Finanzmathematik

Steffen Schwarz

28. März 2021, Münster

Inhaltsverzeichnis

1 Informelle Einführung

Zweiteilung von Finanzgütern in

1. Basisfinanzgüter
2. derivative Finanzgüter

Zu 1. gehören zB -Aktien
-festverzinsliche Wertpapiere
Bonds
-Rohstoffe
Öl
Edelmetalle
Agrarprodukte

Diese werden gehandelt auf

$$\left.\begin{array}{r}\text{Aktienmärkte}\\ \text{Rentenmärkte}\\ \text{Warenmärkte}\end{array}\right\} \quad \text{Kassamärkte}$$

Zu 2. gehören zB -Optionen auf Aktien
-Swaps (Zinsderivat)
-futures
-forwards

1.1 Option

Unterscheidung in Kauf- und Verkaufsoptionen:
Eine Kaufoption (**Call**) gibt das Recht, ein Basisfinanzgut (**Underlying**) zu einem im voraus bestimmten fixen Preis, dem Ausübungspreis (**strike, Basis**), während (amerikanische Option) oder am Ende der Laufzeit (europäische Option) der Option zu **kaufen**.

Eine Verkaufsoption (**Put**) gibt das Recht, ein Basisgut zu einem im voraus bestimmten Preis, während (USA) oder am Ende der Laufzeit (EU) der Option zu **verkaufen**.

Eine Option ist ein **bedingtes Termingeschäft**, da keine Verpflichtung zum Kauf bzw. Verkauf besteht.

1.2 long, short Position

In der Regel geht der Läufer eines Finanzgutes eine **long Position** ein, ein Verkäufer eine **short Position** ein, etwa

long call $\hat{=}$ Käufer eines Calls, Callinhaber

short call $\hat{=}$ Verkäufer eines Calls, Stillhalter(/writer/Zeichner)

long put $\hat{=}$ Käufer einer Verkaufsoption, Putinhaber

short put $\hat{=}$ Verkäufer einer Verkaufsoption, Put Stillhalter (/writer)

long Aktie $\hat{=}$ Käufer einer Aktie, Aktienbesitzer

short Aktie $\hat{=}$ Verkäufer einer Aktie

Durch einen **Leerverkauf** (shortselling) kann ein Basisgut, etwa Aktien, verkauft werden, ohne, dass man dieses vorher besitzen muss.
Hierzu leiht man sich das Basisgut von einer Bank und verkauft dieses.

1.3 Payoff- und Profitdiagramme

Positionen in Finanzgütern bergen Chancen und Risiken. Veranschaulichungen durch Payoff- und Profitdiagrammen.
Payoff: Aufgetragen wird der Wert der Position gegen den Preis des Underlyings
Profit: analog zum Payoff unter Berücksichtigung von Kosten ($\hat{=}$ Anfangswert der Position)

1.4 Beispiele:

Option mit Laufzeit T, Underlying mit Preis S_T in T.

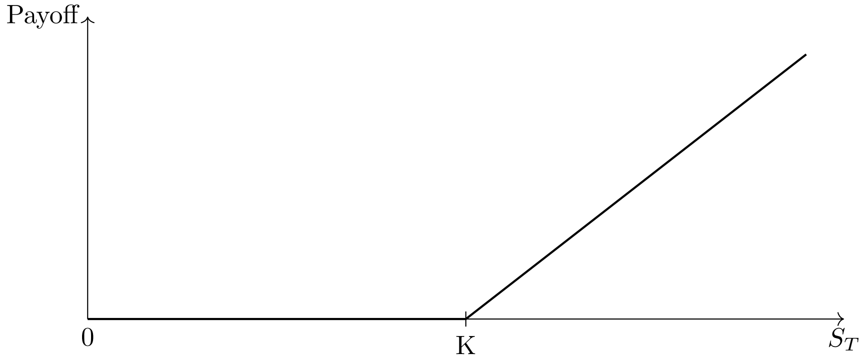
a) long call mit strike K
Payoff: $(S_T - K)^+$, denn

$S_T \leq K$: Keine Ausübung

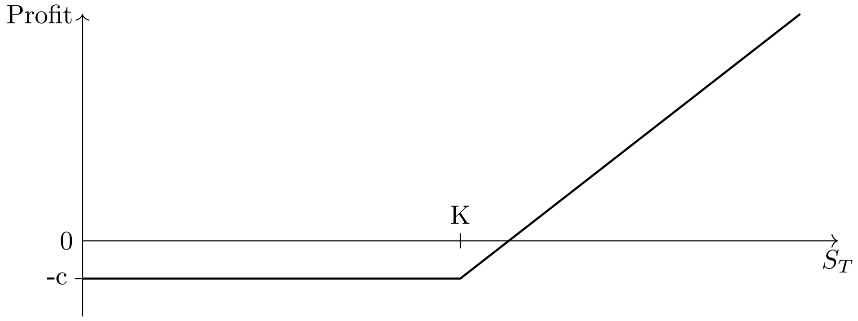
$S_T > K$:

- leihe K Euro
- Nutze diese Option, um 1 Aktie zu erhalten
- Verkaufe diese für S_T Euro
- Zahle K Euro zurück

Insgesamt: $S_T - K$ Euro als Auszahlung



Kosten: Anfangspreis des Calls: $c > 0$
Profit: $(S_T - K)^+ - c$



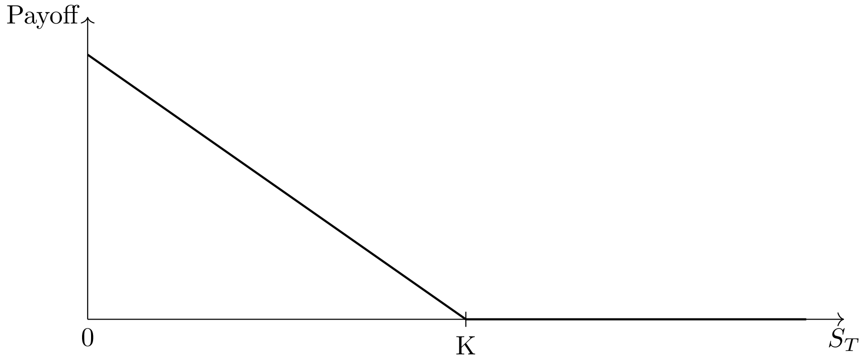
b) long put mit strike K
Payoff: $(K - S_T)^+$, denn

$S_T > K$: Keine Ausübung

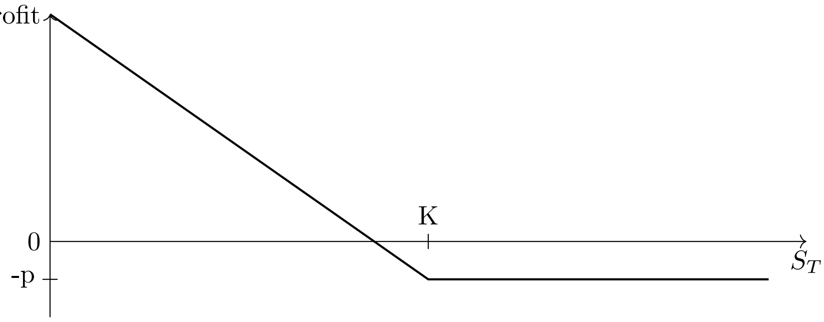
$S_T \leq K$:

- leihe die Aktie
- Nutze diese Option und verkaufe die Aktie zum Kurs von K
- Kaufe die Aktie für S_T und gebe diese zurück

Insgesamt: $K - S_T$ Euro als Payoff



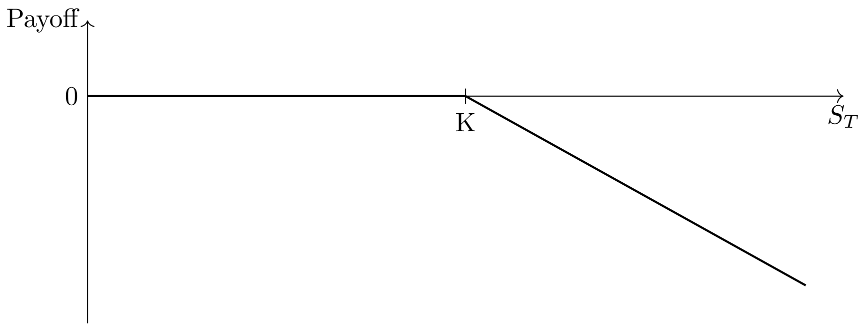
Kosten: Anfangspreis des Puts: $p > 0$
Profit: $(S_T - K)^+ - p$

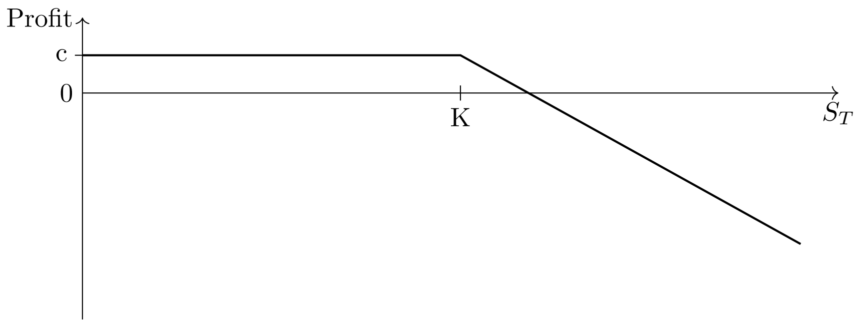


c) short call mit strike K

Payoff: $-(S_T - K)^+$

Profit: $c - (S_T - K)^+$

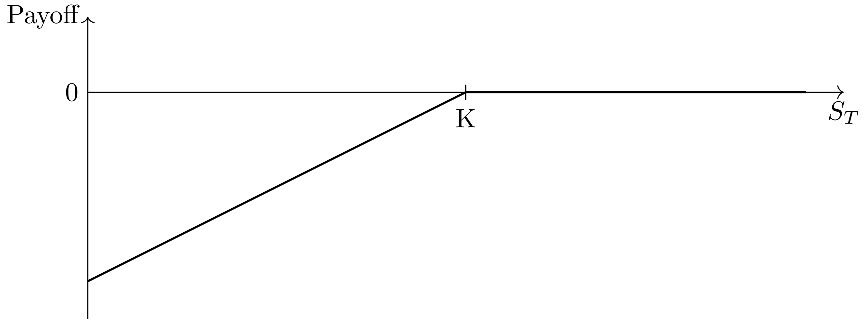


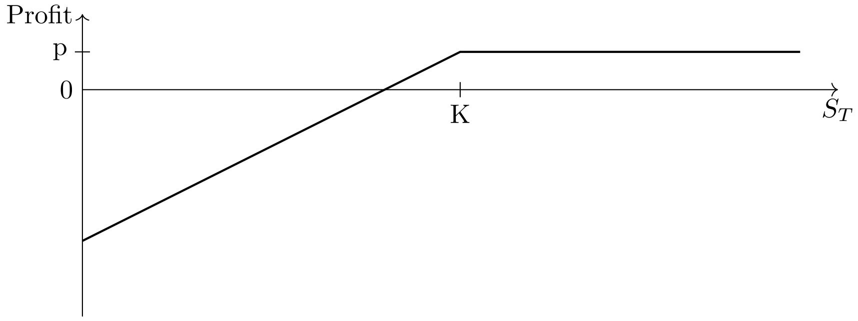


d) short put mit strike K

Payoff: $-(K - S_T)^+$

Profit: $p - (K - S_T)^+$





1.5 Strategien

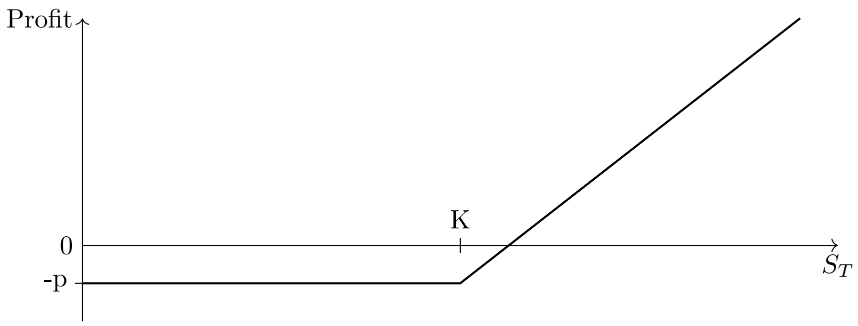
Durch Kombination von einfachen Positionen bildet man Strategien.

1.6 Beispiele:

a) Absicherung einer Aktie:

- Aktie heute zum Kurs $S_0 = K$ gekauft
- zur Absicherung gegen Kursverlust in T wird eine Putoption zur Basis K gekauft.
- Gesamtposition:

	long Aktie	long put	Gesamt
Kosten	K	p	$K + p$
Payoff	S_T	$(K - S_T)^+$	$S_T + (K - S_T)^+ = \max(K, S_T)$
Profit	$S_T - K$	$(K - S_T)^+ - p$	$S_T - K + (K - S_T)^+ - p = -p\mathbb{1}_{\{S_T \le K\}} + (S_T - (K + p))\mathbb{1}_{\{S_T > K\}}$

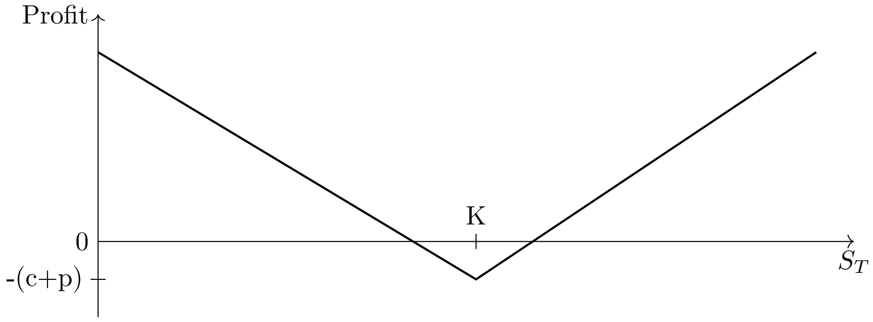


b) long straddle

Idee: Spekulation auf eine starke Kursänderung (egal ob nach oben und unten):

	long call	long put	Gesamt
Kosten	c	p	$c + p$
Payoff	$(S_T - K)^+$	$(K - S_T)^+$	$\|S_T - K\|$
Profit	$\|S_T - K\| - (c + p)$		

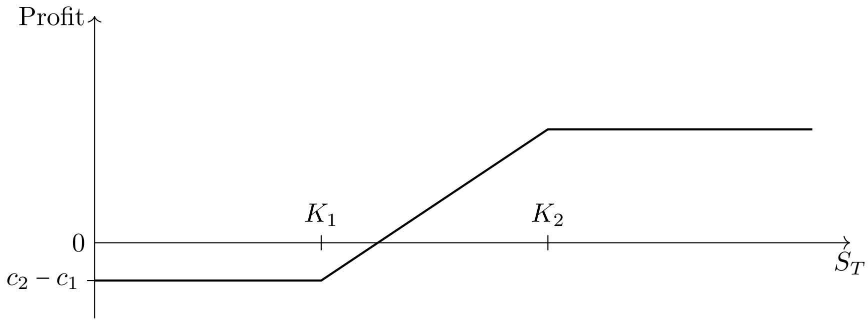
zum Inhaltsverzeichnis



c) Bullish Vertical Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf ein Anziehen des Kurses:

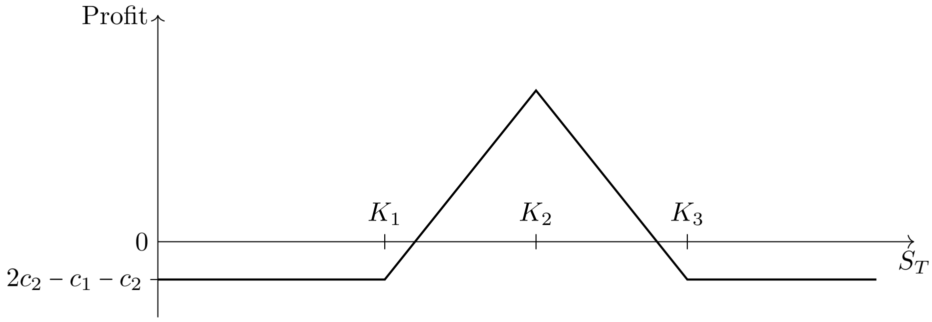
	long call (strike K_1)	short call (strike $K_2 > K_1$)	Gesamt
Kosten	c_1	$-c_2$	$c_1 - c_2 > 0$ (Call K_1 ist mehr wert als Call K_2)
Payoff	$(S_T - K_1)^+$	$-(S_T - K_2)^+$	$(S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1<S_T<K_2\}} + (K_2 - K_1)\mathbb{1}_{\{S_T>K_2\}}$



d) Butterfly Spread

Idee: Risikoarme Spekulation auf eine Seitwärtsbewegung des Kurses:
Basispreise $K_1 < K_2 < K_3$

	long call (strike K_1)	long call (strike K_3)	2× short call (strike K_2)	Gesamt
Kosten	c_1	c_3	$-2c_2$	$c_1 + c_3 - 2c_2$
Payoff	$(S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1<S_T<K_2\}} + (2K_2 - K_1 - S_T)\mathbb{1}_{\{K_2<S_T<K_3\}} + (2K_2 - (K_1 + K_3))\mathbb{1}_{\{S_T>K_3\}}$			



1.7 Arbitrage

Ein Arbitrage ist eine Möglichkeit, durch Handel mit Finanzgütern einen risikolosen Profit zu erzielen.

1.8 Beispiel:

	New York	Frankfurt
Aktie	130\$	100€
Wechselkurs	1€	1,27\$

Arbitragemöglichkeit:

- leihe 100€
- kaufe die Aktie in FF
- verkaufe sie in NY
- tausche 127\$ in 100€
- gebe 100€ zurück

$\Rightarrow$ risikoloser Profit von 3\$

1.9 Grundannahme

Im Handel mit Finanzgütern gibt es kein Arbitrage. Dies ist das **No-Arbitrage-Prinzip**.
Aus dem No-Arbitrage-Prinzip kann man das **Replikationsprinzip** folgern:

1.10 Replikationsprinzip

Haben zwei verschiedene selbstfinanzierende Portfoliostrategien K, L von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt T immer den gleichen Wert, so haben sie auch zum gegenwärtigen Zeitpunkt den gleichen Wert.
Die Strategie K repliziert den Payoff der Strategie L und umgekehrt.

Argumentation:

K habe den Anfangswert $V_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert V_T in T.
L habe den Anfangswert $W_0 \in \mathbb{R}$ und den zufälligen Wert W_T in T.
Es gelte $V_T = W_T$.
Behauptung: $V_0 = W_0$
Angenommen: $V_0 > W_0$
Dann kann man durch short selling von K ein Arbitrage erzielen:

- short selling in K
- gehe long in L

$\Rightarrow$ Zu Beginn ein Gewinn von $V_0 - W_0 > 0$

- handeln entsprechend L, K bis T
- verkaufe L in T
- erhalte $W_T = V_T$
- kaufe K für V_T und gebe die Position K zurück

Am Ende: Durch Glattstellen der Positionen: $W_T - V_T = 0$

$\Rightarrow$ Risikoloser Gewinn von $V_0 - W_0 > 0$.

Angenommen $V_0 < W_0$
Analog zu oben mit K und L vertauscht.

1.11 Nullkouponanleihen

festverzinsliches Wertpapier

- Fälligkeit T (Maturity)
- Zahlung von 1€ in T
- keine Kouponzahlung während der Laufzeit
- $B(t,T)$ bezeichne den Preis dieser Anleihe zum Zeitpunkt $t < T$.
- $0 < B(t,T) < 1$ ist der Regelfall

Durch die Nullkouponanleihen wird die Veränderung des Geldwertes mit der Zeit wiedergegeben. Den Preis $B(t,T)$ kann man als Diskontfaktor auffassen, der Preise in T in Preise in t umrechnet. Ein Euro in T hat einen Wert vono $B(t,T)$ Euro in t.
Die long Position im T-Bond ist die Position eines Gläubigers. Er gibt $B(0,T)$ Euro heute und bekommt 1 Euro in T. Die Differenz $1 - B(0,T)$ gibt die Entwicklung es Geldwertes wieder.

