Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Sommersemester 2019
Juni 2019

# Stochastik

## Aufgaben zum Üben: Teil 2

Ergebnisse zur eigenen Kontrolle

Bitte beachten Sie, dass das keine Musterlösungen sind.

**Aufgabe 2:** $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 2/3$.

**Aufgabe 4:** Diese Aufgabe ist sehr knifflig. Das richtige Ergebnis lautet 9/20.

**Aufgabe 5:** 2/3.

**Aufgabe 6:** $\binom{n}{k}\frac{\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n}$.

**Aufgabe 7:** (a): $1/(n-1)$ für alle $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ (b): $(1-p)/(2-p)$.

**Aufgabe 8:** $\frac{2(k-1)}{(n+2)(n+1)}$.

**Aufgabe 9:** $2/2^n = 2^{1-n}$.

**Aufgabe 10:** Approximativ $1 - e^{-2}$.

**Aufgabe 15:** $m \cdot \binom{2m-2}{n}/\binom{2m}{n} = (2m-n)(2m-n-1)/(4m-2)$.

**Aufgabe 18:** Hinweis: Die Formel $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var} X + \operatorname{Var} Y$ darf hier nicht verwendet werden, denn es ist unbekannt, ob die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ unabhängig sind.

**Aufgabe 19:**

(a) 5.

(b) 2.

**Aufgabe 20:**

(a) Ja. $\mathbb{E}[(X-Y)(X+Y)] = \mathbb{E}[X^2-Y^2] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[Y^2] = 0$, da $X$ und $Y$ die gleiche Verteilung haben. Analog: $\mathbb{E}[X-Y] = 0$. Somit gilt

$$\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X-Y)(X+Y)] - \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y] = 0.$$

(b) Nein. Die Zufallsvariablen $X+Y$ und $X-Y$ sind abhängig. Begründung:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X+Y=0] &= \mathbb{P}[X=0, Y=0] = \mathbb{P}[X=0]\cdot\mathbb{P}[Y=0] = (1-p)^2,\\ \mathbb{P}[X-Y=1] &= \mathbb{P}[X=1, Y=0] = p(1-p).\end{aligned}$$

Allerdings ist das Ereignis $\{X+Y=0, X-Y=1\}$ unmöglich, somit

$$0 = \mathbb{P}[X+Y=0, X-Y=1] \neq \mathbb{P}[X+Y=0]\cdot\mathbb{P}[X-Y=1],$$

da die rechte Seite gleich $p\cdot(1-p)^3 > 0$ ist.

**Aufgabe 21:** $\mathbb{E}S = 0$, $\mathbb{E}[S^2] = n\sigma^2$, $\mathbb{E}[S^4] = nv + 3n(n-1)\sigma^4$.

**Aufgabe 22:** (a): $10\cdot 6 = 60$. (b): $10\cdot 30 = 300$.

**Aufgabe 23:** $\operatorname{Cov}(S_1, S_2) = -n/36$.

**Aufgabe 24:** $\pi/4$.

**Aufgabe 25:** $2/3$.

**Aufgabe 26:** Dichte: $f_G(t) = 2$, falls $t \in [1/2, 1]$, und $f_G(t) = 0$ sonst. Erwartungswert: $\mathbb{E}G = 3/4$.

**Aufgabe 27:** $p = 1 - (50 - 14)(80 - 14)/(50 \cdot 80)$.

**Aufgabe 28:** $c = 4$, $\mathbb{P}[2 < X < 3] = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4}$, $\mathbb{E}X = \frac{4}{3}$, $\operatorname{Var} X = \frac{2}{9}$.

**Aufgabe 29:** $c = 6$, $\mathbb{P}[X < \frac{1}{2}] = \frac{1}{2}$ (wegen Symmetrie), $\mathbb{E}X = \frac{1}{2}$ (wegen Symmetrie), $\operatorname{Var} X = \frac{1}{20}$.

**Aufgabe 30:** Verteilungsfunktion von $X + Y$:

$$F_{X+Y}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t^2}{2ab}, & 0 \leq t \leq a; \\ \frac{a}{2b} + \frac{t-a}{b}, & a \leq t \leq b; \\ 1 - \frac{(a+b-t)^2}{2ab}, & b \leq t \leq a + b; \\ 1, & a + b \leq t. \end{cases}$$

**Aufgabe 31:** $\mathbb{P}[XY < \frac{1}{2}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log 2$, $\mathbb{P}[Y < X^2] = \frac{1}{3}$.

**Aufgabe 32:**

(a) $f(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}$ (Cauchy-Verteilung).

(b) $f(y) = e^{-y}\mathbb{1}_{y>0}$ (Exponentialverteilung mit Parameter 1).

**Aufgabe 33:**

(a) $\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{1}{2n+1}$, $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$.

(b) $\mathbb{E}[X^{2n}] = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$, $\mathbb{E}[X^{2n+1}] = 0$.

**Aufgabe 35:** $1 - e^{-x}$.

**Aufgabe 36:**

(a) $e^{-1}$

(b) $e^{-1/2}$.

**Aufgabe 37:** Dichte von $X + Y$: $f_{X+Y}(t) = te^{-t}\mathbb{1}_{t>0}$. Dichte von $X - Y$: $f_{X-Y}(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 38:** Hinweis: Diese Aufgabe ist schwierig. Sei $0 < a < 1$. Dann gilt

$$\mathbb{P}\left[\frac{X}{X+Y} \leq a\right] = \mathbb{P}\left[X \leq \frac{a}{1-a}Y\right] = \mathbb{P}[(X, Y) \in B] = \int_B e^{-(t+s)} d(t, s),$$

wobei $B = \{(t, s) : t \leq \frac{a}{1-a}s, t > 0, s > 0\}$. Wir haben benutzt, dass die gemeinsame Dichte von $(X, Y)$ gleich $f_{X,Y}(t, s) = e^{-t}e^{-s}$, $t > 0$, $s > 0$, ist. Berechnen Sie das Integral $\int\int_B e^{-(t+s)} dt ds$.

