Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hendrik Flasche

Wintersemester 2015/2016
Januar 2016

Stochastik

Aufgaben zum Üben: Teil 2

Aufgabe 1

Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(y) = cy^{-5}\mathbb{1}_{y>1}$. Bestimmen Sie c, $\mathbb{P}[2 < X < 3]$, $\mathbb{E}X$, $\operatorname{Var} X$.

Aufgabe 2

Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(y) = cy(1-y)\mathbb{1}_{y\in[0,1]}$. Bestimmen Sie c, $\mathbb{P}[X < 1/2]$, $\mathbb{E}X$ und $\operatorname{Var} X$.

Aufgabe 3

Die Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, a]$. Die Zufallsvariable Y sei gleichverteilt auf dem Intervall $[0, b]$. Dabei seien a und b Parameter mit $0 < a < b$. Außerdem seien X und Y unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X + Y$.

Hinweis: Man kann geometrisch argumentieren oder die Faltungsformel benutzen.

Aufgabe 4

Seien X und Y unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[XY < 1/2]$ und $\mathbb{P}[Y < X^2]$.

Hinweis: Es geht auch ohne Faltungsformel.

Aufgabe 5

(a) Sei U gleichverteilt auf $[0, \pi]$. Bestimmen Sie die Dichte von $\cot U$.

(b) Sei V gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Dichte von $-\log V$.

Hinweis: Manchmal ist es einfacher, zuerst die Verteilungsfunktion zu bestimmen.

Aufgabe 6

(a) Sei X standardnormalverteilt. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}e^{tX}$ und die Fourier-Transformierte $\mathbb{E}e^{itX}$, für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Sei X gleichverteilt auf $[-1, 1]$. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}e^{tX}$ und die Fourier-Transformierte $\mathbb{E}e^{itX}$, für $t \in \mathbb{R}$.

(c) Sei X exponentialverteilt mit Parameter 1. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}e^{tX}$ und die Fourier-Transformierte $\mathbb{E}e^{itX}$, für $t \in \mathbb{R}$.

(d) Sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte $f_X(y) = \frac{1}{2}e^{-|y|}$. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}e^{tX}$ und die Fourier-Transformierte $\mathbb{E}e^{itX}$, für $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7

(a) Sei X gleichverteilt auf $[-1,1]$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X^{2n}]$ und $\mathbb{E}[X^{2n+1}]$, für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei X standardnormalverteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X^{2n}]$ und $\mathbb{E}[X^{2n+1}]$, für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 8

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$ und $\mathbb{E}[X_i^4] = v$ für $i = 1, \ldots, n$. Dabei seien σ^2 und v bekannte Parameter. Sei $S = X_1 + \ldots + X_n$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S]$, $\mathbb{E}[S^2]$ und $\mathbb{E}[S^4]$.

Aufgabe 9

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien Poisson-verteilt mit Parametern λ_1 und λ_2. Außerdem seien X_1 und X_2 unabhängig. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_1 = k | X_1 + X_2 = n]$, wobei $0 \leq k \leq n$.

Aufgabe 10

Es seien X und Y standardnormalverteilt und unabhängig. Bestimmen Sie $\mathrm{Cov}(aX+bY, cX+dY)$.

Aufgabe 11

Seien X und Y unabhängig mit $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[Y = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[Y = 0] = 1-p$, wobei $0 < p < 1$.

(a) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert?

(b) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig?

Aufgabe 12

Eine Glühbirne in einer Notbeleuchtung ist ununterbrochen in Betrieb bis sie ausfällt. Die Zufallsvariable X, durch die die Lebensdauer (in Stunden) von Glühbirnen modelliert wird, sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1/6000$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne mindestens 6000 Stunden funktioniert?

(b) Eine Glühbirne sei bereits 3000 Stunden in Betrieb. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sie noch weitere 3000 Stunden nicht ausfällt?

Aufgabe 13

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Bestimmen Sie die Dichte von $X + Y$ und die Dichte von $X - Y$.

Aufgabe 14

Die Zufallsvariablen $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ seien unabhängig. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ ebenfalls normalverteilt ist.

Aufgabe 15

(a) Seien $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{Poi}(\mu)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda + \mu)$.

(b) Seien $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(m, p)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass $X+Y \sim \mathrm{Bin}(n+m, p)$.

Dabei dürfen Sie beliebige Methoden verwenden (etwa die Faltungsformel, die charakteristische Funktion oder die erzeugende Funktion).