1.12 Put-Call-Parität

Seien $c(S_0,K,T)$ und $p(S_0,K,T)$ die Anfangspreise einer Call bzw Put-Option mit Laufzeit T und strike K.
Sei S_0 und S_T der heutige Preis bzw der Preis zum Zeitpunkt T des Underlyings.
Dann gilt:

$$S_0 + p(S_0,K,T) = c(S_0,K,T) + KB(0,T)$$

Argumentation:

Betrachte die folgenden Portfoliostrategien:

I long Aktie long Put

II long call K× long in Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T

Wert in Zeitpunkt T:

I $S_T + (K - S_T)^+ = \max(S_T, K)$

II $(S_T - K)^+ + K = \max(S_T, K)$

Replikationsprinzip liefert:

$$S_0 + p(S_0,K,T) = c(S_0,K,T) + KB(0,T)$$

1.13 forward

- unbedingtes Termingeschäft
- Termin T ist Ausübungszeitpunkt
- Underlying mit Preisen S_0 heute und S_T in T
- zwei Parteien A, B
- Terminpreis F_T festgelegt zum Vertragsabschluss
- keine Kosten bei Vertragsabschluss

in T:

- A zahlt an B Terminpreis F_T
- B liefert das Underlying
- A hat die long Position im forward

- B hat die short Position im forward

Zusammenhang zwischen Termin- und Spotpreis des Underlyings:

S_0: gegenwärtiger Preis/ Spotpreis

F_T: Terminpreis zum Termin T

Dann gilt:

$$F_T B(0,T) = S_0$$

Argumentation

Betrachte folgende Portfoliostrategien:

I long im Forward zum Termin T, $F_T \times$ long in Nullkouponanleihe mit Fälligkeit T

II long im Underlying

Wert zum Zeitpunkt T:

I $\underbrace{S_T - F_T}_{\text{forward}} + \underbrace{F_T}_{\text{Nullkouponanleihe}} = S_T$

II S_T

Replikationsprinzip liefert:

$$F_T B(0,T) = S_0$$

1.14 Replikationsprinzip I

Bei einer Replikation stimmen nicht nur die Anfangsbewertungen der replizierenden Handelsstrategien überein, sondern auch die Bewertungen zu jedem Zeitpunkt $t < T$.
Genauer formuliert:
Haben zwei verschiedene selbstfinanzierende Portfoliostrategien K, L von ausschüttungsfreien Finanzgütern zu einem zukünftigen Zeitpunkt T immer den gleichen Wert, so haben sie auch zu jedem Zwischenzeitpunkt $0 < t < T$ den gleichen Wert.

Dies bedeutet für die Put-Call Parität, dass

$$c(S(t), K, T) + KB(t,T) = S(t) + p(S(t), K, T)$$

für alle $0 \leq t < T$ gilt.
Dabei werden Put und Call mit einer Laufzeit T und Basis K betrachtet. Die Preise $c(S(t), K, T)$ und $p(S(t), K, T)$ bezeichnen dabei die Bewertungen des Calls bzw. Puts zum Zeitpunkt $t < T$. Mit $(S(t)_{0 \leq t \leq T}$ wird die Preisentwicklung des Underlying bezeichnet.
Als Anwendung kann man die chooser-option betrachten.

1.15 Chooser-Option

Wir betrachten in einem Finanzmarkt mit konstanter stetiger Zinsrate r eine Laufzeit T und einen Basispreis $K > 0$ sowie ein Underlying S. Die Chooser-Option verbrieft das Recht, zu einem vorgegebenem Zeitpunkt $T_1 < T$ in einen Call mit Fälligkeit T und Basis K einzutreten oder einen Put mit gleicher Fälligkeit und Basis. In T_1 hat man also die Wahl zwischen einem Call und einem Put.
Der Käufer einer Chooser-Option wird in T_1 einen Call wählen, wenn er in T_1 mehr wert ist als der Put. Er wird einen Put wählen, wenn dieser mehr wert ist, als ein Call. Sind beide gleich viel wert, so ist die Entscheidung egal. Für das weitere nehmen wir an, dass der Käufer sich bei Gleichheit der Preise in T_1 für den Call entscheidet. Deshalb kann die Chooser-Option als Derivat aufgefasst werden, dass in T die Auszahlung

$$C = (S(T) - K)^+ 1_{\{c(S(T_1, K, T_1) \geq p(S(T_1), K, T_1)\}} + (K - S(T))^+ 1_{\{c(S(T_1, K, T_1) < p(S(T_1), K, T_1)\}}$$

zusichert. Zunächst wollen wir klären, wann der Call in T_1 mehr wert ist als der Put. Die Put-Call Parität liefert den folgenden Zusammenhang

$$c(S(T_1),K,T)+Ke^{-r(T-T_1)}=p(S(T_1),K,T)+S(T_1).$$

Somit ist

$$c(S(T_1),K,T)<p(S(T_1),K,T)\Longleftrightarrow S(T_1)<Ke^{-r(T-T_1)}.$$

Dies ist auch die entscheidende Beziehung für eine Bewertung, denn durch folgende Strategie kann die Auszahlung der Chooser-Option in T repliziert werden.

1. Am Anfang:
   - eine long Position im Call mit Basis K und Fälligkeit T
   - eine long Position im Put mit Fälligkeit T_1 und Basis $Ke^{-r(T-T_1)}$
2. : in T_1, falls $S(T_1)<Ke^{-r(T-T_1)}$:
   - übe den Put aus und erhalte $Ke^{-r(T-T_1)}-S(T_1)$
   - Verkauf den Call und erhalte $c(S(T_1),K,T)$
   - Für beides kann man den Put mit Basis K und Fälligkeit T erwerben, da

   $$c(S(T_1),K,T)+Ke^{-r(T-T_1)}-S(T_1)=p(S(T_1),K,T).$$
3. : in T_1, falls $S(T_1)\geq Ke^{-r(T-T_1)}$: halte den Call weiter bis T

Diese Strategie ist selbstfinanzierend und liefert in T die Auszahlung einer Chooser-Option. Das Replikationsprinzip liefert, dass die Anfangspreise übereinstimmen. Also ist der Anfangspreis einer Chooser-Option gegeben durch

$$c(S(0),K,T)+p(S(0),Ke^{-r(T-T_1)},T_1).$$

Man kann dies auch folgendermaßen interpretieren: Man setzt auf den Call mit Laufzeit T und Basis K und benutzt den Put mit Laufzeit T_1 und Basis $Ke^{-r(T-T_1)}$ als Versicherung für den Fall, dass der Call bis T_1 nicht so gut gelaufen ist.

1.16 Digitale Option

Recht auf Auszahlung eines festen Geldbetrags (etwa 1€) bei Eintreten eines auslösenden Ereignisses. z.B.:

- digitaler Call: $\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}}$
- digitaler Put: $\mathbb{1}_{\{S_T\leq K\}}$

1.17 Eigenschaften des Callpreises

Sei $c(S_0,T,K)$ der Preis eines Calls auf ein Underlying S mit Laufzeit T, strike K und Anfangspreis S_0 des Underlyings. Dann gilt:

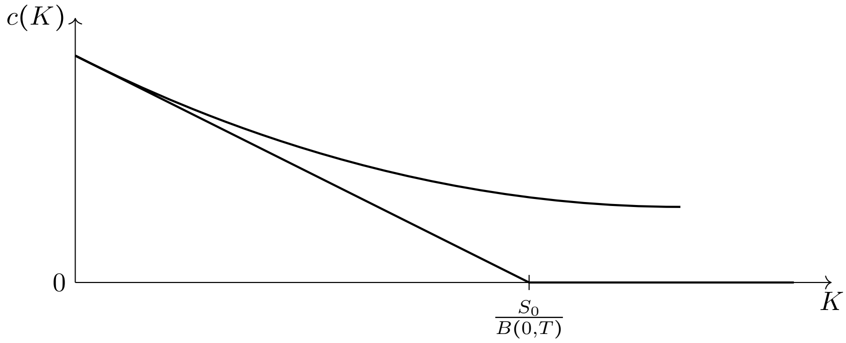
i) $c(S_0,T,K)\geq \max(0,\underbrace{S_0-KB(0,T)}_{\substack{\text{innerer Wert}\\ \text{des Calls}}})$

ii) $c(S_0,T,K)\leq S_0$ obere Grenze des Calls

iii) $K_1\leq K_2\Rightarrow c(S_0,T,K_1)\geq c(S_0,T,K_2)$

iv) $K_1<K_2\Rightarrow B(0,T)(K_2-K_1)\geq c(S_0,T,K_1)-c(S_0,T,K_2)$

v) $K_1 < K_2 < K_3 \Rightarrow c(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}c(S_0,T,K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1}c(S_0,T,K_3)$ Konvexität in K



Argumentation

i): Annahme: $c = c(S_0,T,K) < 0$

Dann erhält man $|c|$ beim Eingehen einer long Position in den Call. In T hat diese long Position einen nicht negativen Wert. Dies liefert ein Arbitrage.

Genauso ergibt sich für den Put einen nicht negativen Anfangspreis. Die Put-Call Parität ergibt

$$c + KB(0,T) = p + S_0 \geq S_0,$$

also $c \geq S_0 - KB(0,T)$.

ii): Annahme: $S_0 < c$

Dann gehe short im Call und long in die Aktie. Dies liefert am Anfang $c - S_0 > 0$ und am Ende $S_T - (S_T - K)^+ \geq 0$, also ein Arbitrage.

iii): Annahme: $c(K_2) > c(K_1)$

Dann gehe short in einen Call mit Basis K_2 und long in einen Call mit Basis K_1. Dies ergibt $c(K_2) - c(K_1)$ am Anfang und am Ende $(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ \geq 0$, also ein Arbitrage.

iv): Annahme: $c(K_1) - c(K_2) > B(0,T)(K_2 - K_1)$

Dann gehe short in einen Call zur Basis K_1 und long in einen mit Basis K_2, gehe weiter long in $(K_2 - K_1)$ T Bonds. Dies ergibt

$$c(K_1) - c(K_2) - (K_2 - K_1)B(0,T) > 0$$

am Anfang und

$$(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + (K_2 - K_1) \geq 0$$

am Ende, also ein Arbitrage.

v): Annahme: $c(K_2) > \frac{K_3-K-2}{K_3-K_1}c(K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1}c(K_3)$

Dann gehe short in einen Call mit Basis $K2$, long in $\frac{K_3-K-2}{K_3-K_1}$ Calls mit Basis K_1 und short in $\frac{K_2-K_1}{K_3-K_1}$ Calls mit Basis K_3. Dies liefert

$$c(K_2) - (\frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}c(K_1) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1}c(K_3)) > 0$$

am Anfang und

$$\frac{K_3-K_2}{K_3-K_1}(S_T-K_1)^+ + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1}(S_T-K_3)^+ - (S_T-K_2)^+ \geq 0$$

am Ende, also ein Arbitrage.

1.18 Eigenschaften des Putpreises

Sei $p(S_0,T,K)$ der Preis eines Puts auf ein Underlying S mit Laufzeit T, strike K und Anfangspreis S_0 des Underlyings. Dann gilt:

i) $p(S_0,T,K) \geq \max(0, \underbrace{KB(0,T) - S_0}_{\substack{\text{innerer Wert} \\ \text{des Puts}}})$

ii) $p(S_0,T,K) \leq KB(0,T)$ obere Grenze des Puts

iii) $K_1 \leq K_2 \Rightarrow p(S_0,T,K_1) \leq p(S_0,T,K_2)$

iv) $K_1 < K_2 \Rightarrow B(0,T)(K_2 - K_1) \geq p(S_0,T,K_2) - p(S_0,T,K_1)$

v) $K_1 < K_2 < K_3 \Rightarrow p(S_0,T,K_2) \leq \frac{K_3-K_2}{K_3-K_1} p(S_0,T,K_3) + \frac{K_2-K_1}{K_3-K_1} p(S_0,T,K_1)$

1.19 Zinsmethoden

Frage: Wie kann man Kapitalrenditen durch annualisierte Zinssätze beschreiben?
Antwort: Man vereinbart eine Zinsmethode und eine Zählkonvention
Genauer: Ein Kapital N wird zum Zeitpunkt t wie eine Nullkouponanleihe mit Fälligkeit in T angelegt.
in t: erhalte für N insgesamt $\frac{N}{B(t,T)}$ T-Bonds.
in T: die Position hat einen Wert von $\frac{N}{B(t,T)}$.
Gewinn: $\frac{N}{B(t,T)} - N = N(\underbrace{\frac{1}{B(t,T)} - 1}_{\substack{\text{Rendite der} \\ \text{Investition}}})$.
$R(t,T) := \frac{1}{B(t,T)} - 1$ kann als Kapitalrendite interpretiert werden, die ein Investment zwischen t und T hervorbringt.
Ziel: Beschreibung durch einen jährlichen Zinssatz:

1.19.1 lineare Zinsmethode

entspricht einer linearen Verteilung der jährlichen Zinsen auf die Laufzeit.

$$R(t,T) = \underbrace{(T-t)}_{\text{Laufzeit}} r_{\text{lin}}$$

r_{lin} ist der jährliche Zinssatz bei linearer Zinsmethode

Beispiel: Anlagezeitraum: Ein Monat

- Rendite von $0,5\% = 50bp$ (Basispunkte; $1bp = 0,01\%$)
- Also $r_{\text{lin}} = 0,5\% \cdot 12 = 6\%$

1.19.2 periodische Zinsmethode

Ein erzielter Gewinn in einem Zeitraum $(t,T]$ soll durch einen annualisierten Zinssatz r beschrieben werden. Dazu wird der Zeitraum $(t,T]$ in m äquidistante Perioden eingeteilt und der jährliche Zins r auf m Perioden linear verteilt. Setze $t_i := t + i \cdot \frac{T-t}{m} \quad i = 0,...,m$
In jeder Periode von t_{i-1} nach t_i wird also ein Kapital mit einer periodischen Rendite $r \cdot \frac{T-t}{m}$ verzinst. Unter Berücksichtigung von Zinseszins ergibt sich so eine Kapitalentwicklung der Form

$$K_m(r,t,T) := \left(1 + r\frac{T-t}{m}\right)^m = 1 + R(t,T)$$

Durch Auflösen nach r erhält man also den zu einem Gewinn $R(t,T)$ entsprechenden Zinssatz.

1.19.3 stetige Zinsmethode

Die stetige Zinsmethode ergibt sich als Grenzübergang aus der periodischen Zinsmethode, wenn die Intervalllänge der Teilintervalle gegen 0 strebt.

konstante Zinsrate r: Hier ergibt sich

$$\lim_{m\to\infty} K_m(r,t,T) = e^{r(T-t)} = 1 + R(t,T)$$

Durch Auflösen nach r erhält man wieder den zu einem Gewinn $R(t,T)$ entsprechenden Zinssatz r.

nicht konstante Zinsrate: Eine variierende Zinsratenfunktion $r : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ liefert eine Kapitalentwicklung der Form

$$K(r,t,T) = \exp\left(\int_t^T r(s)ds\right)$$

zwischen t und T.

1.20 Festzinsanleihe

- festverzinsliches Wertpapier
- Nominal N
- Fälligkeit T
- Zinstermine $t_1 < t_2 < ... < t_n \leq T$
- Koupons $K_1, K_2, ..., K_n$

In der Regel werden Koupons als Zins auf das Nominal gezahlt, d.h. $K_i = N \cdot R \cdot (t_i - t_{i-1}), R$ Zinsrate bei linearer Verzinsung.
Bewertung zum Zeitpunkt $t < t_1$, mit Hilfe einer Modifikation des Replikationsprinzips:

I Halte Festzinsanleihe

II Halte K_i Nullkouponanleihen mit Fälligkeit $t_i, i = 1, ..., n$ und halte N Nullkouponsanleihe mit Fälligkeit T

Beide Strategien erzeugen den gleichen Zahlungsstrom an Ausschüttungen: K_1 in t_1, ..., K_n in t_n , N in T.

Das Replikationsprinzip liefert, dass die Preise in $t < t_1$ übereinstimmen müssen.
Dies bedeutet, dass der Preis der Festzinsanleihe in $t < t_1$ gegeben ist durch

$$\sum_{i=1}^{m} K_i B(t, t_i) + NB(t,T)$$

Eine Festzinsanleihe hat ein Zinsänderungsrisiko, da im Laufe der Zeit die Zinseinschätzung des Marktes sich ändern kann. Erläutern möchte ich dies am Beispiel einer Bank, die heute in $t_0 = 0$ einen Festzinskredit ausgibt. Der Zinssatz R ist dabei so bestimmt, dass der Festzinskredit heute mit dem Nominal N bewertet wird. In der Bilanz der Bank würde dieser Kredit als Forderung der Höhe N eingestellt werden. Nach der ersten Zinsperiode erhält die Bank den Koupon K_1, den es als Gewinn in der GuV-Rechnung ausweist. Der Wert des Restkredites in t_1 ist

$$PV(t_1) = \sum_{j=2}^{n} NR(t_j - t_{j-1})B(t_1, t_j) + NB(t_1, T).$$

Dies ist als Forderung in t_1 in die Bilanz einzustellen. Ist $PV(t_1) < N$, so die Forderung des Kredites in t_1 weniger wert als am Anfang und die Aktivseite der Bank wird reduziert. Ist $PV(t_1) > N$, so ist die Forderung in t_1 mehr wert und entsprechend wird die Aktivseite der Bank erhöht. Wir sehen also, dass der Festzinskredit eine Auswirkung auf die Bilanz der Bank hat und somit ein Risiko für die Bank darstellt. Dieses Risiko ist durch das sogenannte Zinsänderungsrisiko begründet. Um die Forderung N in t_1 zu finanzieren bräuchte es Kouponzahlungen $K_2, \cdots, K_n$ der Höhe $K_i = NR_1(t_i - t_{i-1})$ für $i = 2, \cdots n$, wobei der Zinssatz R_1 sich berechnet aus

$$N = \sum_{j=2}^{n} NR_1(t_j - t_{j-1})B(t_1, t_j) + NB(t_1, T).$$

Ist $R_1 < R$, was in einem Marktumfeld von fallenden Zinsen entsteht, so ist $PV(t_1) > N$ und die Forderungsposition der Bank wächst. Ist $R_1 > R$, was in einem Marktumfeld von steigenden Zinsen entsteht, so ist $PV(t_1) < N$ und die Forderungsposition der Bank nimmt ab.

1.21 Variabel verzinsliche Anleihe (/Floater/ FRN (Floating Rate Note))

- Nominal N
- Fälligkeit T
- Startpunkt t_0
- Zinszahlungstermine $t_1 < t_2 < ... < t_n = T$ mit $t_0 < t_1$
- nachschüssige Kouponzahlungen $K_1, ..., K_n$ entsprechend den für die Periode geltenden Marktzins

$$F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) = \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right)$$

also

$$K_i = NF(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1}) = N \left(\frac{1}{B(t_{i-1}, t_i)} - 1 \right) \qquad i = 1, ..., n$$

Bewertung in t_0 durch folgende replizierende Handelsstrategie:

- Rollierende Anlage des Nominals bis zum jeweiligen nächsten Zinstermin.

  Genauer
- In t_0: kaufe $\frac{N}{B(t_0,t_1)}$ t_1-Bonds für N€ (die ich ja habe) und halte bis t_1
- In t_1:
  - Reinvestiere das N in die zweite Zinsperiode durch Kauf von $\frac{N}{B(t_1,t_2)}$ t_2-Bonds
  - Ausschüttung der Zinszahlung von

$$\begin{aligned} \tfrac{N}{B(t_0,t_1)} - N &= NF(t_0, t_0, t_1)(t_1 - t_0) \\ &= K_1 \end{aligned}$$

  $\vdots$
- In t_n:
  - Rückzahlung des Nominals N
  - Ausschüttung der letzten Zinszahlung

$$\frac{N}{B(t_{n-1}, t_n)} - N = K_n$$

⇒ Gleiche Zahlungsströme an Zinszahlungen und gleicher Endwert
⇒ Replikationsprinzip liefert gleiche Anfangsbewertung: N in t_0.
In $t < t_0$ ist der Preis $NB(t, t_0)$.

Die variabel verzinsliche Anleihe hat kein Zinsänderungsrisiko, da die Forderung, die die Bank gegenüber dem Schuldner hat an jedem Zinszahlungszeitpunkt sich nicht ändert und durch das Nominal gegeben ist.