**Aufgabe 39:** $Z$ ist uniform verteilt auf $[0, 1]$. Um das zu zeigen, muss man die Verteilungsfunktion von $Z$ bestimmen.

**Aufgabe 40:** $F_X(t) = 2t - t^2$, $f_X(t) = 2 - 2t$, $F_Y(t) = t^2$, $f_Y(t) = 2t$ (alles für $t \in [0, 1]$). $X$ und $Y$ sind abhängig, denn die Ereignisse $\{X > 0.5\}$ und $\{Y < 0.5\}$ haben positive Wahrscheinlichkeiten, wohingegen das Ereignis $\{X > 0.5\} \cap \{Y < 0.5\}$ unmöglich ist. Also ist

$$\mathbb{P}[X > 0.5, Y < 0.5] = 0 \neq \mathbb{P}[X > 0.5] \cdot \mathbb{P}[Y < 0.5].$$

**Aufgabe 41:** 1/2 wegen der Symmetrie der Dichte um den Punkt $\mu$.

**Aufgabe 42:** $ac + bd$.

**Aufgabe 43:** Hinweis: Faltungsformel und quadratische Ergänzung, wurde in Vorlesung 22 gemacht.

**Aufgabe 44:**

(a) $f_{X^2}(t) = t^{-1/2}e^{-t/2}/\sqrt{2\pi}$.

(b) $X^2 + Y^2$ ist exponentialverteilt mit Parameter 1/2.

**Aufgabe 45:** Sei $S$ die Summe, $S = X_1 + \ldots + X_{100}$. Dann gilt

$$\mathbb{E}S = 100 \cdot \mathbb{E}X_1 = 100 \cdot \frac{1}{6}(1 + \ldots + 6) = 350;$$
$$\operatorname{Var} S = 100 \cdot \operatorname{Var} X_1 = 100 \cdot \left(\frac{1}{6}(1^2 + \ldots + 6^2) - 3.5^2\right) = \frac{875}{3}.$$

Mit dem zentralen Grenzwertsatz erhalten wir

$$\mathbb{P}[S > 400] = \mathbb{P}[S > 400.5] = \mathbb{P}\left[\frac{S - 350}{\sqrt{875/3}} > \frac{400.5 - 350}{\sqrt{875/3}}\right]$$
$$\approx \mathbb{P}[N > 2.95698] = 1 - \Phi(2.9568) = 0.00155425.$$

**Aufgabe 46:**

(a) Es handelt sich um eine Summe von $n$ unabhängigen Zufallsvariablen mit Geo(1/2)-Verteilung. Somit gilt $\mathbb{E}S = 2n$, $\operatorname{Var} S = 2n$. Zu Varianz: Varianz einer geometrischen Verteilung mit Parameter $p$ ist $\frac{1-p}{p^2}$. In unserem Fall ist $p = 1/2$.

(b) Sei $T$ die Anzahl von "Kopf" in 250 Würfen. Dann sind die Ereignisse $\{S > 250\}$ und $\{T < 100\}$ gleich.

$$\mathbb{P}[T < 100] = \mathbb{P}[T < 99.5] = \mathbb{P}\left[\frac{T - 125}{\sqrt{250/4}} < \frac{99.5 - 125}{\sqrt{250/4}}\right] \approx \mathbb{P}[N < -3.22552] = 0.000628713.$$

Zum Vergleich: Die exakte Wahrscheinlichkeit ist 0.000606538.

Es gibt eine andere Lösung. Sei $X_i$ die Zeit zwischen dem $(i-1)$-ten und dem $i$-ten Auftreten von "Kopf". Dann sind $X_i \sim$ Geo(1/2) und unabhängig. Die Wartezeit auf den 100-ten Kopf ist $S := X_1 + \ldots + X_{100}$. In Teil (a) wurde gezeigt, dass $\mathbb{E}S = \operatorname{Var} S = 200$. Mit dem zentralen Grenzwertsatz erhalten wir

$$\mathbb{P}[S > 250] = \mathbb{P}[S > 250.5] = \mathbb{P}\left[\frac{S - 200}{\sqrt{200}} > \frac{250.5 - 200}{\sqrt{200}}\right] \approx \mathbb{P}[N > 3.57089] = 0.000177885.$$

**Aufgabe 47:** Sei $S$ die Anzahl der unentschlossenen Wähler, die für $A$ stimmen. Dann ist $S \sim \operatorname{Bin}(998000, 1/2)$. Damit $A$ gewinnt, muss $2000 + S > 998000 - S$ gelten, also $S > 996000/2 = 498000$. Es gilt $\mathbb{E}S = 998000 \cdot 1/2 = 499000$ und $\operatorname{Var} S = 998000 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 249500$. Mit dem zentralen Grenzwertsatz erhalten wir

$$\mathbb{P}[S > 498000] = \mathbb{P}[S > 498000.5] = \mathbb{P}\left[\frac{S - 499000}{\sqrt{249500}} > \frac{498000.5 - 499000}{\sqrt{249500}}\right] \approx \mathbb{P}[N > -2.001] \approx 0.9773.$$