Jun.-Prof. Dr. C. Mukherjee
Yannic Bröker

Winter Semester 2018/19
11.12.2018

Finanzmathematik

Blatt 9

Abgabe: 18.12.2018 bis 16:00 Uhr

Für eine konvexe Teilmenge $K \subset V$ eines reellen Vektorraumes V bezeichne $\mathrm{ext}(K)$ die Menge der Extremalpunkte von K. Dies sind alle Punkte in K, die sich nicht als Konvexkombination zweier verschiedener Punkte aus K schreiben lassen, d.h.

$$\mathrm{ext}(K) := \{x \in K : \nexists \lambda \in (0,1), a, b \in K \setminus \{x\} \text{ mit } x = \lambda a + (1-\lambda) b\}.$$

Für einen abgeschlossenen konvexen Polyeder $P \subset \mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{ext}(P)$ gerade die Menge der Eckpunkte von P.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum mit einer strikt konvexen Normabbildung $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$. Ferner sei $K \subset X$ eine nichtleere konvexe und kompakte Teilmenge.

(a) Sei $\varphi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ oberhalbstetig, d.h. für alle Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x := \lim_{k\to\infty} x_k \in X$ gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \varphi(x_k) \leq \varphi(x).$$

Zeigen Sie, dass ein $x_{\max} \in K$ existiert mit

$$\varphi(x_{\max}) = \sup_{x \in K} \varphi(x).$$

(b) Sei $\varphi : X \to \bar{\mathbb{R}}$ oberhalbstetig und konvex. Zeigen Sie, dass

$$\max_{x \in K} \varphi(x) = \max_{x \in \mathrm{ext}(K)} \varphi(x)$$

Hinweis: Definieren Sie sich in Teil (b) eine geeignete kompakte Teilmenge $A \subset K$. Nutzen Sie dann, dass die Norm stetig ist und somit das Supremum auf A angenommen wird.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\bar{S} = (S_t^0, S_t)_{t \in \{0,..,T\}}$ ein arbitragefreier Finanzmarkt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ und C ein europäisches Derivat.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M}$ der äquivalenten Martingalmaße konvex ist.

(b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass $\bar{S}$ ein endlicher Finanzmarkt ist. Fassen Sie Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ als Vektoren im $\mathbb{R}^{|\Omega|}$ auf und zeigen Sie, dass

$$\sup_{\mathbf{Q} \in \mathcal{M}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C] = \max_{\mathbf{Q} \in \mathrm{ext}(\bar{\mathcal{M}})} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[C].$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die euklidische Norm strikt konvex ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie $c(\xi) := U^{-1}(\mathbf{E}[U(\xi)])$ im Falle des Petersburger Paradoxon (Beispiel 5.1) für

(a) $U(x) = \log(x)$

(b) $U(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $U : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion.

(a) Die absolute Risikoaversion eines Investors ist durch den Arrow-Pratt Koeffizienten $\alpha(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)}$ gegeben. Finde alle Nutzenfunktionen U, deren absolute Risikoaversion konstant ist.

(b) Die relative Risikoaversion eines Investors ist durch $\alpha_R(x) = x\alpha(x)$ gegeben. Finde alle Nutzenfunktionen U, deren relative Risikoaversion konstant ist.

Aufgabe 5 (Weihnachtsaufgabe) (5 Bonuspunkte)

Schreiben Sie für 3 Punkte ein weihnachtliches Gedicht mit 8 Versen, in dem die Worte Arbitrage, Numeraire, Handelsstrategie und Finanzmathematik vorkommen. Die zusätzlichen 2 Punkte gibt es, wenn ein Reimschema erkennbar ist.