1.22 Swap

Ein Zinsswap liefert die Möglichkeit, das Zinsänderungsrisiko einer Festzinsanleihe zu vermeiden:

- Tauschgeschäft
- beim Zinsswap werden feste gegen variable Zinsen getauscht
- Tenorstruktur: $t_0 < t_1 < ... < t_n$
- jährlicher Festzinssatz R
- Nominal N, das zur Berechnung der Zinsen dient

- Unterscheidung in Payer - und Reciever Swap, ausgehend von der Festzinsseite

Am Ende einer jeden Periode werden die festen Zinsen

$$NR(t_i - t_{i-1})$$

gegen die variablen Zinsen

$$NF(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)(t_i - t_{i-1})$$

getauscht.
Das führt zum Zahlungsstrom

$$N(t_i - t_{i-1})(F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i) - R) \qquad i = 1, ..., n$$

beim Payer Swap und

$$N(t_i - t_{i-1})(R - F(t_{i-1}, t_{i-1}, t_i)) \qquad i = 1, ..., n$$

beim Reciever Swap.
Ein Payer Swap kann repliziert werden durch folgende Handelsstrategie:

$$\left.\begin{array}{l} \text{– long in FRN} \\ \text{– short in Festzinsanleihe} \end{array}\right\} \quad \text{zum Nominal } N\text{, Zinszahlungsmethode passend zur Tenorstruktur}$$

Deshalb ergibt sich für den Preis des Payer Swap(t) in $t \le t_0$:

$$\begin{aligned} \text{Payer Swap}(t) &= \underbrace{NB(t, t_0)}_{\text{Preis der FRN in } t} - \left(\underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^{n} NRB(t, t_i)(t_i - t_{i-1}) + NB(t, t_n)}_{\text{Preis Festzinsgeschäft}} \right) \\ &= N\left(B(t, t_0) - B(t, n) - \textstyle\sum_{i=1}^{n} R(t_i - t_{i-1})B(t, t_i)\right) \end{aligned}$$

Der **faire** Festzins R liegt dann in t vor, wenn Payer Swap(t) = 0 gilt, also wenn

$$R = \frac{B(t, t_0) - B(t, n)}{\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})B(t, t_i)}$$

R ist dann die sogenannte **Swaprate** in t.
Eine Bank, die einen Festzinskredit ausgegeben hat, kann das Zinsänderungsrisiko eliminieren, indem sie zusätzlich einen passenden Payer-Swap Kontrakt eingeht. Kurz:

$$\text{Festzinskredit} + \text{Payer-Swap} = \text{FRN}$$

2 Aktuarielle Bewertung von Zahlungsströmen

Ziel: Bewertung von Zahlungsverpflichtungen, die durch biometrische Risiken verursacht werden.
Biometrische Risiken sind zum Beispiel:

- Todesfall
- Invalidität

2.1 Zahlungsströme und deren Bewertung

-Zeitdiskrete, periodische Sichtweise. Die Zeit wird in Jahren gemessen.

2.2 Definition (Zahlungsstrom)

Ein **Zahlungsstrom** $(Z(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge von nicht negativen reellen Zahlen.
$Z(n) \triangleq$ Auszahlung zum Zeitpunkt n.

Frage: Was ist der heutige Kapitalwert der durch den Zahlungsstrom verursachten Zahlungsverpflichtungen.
Antwort: Summe der abdiskontierten Zahlungen.
Genauer: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt $B(k,n)$, der Preis der Nullkouponanleihe mit Fälligkeit n zum Zeitpunkt k, den Wert einer in n fälligen Zahlungsverpflichtung von 1€ an.
Deshalb definieren wir:

$$V_0(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(n)B(0,n) \triangleq \quad \text{Summe aller auf den Anfang abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen; Kapitalwert heute}$$

und

$$V_m(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z(m+k)B(m,m+k) \triangleq \quad \text{Summe aller nach } m \text{ fälligen auf den Zeitpunkt } m \text{ abdiskontierten Zahlungsverpflichtungen}$$

$V_m(Z)$ ist das Kapital, das zum Zeitpunkt m benötigt wird, um die zukünftigen Zahlungsverpflichtungen erfüllen zu können.

In der Praxis, insbesondere bei der Kalkulation von Lebensversicherungen, wird von einer periodischen Verzinsung bzw. Diskontierung ausgegangen. Es wird also eine periodische Rendite r bzw. ein periodischer Diskontfaktor $v = \frac{1}{1+r}$ angenommen. Damit ergibt sich dann

$$\Rightarrow B(m,n) = v^{n-m} \qquad \text{für alle } \; 0 \le m \le n.$$

2.3 Personenversicherung und deren Bewertung

Ziel: Mathematische Beschreibung und Analyse einer Personenversicherung.

2.4 Definition (Personenversicherung)

Eine **Personenversicherung** ist eine Quadrupel

$$\Gamma = (t, s, b, T)$$

mit Zahlungsströmen $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0}, (s(n))_{n\in\mathbb{N}_0}, (b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(0,\infty)$-wertiger Zufallsvariablen T.

2.5 Interpretation

- T ist eine zufällige Ausfallzeit, z.B. : Restlebensdauer
- Todesfallspektrum $(t(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$: $t(n) \ge 0$ entspricht einer Auszahlung in n, bei Ausfall in der n-ten Periode.
- Erlebensfallspektrum $(s(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$: $s(n) \ge 0$ entspricht einer Auszahlung in n, wenn n erreicht wird.
- Beitragsspektrum $(b(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$: $b(n) \ge 0$ entspricht einer Prämieneinzahlung in n, wenn n erreicht wird.

Aus Sicht eines Versicherungsunternehmens erzeugt eine Personenversicherung die folgende Zahlungsströme:

Ausgabenstrom:

$$A(n) = s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} + t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\le n\}} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$
$$A(0) = s(0)$$

Einnahmestrom:

$$I(n) = b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

Bewertung aus heutiger Sicht durch

$$V_0(A) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)\mathbb{1}_{\{n-1<T\leq n\}}B(0,n)$$

$$V_0(I) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)\mathbb{1}_{\{T>n\}}B(0,n)$$

$V_0(A)$ heutiger Kapitalwert des zufälligen Zahlungsstroms
$\mathbb{E}(V_0(A))$ ist der mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Zahlungsverpflichtungen:

$$\mathbb{E}(V_0(A)) = s(0) + \sum_{n=1}^{\infty} s(n)B(0,n)\mathbb{P}(T > n) + \sum_{n=1}^{\infty} t(n)B(0,n)\mathbb{P}(n-1 < T \leq n)$$

$\mathbb{E}(V_0(I))$ ist der mittlerer Kapitalwert der zukünftigen Einnahmen:

$$\mathbb{E}(V_0(I)) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)B(0,n)\mathbb{P}(T > n)$$

2.6 Definition (Barwert, fair)

$\mathbb{E}(V_0(A))$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Zahlungsverpflichtungen.
$\mathbb{E}(V_0(I))$ heißt **Barwert** der durch die Versicherung induzierten Einnahmen.
Eine Personenversicherung heißt **ausgewogen/fair**, wenn

$$\mathbb{E}(V_0(A)) = \mathbb{E}(V_0(I)) < \infty$$

Ist $\mathbb{E}(V_0(A)) < \infty$ oder $\mathbb{E}(V_0(I)) < \infty$, so ist

$$\mathbb{E}(V_0(A)) - \mathbb{E}(V_0(I))$$

der **Barwert** der Versicherung.
Dies ist als Ausgangspreis zu interpretieren, den ein Versicherungsunternehmen verlangt.

2.7 Äquivalenzprinzip

Man wähle (t,s,b) so, dass die Versicherung fair ist. Dies kann man zur Beitragskalkulation benutzen, indem zu vorgegebenem Todesfall-und Erlebensfallspektrum das Beitragsspektrum b so bestimmt wird, dass die Versicherung fair ist.

2.8 Klassische Beispiele

- versichert wird eine Person
- biometrisches Risiko ist das Todesfallrisiko
- Ausfallzeit ist deshalb die Restlebenszeit der Person

2.8.1 Todesfallversicherung

- Todesfallsumme M
- Laufzeit n
- konstante periodische Prämienzahlung p

Induzierte Zahlungsströme:

$$A(k) = M\mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k\}} \qquad k = 1,...,n$$

$$A(k) = 0 \text{ sonst}$$

$$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T>k\}} \qquad k = 0,...,n-1$$

$$I(k) = 0 \text{ sonst}$$

$V_0(A) = \sum_{k=1}^{n} MB(0,k)\mathbb{1}_{\{k-1<T\le k\}}$

$V_0(I) = \sum_{k=0}^{n-1} pB(0,k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}$

Also

$\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=1}^{n} MB(0,k)\mathbb{P}(k-1 < T \le k)$

$\mathbb{E}(V_0(I)) = \sum_{k=0}^{n-1} pB(0,k)\mathbb{P}(T > k)$

2.8.2 In der Praxis:

- diskontiert wird mit einem Diskontfaktor $v < 1$, der sich aus dem Rechnungszins r mittels $v = \frac{1}{1+r}$ berechnet.

- Restlebenszeit wird durch das Alter bestimmt: T_x ist die Restlebenszeit eines x-Jährigen.

- Stationaritätsannahme:

$$\mathbb{P}(T_x > t | T_x > s) = \mathbb{P}(T_{x+s} > t - s) \qquad \text{für alle } \ 0 \le s \le t$$

- $q_x := \mathbb{P}(T_x \le 1)$ 1-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen

- $p_x := 1 - q_x = \mathbb{P}(T_x > 1)$ 1-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen

- $\begin{aligned} {}_kp_x = \mathbb{P}(T_x > k) &= \mathbb{P}(T_x > 1)\mathbb{P}(T_x > k | T_x > 1) \\ &= p_x \mathbb{P}(T_{x+1} > k-1) = \ldots = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+k-1} \end{aligned}$

- ${}_kq_x := 1 -_k p_x = \mathbb{P}(T_x \le k)$

Eintrittsalter x:
Bezeichnung für $M = 1$:

$$_{|n}A_x := \sum_{k=1}^{n} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \le k)$$

Bezeichnung für $p = 1$:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} := \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k)$$

Die Todesfallversicherung ist fair, wenn

$$M_{|n}A_x = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

$n = \infty$ entspricht Todesfall ohne zeitliche Beschränkung
Bezeichnung:

$$A_x = \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T \le k)$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_x > k)$$

2.8.3 aufgeschobene Rentenversicherung

- Eintrittalter x

- Aufschubzeit m Jahre

- Bezugszeit n Jahre

- Rentenhöhe R

- Beitragshöhe p

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen
- $t(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0$ $k = 0, ..., m-1$
- $s(m+k) = R$ $k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = p$ $k = 0, ..., m-1$
- $b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

Ausgaben:

$A(m+k) = R\mathbb{1}_{\{T_x > m+k\}}$ $k = 0, ..., n-1$

$A(k) = 0$ sonst

Einnahmen:

$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$ $k = 0, ..., m-1$

Barwert der Ausgaben:

$\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=0}^{n-1} Rv^{m+k}\mathbb{P}(T_x > m+k) = R\,{}_{m|n}\ddot{a}_x$

Barwert der Einnahmen:

$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\sum_{k=0}^{m-1} v^k\mathbb{P}(T_x > k) = p\ddot{a}_{x:\overline{m|}}$

Die Versicherung ist fair, wenn

$$R\,{}_{m|n}\ddot{a}_x = p\ddot{a}_{x:\overline{m|}}$$

gilt.
Für $n = \infty$ (also eine lebenslange Rente) setze:

$${}_{m|}\ddot{a}_x := \sum_{k=0}^{\infty} v^{m+k}\mathbb{P}(T_x > m+k)$$

2.8.4 Erlebensfallversicherung

- Eintrittalter x
- Laufzeit n Jahre
- Erlebensfallsumme M, Auszahlung bei Überleben von n Jahren
- konstante Prämie p während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen
- $t(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
- $s(n) = M$
- $s(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n\}$
- $b(k) = p$ $k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = 0$ sonst

Induzierte Zahlungsströme:

Ausgaben:

$A(n) = M\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}$

$A(k) = 0 \qquad \text{sonst}$

Einnahmen:

$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$

Barwert der Ausgaben:

$\mathbb{E}(V_0(A)) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T_x > n)}_{=:_n E_x} = M\,_nE_x$

Barwert der Einnahmen:

$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

Die Versicherung ist fair, wenn

$$M\,_nE_x = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

gilt.

2.8.5 gemischte Versicherung (kapitalgebundene Lebensversicherung)

- Kombination aus Todesfall- und Erlebensfallversicherung
- Eintrittalter x
- Laufzeit n Jahre
- VS M, fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit
- konstante Prämie p während der Laufzeit

Modellierung:

- $T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen
- $t(k) = M \qquad k = 1, ...n$
- $t(k) = 0 \qquad \text{sonst}$
- $s(n) = M$
- $s(k) = 0 \qquad \text{sonst}$
- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = 0 \qquad \text{sonst}$

Induzierte Zahlungsströme:

Ausgaben:

$A(k) = M\mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}} \qquad k = 1, ..., n-1$

$A(n) = M\left(\mathbb{1}_{\{n-1 < T_x \leq n\}} + \mathbb{1}_{\{T_x > n\}}\right)$

$A(k) = 0 \qquad \text{sonst}$

Einnahmen:

$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$

Barwert der Ausgaben:

$\mathbb{E}(V_0(A)) = M\left(_{|n}A_x +_n E_x\right)$

Barwert der Einnahmen:

$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$

Die Versicherung ist fair, wenn

$$M\left(_{|n}A_x +_n E_x\right) = p\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

gilt.

2.9 Beispiele im Überblick:

	aufgeschobene Rentenversicherung	Erlebensfall-versicherung	gemischte Versicherung
Voraussetzungen	-Eintrittalter x -Aufschubzeit m Jahre -Bezugszeit n Jahre -Rentenhöhe R -Beitragshöhe p	-Eintrittalter x -Laufzeit n Jahre -Erlebensfallsumme M, Auszahlung bei Überleben von n Jahren -konstante Prämie p während der Laufzeit	-Kombination aus Todesfall- und Erlebensfallsversicherung -Eintrittalter x -Laufzeit n Jahre -VS M, fällig bei Tod während der Laufzeit oder bei Überleben der Laufzeit -konstante Prämie p während der Laufzeit
Modellierung	-$T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen -$t(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ -$s(k) = 0 \quad k = 0, ..., m-1$ -$s(m+k) = R$ $k = 0, ..., n-1$ -$b(k) = p \quad k = 0, ..., m-1$ -$b(k) = 0$ sonst	-$T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen -$t(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ -$s(n) = M$ -$s(k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \backslash \{n\}$ -$b(k) = p \quad k = 0, ..., n-1$ -$b(k) = 0$ sonst	-$T = T_x$ Restlebenszeit eines x-Jährigen -$t(k) = M \quad k = 1, ...n$ -$t(k) = 0$ sonst -$s(n) = M$ -$s(k) = 0$ sonst -$b(k) = p \quad k = 0, ..., n-1$ -$b(k) = 0$ sonst
induzierte Zahlungsströme	-$A(m+k) = R\mathbb{1}_{\{T_x > m+k\}}$ $k = 0, ..., n-1$ -$A(k) = 0$ sonst -$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$ $k = 0, ..., m-1$	-$A(n) = M\mathbb{1}_{\{T_x > n\}}$ -$A(k) = 0$ sonst -$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$ $k = 0, ..., n-1$	-$A(k) = M\mathbb{1}_{\{k-1 < T_x \leq k\}}$ $k = 1, ..., n-1$ -$A(n) = M\left(\mathbb{1}_{\{n-1 < T_x \leq n\}} + \mathbb{1}_{\{T_x > n\}}\right)$ -$A(k) = 0$ sonst -$I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}}$ $k = 0, ..., n-1$
Bewertung	-$\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=0}^{n-1} Rv^{m+k}\mathbb{P}(T_x > m+k) = R\,{}_{m\|n}\ddot{a}_x$ -$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\sum_{k=0}^{m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k) = p\ddot{a}_{x:\overline{m\|}}$	-$\mathbb{E}(V_0(A)) = M \underbrace{v^n \mathbb{P}(T_x > n)}_{=:{}_nE_x} = M\,{}_nE_x$ -$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$	-$\mathbb{E}(V_0(A)) = M\left({}_{\|n}A_x + {}_n E_x\right)$ -$\mathbb{E}(V_0(I)) = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$
Versicherung ist fair, wenn	$R\,{}_{m\|n}\ddot{a}_x = p\ddot{a}_{x:\overline{m\|}}$	$M\,{}_nE_x = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$	$M\left({}_{\|n}A_x + {}_nE_x\right) = p\ddot{a}_{x:\overline{n\|}}$
Für $n = \infty$	lebenslange Rente: ${}_{m\|}\ddot{a}_x := \sum_{k=0}^{\infty} v^{m+k}\mathbb{P}(T_x > m+k)$		

2.10 Kommutationswerte

In den gebräuchlichen Sterbetafeln sind neben den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten und der Absterbeordung auch die sogenannten Kommutationswerte enthalten. Mit diesen können die Barwerte der obigen Versicherungen ausgedrückt werden, so daß eine schnelle Berechnung durchführbar ist. Bezeichne entsprechend der Absterbeordnung mit

- l_x die mittlere Anzahl an x-jährigen einer Population und mit
- d_x die mittlere Anzahl an Personen, die x-jährig versterben.

Es gilt also

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x - l_x p_x = l_x(1 - p_x) = l_x q_x \quad .$$

Ferner gilt :

$$l_{x+n} = l_{x+n-1} p_{x+n-1} = \cdots = l_x p_x \cdot \cdots \cdot p_{x+n-1} = l_x\,{}_n p_x \quad ,$$

sowie

$$ {}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \quad . $$

Üblicherweise bezeichnet man die mit den Überlebenden gebildeten Kommutationswerte durch

$$ \begin{aligned} D_x &= l_x v^x \quad \text{diskontierte Lebende des Alters } x \\ N_x &= D_x + D_{x+1} + \cdots \quad \text{aufsummierte Anzahl diskontierter Lebender} \\ S_x &= N_x + N_{x+1} + \cdots \quad \text{doppelt aufsummierte Anzahl diskontierter Lebenden} \\ &= D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots \end{aligned} \tag{1} $$

Die mit den Toten gebildeten Kommutationswerte werden notiert mittels

$$ \begin{aligned} C_x &= d_x v^{x+1} \quad \text{diskontierte Tote des Alters } x \\ M_x &= C_x + C_{x+1} + \cdots \quad \text{aufsummierte Anzahl diskontierter Toter} \\ R_x &= M_x + M_{x+1} + \cdots \quad \text{doppelt aufsummierte Anzahl diskontierter Toten} \\ &= D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots \end{aligned} \tag{2} $$

Alle diese Kommutationswerte liegen vertafelt vor, so daß zu einer schnellen Berechnung der Barwerte diese durch die Kommutationswerte ausgedrückt werden können. Man erhält:

- **Sofortrente**

$$ \begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_kp_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \frac{l_{x+k}}{l_x} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} \end{aligned} $$

  Entsprechend

$$ \ddot{a}_{x:n\rceil} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \tag{3} $$

- **Todesfallversicherung**

$$ \begin{aligned} A_x &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \, {}_{k-1}p_x q_{x+k-1} = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \, {}_ip_x q_{x+i} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1} \frac{d_{x+i}}{l_{x+i}} \frac{l_{x+i}}{l_x} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{x+i}}{D_x} = \frac{M_x}{D_x} \end{aligned} $$

  Entsprechend:

$$ \begin{aligned} {}_{|n}A_x &= \sum_{k=1}^{n} v^k \, {}_{k-1}p_x q_{x+k-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{C_{x+i}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \end{aligned} $$

- **Erlebensfallversicherung**

$$ {}_nE_x = v^n \, {}_np_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

2.11 Deckungskapital

Betrachtet wird der Fall einer deterministischen Zinsentwicklung, d.h. $B(k,n) = v^{n-k} \in (0,1)$ deterministisch für alle $n \in \mathbb{N}, k \leq n$.
Man beobachtet, dass anfangs die Prämieneinnahmen pro Jahr höher sind als die zu erwartenden Ausgaben pro Jahr. Dies führt zum Aufbau einer **Prämienreserve**.
Gegen Ende sind die zu erwartenden Leistungen pro Jahr höher als die Prämien pro Jahr. Diese werden durch die aufgebaute Prämienreserve finanziert.
Der Deckungskapitalverlauf spiegelt den Auf- und Abbau der Prämienreserve wieder.

2.12 Definition ((prospektives) Deckungskapital)

Gegeben sei eine allgemeine Personenversicherung $\Gamma = (t, s, b, T)$. Sei $(A(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(I(n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Zahlungsstrom der Ausgaben bzw Einnahmen.
Das nach m Jahren gebildete **Deckungskapital** $D(m)$ ist definiert als die Differenz der Barwerte der dann zukünftigen Ausgaben und Einnahmen, wobei die Diskontierung auf das Ende des m-ten Jahres vorgenommen wird, d.h.:

$$D(m) = \mathbb{E}(V_m(A)|T > m) - \mathbb{E}(V_m(I)|T > m) \qquad \text{für alle } \; m \in \mathbb{N}_0$$

Dies ist die Definition des s.g. **prospektiven Deckungskapitals** (vorausschauende Methode).
Für $m = 0$ ist $D(0)$ der Barwert der Versicherung.
Bei einer fairen Versicherung ist $D(0) = 0$.

