 1$ erfüllt ist. Dann ist $S_t = S_0 u^{Z_t}$, wobei Z_t die Anzahl der Aufwärtssprünge abzüglich der Anzahl der Abwärtssprünge angibt, d.h.

$$Z_t := \sum_{i=1}^{t} \big(1_{\{Y_i=u\}} - 1_{\{Y_i=d\}}\big).$$

Es sei ferner $M_t := \max_{0\leq s\leq t} Z_s$.

(a) Beweisen Sie das Reflektionsprinzip, welches besagt, dass

$$\mathbb{P}(M_T \geq k, Z_T = k-l) = \mathbb{P}(Z_T = k+l) \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(M_T = k, Z_T = k-l) = 2\frac{k+l+1}{T+1}\mathbb{P}(Z_{T+1} = 1+k+l) \tag{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei $\mathbb{P}$ die Laplace-Verteilung auf $\Omega = \{u,d\}^T$ bezeichnet.

(b) Zeigen Sie ein Reflektionsprinzip bzgl. des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbf{Q}$, genauer zeigen Sie:

$$\mathbf{Q}(M_T \geq k, Z_T = k-l) = \Big(\frac{1-q}{q}\Big)^l\, \mathbf{Q}(Z_T = k+l) = \Big(\frac{q}{1-q}\Big)^k\, \mathbf{Q}(Z_T = -k-l) \tag{3}$$

$$\mathbf{Q}(M_T = k, Z_T = k-l) = \frac{1}{q}\Big(\frac{1-q}{q}\Big)^l\, \frac{k+l+1}{T+1}\, \mathbf{Q}(Z_{T+1} = k+l+1) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{1-q}\Big(\frac{q}{1-q}\Big)^k\, \frac{k+l+1}{T+1}\, \mathbf{Q}(Z_{T+1} = -k-l-1) \tag{5}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}_0$. Benutzen Sie dabei, dass $\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = 2^T q^{\frac{T+Z_T}{2}}(1-q)^{\frac{T-Z_T}{2}}$.

(c) Benutzen Sie die obigen Ergebnisse, um den arbitragefreien Preis einer up-and-in call option zu berechnen. Die Auszahlung einer solchen Option in T lautet

$$C_{ui} = \big(S_T - K\big)^+ 1_{\{\max_{0\leq t\leq T} S_t \geq B\}}$$

für eine Konstante $B > S_0 \vee K$.