Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel Sommersemester 2019

Stochastik

Aufgaben zum Üben: Teil 1

Ergebnisse zur eigenen Kontrolle

Bitte beachten Sie, dass das keine Musterlösungen sind!

Aufgabe 1:
a) $\{1,\dots,6\}^3$;
b) $\frac{4^3-3^3}{6^3}=\frac{37}{216}$;
c) $\frac{15}{6^3}=\frac{5}{72}$;
d) $\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{6^3}=\frac{5}{54}$.

Aufgabe 2:
a) $1-(\frac{5}{6})^6=0.665102$;
b) $1-(\frac{5}{6})^{12}-12\cdot(\frac{1}{6})^1\cdot(\frac{5}{6})^{11}=0.618667$;
c) $1-(\frac{5}{6})^{18}-18\cdot(\frac{1}{6})^1\cdot(\frac{5}{6})^{17}-\binom{18}{2}\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^{16}=0.597346$.
Ereignis aus Teil a hat die größte Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 3:
a) $\frac{30}{36}$;
b) $\frac{4}{30}$;
c) $\frac{4}{5}$.

Aufgabe 4:
a) $\frac{\binom{25}{6}}{\binom{49}{6}}=0.01266$;
b) $\frac{1+43\cdot6}{\binom{49}{6}}=0.00001852$;
c) $1-\left(1-\frac{1}{\binom{49}{6}}\right)^3=2.14534\cdot10^{-7}$.

Aufgabe 5: $\frac{\binom{26}{13}\cdot\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}}=0.2181$.

Aufgabe 6: $\frac{2}{11}=0.18181818\dots$.

Aufgabe 7:
a) $\frac{n}{k}$;
b) $\frac{\binom{k-2}{n-2}}{\binom{k}{n}}-\frac{n^2}{k^2}=\frac{n(n-k)}{k^2(k-1)}$.

Aufgabe 8: $\frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)}$.

Aufgabe 9:

a) $0.21\cdot(1-0.51)+0.13\cdot0.51=0.1692$;
b) $\frac{0.21\cdot(1-0.51)}{0.21\cdot(1-0.51)+0.13\cdot0.51}=0.608156$.

Aufgabe 10: $p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)$.

Aufgabe 11:

$$\frac{\binom{30}{7}\cdot\binom{20}{3}+\binom{30}{8}\cdot\binom{20}{2}+\binom{30}{9}\cdot\binom{20}{1}+\binom{30}{10}}{\binom{50}{10}}.$$

Aufgabe 12:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}.$$

Aufgabe 13:
a) $\frac{\binom{10}{5}\cdot\binom{8}{5}}{\binom{18}{10}} = 0.322501;$
b) $\binom{10}{3,2,5}\cdot\left(\frac{5}{18}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{18}\right)^2\cdot\left(\frac{10}{18}\right)^5 = 0.0794014.$

Aufgabe 14:
a) Exakt: Mit $p=\frac{1}{1000}$, $q=\frac{999}{1000}$, $n=2000$: $1-q^n-npq^{n-1}-\frac{n(n-1)}{2}q^{n-2}p^2 = 0.323324.$
b) Approximativ: $1-5e^{-2}$.

Aufgabe 15:

Exakt: $1-\left(\frac{1023}{1024}\right)^{1000} = 0.623576$. Approximativ: $1-e^{-\frac{1000}{1024}} = 0.623397$.

Aufgabe 16:

Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei n Experimenten mit zwei fairen Würfeln kein einziges mal die Augensumme 12 gewürfelt hat, ist $(\frac{35}{36})^n$. Die Wahrscheinlichkeit, dass man mindestens einmal die Augensumme 12 gewürfelt hat, ist $1-(\frac{35}{36})^n$. Für $n=24$ und $n=25$ haben wir

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0.491404 < 0.5, \qquad 1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25} = 0.505532 > 0.5.$$

Also muss man 25-mal würfeln.

Aufgabe 17:
Hinweis zu Teil a: Die symmetrische Differenz $A_1\Delta A_2$ ist eine disjunkte Vereinigung von $A_1\backslash A_2$ und $A_2\backslash A_1$. Aus $\mathbb{P}[A_1\Delta A_2]=0$ folgt, dass $\mathbb{P}[A_1\backslash A_2]+\mathbb{P}[A_2\backslash A_1]=0$. Somit müssen beide Summanden gleich 0 sein, d.h. $\mathbb{P}[A_1\backslash A_2]=\mathbb{P}[A_2\backslash A_1]=0$. Nun gilt

$$\mathbb{P}[A_1]=\mathbb{P}[A_1\cap A_2]+\mathbb{P}[A_1\backslash A_2]=\mathbb{P}[A_1\cap A_2]=\mathbb{P}[A_1\cap A_2]+\mathbb{P}[A_2\backslash A_1]=\mathbb{P}[A_2].$$

Hinweis bei Teil b: Beweisen Sie die Ungleichung für $n=2$ und benutzen Sie danach die Induktion.

Aufgabe 18: $\frac{7}{27}$.

Aufgabe 19:
a) 6;
b) $6\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) = 14.7.$

Aufgabe 20:
a) $2\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{49}=\frac{24}{49}$;
b) $2\cdot\frac{20}{50}\cdot\frac{30}{50}=\frac{12}{25}$.