2.13 Bemerkung:

Für die konkrete Berechnung sind folgende Formeln nützlich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V_m(A)|T > m) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A(m+k)v^k \middle| T > m\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} t(k+m)v^k \mathbb{P}(m+k-1 < T \le m+k|T > m) + \sum_{k=0}^{\infty} s(k+m)v^k \mathbb{P}(T > m+k|T > m) \\
\mathbb{E}(V_m(I)|T > m) &= \sum_{k=0}^{\infty} b(m+k)v^k \mathbb{P}(T > m+k|T > m)
\end{aligned}$$

2.14 Beispiele

2.14.1 Todesfallversicherung

- Eintrittalter x
- VS $M = 1$
- Laufzeit n Jahre
- $A(k) = \mathbb{1}_{\{k-1<T_x\le k\}} \qquad k = 1, ..., n$
- $I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x>k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$ mit $p = \frac{{}_{|m}A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}$ konstante Prämie

$$\begin{aligned}
D_x(m) &= \sum_{k=1}^{n-m} v^k \mathbb{P}(m+k-1 < T_x \le m+k|T_x > m) - \sum_{k=0}^{n-m-1} pv^k \mathbb{P}(T_x > m+k|T_x > m) \\
&= \sum_{k=1}^{n-m} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \le k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\
&= {}_{|n-m}A_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m|}} \qquad (4)
\end{aligned}$$

2.14.2 Todesfall mit unbegrenzter Laufzeit

$$\begin{aligned}
D_x(m) &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(m+k-1 < T_x \le m+k|T_x > m) - \sum_{k=0}^{\infty} pv^k \mathbb{P}(T_x > m+k|T_x > m) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{x+m} \le k) - p\sum_{k=0}^{\infty} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\
&= A_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m} \qquad m = 0, 1, 2, ... \qquad (5)
\end{aligned}$$

2.14.3 Erlebensfallversicherung

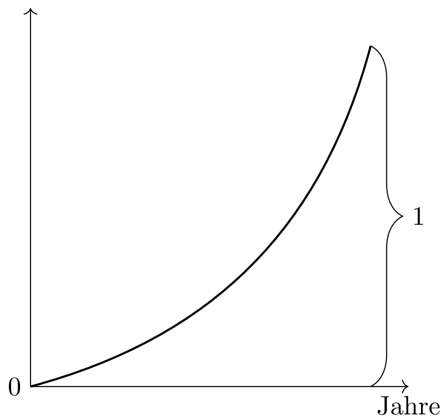
- Eintrittsalter x
- Laufzeit von n Jahren
- VS 1
- $A(k) = \mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = n$
- $A(k) = 0 \qquad$ sonst
- $I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$
- $I(K) = 0 \qquad$ sonst

Fair, wenn

$$p\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = {}_nE_x$$

gilt. Deckungskapitalverlauf:

$$\begin{aligned} D_x(m) &= v^{n-m}\mathbb{P}(T_x > n | T_x > m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_x > m+k | T_x > m) \\ &\overset{\text{Station-}}{\underset{\text{arität}}{=}} v^{n-m}\mathbb{P}(T_{x+m} > n-m) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k \mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= {}_{n-m}E_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m|}} \end{aligned} \tag{6}$$

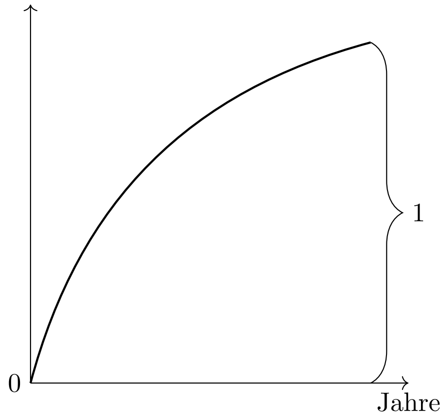


2.14.4 Gemischte Versicherung

Das ist eine Todesfall- und Erlebensfallversicherung. Deshalb ergibt sich der Deckungskapitalverlauf aus der Summe der Deckungskapitalien der einzelnen Versicherungen:

- Laufzeit n Jahre
- Eintrittsalter x

  $D_x(m) = A_{x+m:\overline{n-m|}} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m|}}$ mit $p\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = A_{x:\overline{n|}}$



2.14.5 aufgeschobene Rentenversicherung

- Eintrittsalter x
- Aufschubzeit n Jahre
- Rentenbezugszeit bis zum Tod
- Rentenhöhe 1

Ausgaben:

- $A(n+k) = \mathbb{1}_{\{T_x > n+k\}} \qquad k = 0, 1, ...$

Einnahmen:

- $I(k) = p\mathbb{1}_{\{T_x > k\}} \qquad k = 0, ..., n-1$

Fair, wenn

$$p\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = {}_{|n}\ddot{a}_x$$

gilt.

Deckungskapitalverlauf:

· Für $m = 0, ..., n-1$:

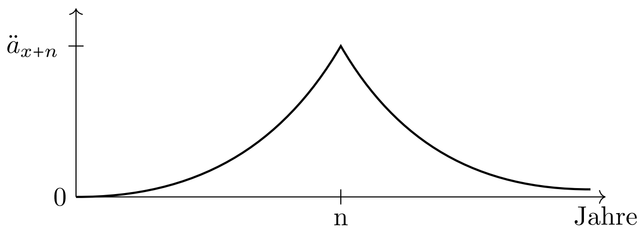
$$\begin{aligned} D_x(m) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^{n-m+k}\mathbb{P}(T_{x+m} > n-m+k) - p\sum_{k=0}^{n-m-1} v^k\mathbb{P}(T_{x+m} > k) \\ &= {}_{|n-m}\ddot{a}_{x+m} - p\ddot{a}_{x+m:\overline{n-m}|} \end{aligned} \tag{7}$$

· Für $m = n$:

$$D_x(m) = \ddot{a}_{x+m} = \ddot{a}_{x+n}$$

· Für $m > n$:

$$D_x(m) = \ddot{a}_{x+m}$$



Weitere Beispiele für Personenversicherungen, bei denen die Ausfallzeit nicht durch die Restlebenszeit einer einzelnen Person gegeben ist:

2.15 Rekursionsformel zur Berechnung des Deckungskapitals

Zur praktischen Berechnung eines Deckungskapitalverlaufes ist die Benutzung der folgenden Rekursionsformel häufig vorteilhaft.
Gegeben sei eine allgemeine Personenversicherung $\Gamma = (t, s, b, T)$. Dann gilt für das Deckungskapital

$$D(m) = s(m) + t(m+1)v\mathbb{P}(m < T \leq m+1 | T > m) - b(m) + v\mathbb{P}(T > m+1 | T > m) D(m+1) \quad (8)$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Prinzipiell ergeben sich zwei Möglichkeiten rekursiv das Deckungskapital zu berechnen.

1. Vorwärtsmethode:

   In $m = 0$ ist das Deckungskapital bekannt. Es verschwindet, wenn es sich um eine faire Versicherung handelt. Rekursiv kann dann mit Hilfe der obigen Formel das Deckungskapital für $m = 1, 2, ..$ berechnet werden.

2. Rückwärtsmethode: In der Praxis hat man ein maximales Höchstalter. Dies bedeutet, dass ab einem N das Deckungskapital verschwindet. Für Werte $m = N-1, N-2, \cdots$ kann dann mit Hilfe obiger Formel das Deckungskapital schnell berechnet werden.

Erläuterung: Am Anfang des $m+1$-ten Jahres ist eine Todesfalleistung $s(m)$ zu erbringen bei einer Einnahme von $b(m)$. Am Ende des $m+1$-ten Jahres ist eine Todesfalleistung zu erbringen mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(m < T \leq m+1 | T > m)$ und mittels v auf den Zeitpunkt m abzudiskontieren. Man überlebt das $m+1$-te Jahr mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(T > m+1 | T > m)$ und besitzt dann ein Deckungskapital von $D(m+1)$, das mittels v auf m abdiskontiert werden muss.

2.16 Personengemeinschaften/ Verbundene Leben

Wir betrachten n Personen mit Restlebensdauern $T_1, ..., T_n$. Aus diesen wird eine Ausfallzeit der Gemeinschaft definiert durch

$$T = f(T_1, ..., T_n)$$

für eine geeignete Funktion f.

2.17 Beispiel:

Für $n = 2$: $\quad T = \min(T_1, T_2) = T_1 \wedge T_2$ oder
$\quad T = \max(T_1, T_2) = T_1 \vee T_2$

2.18 Bemerkung:

Bei unabhängigen $T_1, ..., T_n$ kann die Verteilung von $\max(T_1, ..., T_n)$ und $\min(T_1, ..., T_n)$ ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max(T_1, ..., T_n) \leq t) &= \mathbb{P}(T_1 \leq t, ..., T_n \leq t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i \leq t) \\ \mathbb{P}(\min(T_1, ..., T_n) > t) &= \mathbb{P}(T_1 > t, ..., T_n > t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T_i > t) \end{aligned} \quad (9)$$

2.19 Beispiel:

Todesfallversicherung eines Ehepaars:

- Eintrittsalter Person 1: x
- Eintrittsalter Person 2: y
- Laufzeit n Jahre
- VS M wird fällig, wenn einer der beiden stirbt (also beim ersten Tod)
- Prämie p wird solange bezahlt, wie beide leben

Modellierung:

- Setze $T_{xy} = T_x \wedge T_y$
- $t(k) = M \qquad k = 1, ...n$
- $t(k) = 0 \qquad$ sonst
- $s(k) = 0 \qquad$ für alle $\; k \in \mathbb{N}_0$
- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., n-1$
- $b(k) = 0 \qquad$ sonst

Dann beschreibt $\Gamma = (t, s, b, T_{xy})$ eine Versicherung für verbundene Leben auf den ersten Tod. Zahlungsströme:

- $A(k) = M \mathbb{1}_{\{k-1 < T_{xy} \leq k\}} \qquad k = 1, ..., n$
- $I(k) = p \mathbb{1}_{\{T_{xy} > k\}}$

Die Versicherung ist fair, wenn

$$p \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_{xy} > k) = M \sum_{k=1}^{n} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{xy} > k) &= \mathbb{P}(T_{xy} > k | T_{xy} > k-1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) = \mathbb{P}(T_{x+k-1, y+k-1} > 1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+k-1} > 1) \mathbb{P}(T_{y+k-1} > 1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &\vdots \\ &= \mathbb{P}(T_{x+k-1} > 1) \mathbb{P}(T_{y+k-1} > 1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(T_x > 1) \mathbb{P}(T_y > 1) \end{aligned} \tag{10}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(k-1 < T_{xy} \leq k) &= \mathbb{P}(T_{xy} \leq k | T_{xy} > k-1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) = \mathbb{P}(T_{x+k-1, y+k-1} \leq 1) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= (1 - \mathbb{P}(T_{x+k-1, y+k-1} > 1)) \mathbb{P}(T_{xy} > k-1) \\ &= (1 - \mathbb{P}(T_{x+k-1} > 1) \mathbb{P}(T_{y+k-1} > 1)) \, \mathbb{P}(T_{xy} > k-1). \end{aligned} \tag{11}$$

2.20 Konkurrierende Ausscheideursachen

- Ausfallzeit T
- mehrere konkurrierende Ausscheideursachen. Welche Ursache zum Ausscheiden führt, ist zufällig und wird durch eine $\{1, ..., m\}$-wertige ZV J beschrieben.
- Leistung bei Ausfall hängt von der Ausscheideursache ab.

Die Modellierung erfolgt dadurch, dass die Todesfallleistung ersetzt, bzw. modifiziert, wird durch eine Familie von Ausfallleistungen.

2.21 Definition (Personenversicherung unter m konkurrierenden Risiken)

Sei T eine $(0, \infty)$-wertige ZV und J eine $\{1, ..., m\}$-wertige ZV. Seien $(t_j)_{j=1,...,m}$, s und b Zahlungsströme. Dann heißt $\Gamma = ((t_j)_{j=1,...,m}, s, b, T, J)$ **Personenversicherung unter m konkurrierenden Risiken**.

2.22 Interpretation

Anfangszustand:

- $T \;\hat{=}\;$ Verweilzeit im Anfangszustand
- $J \;\hat{=}\;$ zufälligen Wahl einer Ausscheideursache
- $t_j(n) \;\hat{=}\;$ Leistung bei Ausfall in der n-ten Periode wegen Ursache j
- $s(n) \;\hat{=}\;$ Leistung bei einer Verweildauer größer n

- $b(n) \hat{=}$ Beitrag bei Ausfall nach n.

Zahlungsströme:

- $A(k) = \sum_{j=1}^{m} t_j(k)\mathbb{1}_{\{k-1<T\leq k, J=j\}} + s(k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}$
- $I(k) = b(k)\mathbb{1}_{\{T>k\}}$

Bewertung:

- $\mathbb{E}(V_0(A)) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} t_j(k)v^k\mathbb{P}(k-1 < T \leq k, J = j) + \sum_{k=0}^{\infty} s(k)v^k\mathbb{P}(T > k)$
- $\mathbb{E}(V_0(I)) = \sum_{k=0}^{\infty} b(k)v^k\mathbb{P}(T > k)$

Für eine praktische Berechnung der Wahrscheinlichkeiten muss die Stationaritätsannahme modifiziert werden:

2.23 Definition (stationär)

Eine Familie $(T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}$ von Ausfallzeiten zusammen mit einer $\{1,\cdots,m\}$-wertigen Zufallsvariablen J heißt stationär, wenn

$$\mathbb{P}(T_x \leq n+k, J = j|T_x > n)) = \mathbb{P}(T_{x+n} \leq k, J = j)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}, j \in \{1,...,m\}$

2.24 Lemma

Ist $((T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}, J)$ stationär, so auch $(T_x)_{x\in\mathbb{N}_0}$.

Beweis. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_x \leq n+k|T_x > n) &= \sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(T_x \leq n+k, J = j|T_x > n) \\ &= \sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}(T_{x+n} \leq k, J = j) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+n} \leq k). \qquad (12)\end{aligned}$$

□

Setze

$q_{x,j} := \mathbb{P}(T_x \leq 1, J = j)$ als Wahrscheinlichkeitkeit eines x-Jährigen im folgenden Jahr wegen der Ursache j auszuscheiden.

$q_x := \mathbb{P}(T_x \leq 1) = \sum_{j=1}^{m} q_{x,j}$ einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit eines x-jährigen.

$p_x := 1 - q_x$ einjährige Verweilwahrscheinlichkeit eines x-Jährigen.

Wegen der Stationarität gilt dann:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_x > n) &= \mathbb{P}(T_x > n|T_x > n-1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(T_x > 1) \\ &= p_{x+n-1}\cdot\ldots\cdot p_x \qquad (13)\end{aligned}$$

bzw:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(n-1 < T_x \leq n, J = j) &= \mathbb{P}(n-1 < T_x \leq n, J = j|T_x > n-1)\mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= \mathbb{P}(T_{x+n-1} \leq 1, J = j)\mathbb{P}(T_x > n-1) \\ &= q_{x+n-1,j}\mathbb{P}(T_x > n-1) \qquad (14)\end{aligned}$$

Für eine Berechnung der Barwerte genügt es also, die $q_{x,j}$ zu spezifizieren.

2.25 Beispiel: Invalidenrente

- Eintrittsalter x
- Grundzustand: aktiv a
- Mögliche Ausscheideursachen:
  - Invalidität
  - Tod

  Bei Invalidität wird eine lebenslange Rente der Höhe R gezahlt.

Modell:

- T_x entspricht der Verweilzeit im Zustand a
- $\{T_x > k\}$ bedeutet k Jahre als Aktiver zu überleben
- $J = 1$ entspricht Invalidität
- $J = 2$ entspricht Tod
- Laufzeit n (Restlaufzeit bis zur gesetzlichen Rente)
- $t_1(k) = R\ddot{a}_{x+k}$ entspricht der Leistung bei Invalidität im k-ten Jahr; Barwert des Rentenanspruchs $k = 1, ..., n$
- $t_2(k) = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0$
- $s(k) = 0 \qquad k \in \mathbb{N}_0$
- $b(k) = p \qquad k = 0, ..., n-1$

Bewertung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V(A)) &= \sum_{k=1}^{n} R a_{x+k} v^k \mathbb{P}(k-1 < T_x \le k, J = j) = R \sum_{k=1}^{n} a_{x+k} v^k q_{x+k-1,1} \mathbb{P}(T_x > k-1) \\
\mathbb{E}(V(I)) &= p \sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbb{P}(T_x > k) \qquad (15)
\end{aligned}$$

Notation:

- $i(y) := q_{y,1}$ einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit eines y-Jährigen Aktiven
- $q_y^a := q_{y,2}$ einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines y-Jährigen Aktiven
- $q_y := q_y^a + i(y)$ Wahrscheinlichkeit eines aktiven y-Jährigen im nächsten Jahr auszuscheiden

3 Exkurs: stochastische Prozesse

3.1 Definitionen

3.2 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum, Zeitparameter, Zustandstraum, stochastischer Prozess, Filtration, Informationsverlauf, Information, adaptiert)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine **Zeitparametermenge**.

Sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum als **Zustandsraum**.

Eine Familie $(X_t)_{t \in T}$ von E-wertigen ZV heißt **stochastischer Prozess**.

Eine Familie von Unter-σ-Algebren $\mathcal{F}$ heißt **Filtration**, wenn $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ für alle $s \le t$ und $s, t \in T$.

$(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ gibt einen **Informationsverlauf** wieder.

$\mathcal{F}_t$ entspricht einer **Information**, die bis zum Zeitpunkt t verfügbar ist.

$(X_t)_{t\in T}$ heißt **adaptiert** bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$, falls gilt: X_t ist messbar bzgl. $\mathcal{F}_t$ für alle $t \in T$.

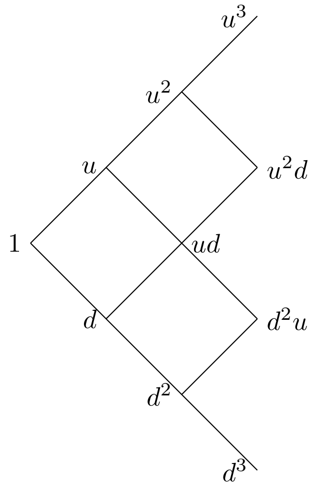
In der Regel: $T \subseteq \mathbb{N}_0$ oder $T \subseteq [0,\infty), E = \mathbb{R}^d, \mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Beispiel: Die Preisentwicklung von d Finanzgütern kann man durch einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t\in T}$ mit Werten in $\mathbb{R}^d$ beschrieben werden:

3.3 Das N-Perioden-CRR Modell (Cox-Ross-Rubinstein Modell)

$$\Omega = \{0,1\}^N, \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), 0 < d < u, Y_n : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & u^{\omega_n} \cdot d^{1-\omega_n} \end{array}$$

$S_n = Y_1 \cdot Y_2 \cdot \ldots \cdot Y_n$ der Preis nach n Perioden:



$S(n)_{n=0,\ldots,N}$ Verlauf einer Aktie über N Perioden. Zusätzlich zur Aktie betrachtet man ein Geldmarktkonto: $\begin{pmatrix} (1+r)^n \\ S(n) \end{pmatrix}$ beschreibt im CRR Modell den Verlauf der Preise dieser beiden Basisfinanzgüter.

3.4 (geometrischer) Random Walk

Sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von iid ZV. Sei Y_0 unabhängig von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Durch $S_n := Y_0 + \sum_{k=1}^n Y_k \qquad n \in \mathbb{N}_0$ wird ein sogenannter **Random Walk** definiert.
Durch $S_n = Y_0 \cdot \prod\limits_{i=1}^n Y_i \qquad n \in \mathbb{N}_0$ wird ein **geometrischer Random Walk** definiert.

Die Aktie im CRR Modell ist ein geometrischer Random Walk.

3.5 Bedingter Erwartungswert

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar bzgl $\mathcal{F}$ und $\mathbb{E}X$ existiere.
Dann heißt $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ eine **Version des bedingten Erwartungswertes von X bzgl $\mathcal{G}$**, wenn gilt:

i) Z ist messbar bzgl $\mathcal{G}$

ii) $\int_A Z d\mathbb{P} = \int_A X d\mathbb{P} \qquad$ für alle $A \in \mathcal{G}$

Schreibweise: $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$
Ist $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ für eine ZV Y, so schreib man auch $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\sigma(Y)) = \mathbb{E}(X|Y)$.