Aufgabe 16

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ und $\operatorname{Var} X = \operatorname{Var} Y = 1$. Bestimmen Sie

(a) $\operatorname{Var}(X + 2Y - 1)$.

(b) $\operatorname{Var}(X + XY)$.

Aufgabe 17

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Zeigen Sie, dass $X/(X + Y)$ gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ ist.

Hinweis: Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $X/(X + Y)$ mit Hilfe der Dichte von (X, Y).

Aufgabe 18

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable

$$Z = \begin{cases} X + Y, & \text{falls } X + Y \leq 1, \\ X + Y - 1, & \text{falls } 1 < X + Y \leq 2. \end{cases}$$

Aufgabe 19

Der Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Dreieck $\{(x, y) : 0 < x < y < 1\}$. Bestimmen Sie jeweils die Verteilungsfunktion und die Dichte von X und Y. Bestimmen Sie $\operatorname{Cov}(X, Y)$. Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 20

Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit Dichte

$$f_{(X,Y)}(s, t) = \begin{cases} c, & \text{falls } 0 < s < 1 \text{ und } 0 < t < s^2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie c. Bestimmen Sie jeweils die Verteilungsfunktion und die Dichte von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

Aufgabe 21

Seien $X_1, X_2, ...$ Zufallsvariablen mit $X_n \sim \mathrm{Poi}(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$ und $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Aufgabe 22

Die Zufallsvariablen X und Y seien standardnormalverteilt und unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $X^2 + Y^2$.

Aufgabe 23

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Folge

$$\frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{X_1 + \ldots + X_n}$$

für $n \to \infty$ fast sicher gegen einen Grenzwert konvergiert und bestimmen Sie diesen Grenzwert.

Aufgabe 24

Seien $A_1, A_2, ...$ unabhängige Ereignisse.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. (Hinweis: Lemma von Borel-Cantelli)

(b) Sei $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$, aber nicht $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} 0$.

Aufgabe 25

(a) Sei Z eine beliebige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass es ein $A > 0$ gibt, so dass $\mathbb{P}(|Z| > A) < \frac{1}{1000}$.

(b) Seien $X_1, X_2, ...$ beliebige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass es eine Folge von reellen positiven Zahlen $a_1, a_2, ...$ gibt mit der Eigenschaft

$$\frac{X_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{f.s.}} 0.$$

Hinweis zu (b): Verwenden Sie das Lemma von Borel-Cantelli.

Aufgabe 26

Man würfelt mit einem fairen Würfel 100-mal. Es sei S die Augensumme der 100 Würfe. Bestimmen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass $S > 400$.

Aufgabe 27

(a) Man wirft eine faire Münze so oft, bis man n-mal "Kopf" gesehen hat. Es sei S die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie $\mathbb{E}S$ und $\operatorname{Var} S$.

(b) Man wirft eine faire Münze so oft, bis man 100-mal "Kopf" gesehen hat. Es sei S die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass $S > 250$.

Aufgabe 28

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - (1 - \mathbb{1}_{A_1}) \ldots (1 - \mathbb{1}_{A_n}).$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der obigen Identität die Siebformel:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n].$$

Aufgabe 29

Es seien $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}[A_i] \neq 0$ für mindestens ein i. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i]\right)^2}{\sum_{i,j=1}^n \mathbb{P}[A_i \cap A_j]}.$$

Aufgabe 30

Es sei F eine Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+a) - F(x)) = a.$$

Aufgabe 31

Seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty (U_1 \ldots U_n) z^n$$

mit Wahrscheinlichkeit 1 gleich e ist.

Aufgabe 32

Die Riemann'sche Zetafunktion ist definiert durch $\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}$ für $x > 1$. Man betrachte den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ und

$$\mathbb{P}[\{n\}] = \frac{1}{\zeta(x) n^x}.$$

Es sei $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$ die Menge der Primzahlen. Für $p \in P$ sei $A_p = \{p, 2p, 3p, 4p, \ldots\}$ die Menge aller durch p teilbaren Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A_2, A_3, \ldots, A_p, \ldots$ unabhängig sind und

$$\mathbb{P}[A_p] = 1/p^x.$$

(b) Geben Sie einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis der Euler–Formel

$$\frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right).$$

Aufgabe 33

Es seien $U_1, U_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Definiere

$$T(x) := \min\{n \in \mathbb{N} : U_1 + \ldots + U_n > x\}, \quad 0 < x < 1.$$

Zeigen Sie: $\mathbb{P}[T(x) > k] = x^k / k!$ für alle $k \in \mathbb{N}$.