3.6 Existenz und Eindeutigkeit

Gegeben seien die Bezeichnungen wie in 3.5.
Dann existiert der bedingte Erwartungswert von X bzgl. $\mathcal{G}$ und ist $\mathbb{P}$-f.s. eindeutig bestimmt, d.h. erfüllen Z_1, Z_2 die Bedingungen aus 3.5, so gilt:

$$Z_1 = Z_2 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

zum Inhaltsverzeichnis

Beweis.
Existenz:

1. Fall: $X \geq 0$

$\mu(A) = \int_A X d\mathbb{P}$, $A \in \mathcal{G}$ definiert ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{G})$ mit $\mu << \mathbb{P}$.

Satz von Radon-Nikodym liefert ein $\mathcal{G}$-messbares Z mit $\mu(A) = \int_A Z d\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{G}$.

Also $Z = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$

2. Fall: X beliebig

Zerlege $X = X^+ - X^-$

$\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}), \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G})$ existierten nach Fall 1.

$$\begin{aligned}
\int_A X d\mathbb{P} &= \int_A X^+ d\mathbb{P} - \int_A X^- d\mathbb{P} \\
&= \int_A \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} - \int_A \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} \\
&= \int_A \mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} \qquad (16)
\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{G}$.

Also ist $E(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$

Eindeutigkeit:

Seien Z_1, Z_2 bedingte Erwartungswerte.

$\int_{\{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}} Z_1 - Z_2\, d\mathbb{P} = \int_{\{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}} X d\mathbb{P} - \int_{\{Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}\}} X d\mathbb{P} = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > \frac{1}{n}) = 0 \qquad$ für alle $\; n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \mathbb{P}(Z_1 - Z_2 > 0) = 0 \\ &\overset{\text{analog}}{\Rightarrow} \mathbb{P}(Z_2 - Z_1 > 0) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z_1 = Z_2 \ \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

□

3.7 Beispiel:

Seien $X_1, ..., X_n$ iid, $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$
Was ist $\mathbb{E}(X_1|S_n)$?
Vermutung:
$\mathbb{E}(X_1|S_n) = \mathbb{E}(X_2|S_n) = ... = \mathbb{E}(X_n|S_n)$
Also gilt: $n\mathbb{E}(X_1|S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i|S_n) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n X_i|S_n) = \mathbb{E}(S_n|S_n) = S_n$
$\Rightarrow \mathbb{E}(X_1|S_n) = \frac{1}{n} S_n$
Wieso ist $\mathbb{E}(X_1|S_n) = \mathbb{E}(X_k|S_n)$?

Beweis. zu zeigen:

$$\int_{\{S_n \in B\}} X_1 d\mathbb{P} = \int_{\{S_n \in B\}} X_k d\mathbb{P} \qquad \text{für alle} \;\; B \in \mathcal{B}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\{S_n \in B\}} X_1 d\mathbb{P} &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \in B\}} x_1 \mathbb{P}^{(X_1, ..., X_n)}(dx_1, ..., dx_n) \\
&= \int_{\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i \in B\}} x_1 \mathbb{P}^{(X_{\pi(1)}, ..., X_{\pi(n)})}(dx_1, ..., dx_n) \\
&= \int_{\{S_n \in B\}} X_k d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Beachte, dass wegen der Unabhängigkeit $\mathbb{P}^{(X_1,...,X_n)} = \mathbb{P}^{(X_{\pi(1)},...,X_{\pi(n)})}$ gilt für jede Permutation π und man eine Permutation betrachten kann mit $\pi(1) = k$.

□

3.8 Faktorisierter bedingter Erwartungswert

Sei $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine ZV und sei $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ messbar. Sei $\mathcal{G} = \sigma(Y)$. Dann gilt:
Eine ZV $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{G}$-messbar genau dann, wenn es eine $\mathcal{E}$-messbare Abbildung $h : E \to \mathbb{R}$ gibt, mit $Z = h \circ Y$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "Y"] \arrow[dr, "\mathbb{E}(X|Y)"'] & (E, \mathcal{E}) \arrow[d, "h"] \\ & (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

$\longrightarrow h(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$

Falls Z eine Version der bedingten Erwartung von X, gegeben Y, ist, so gibt es also ein $h : E \to \mathbb{R}$ mit

$$Z = h \circ Y.$$

Schreibweise: $h(y) = \mathbb{E}(X|Y = y)$.
h heißt **Version der faktorisierten bedingten Erwartung von X, gegeben Y**.
Sind h_1 und h_2 Versionen der bedingten Erwartungen von X, gegeben Y, so gilt:

$$h_1(y) = h_2(y) \qquad \text{für } \mathbb{P}^Y\text{-f.a. } y \in E.$$

$y \mapsto \mathbb{E}(X|Y = y)$ ist eindeutig festgelegt für $\mathbb{P}^Y$-f.a. y durch

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X\mathbb{1}_{\{Y \in B\}} &= \int_{\{Y \in B\}} \mathbb{E}(X|Y)\, d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{Y \in B\}} h \circ Y d\mathbb{P} \\ &= \int_B h(y)\mathbb{P}^Y(dy) \end{aligned} \tag{17}$$

für alle $B \in \mathcal{E}$.
Ausrechnen des bedingten Erwartungswerts erfolgt häufig durch Spezifikation der bedingten Verteilung:

3.9 Stochastischer Kern

Seien $(\Omega, \mathcal{F})$ und $(E, \mathcal{E})$ messbare Räume.
Ein **stochastischer Kern** K ist eine Abbildung $K : E \times \mathcal{F} \to [0, 1]$ für die gilt:

i) $K(y, \cdot)$ ist ein WMaß für alle $y \in E$

ii) $K(\cdot, A)$ ist messbar für alle $A \in \mathcal{F}$

3.10 bedingte Wahrscheinlichkeiten und bedingte Verteilungen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum und $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.
Für jedes $\Gamma \in \mathcal{F}$ heißt

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma|\mathcal{G})$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von Γ gegeben $\mathcal{G}$.
Schreibweise: $\mathbb{P}(\Gamma|\mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_\Gamma|\mathcal{G})$

Seien $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, \mathcal{E}_1)$ und $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ messbare Abbildungen.

Die **bedingte Verteilung** von X, gegeben Y, ist ein stochastischer Kern $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \to [0, 1]$ derart, dass $y \mapsto K(y, A)$ eine Version der faktorisierten bedingten Erwartung von $\mathbb{P}(X \in A|Y)$ ist für alle $A \in \mathcal{E}_1$.
Schreibweise: $K(y, A) := \mathbb{P}(X \in A|Y = y)$.
Durch Erweiterungsschluss kann man zeigen:

$$\mathbb{E}(f(X)|Y = y) = \int f(x)K(y, dx)$$

für jedes messbare $f : E_1 \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ für welches $\mathbb{E}(f(X))$ existiert.

3.11 Beispiel: Diskrete Zufallsvariablen

Sei $(E_1, \mathcal{E}_1)$ messbar und E_2 abzählbar mit $\mathcal{E}_2 = \mathcal{P}(E_2)$.
Seien $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_1, \mathcal{E}_1)$ und $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ messbar.
Die bedingte Verteilung von X, gegeben $Y = y$, ist bestimmt durch

$$\mathbb{P}(X \in A | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} \qquad \text{für alle } \; y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0$$

Definiere den stochastischen Kern $K : E_2 \times \mathcal{E}_1 \to [0,1]$ durch

$$K(y, A) := \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} & \text{für alle } \; y \in E_2 \text{ mit } \mathbb{P}(Y = y) > 0 \\ \text{irgendwie, d.h. wähle beliebiges WMaß } \mu \text{ auf } (E_1, \mathcal{E}_1) \text{ und setze } K(y, A) = \mu(A) \text{ f.a. } A \in \mathcal{E}_1 \end{cases}$$

Damit ist K die bedingte Verteilung von X, gegeben Y.

3.12 Lebesgue-Dichten

Sei (X, Y) ein zweidimensionaler Zufallsvektor mit Lebesgue Dichte $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int_{A \times B} h(x, y) \lambda^2(dx, dy) \\ &\underset{\text{Fubini}}{=} \int_A \int_B h(x, y) \lambda(dy) \lambda(dx) \qquad \text{für alle } \; A, B \in \mathcal{B} \end{aligned} \tag{18}$$

Setze

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx.$$

Dann ist f messbar wegen Fubini und die Lebesgue Dichte von Y, denn

$$\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(Y \in B, X \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R} \times B} h(x, y) d(x, y) = \int_B \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h(x, y) dx}_{= f(y)} dy \qquad \text{für alle } \; B \in \mathcal{B}$$

Definiere einen stochastischen Kern $K : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \to [0,1]$ durch

$$K(y, A) := \begin{cases} \int_A \frac{h(x,y)}{f(y)} \lambda(dx) & \text{falls } f(y) > 0 \\ \text{irgendwie} \end{cases}$$

Dann ist K eine bedingte Verteilung von X, gegeben Y, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \int_{A \times B} h(x, y) \lambda^2(dx, dy) \\ &= \int_B \int_A h(x, y) dx dy \\ &= \int_{B \cap \{f > 0\}} \int_A \frac{h(x, y)}{f(y)} dx f(y) dy \\ &= \int_{B \cap \{f > 0\}} K(y, A) f(y) dy \\ &= \int_B K(y, A) \mathbb{P}^Y(dy) \end{aligned} \tag{19}$$

Also gilt:
$\omega \mapsto K(Y(\omega), A)$ ist eine Version von $\mathbb{P}(X \in A|Y)$ und damit auch $y \mapsto K(y, A)$ eine Version von $y \mapsto \mathbb{P}(X \in A|Y = y)$.

3.13 Eigenschaften der bedingten Erwartung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra. Seien X, X_1, X_2 integrierbare ZV. Dann gilt:

i) $\mathbb{E}(\alpha X_1 + \beta X_2 | \mathcal{G}) = \alpha \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}) + \beta \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{G})$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) $X_1 \leq X_2 \Rightarrow \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{G})$

iii) Sei Z eine $\mathcal{G}$-messbare ZV, derart dass $\mathbb{E}ZX$ existiert. Dann gilt:

$$\mathbb{E}(ZX | \mathcal{G}) = Z \mathbb{E}(X | \mathcal{G})$$

iv) Sind $\mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebren, so folgt:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1)$$

"Tower Property"

v) Sind $\mathcal{G}$ und X stochastisch unabhängig, so gilt:

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}X$$

vi) Sind Z_1, Z_2 stochastisch unabhängige ZV mit Werten in $(E_1, \mathcal{E}_1)$ bzw. $(E_2, \mathcal{E}_2)$ und ist $h : E_1 \times E_2 \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ messbar mit existierenden $\mathbb{E}h(Z_1, Z_2)$, so gilt:

$$\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2)|Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2) \qquad \text{für } \mathbb{P}^{Z_2}\text{-f.a. } z_2 \in E_2$$

vii) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X$

Beweis. $(i), (ii)$ einfach
(iii)

1. Fall: $Z \geq 0, X \geq 0$
Ist $Z = \mathbb{1}_G$ mit $G \in \mathcal{G}$:

$$\int_A ZX d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{1}_G X d\mathbb{P} = \int_{\underbrace{A\cap G}_{\in\mathcal{G}}} X d\mathbb{P} = \int_{A\cap G} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_A Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P} \tag{20}$$

Also ist $\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$

Ist $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i}$ $\quad G_i \in \mathcal{G}, \alpha_i \geq 0$, so gilt wegen (i)

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{E}(\mathbb{1}_{G_i} X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{G_i} \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$$

Ist $Z \geq 0$,so existiert eine Folge von Treppenfunktionen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leq Z_1 \leq Z_2 \leq ... \uparrow Z$
Also ist$Z_n X \uparrow ZX$.
Für jedes $A \in \mathcal{G}$ folgt mit der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned}
\int_A ZX d\mathbb{P} &= \mathbb{E}(ZX\mathbb{1}_A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n X \mathbb{1}_A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A) \\
&= \mathbb{E}(Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_A).
\end{aligned} \tag{21}$$

Somit gilt $\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|G)$.

2. Fall X, Z beliebig
$ZX = U - V$ mit $\quad U = Z^+X^+ + Z^-X^- \geq 0$
$\qquad\qquad\qquad\quad V = Z^+X^- + Z^-X^+ \geq 0$
Also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(U|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(V|\mathcal{G}) \\
&= \mathbb{E}(Z^+X^+|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^-X^-|\mathcal{G}) - (\mathbb{E}(Z^+X^-|\mathcal{G}) + \mathbb{E}(Z^-X^+|\mathcal{G})) \\
&= Z^+\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - (Z^+\mathbb{E}(X^-|\mathcal{G}) - Z^-\mathbb{E}(X^-|\mathcal{G})) \\
&= Z(\mathbb{E}(X^+|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X^-|\mathcal{G})) \\
&= Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G})
\end{aligned} \tag{22}$$

(iv)

Sei $A \in \mathcal{G}_1 \subseteq G_2$. Dann gilt

$$\int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)d\mathbb{P} \overset{A\in\mathcal{G}_2}{=} \int_A X d\mathbb{P} \overset{A\in\mathcal{G}_1}{=} \int_A \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1)d\mathbb{P}.$$

Also ist

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1).$$

(vi)

zu zeigen:

$$\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2)|Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$$

Für $B \in \mathcal{E}_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\{Z_2\in B\}} h(Z_1, Z_2)d\mathbb{P} &= \mathbb{E}h(Z_1, Z_2)\mathbb{1}_{\{Z_2\in B, Z_1\in E_1\}} \\ &= \int_B \underbrace{\int_{E_1} h(z_1, z_2)\mathbb{P}^{Z_1}(dz_1)}_{\mathbb{E}h(Z_1,z_2) \text{ für } \mathbb{P}^{Z_2}\text{-f.a. } z_2\in E_2} \mathbb{P}^{Z_2}(dz_2) \end{aligned} \tag{23}$$

Also ist $\mathbb{E}(h(Z_1, Z_2)|Z_2 = z_2) = \mathbb{E}h(Z_1, z_2)$ für $\mathbb{P}^{Z_2}$-f.a. $z_2 \in E_2$

□

3.14 Bestapproximation

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein WRaum, X eine ZV mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ Unter-σ-Algebra
$L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{Y : \Omega \to \mathbb{R} : Y \text{ ist } \mathcal{F}\text{-messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$
$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) := \{Y : \Omega \to \mathbb{R} : Y \text{ ist } \mathcal{G}\text{-messbar und } \mathbb{E}Y^2 < \infty\}$
Also $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \subseteq L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
Durch $< Y, Z >:= \mathbb{E}YZ$ wird ein Skalarprodukt auf $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert.
$||Y||_2^2 :=< Y, Y >$ ist die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.
$L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ist ein abgeschlossener Teilraum.

Für $X \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist $\widehat{X} := \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ die Orthogonalprojektion auf $L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, d.h. $\widehat{X} \in Ł_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ und es gilt

$$||X - \widehat{X}||_2^2 = \inf_{Z\in L_2(\Omega,\mathcal{G},\mathbb{P})} ||X - Z||_2^2.$$

Beweis. X läßt sich zerlegen in

$$X = \widehat{X} + X - \widehat{X}.$$

Zu zeigen: $X - \widehat{X} \perp Z$ für alle $Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$
Die Eigenschaften des bedingten Erwartungswertes implizieren:

$$< \mathbb{1}_A, X >= \int_A \mathbb{1}_A X d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_A \widehat{X} d\mathbb{P} =< \mathbb{1}_A, \widehat{X} >$$

für jedes $A \in \mathcal{G}$.
Also ist $< \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, X >=< \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, \widehat{X} >$ für alle $A_1, ..., A_n \in \mathcal{G}, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$
und damit $< Z, X >=< Z, \widehat{X} >$ $Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, da $< \cdot, X >$ und $< \cdot, \widehat{X} >$ stetig sind .
Somit folgt $X - \widehat{X} \perp L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.
Man kann dies auch einfacher zeigen, denn für $Z \in L_2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ gilt

$$\mathbb{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = Z\hat{X}.$$

Also ist

$$\mathbb{E}ZX = \mathbb{E}Z\hat{X}$$

und damit $< Z, X - \hat{X} >= 0$.
Mit Pythagoras folgt dann

$$\begin{aligned} ||X - Z||_2^2 &= ||X - \hat{X} + \widehat{X} - Z||_2^2 \\ &= ||X - \widehat{X}||_2^2 + ||\widehat{X} - Z||_2^2 \\ &\geq ||X - \widehat{X}||_2^2 \end{aligned} \tag{24}$$

□

3.15 Martingale

Sei T eine Zeitparametermenge, $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration und $(M_t)_{t\in T}$ ein adaptierter stochastischer Prozess.
M heißt **Martingal**, falls gilt:

i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty \qquad$ für alle $\; t \in T$

ii) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \qquad s, t \in T, s \leq t$

M heißt **Submartingal**, falls gilt:

i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty \qquad$ für alle $\; t \in T$

ii) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \geq M_s \qquad s, t \in T, s \leq t$

M heißt **Supermartingal**, falls gilt:

i) $\mathbb{E}|M_t| < \infty \qquad$ für alle $\; t \in T$

ii) $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s \qquad s, t \in T, s \leq t$

3.16 Beispiele

3.16.1 Random Walk

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, die integrierbar sind. Sei unabhängig davon S_0 eine integrierbare Startvariable. Setze

$$S_n = S_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

und $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, ..., S_n) = \sigma(S_0, X_1, ..., X_n)$
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &\underset{X_{n+1} \text{ unab. von } \mathcal{F}_n}{\overset{S_n \text{ ist } \mathcal{F}_n \text{ mb}}{=}} S_n + \mathbb{E}X_{n+1} \overset{\geq}{\underset{<}{=}} S_n \Leftrightarrow \mathbb{E}X_{n+1} \overset{\geq}{\underset{<}{=}} 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Also ist ein Random Walk ein Martingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_1 = 0$ gilt. Er ist ein Submartingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_1 \geq 0$ ist und ein Supermartingal genau dann, wenn $\mathbb{E}X_1 \leq 0$ gilt.

3.16.2 Geometrischer Random Walk

In der vorherigen Situation setze $S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} X_i$, Dann gilt:

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n X_{n+1}|S_0, ..., S_n) \underset{S_n \text{ ist } \mathcal{F}_n \text{ mb}}{=} S_n \mathbb{E}(X_{n+1}|S_0, ..., S_n) \underset{X_{n+1} \text{ unab. von } \mathcal{F}_n}{=} S_n \mathbb{E}X_{n+1} \tag{26}$$

Also: S_n ist ein Martingal $\Leftrightarrow \mathbb{E}X_i = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

3.17 Stoppzeit

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ eine Filtration.

$$\tau : \Omega \to T \cup \{+\infty\}$$

heißt **Stoppzeit**, falls

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \text{für alle } \; t \in T.$$

Stoppzeiten kann man als Verkaufsoption interpretieren:

"Die Entscheidung, über t hinaus fortzusetzen"

$\{\tau \leq t\}$ darf nur von den bis t verfügbaren Informationen abhängen.

3.18 Beispiel:

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ reellwertiger stochastischer Prozess, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, ..., S_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

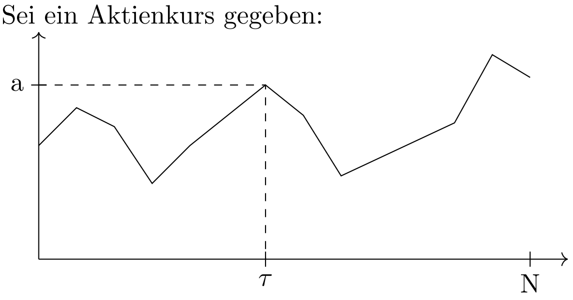
$$\tau := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n > a\}$$

ist eine Stoppzeit, denn

$$\{\tau \le n\} = \{S_0 \le a, S_1 \le a, ..., S_n \le a\} \in \mathcal{F}_n$$

3.19 Gegenbeispiel:

Sei ein Aktienkurs gegeben:



$$\tau = \inf\{0 \le k \le N : S_k = \max\{S_0, ..., S_N\}\}$$

ist keine Stoppzeit, da zur Stoppentscheidung in die Zukunft geschaut werden muss.

3.20 Martingal als Glücksspiel

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in N_0}$ eine Filtration und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein adaptierter stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}|M_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. M_n entspricht der Auszahlung, die ein Spieler enthält, wenn er das Spiel zum Zeitpunkt n beendet. Die Stoppzeiten entsprechen den Strategien, die ein Spieler verwirklichen kann.

3.21 Definition (beschränkte Stoppzeit)

τ ist eine **beschränkte Stoppzeit**, falls es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $\tau \le N$.
Beschränkte Stoppzeiten entsprechen real einsetzbaren Strategien.

3.22 Satz

Es gilt: $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0 \qquad \text{für alle beschränkten Stoppzeiten } \tau$$

d.h. durch Spielen des Glückspiels kann sich ein Spieler im Mittel weder verbessern, noch verschlechtern ("faires Glücksspiel").

Beweis. "$\Rightarrow$"
Sei τ eine beschränkte Stoppzeit mit $\tau \le N$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}M_\tau &= \mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&\overset{M_n}{\underset{\text{Martingal}}{=}} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N|\mathcal{F}_n)\mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \overset{\{\tau=n\}\in\mathcal{F}_n}{=} \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}\mathbb{E}(M_N\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \mathbb{E}(M_N\mathbb{1}_{\{\tau=n\}}) \\
&= \mathbb{E}\sum_{n=0}^{N} M_N\mathbb{1}_{\{\tau=n\}} = \mathbb{E}M_N \overset{\tau=0}{=} \mathbb{E}M_0
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0.$$

"$\Leftarrow$": Sei $m > n$
zu zeigen: $\mathbb{E}(M_m|\mathcal{F}_n) = M_n$, d.h.

$$\int_A M_m d\mathbb{P} = \int_A M_n d\mathbb{P} \qquad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}_n$$

Zu $A \in \mathcal{F}_n$ definiere Stoppzeit

$$\tau_A(\omega) := \begin{cases} m & \text{falls } \omega \in A \\ n & \text{falls } \omega \in A^c \end{cases}$$

Also

$$\tau_A = m\mathbb{1}_A + n\mathbb{1}_{A^c}.$$

Dann ist τ_A eine beschränke Stoppzeit und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M_0 &= \mathbb{E}M_{\tau_A} = \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_{A^c} \\ &= \mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A + \mathbb{E}M_n - \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A \end{aligned}$$

Weiter gilt mit $\tau = n$:

$$\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_n$$

Einsetzen liefert:

$$\mathbb{E}M_m\mathbb{1}_A = \mathbb{E}M_n\mathbb{1}_A$$

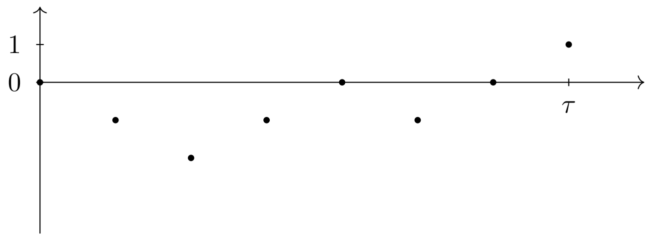
□

3.23 Optional Sampling

Frage: Wann gilt $\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$, wenn M ein Martingal ist?
$\rightsquigarrow$ Für beschränkte Stoppzeiten klar.
$\rightsquigarrow$ Für **un**beschränkte Stoppzeiten braucht man Voraussetzungen.

3.24 Beispiel: Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, (X_i) iid,
$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_i = -1), \tau = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = 1\}, S_0 = 0.$



Es gilt: $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ $\mathbb{P}$-f.s. und $S_\tau = 1 \Rightarrow \mathbb{E}S_\tau = 1 \neq 0 = \mathbb{E}S_0$

Antwort liefert das Optional-Sampling-Theorem:

3.25 Satz (Optional-Sampling-Theorem)

Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Sei τ eine Stoppzeit mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$

ii) $\mathbb{E}|M_\tau| < \infty$

iii) $\mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\{\tau > n\}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Dann gilt:

$$\mathbb{E}M_\tau = \mathbb{E}M_0$$

Beweis. Approximiere τ durch beschränkte Stoppzeiten $\tau \wedge n$. Es gilt

$$\mathbb{E}M_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}M_0$$

und damit

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_0| &= |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_{\tau\wedge n}| \\
&= |\mathbb{E}M_\tau - \mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\le n\}} - \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}| \\
&= |\mathbb{E}M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau>n\}} - \mathbb{E}M_n \mathbb{1}_{\{\tau>n\}}| \\
&\le \mathbb{E}|M_\tau|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} + \mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \\
&\underset{\substack{\text{wegen } (i),(ii) \\ \text{und einer} \\ \text{Anwendung der} \\ \text{majorisierten Konvergenz}}}{\xrightarrow{n\to\infty}} 0
\end{aligned}$$

□

3.26 Anwendung

Berechnung von Ruinwahrscheinlichkeiten.
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1), S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Anfangskapital von k Euro:

$$S_n^{(k)} = k + S_n = k + \sum_{i=1}^n X_i$$

ist das Vermögen nach n Spielen bei Anfangskapital k. Wir spielen solange, bis wir ein Vermögen von $l > k$ Euro erreicht haben, oder ruiniert sind.

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n^{(k)} = 0 \text{ oder } S_n^{(k)} = l\} = \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = -k \text{ oder } S_n = l - k\}$$

entspricht dieser Strategie.

$$\{S_\tau = -k\} = \{S_\tau^{(k)} = 0\}$$

entspricht dem Ruinereignis und

$$\{S_\tau = l - k\} = \{S_\tau^{(k)} = l\}$$

dem Gewinnereignis. Man kann zeigen, dass

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1 \text{ und } \mathbb{E}\tau < \infty$$

gilt.

(i) der faire Fall $p = \frac{1}{2}$:
Dann ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal

$$\mathbb{E}|S_\tau| \le \max(k, l-k) < \infty$$

$$\mathbb{E}|S_n|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \le \max(k, l-k)\mathbb{P}(\tau > n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Optional Sampling liefert:

$$0 = \mathbb{E}S_\tau = -k\mathbb{P}(S_\tau = -k) + (l-k)\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l-k) = 1$
folgt:

$$\mathbb{P}(S_\tau = -k) = \frac{l-k}{l} \qquad \text{Ruinwahrscheinlichkeit}$$

$$\mathbb{P}(S_\tau = l-k) = \frac{k}{l} \qquad \text{Gewinnwahrscheinlichkeit}$$

(ii) der unfaire Fall $p \neq \frac{1}{2}$ Betrachte den geometrischen Random-Walk

$$M_n = a^{S_n} = \prod_{i=1}^{n} a^{X_i} \qquad \text{mit } a > 0$$

$$\begin{aligned} (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist ein Martingal} \quad &\Leftrightarrow \mathbb{E}a^{X_1} = 1 \\ &\Leftrightarrow ap + \tfrac{1}{a}(1-p) = 1 \\ &\Leftrightarrow a = 1 \text{ oder } a = \tfrac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Für $p \neq \frac{1}{2}$ ist $a \neq 1$

Weiter gilt: $\mathbb{E}|M_\tau| \leq \max(a^{-k}, a^{l-k}) < \infty$

$\mathbb{E}|M_n|\mathbb{1}_{\{\tau>n\}} \leq \max(a^{-k}, a^{l-k})\mathbb{P}(\tau > n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Optional Sampling liefert

$$1 = \mathbb{E}M_\tau = a^{-k}\mathbb{P}(S_\tau = -k) + a^{l-k}\mathbb{P}(S_\tau = l-k)$$

Zusammen mit $\mathbb{P}(S_\tau = -k) + \mathbb{P}(S_\tau = l-k) = 1$
folgt:

$$\mathbb{P}(S_\tau = -k) = \frac{a^k - a^l}{1-a^l}$$

$$\mathbb{P}(S_\tau = l-k) = \frac{1-a^k}{1-a^l}$$

Es fehlt noch der Nachweis, dass

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$$

Betrachte dazu für $b \in \mathbb{Z} : \tau_b = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = b\}$

(i) Der Fall $p \geq \frac{1}{2}$

Dann gilt:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_b < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)\mathbb{P}(\tau_{b-1} < \infty) \\ &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^b \\ \mathbb{P}(\tau_{-a} < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty)^a \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Weiter ist:
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) &= \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = 1) + \mathbb{P}(\tau_1 < \infty, X_1 = -1) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(\tau_2 < \infty) \\ &= p + (1-p)\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^2 \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty)$ Lösung von

$$(1-p)x^2 - (x+p) = 0$$

und somit

$$\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1 \text{ oder } \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = \frac{p}{1-p}.$$

Ist $p \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{1-p} \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) = 1$

(ii) Der Fall $p < \frac{1}{2}$

Dann ist $\frac{p}{1-p} < 1$

SLLN $\Rightarrow \frac{S_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}X_1 = 2p - 1 < 0$

$\Rightarrow S_n \longrightarrow -\infty \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) = 0$

Wäre $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1$, so wäre $\mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1$ für alle $b \in \mathbb{N}$
und damit:

$$\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq b) = \lim_{b\to\infty} \mathbb{P}(\tau_b < \infty) = 1 \lightning$$

Also gilt $\mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = \frac{p}{1-p}$ für $p < \frac{1}{2}$.

Analog kann man schließen, dass

$$\mathbb{P}(\tau_{-1} < \infty) = \begin{cases} 1 & p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p} & p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Insgesamt folgt somit für $a < 0 < b$ und

$$\tau_{ab} := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = a \text{ oder } S_n = b\},$$

dass

$$\mathbb{P}(\tau_{ab} < \infty) = \mathbb{P}(\tau_a < \infty \text{ oder } \tau_b < \infty) = 1$$

gilt.
Berechnung von $\mathbb{E}\tau_{ab}$:

(i) Der unfaire Fall $p \neq \frac{1}{2}$:
$S_n - n\mathbb{E}X_1 = S_n - n(2p-1) \qquad n \in \mathbb{N}_0$
ist ein zentrierter Random-Walk und deshalb ein Martingal.
Optional Sampling liefert

$$\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n} - (\tau \wedge n)(2p-1)) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(\tau \wedge n)(2p-1) = \mathbb{E}S_{\tau\wedge n}$$

$\mathbb{E}(\tau \wedge n) \uparrow \mathbb{E}\tau$ monotone Konvergenz
$\mathbb{E}S_{\tau\wedge n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}S_\tau$ majorisierte Konvergenz, da $S_{\tau\wedge n} \leq \max(|a|, b)$

$$\Rightarrow \mathbb{E}S_\tau = (2p-1)\mathbb{E}\tau \Leftrightarrow a\mathbb{P}(S_\tau = a) + b\mathbb{P}(S_\tau = b) = (2p-1)\mathbb{E}\tau$$

Also folgt:

$$\mathbb{E}\,\tau_{ab} = \frac{1}{2p-1}\left[a\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|} - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}} + b\frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{|a|+b}}\right]$$

(ii) Der faire Fall $p = \frac{1}{2}$:
$(S_n^2 - n\mathbb{E}X_1^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2|\mathcal{F}_n)\\
&= \mathbb{E}(S_n^2|\mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(X_{n+1}S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\\
&\overset{X_{n+1}\text{ unab.}}{\underset{\text{von }\mathcal{F}_n}{=}} S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}X_{n+1}^2\\
&\overset{X_{n+1}\text{ unab.}}{\underset{\text{von }\mathcal{F}_n}{=}} S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}X_{n+1} + \mathbb{E}X_{n+1}^2\\
&= S_n^2 + \mathbb{E}X_1^2.
\end{aligned}$$

Optional Sampling liefert mit $\tau = \tau_{ab}$

$$\mathbb{E}(S_{\tau\wedge n}^2 - (\tau \wedge n)\mathbb{E}X_1^2) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(S_{\tau\wedge n}^2) = \underbrace{\mathbb{E}X_1^2}_{=1}\,\mathbb{E}(\tau \wedge n)$$

$\mathbb{E}(\tau \wedge n) \uparrow \mathbb{E}\tau$ monotone Konvergenz
$\mathbb{E}S_{\tau\wedge n}^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}S_\tau^2$ majorisierte Konvergenz
Also gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}S_\tau^2 &= a^2\mathbb{P}(S_\tau = a) + b^2\mathbb{P}(S_\tau = b)\\
&= a^2\tfrac{b}{|a|+b} + b^2\tfrac{|a|}{|a|+b}\\
&= \tfrac{|a|b(|a|+b)}{|a|+b} = |a|b.
\end{aligned}$$

3.27 Vorhersehbare Prozesse

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt **vorhersehbar**, wenn gilt:

$$X_n \text{ ist } \mathcal{F}_{n-1} \text{ messbar für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

3.28 Doob-Meyer Zerlegung

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein zu einer Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptierter Prozess mit $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Dann existiert genau eine Zerlegung der Form

$$X_n = Y + M_n + \Lambda_n \qquad \mathbb{P}\text{-f.s. für f.a. } n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei Y ist $\mathcal{F}_0$-messbar Startvariable
$(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingal mit $M_0 = 0$
$(\Lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist vorhersehbar mit $\Lambda_0 = 0$

Eindeutigkeit bedeutet:
Ist $X_n = Y + M_n + \Lambda = Y' + M_n' + \Lambda'$, so folgt $Y = Y', M_n = M_n', \Lambda_n = \Lambda_n'$ fast sicher.

Beweis. Existenz:
Setze $M_0 = 0, \Lambda_0 = 0, Y = X_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} X_n - Y &= X_n - X_0 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1})) + \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}) \end{aligned}$$

Setze also

$$\begin{aligned} M_n &= \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}) \\ \Lambda_n &= \sum_{i=1}^{n}(\mathbb{E}(X_i|\mathcal{F}_{i-1}) - X_{i-1}) \end{aligned} \tag{27}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist Λ vorhersehbar und M ein Martingal, da

$$\mathbb{E}(M_n|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} + \mathbb{E}(X_n - \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
Eindeutigkeit:
Folgt aus der Tatsache, dass ein vorhersehbares Martingal konstant sein muss, i.e.: Ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein vorhersehbares Martingal, so gilt $Z_n = Z_0$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$, denn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$Z_n = \mathbb{E}(Z_{n+1}|\mathcal{F}_n) = Z_{n+1}.$$

Liegen zwei verschiedene Darstellungen vor, so dass gilt

$$Y_0 + M_n + \Lambda_n = Y_0' + M_n' + \Lambda_n',$$

so gilt

$$Y_0 = Y_0',$$

da $M_0 = M_0' = \Lambda_0 = \Lambda_0' = 0$. Weiter ist wegen

$$M_n + \Lambda_n = M_n' + \Lambda_n'$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$M_n - M_n' = \Lambda_n' - \Lambda_n, n \in \mathbb{N}_0$$

ein vorhersehbares Martingal, woraus

$$M_n - M_n' = \Lambda_n' - \Lambda_n = M_0 - M_0' = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

□

4 Diskrete Finanzmarktmodelle

Ziel:

- Modellierung von Finanzmärkten in diskreter Zeit
- Formulierung des Arbitragebegriffes
- Arbitragefreies Bewerten von Derivaten
- Zusammenhang zur Wahrscheinlichkeitstheorie: Das No-Arbitrage Theorem

4.1 Beschreibung des Finanzmarktes

- periodische Sichtweise
- N Perioden
- N **Handelszeitpunkte** $0, 1, ..., N-1$
- Der Informationsverlauf wird gegeben durch eine Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$. Dabei ist $\mathcal{F}_0$ eine triviale $\sigma-$Algebra, die also Ereignissen nur die Wahrscheinlichkeiten 0 oder 1 zuordnet. Diese Annahme wird dadurch begründet, dass Anfangspreise sowohl der Basisgüter als auch von Derivaten fest stehen und nicht zufällig sind.
- d risikobehaftete Finanzgüter (**risky assets**)
  mit zu $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$ adaptierten Preisprozessen $S_1(n), ..., S_d(n)$, $n = 0, ..., N$.
  $$S = (S_1, ..., S_d)$$
  beschreibt die Entwicklung der risky assets.
  $S(n)$ ist der zufällige Vektor der Preise nach n Perioden für die risky assets.
- ein **Numeraire Asset** (**Verrechnungsgut**)
  mit adaptiertem Preisprozess $S_0(n)$, $n = 0, ..., N$,
  wobei vorausgesetzt wird, dass $S_0(n) > 0$ für alle $n = 0, ..., N$.
  Das Numeraire Asset dient zur Verrechnung. Häufig wird ein Geldmarktkonto β hierzu benutzt, d.h.
  $$S_0(n) = \beta(n) = (1 + \varrho(1))(1 + \varrho(2)) \cdot ... \cdot (1 + \varrho(n)) \qquad n = 1, ..., N, \beta(0) = 1$$
  wobei $(\varrho(n))_{n=1,...,N}$ ein vorhersehbarer Prozess ist mit $\varrho(n) > -1$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $n = 1, ..., N$.
  $\varrho(n)$ beschreibt die zufällige **Zinsrate** in der n-ten Periode.
- gehandelt werden kann durch Erwerb bzw. Verkauf von Anteilen an den $(d+1)$ Basisfinanzgütern in den Handelszeitpunkten.
  Die Entwicklung der Anzahl an Anteilen an Basisfinanzgütern entspricht dabei vorhersehbaren Prozessen (φ, H) (da am Anfang einer Periode das Portfolio zusammengestellt wird), mit

  $\varphi(n)$ entspricht der Anzahl an Anteilen des Numeraire Assets in der n-ten Periode

  $H_j(n)$ entspricht der Anzahl an Anteilen im j-ten Basisfinanzgut in der n-ten Periode

  $H = (H_1, ..., H_d)$
  Ein solches Paar (φ, H) heißt **Handelsstrategie**.

Eine Handelsstrategie (φ, H) induziert eine **Vermögensentwicklung**.
Der Wert nach n Perioden, vor der Umschichtung des Portfolios ist

$$V(n) = \varphi(n)S_0(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n)S_j(n) \qquad n = 1, ..., N$$

Das Anfangsvermögen, welches ein Investor einsetzen muss, um die Handelsstrategie (φ, H) durchführen zu können, ist gerade

$$V(0) = \varphi(1)S_0(0) + \sum_{j=1}^{d} H_j(1)S_j(0)$$

Setze $< H(n), S(n) >:= \sum_{j=1}^{d} H_j(n)S_j(n)$, Dies ist das **Skalarprodukt** der Vektoren.

4.2 Selbstfinanzierung

Wird beim Handel in den Handelszeitpunkten $1, ..., N-1$ kein Kapital hinzugefügt oder entnommen, so nennt man diese Handelsstrategie **selbstfinanzierend**.
Formal: (φ, H) heißt selbstfinanzierend, wenn

$$\begin{aligned} V(n) &= \varphi(n)S_0(n) + < H(n), S(n) > \\ &= \varphi(n+1)S_0(n) + < H(n+1), S(n) > \end{aligned}$$

für alle $n = 1, ..., N-1$.

4.2.1 Beispiele für selbstfinanzierende Strategien

Buy and hold Strategie Ein Anfangskapital $x > 0$ wird in das erste risky asset investiert und bis zum Schluss gehalten:
$H_1(1) = \frac{x}{S_1(0)}$ entspricht dem Kaufen am Anfang
$H_1(n) = \frac{x}{S_1(0)}$ für $n = 2, ..., N$ entspricht dem Halten über die Perioden.
$H_j \equiv 0$ für $j \neq 1$.
Wertentwicklung:
$V(n) = H_1(n)S_1(n) = \frac{x}{S_1(0)}S_1(n)$

short selling and hold Strategie $H_1(1) = -1$ entspricht dem short selling der Aktie, das dem Verkauf am Anfang entspricht.
$H_1(n) = -1$ enspricht dem Halten der Verkaufsposition von $n = 2, ..., N$
Anfangskapital:

$$-S_1(0) < 0$$

Wertentwicklung:

$$-S_1(n)$$

Kaufe Aktie 1, halte diese k Perioden und tausche danach in Aktie 2, falls $S_2(k) < S_1(k)$ und halte diese bis zum Ende

Zu Beginn:

$$H_1(n) = 1 \text{ für } n = 1, ..., k$$

$$H_2(n) = 0 \text{ für } n = 1, ..., k$$

Am Anfang der $(k+1)$-ten Periode:

$$H_1(k+1) = \mathbb{1}_{\{S_2(k) \geq S_1(k)\}}$$

$H_2(k+1) = \frac{V(k)}{S_2(k)}\mathbb{1}_{\{S_2(k)<S_1(k)\}} = \frac{S_1(k)}{S_2(k)}\mathbb{1}_{\{S_2(k)<S_1(k)\}}$ entspricht der zufälligen Umschichtung in Aktie 2.

Halten bis zum Ende:

$$H_1(n) = \mathbb{1}_{\{S_2(k) \geq S_1(k)\}} \text{ für } n = k+2, ..., N$$

$$H_2(n) = \frac{S_1(k)}{S_2(k)}\mathbb{1}_{\{S_2(k)<S_1(k)\}} \text{ für } n = k+2, ..., N$$

H ist vorhersehbar und selbstfinanzierend da

$$\begin{aligned} V(k) = H_1(k)S_1(k) = S_1(k) \quad &= \frac{S_1(k)}{S_2(k)}\mathbb{1}_{\{S_2(k)<S_1(k)\}}S_2(k) + \mathbb{1}_{\{S_2(k)\geq S_1(k)\}}S_1(k) \\ &= H_2(k+1)S_2(k) + H_1(k+1)S_1(k) \end{aligned}$$

4.3 Beispiele

4.3.1 Das N-Perioden CRR Modell

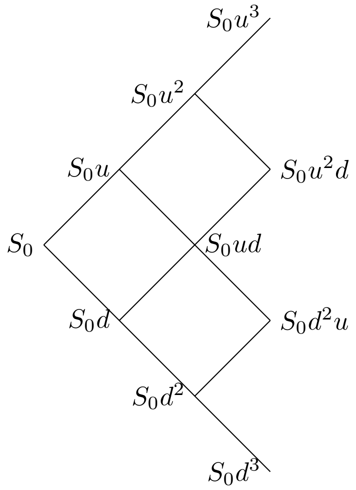
- N Perioden, $n = 0, ..., N$
- $S_0 > 0$ Anfangskurs
- Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$
- $(Z_n)_{n=1,...,N}$ mit Z_n zählt die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten n Perioden.
  Annahme: $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ mit iid ZV $Y_1, ..., Y_N$

$$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_i = 0).$$

- $(Y_i)_{i=1,...,N}$ adaptiert bzgl der Filtration.
- Sprunghöhen $0 < d < u$

- Preisprozess des risky assets der Form

$$S_n = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} \qquad \text{f.a. } n = 1, ..., N$$



$$\rightsquigarrow S_{n+1} = S_n u^{Y_{n+1}} d^{1-Y_{n+1}}$$

Bemerkung: $(S_n)_{n=0,...,N}$ ist ein geometrischer Random Walk, startend aus $S_0 > 0$.

Andere Darstellung:

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{mit } X_i = u^{Y_i} d^{1-Y_i}$$

-Numeraire Asset ist ein Geldmarktkonto β mit konstanter, periodischer Zinsrate $\varrho > -1$, d.h.:

$$\beta(n) = (1+\varrho)^n \qquad \text{f.a. } n = 0, ..., N$$

4.3.2 Mehrdimensionales CRR Modell

- l Aktien
- l Aktienpreisprozesse entsprechend dem einfachen CRR Modell

$$S_j(n) = S_j(0) u_j^{Z_j(n)} d_j^{n-Z_j(n)} \qquad n = 1, ..., N, j = 1, ..., l$$

- Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0,...,N}$
- $(Z_j(n))_{n=1,...,N}$ l-dimensionaler Random Walk mit $Z(n) = \sum_{i=1}^{n} Y(i)$
  $Y(i) = (Y_1(i), ..., Y_l(i))$ mit $\mathbb{P}(Y_j(i) = 1) = p_j = 1 - \mathbb{P}(Y_j(i) = 0)$, $Y(1), ..., Y(N)$ iid
- In einer Periode können die $Y_1(i), ..., Y_l(i)$ abhängig (von einander) sein.
- Numeraire Asset wie beim CRR Modell

$$\beta(n) = \prod_{i=1}^{n} (1+\varrho) = (1+\varrho)^n$$

4.3.3 Das verallgemeinerte CRR Modell (Markov-Prozess)

Idee: Ersetze den Random Walk (Z_n), der die Aufwärtssprünge zählt, durch eine zeitlich inhomogene Markov-Kette.
Genauer:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Wahrscheinlichkeitsraum
- Filtration $(\mathcal{F}_n)_{0,...,N}$
- Sei $(Z_n)_{n=0,...,N}$ ein **Markov-Prozess**, adaptiert bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ mit
  (i) $Z_0 = 0$

(ii) Übergangswahrscheinlichkeiten, d.h. Wahrscheinlichkeit, dass der Kurs in der $(n+1)$-ten Periode springt oder nicht, gegeben, dass er bisher schon k mal gesprungen ist

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k+1 | Z_n = k) = p_n(k) = 1 - \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k) \qquad \text{für alle } \; k = 0, ..., n$$

- Markov Eigenschaft:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n)$$

  insbesondere folgt daraus:

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k_n, Z_{n-1} = k_{n-1}, ..., Z_1 = k_1, Z_0 = 0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k_n)$$

- (Z_n) zählt die Anzahl der Aufwärtssprünge während der ersten n Perioden. Setze als Preisprozess für das risky asset

$$S(n) = S_0 \cdot u^{Z(n)} \cdot d^{n-Z(n)} \qquad \text{mit } 0 < d < u$$

- Für die Entwicklung des Geldmarkkontos wird angenommen, dass die Zinsrate in einer Periode von der bis dahin erfolgten Anzahl der Aufwärtssprünge abhängt, d.h.

$$\varrho(n) = r(n, Z_{n-1}) \qquad \text{für alle } n = 1, ..., N$$

  mit $r : \mathbb{N} \times \{0, ..., N\} \to (-1, \infty)$

- $\varrho(n)$ ist dann die zufällige Zinsrate in der n-ten Periode.
  $\varrho(n)$ ist $\mathcal{F}_{n-1}$ messbar, also vorhersehbar für alle $n = 1, ..., N$

4.4 Das diskontierte Finanzmarktmodell

Gegeben sei ein Modell entsprechend 4.1 mit $S = (S_1, ..., S_d)$ als Preisprozess für die risky assets und S_0 als Prozess für das Numeraire Asset.
Alle Preise sind hier im Geldmarktkonto (in Euro) notiert. Eine weitere Möglichkeit, Preise zu notieren, besteht darin, diese in Anzahl an Anteilen des Numeraire Assets anzugeben:

$$x \text{ Geldeinheiten zum Zeitpunkt } t \text{ entsprechen } \tfrac{x}{S_0(t)} \text{ Anteilen des Numeraire Assets}$$

Für den Fall, dass S_0 das Geldmarktkonto β ist, also $S_0(n) = \beta(n)$, ist dies der übliche Diskontierungsvorgang.
Dies drückt aus, wieviel Geld vom Zeitpunkt t heute wert ist:

$$x€ \text{ zum Zeitpunkt } t \text{ entsprechen } \tfrac{x}{\beta(t)} € \text{ heute}$$

Führt man diese 'Diskontierung' für die Basisfinanzgüter durch, erhält man ein Finanzmarktmodell, dessen Preise in Anteilen des Numeraire Assets notiert sind.
Definiere

$$S_j^\star(t) := \frac{S_j(t)}{S_0(t)} \qquad t = 0, ..., N, 1 \le j \le d$$

$S_j^\star$ ist dann der Preisprozess des j-ten risky assets, ausgedrückt in Anteilen am Numeraire Asset.
$(S_1^\star, ..., S_d^\star)$ ist dann das **abdiskontierte Finanzmarktmodell**.
Für eine Handelsstrategie (φ, H) ist der Wertprozess, in Anteilen des Numeraire Assets ausgedrückt, gegeben durch

$$V^\star(n) = \varphi(n) + \sum_{j=1}^{d} H_j(n) S_j^\star(n)$$

4.5 Charakterisierung der Selbstfinanzierung

Eine Handelsstrategie (φ, H) ist **selbstfinanzierend**, wenn sich ihre Vermögensentwicklung aus dem Anfangskapital und den Periodengewinnen bzw -verlusten ergibt.
Genauer: Für eine Handelsstrategie (φ, H) sind äquivalent:

(i) (φ, H) ist selbstfinanzierend

(ii)

$$V(n) = V(0) + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k)\Delta S_0(k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} H_j(k)\Delta S_j(k) \quad \text{für alle } n = 1, ..., N.$$

(iii)

$$V^\star(n) = V^\star(0) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d} H_j(k)\Delta S_j^\star(k) \text{ für alle } \ n = 1, ..., N.$$

Für einen stochastischen Prozess $(X(n))_n$ bezeichnet dabei

$$\Delta X(n) = X(n) - X(n-1)$$

den **Prozess der Periodenzuwächse**.

Beweis. Für jede Handelsstrategie (φ, H) gilt:

$$\begin{aligned} V(1) - V(0) &= \varphi(1)S_0(1) - \varphi(1)S_0(0) + < H(1), S(1) > - < H(1), S(0) > \\ &= \varphi(1)\Delta S_0(1) + < H(1), \Delta S(1) > . \end{aligned} \tag{28}$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \text{(ii) ist erfüllt} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta V(k) = \varphi(k)\Delta S_0(k) + < H(k), \Delta S(k) > \qquad \text{für alle } \ k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(k)S_0(k) + < H(k), S(k) > -\varphi(k-1)S_0(k-1) - < H(k-1), S(k-1) > \\ & \quad = \varphi(k)S_0(k) - \varphi(k)S_0(k-1) + < H(k), S(k) > - < H(k), S(k-1) > \qquad \text{für alle } \ k = 2, ..., N \\ &\overset{l=k-1}{\Leftrightarrow} \quad < H(l+1), S(l) > +\varphi(l+1)S_0(l) = < H(l), S(l) > +\varphi(l)S_0(l) \qquad \text{für alle } \ l = 1, ..., N-1 \\ &\Leftrightarrow \quad (\varphi, H) \text{ ist selbstfinanzierend} \end{aligned} \tag{29}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \text{(iii) ist erfüllt} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta V^\star(k) = < H(k), \Delta S^\star(k) > \qquad \text{für alle } \ k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(k) + < H(k), S(k) > \frac{1}{S_0(k)} - \varphi(k-1) - < H(k-1), S(k-1) > \frac{1}{S_0(k-1)} \\ & \quad = \frac{1}{S_0(k)} < H(k), S(k) > - \frac{1}{S_0(k-1)} < H(k), S(k-1) > \qquad \text{für alle } \ k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow \quad \varphi(k)S_0(k-1) + < H(k), S(k-1) > = \varphi(k-1)S_0(k-1) + < H(k-1), S(k-1) > \\ & \qquad \text{für alle } \ k = 2, ..., N \\ &\Leftrightarrow \quad (\varphi, H) \text{ ist selbstfinanzierend} \end{aligned} \tag{30}$$

□

Wichtig ist, dass ein Handel in den risky assets durch Aufbau einer geeigneten Position im Numeraire Asset zu einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie gemacht werden kann.

4.6 Satz zur Selbstfinanzierung

Zu jedem $\mathbb{R}^d$-wertigen vorhersehbaren Prozess H und jedem Anfangskapital V_0 existiert genau ein vorhersehbarer Prozess φ, so dass (φ, H) selbstfinanzierend ist und

$$V^\star(n) = V_0^\star + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^\star(k) > \qquad \text{für alle } \ n = 1, ..., N$$

Beweis. Wegen $V_0 = \varphi(1)S_0(0) + < H(1), S(0) >$ folgt

$$\varphi(1) = \frac{< H(1), S(0) > -V_0}{S_0(0)}$$

Bestimmung von $\varphi(n)$ für $n \geq 2$:
Wegen

$$V^\star(0) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), S^\star(k) > = V^\star(n) = \varphi(n) + < H(n), S^\star(n) >$$

setzt man

$$\varphi(n) = V^\star(n) - < H(n), S^\star(n) > = V_0^\star + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^\star(k) > - < H(n), S^\star(n) >$$

□

Bezeichne mit $\mathcal{H}$ die Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen vorhersehbaren stochastischen Prozessen.
Definiere den stochastischen Prozess $H \cdot S^\star$ durch

$$(H \cdot S^\star)(n) := \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^\star(k) > \quad \text{für alle} \quad n = 0, ..., N \text{ und } (H \cdot S^\star)(0) := 0$$

$(H \cdot S^\star)(n)$ ist die Summe der Periodengewinne bzgl $S^\star$ über die ersten n Perioden.
$H \cdot S^\star$ wird als diskreter stochastischer **Integralprozess** bezeichnet.

4.7 Arbitrage

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (φ, H) heißt **Arbitrage**, wenn für den zugehörigen Wertprozess V gilt

$$V_0 \leq 0, V_N \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(V_N - V_0 > 0) > 0$$

Ausgedrückt in Anteilen des Numeraire Assets ist dies äquivalent zu

$$V_0 \leq 0, V^\star(N) = \frac{V(N)}{S_0(N)} \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(V^\star(N) - V_0^\star > 0) > 0.$$

Da $V^\star(N) - V_0^\star = (H \cdot S^\star)(N)$ ist, gibt es eine Arbitragemöglichkeit genau dann, wenn es ein Anfangskapital $V_0 \leq 0$ und ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0^\star + (H \cdot S^\star)(N) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}((H \cdot S^\star)(N) > 0) > 0$$

4.7.1 Bemerkung

Existiert ein Arbitrage, so existiert auch ein Arbitrage zum Anfangskapital 0.

Beweis. Sei (φ, H) ein Arbitrage mit

$$V(0) = \varphi(1)S_0(0) + < H(1), S_0(0) >< 0$$

Dann ist

$$V^\star(N) = V^\star(0) + (H \cdot S^\star)(N) \geq 0$$

Zum Anfangskapital 0 existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (ψ, H) mit

$$V^\star_{(\psi,H)}(N) = 0 + (H \cdot S^\star)(N) \geq -V^\star(0) > 0$$

□

4.7.2 Folgerung

Es gibt ein Arbitrage genau dann, wenn es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit $(H \cdot S^\star)(N) \geq 0$ und $\mathbb{P}((H \cdot S^\star)(N) > 0) > 0$.
Gibt es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, die einen risikolosen Gewinn durch Handeln über N Perioden erzielt, so muss ein risikoloser Gewinn auch in nur einer Periode erzielbar sein. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes.

4.7.3 Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) Es existiert ein Arbitrage

(ii) Es gibt eine Periode n und einen $\mathcal{F}_{n-1}$-messbaren Zufallsvektor K mit $< K, \Delta S^\star(n) > \geq 0$ sowie $\mathbb{P}(< K, \Delta S^\star(n) > 0) > 0$.

Beweis. „$\Rightarrow$“:
Wir beweisen die Aussage per Induktion über N:
IA:
Sei $N = 1$. Es existiere eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (φ, H) für ein 1-Perioden Modell mit Wertprozess $V^\star$, sodass $V_0^\star \leq 0$, $V_1^\star \geq 0$ und $\Pr(V_1^\star > V_0^\star) > 0$.

Wir setzen $n = 1$ und $K = H(1)$ und demnach ist K $\mathcal{F}_0$-messbar. Es folgt aus den obigen Überlegungen

$$< K, \Delta S^\star(n) > = < H(1), \Delta S^\star(1) > = V^\star(1) - V^\star(0)$$

und somit folgen $< K, \Delta S^\star(n) > \geq 0$ und $\mathbb{P}(< K, \Delta S^\star(n) >> 0) > 0$ direkt aus der Definition eines Arbitrage.

IS:

O.B.d.A. sei nun $V_0 = 0$: Ein Arbitrage kann durch Investition ins Numeraire immer in ein Arbitrage mit Startkapitel 0 abgewandelt werden.

Es existiere eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (φ, H) für ein $(N+1)$-Perioden Modell. Wir unterscheiden 3 Fälle.

1. $(H \cdot S^\star)(N) \geq 0$ und $\mathbb{P}((H \cdot S^\star)(N) > 0) > 0$

   Hier kann direkt die Induktionsvoraussetzung angewandt werde, weil ein Arbitrage in dem auf die ersten N Perioden eingeschränkten Modell existiert.

2. $(H \cdot S^\star)(N) = V_N = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

   Die Arbitrage tritt in der letzten Periode auf. Wir setzen $n = N+1$ und $K = H(N+1)$. Dann ist K $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_{n-1}$-messbar. Es folgt

$$\begin{aligned} < K, \Delta S^\star(n) > &= < H(N+1), \Delta S^\star(N+1) > \\ &= V^\star(N+1) - V^\star(N) = V^\star(N+1) \geq 0 \end{aligned}$$

   und dies ist mit positiver Wahrscheinlichkeit strikt positiv, weil (φ, H) ein Arbitrage ist.

3. $\mathbb{P}((H \cdot S^\star)(N) < 0) > 0$

   Es kann wieder eine Arbitrage in der letzten Periode erzeugt werden. Wir setzen $n = N+1$, $A = \{V_N < 0\} = \{(H \cdot S^\star)(N) < 0\} \in \mathcal{F}_N = \mathcal{F}_{n-1}$ und $K = H(N+1)1_A$ und zeigen, dass damit die Bedingungen erfüllt werden. Der Indikator lässt sich ausklammern und mit obigen Überlegungen folgt dann

$$< K, \Delta S^\star(n) > = 1_A \left(V^\star(N+1) - V^\star(N)\right) \geq 0.$$

   Die Abschätzung ≥ 0 folgt aus der Wahl von A und der Bedingung des Arbitrage. Außerdem folgt $\mathbb{P}(< K, \Delta S^\star(n) >> 0) > 0$ aus $\mathbb{P}(A) > 0$.

„$\Leftarrow$ “:

Es existiere ein $n \in \{1, \ldots, N\}$ und ein d-dimensionaler und $\mathcal{F}_{n-1}$-messbarer Vektor K mit $< K, \Delta S^\star(n) > \geq 0$ und $\mathbb{P}(< K, \Delta S^\star(n) >> 0) > 0$. Es soll ein Arbitrage angegeben werden und dafür warten wir bis zum Zeitpunkt n, investieren dann selbstfinanzierend gemäß K für genau eine Periode mittels einer short-Position im Numeraire.

Wir definieren eine Handelsstrategie über

$$\begin{aligned} &(\varphi(k), H(k)) = 0 && \text{für } k = 1, \ldots, n-1 \\ &(\varphi(n), H(n)) = (-< K, S^\star(n-1) >, K) && \\ &(\varphi(k), H(k)) = (-< K, S^\star(n-1) > + < K, S^\star(n) >, 0, \ldots, 0) && \text{für } k = n+1, \ldots, N \end{aligned}$$

In den Zeitpunkten $k = 1, \ldots, n-2$ und $k = n+1, \ldots, N$ ist die Selbstfinanzierung trivial, da die Strategie konstant ist. Für $k = n-1$, also $k+1 = n$, ist

$$V(n-1) = 0 = -< K, S^\star(n-1) > S_0(n-1) + < K, S(n-1) > = \varphi(n) + < H(n), S(n-1) >$$

und für $k = n$ gilt

$$\begin{aligned} V(n) &= -< K, S^\star(n-1) > S_0(n) + < K, S(n) > \\ &= -< K, S^\star(n-1) > S_0(n) + < K, S^\star(n) > S_0(n) = \varphi(n+1) S_0(n) \end{aligned}$$

und daher ist jeweils die Bedingung für eine selbstfinanzierende Handelsstrategie erfüllt. Die Strategie bildet ein Arbitrage, weil $V_0 = 0$ und

$$\begin{aligned} V(N) &= \left(-< K, S^\star(n-1) > + < K, S^\star(n) >\right) S_0(N) + 0 \\ &= < K, \Delta S^\star(n) > S_0(N) \geq 0 \end{aligned}$$

und dies nach Voraussetzung mit positiver Wahrscheinlichkeit strikt positiv ist. Für das Numeraire muss immer $S_0(k) > 0$ gelten.

□

4.8 Beispiele

4.8.1 Satz

Das CRR Modell ist genau dann arbitragefrei, wenn $d < 1 + \varrho < u$ gilt.

Beweis. '$\Rightarrow$': per Kontraposition

1. Fall: $1 + \varrho \le d < u$: In diesem Fall ist die Aktie immer besser als das Bankkonto. Die buy and hold Strategie für die Aktie liefert dann ein Arbitrage.
   Setze $H = 1$. Dann existiert zum Anfangskapital 0 eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (φ, H) mit Wertprozess
   $$V^\star(n) = 0 + (H \cdot S^\star)(n) \qquad \text{für alle} \quad n = 0, ..., N$$
   also
   $$V^\star(N) = \sum_{k=1}^{n} H(k)\Delta S^\star(k) = S^\star(N) - S^\star(0) \ge S(0)\frac{d^N}{(1+\varrho)^N} - S(0) \ge 0$$
   und
   $$\mathbb{P}(V^\star(N) > 0) > 0,$$
   da ein Aufwärtssprung mit positiver Wahrscheinlichkeit vorkommt.

2. Fall: $d < u \le 1 + \varrho$: Hier ist das Bankkonto immer besser als die Aktie und man kann durch eine short selling Strategie der Aktie ein Arbitrage konstruieren.
   Setze also $H(n) = -1$ für alle $n = 1, ..., N$.
   Dann existiert zum Anfangskapital 0 eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (φ, H) mit Wertprozess
   $$V^\star(n) = 0 + (H \cdot S^\star)(n)$$
   $$\begin{aligned} \text{also } V^\star(N) = (H \cdot S^\star)(N) \quad &= -(S^\star(N) - S(0)) \\ &= S(0) - S^\star(N) \\ &\ge S(0) - S(0)\tfrac{u^N}{(1+\varrho)^N} \\ &\ge S(0) - S(0) = 0 \end{aligned}$$
   und
   $$\mathbb{P}(V^\star(N) - V(0) > 0) > 0,$$
   da ein Abwärtssprung mit positiver Wahrscheinlichkeit vorkommt.

'$\Leftarrow$': per Kontraposition
Sei das Modell nicht arbitragefrei. Wegen Satz 4.7.3 gibt es eine Periode n und ein $\mathcal{F}_{n-1}$-messbares K mit $K\Delta S^\star(n) \ge 0$ und $\mathbb{P}(K\Delta S^\star(n) > 0) > 0$.

Also auch
$$0 \le K\frac{\Delta S^\star(n)}{S^\star(n-1)} = K\left(\frac{S^\star(n)}{S^\star(n-1)} - 1\right) = K\left(\frac{1}{1+\varrho}u^{X_n}d^{1-X_n} - 1\right).$$
Erinnerung:
$$S(n) = u^{Z_n}d^{n-Z_n}S(0)$$
mit $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i, \mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$ und
$$S^\star(n) = \frac{S(n)}{(1+\varrho)^n}, \beta(n) = S_0(n) = (1+\varrho)^n.$$

Setze
$$R(n) := \frac{1}{1+\varrho}u^{X_n}d^{1-X_n} - 1 = \frac{1}{1+\varrho}\frac{S(n)}{S(n-1} - 1.$$

Annahme: $d < 1 + \rho < u$ Dann ist

$$\begin{aligned} 1 \quad &= \quad \mathbb{P}(KR(n) \ge 0) = \mathbb{P}(K > 0, R(n) > 0) + \mathbb{P}(K < 0, R(n) < 0) + \mathbb{P}(K = 0) \\ &= \quad \mathbb{P}(K > 0)\mathbb{P}(R(n) > 0) + \mathbb{P}(K < 0)\mathbb{P}(R(n) < 0) + \mathbb{P}(K = 0) \end{aligned}$$

Mit $q := \mathbb{P}(K > 0), p = \mathbb{P}(R(n) > 0), r := \mathbb{P}(K < 0)$ folgt also

$$1 = q \cdot p + r(1-p) + 1 - (q+r)$$

Aus $\mathbb{P}(K = 0) < 1$ folgt $q > 0$ oder $r > 0$ und man erhält einen Widerspruch, da

$$1 = q \cdot p + r(1-p) + 1 - (q+r) < q + r + 1 - (q+r) = 1.$$

□

Ziel: No-Arbitrage Theorem
Charakterisierung von arbitragfreien Märkten im probabilistischen Sinne.

4.9 Äquivalente Maße

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
$\mathcal{N}_{\mathbb{P}} := \{N \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(N) = 0\}$ ist das System der **$\mathbb{P}$-Nullmengen**.
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ ist **absolut-stetig** bzgl. $\mathbb{P}$, wenn

$$\mathbb{Q} << \mathbb{P} :\Leftrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{P}} \subseteq \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$$

$\mathbb{Q}$ heißt **äquivalent** zu $\mathbb{P} :\Leftrightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{P}} = \mathcal{N}_{\mathbb{Q}}$.
Ist $L \geq 0$ eine ZV mit $\mathbb{E}(L) = \int L d\mathbb{P} = 1$, so wird durch

$$\mathbb{Q}(A) := \int_A L d\mathbb{P} \qquad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{F}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ definiert mit $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$.
Dann ist L die **$\mathbb{P}$-Dichte** von $\mathbb{Q}$.
Schreibweise: $L = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.
Gilt $\mathbb{P}(L > 0) = 1$ und $L = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, so ist

$$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} \text{ und } \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{L}$$

Weiter: Sind L und L' Dichten von $\mathbb{Q}$ bzgl $\mathbb{P}$, so gilt

$$\mathbb{P}(L = L') = 1$$

Für jede ZV X gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \int X d\mathbb{Q} = \int X L d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(LX)$$

sofern obige Erwartungswerte existieren.

Zusammenhang zur Modellierung von Finanzmärkten:

- Ein Finanzmarktmodell wird im Wesentlichen bestimmt durch die zufällige Entwicklung der Basisfinanzgüter.
- Dabei ist nicht entscheidend, welche Verteilung ein Akteur im Finanzmarkt postuliert.
- Zwei Akteure sind im gleichen Finanzmarkt, wenn die beiden postulierten Verteilungen für die Basisfinanzgüter die gleichen Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit eintreten lassen können. Das bedeutet, dass die Verteilungen zueinander äquivalent sind.
- Ein Übergang zu einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß ändert den Finanzmarkt nicht, wohl aber die Verteilung der Basisfinanzgüter.
- Ein endliches Finanzmarktmodell, d.h. $|\Omega| < \infty$, wird nicht verändert, wenn die Menge der Elementarereignisse, die eine positive Wahrscheinlichkeit besitzen, unverändert bleibt.

4.10 Äquivalentes Martingalmaß

Gegeben sei ein Finanzmarktmodell mit Preisprozessen $S = (S_1, ..., S_d)$ der risky assets und Informationsverlauf $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$ über N Perioden. Sei S_0 das Numeraire Asset und

$$S_j^\star := \frac{S_j}{S_0}$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt **äquivalentes Martingalmaß**, wenn gilt:

(i) $\mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}$

(ii) $(S_j^\star(n))_{n=0,...,N}$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal für alle $j = 1, ..., d$

Kurz: Bzgl $\mathbb{P}^\star$ ist der Finanzmarkt fair.
Ziel: Arbitragefreier Markt $\Leftrightarrow$ Existenz eines äquivalenten Martingalmaß
'$\Leftarrow$': leicht
'$\Rightarrow$': schwieriger, mathematisches Argument ist der

4.11 Separationssatz von Minkouski

Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ nichtleere konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = \varnothing$.
Seien $\mathcal{C}_1$ abgeschlossen und $\mathcal{C}_2$ kompakt.
Dann gibt es eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und reelle Zahlen $\beta_1 < \beta_2$ mit

$$\varphi(x) \le \beta_1 < \beta_2 \le \varphi(y) \qquad \text{für alle } \; x \in \mathcal{C}_2, y \in \mathcal{C}_1.$$

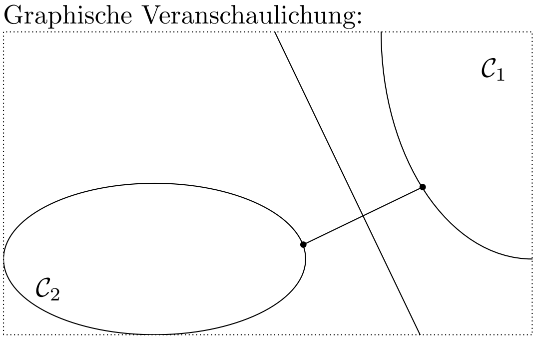
Es gilt also

$$\sup_{x \in \mathcal{C}_2} \varphi(x) < \inf_{y \in \mathcal{C}_1} \varphi(y).$$

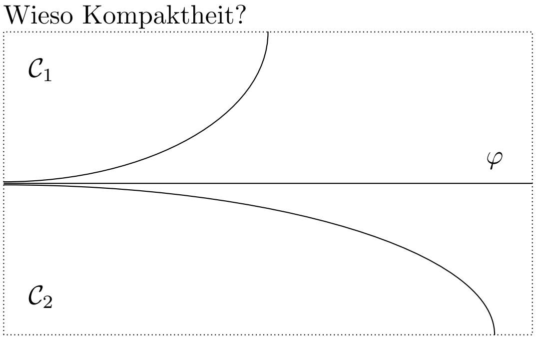
Durch Übergang zu $-\varphi$ findet man auch eine lineare Abbildung ψ mit

$$\sup_{y \in \mathcal{C}_1} \psi(y) < \inf_{x \in \mathcal{C}_2} \psi(x).$$

Graphische Veranschaulichung:



Wieso Kompaktheit?



$\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ lassen sich nicht strikt trennen.

Beweis. Sei für $x \in \mathcal{C}_2$

$$d(x) = \inf\{||x - y||^2 : y \in \mathcal{C}_1\}.$$

Der minimale quadratische Abstand eines Punktes $x \in \mathcal{C}_2$ zur Menge $\mathcal{C}_1$ wird also durch $d(x)$ gemessen. Wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{C}_1$ und der Disjunktheit von $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ ist $d(x) > 0$ für alle $x \in \mathcal{C}_2$. Die Abbildung $x \mapsto d(x)$ ist stetig und nimmt auf dem Kompaktum $\mathcal{C}_2$ ihr Minimum an. Es gibt also ein $x_0 \in \mathcal{C}_2$ mit

$$d(x) \ge d(x_0)$$

für alle $x \in \mathcal{C}_2$.
Wähle einen Radius r so groß, dass

$$d(x_0) = \inf_{y \in \mathcal{C}_1 \cap K(x_0;r)} ||x_0 - y||^2.$$

Da $\mathcal{C}_1 \cap K(x_0;r)$ kompakt ist, existiert ein $y_0 \in \mathcal{C}_1$ mit

$$d(x_0) = ||x_0 - y_0||^2.$$

Also gilt für alle $x \in \mathcal{C}_2, y \in \mathcal{C}_1$

$$||x - y||^2 \geq ||x_0 - y_0||^2 > 0$$

Setze

$$\eta = y_0 - x_0.$$

Wegen der Konvexität ist für $x \in \mathcal{C}_2$ auch $x_0 + \alpha(x - x_0) \in \mathcal{C}_2$ für alle $\alpha \in [0,1]$. Also gilt

$$||x_0 - y_0||^2 + 2\alpha < x - x_0, x_0 - y_0 > +\alpha^2 ||x - x_0||^2 = ||x_0 + \alpha(x - x_0) - y_0||^2 \geq ||x_0 - y_0||^2,$$

was

$$2\alpha < x - x_0, x_0 - y_0 > +\alpha^2 ||x - x_0||^2 \geq 0$$

impliziert. Für $\alpha \downarrow 0$ erhält man

$$< x - x_0, x_0 - y_0 > \geq 0$$

und damit

$$< x, \eta > \leq < x_0, \eta > .$$

Für $y \in \mathcal{C}_1$ ist wegen der Konvexität $y_0 + \alpha(y - y_0) \in \mathcal{C}_1$ für alle $\alpha \in [0,1]$. Also gilt

$$||x_0 - y_0||^2 + 2\alpha < y - y_0, y_0 - x_0 > +\alpha^2 ||y - y_0||^2 = ||y_0 + \alpha(y - y_0) - x_0||^2 \geq ||x_0 - y_0||^2.$$

Für $\alpha \downarrow 0$ erhält man analog

$$< y - y_0, \eta > \geq 0$$

und damit

$$< y, \eta > \geq < y_0, \eta > .$$

Insgesamt folgt also

$$\sup_{x \in \mathcal{C}_2} < x, \eta > \leq < x_0, \eta >$$

und

$$\inf_{y \in \mathcal{C}_1} < y, \eta > \geq < y_0, \eta > .$$

Wegen

$$0 < ||y_0 - x_0||^2 = < y_0 - x_0, y_0 - x_0 > = < y_0, \eta > - < x_0, \eta >$$

folgt die Behauptung, denn durch $z \mapsto < z, \eta >$ wird die zum Vektor η gehörende lineare Abbildung φ definiert.

□

Zur Bestimmung der zu trennenden konvexen Mengen wird die Arbitragefreiheit umformuliert:

4.12 Umformulierung der Arbitragefreiheit

- Finanzmarktmodell über N Perioden mit $S = (S_1, ..., S_d)$ als Preisprozess der risky asstes
- Mit $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sei die Menge der messbaren Abbildungen von Ω nach $\mathbb{R}$ bezeichnet.
- $\mathcal{G}^\star := \{(H \cdot S^\star)(N) : H \in \mathcal{H}\}$ ist die Menge der möglichen Gewinne, notiert in Anteilen des Numeraire Assets, die beim Handel entsprechend einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie erzielt werden können.
  Dabei ist $\mathcal{H}$ die Menge der vorhersehbaren $\mathbb{R}^d$-wertigen Prozesse.
- Der Markt ist **arbitragefrei**, wenn

  $$\mathcal{G}^\star \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$$

  wobei $L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{X \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : X \geq 0\}$.
- $\mathcal{G}^\star$ ist ein Vektorraum

- $\mathcal{K}^\star := \{C^\star \in L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : \exists G^\star \in \mathcal{G}^\star \text{ mit } G^\star \geq C^\star\}$
- $\mathcal{K}^\star$ ist der Kegel von Elementen aus $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, die unterhalb von $\mathcal{G}^\star$ liegen und kann interpretiert werden als diejenigen abdiskontierten terminalen Auszahlungen, die durch das abdiskontierte Vermögen einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie zum Anfangskapital 0 übertreffbar sind.
  Es gilt:
  $$\mathcal{G}^\star \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{K}^\star \cap L^0_+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \{0\}$$
  Weiter:
  $$\mathcal{K}^\star \cap (-\mathcal{K}^\star) = \mathcal{G}^\star$$
  Mittels $\mathcal{G}^\star$ und $\mathcal{K}^\star$ können äquivalente Martingalmaße charakterisiert werden.

4.13 Charakterisierung eines äquivalenten Martingalmaßes

Im folgenden werden wir die Endlichkeit des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes Ω annehmen. Es gibt also nur endlich viele Elemente in Ω und jedes dieser Elemente wird mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen. Dies macht durchaus Sinn, da in Modellen mit diskreter Zeit in der Regel eine Replikation von Derivaten nur in Modellen mit endlichem Ω durchführbar ist. Mathematisch bedeutet dies, dass alle Funktionen messbar sind und die Integrierbarkeit von auftretenden Zufallsvariablen immer gegeben ist. Weiter kann der Separationssatz von Minkowski für endlich dimensionale Räume angewendet werden und man muss nicht auf den allgemeinen Trennungssatz von Hahn-Banach zurückgreifen.

Sei $|\Omega| < \infty$. Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ sind äquivalent

i) $\mathbb{P}^\star$ ist ein Martingalmaß, d.h. $S_j^\star$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal für alle $j = 1, ..., d$.

ii) $\mathbb{E}^\star C^\star = 0 \qquad$ für alle $C^\star \in \mathcal{G}^\star$

iii) $\mathbb{E}^\star K^\star \leq 0 \qquad$ für alle $K^\star \in \mathcal{K}^\star$

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$
Für $H \in \mathcal{H}$ ist $V^\star(n) = (H \cdot S^\star)(n), n = 0, ..., N$ ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star(\Delta V^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) &= \mathbb{E}^\star(V^\star(k) - V^\star(k-1)|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \mathbb{E}^\star(< H(k), \Delta S^\star(k) > |\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \mathbb{E}^\star(\sum_{j=1}^d H_j(k)\Delta S_j^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \sum_{j=1}^d \mathbb{E}^\star(H_j(k)\Delta S_j^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) \\
&\overset{H_j \text{ vorh.}}{=} \sum_{j=1}^d H_j(k) \underbrace{\mathbb{E}^\star(\Delta S_j^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1})}_{=0, \text{ da } S_j \text{ Martingal}} = 0 \qquad \text{für alle } \ k = 1, ..., N
\end{aligned}$$

Für $C^\star = (H \cdot S^\star)(N)$ folgt also

$$\mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{E}^\star(H \cdot S^\star)(N) = \mathbb{E}^\star V^\star(N) \overset{\text{Martingal}}{=} \mathbb{E}^\star V^\star(0) = 0$$

Beachte, dass per Definitionem $V^\star(0) = 0$ gilt.

$(ii) \Rightarrow (i)$
Zeige die Martingaleigenschaft von $S_j^\star$ bzgl $\mathbb{P}^\star$ für alle $j = 1, ..., d$.

$$\begin{aligned}
&\text{z.z. } \mathbb{E}^\star(S_j^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) = S_j^\star(k-1) \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}^\star(\Delta S_j^\star(k)|\mathcal{F}_{k-1}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}^\star \mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k) = 0 \qquad \text{für alle } \ A \in \mathcal{F}_{k-1}
\end{aligned}$$

$\mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k)$ ist der Gewinn der Handelstrategie, der in der k-ten Periode long in S_j geht, wenn A eintritt, d.h.

$$H_j(k) = \mathbb{1}_A, H_j(n) = 0 \text{ sonst}, H_i \equiv 0 \qquad \text{für alle} \quad i \neq j$$

Der Gewinn dieser Handelsstrategie ist gegeben durch

$$(H \cdot S^\star)(N) = H_j(k) \Delta S_j^\star(k) = \mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k).$$

Wegen (ii) folgt $\mathbb{E}^\star \mathbb{1}_A \Delta S_j^\star(k) = 0$ für jedes $A \in \mathcal{F}_{k-1}$.
Also ist $S_j^\star$ ein $\mathbb{P}^\star$ Martingal.

$(ii) \Rightarrow (iii)$
klar wegen der Monotonie des Erwartungswertes

$(iii) \Rightarrow (ii)$
Einerseits ist $C^\star \in \mathcal{G}^\star \Rightarrow C^\star \in \mathcal{K}^\star \Rightarrow \mathbb{E}^\star C^\star \leq 0$
Andererseits ist $\mathcal{G}^\star$ ein Vektorraum, also $\Rightarrow -C^\star \in \mathcal{G}^\star \Rightarrow -C^\star \in \mathcal{K}^\star$
$\Rightarrow \mathbb{E}^\star(-C^\star) \leq 0 \Rightarrow \mathbb{E}^\star C^\star \geq 0$

□

Zusammen mit dem Separationssatz kann man das No-Arbitrage Theorem beweisen.

4.14 1. Fundamentalsatz der Preistheorie: Das No Arbitrage Theorem

Gegeben sei ein Finanzmarkt S über einem endlichen Ω mit Informationsverlauf $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$ bzgl. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann sind äquivalent:

(i) Der Markt ist arbitragefrei, d.h. $\mathcal{G}^\star \cap L_+ = \{0\}$

(ii) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$.

Beweis. $(ii) \Rightarrow (i)$
Sei $C^\star \in \mathcal{G}^\star \cap L^+$. Dann gilt nach Satz 4.13: $C^\star \geq 0$ und $\mathbb{E}^\star C^\star = 0$.
$\Rightarrow C^\star = 0 \qquad \mathbb{P}^\star\text{-f.s.}$
$\overset{\mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}}{\Rightarrow} C^\star = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$

$(i) \Rightarrow (ii)$
O.E.d.A. $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \qquad$ für alle $\omega \in \Omega$
$\mathcal{G}^\star$ ist als Teilraum von $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ konvex und abgeschlossen. Die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F})$ kann mit der Menge

$$\mathcal{P} = \{Q : \Omega \to \mathbb{R} : Q(\omega) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega : \sum_{\omega \in \Omega} Q(\omega) = 1\}$$

identifiziert werden, die konvex und kompakt ist.
Wegen (i) ist $\mathcal{G}^\star \cap \mathcal{P} = \varnothing$.
Nach dem Separationssatz existiert eine lineare Abbildung

$$\varphi : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$$

mit $\sup_{C^\star \in \mathcal{G}^\star} \varphi(C^\star) < \inf_{Q \in \mathcal{P}} \varphi(Q)$.
Da der Dualraum von $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ durch $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gegeben ist, kann φ als Element aus $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ aufgefasst werden mittels

$$\varphi(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \varphi(\omega).$$

Da $\mathcal{G}^\star$ ein Teilraum ist und $\varphi(C^\star) \leq \alpha$ für alle $C^\star \in \mathcal{G}^\star$ folgt $\varphi(C^\star) = 0$ für alle $C^\star \in \mathcal{G}^\star$.
Für $e_\omega = \mathbb{1}_{\{\omega\}}$ gilt $e_\omega \in \mathcal{P}$ und

$$0 < \varphi(e_\omega) = \varphi(\omega)$$

Da dies für alle $\omega \in \Omega$ gilt, kann man ein $\mathbb{P}^\star$ durch

$$\mathbb{P}^\star(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \varphi(\omega')} \qquad \text{für alle} \quad \omega \in \Omega$$

definieren.
Wegen $\mathbb{P}^\star(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt $\mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}$
Wegen

$$\mathbb{E}^\star C^\star = \sum_{\omega\in\Omega} C^\star(\omega)\mathbb{P}^\star(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} C^\star(\omega)\frac{\varphi(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega}\varphi(\omega')} = \frac{1}{\sum_{\omega'\in\Omega}\varphi(\omega')}\underbrace{\varphi(C^\star)}_{=0} = 0$$

liefert Satz 4.13, dass $\mathbb{P}^\star$ ein Martingalmaß ist.

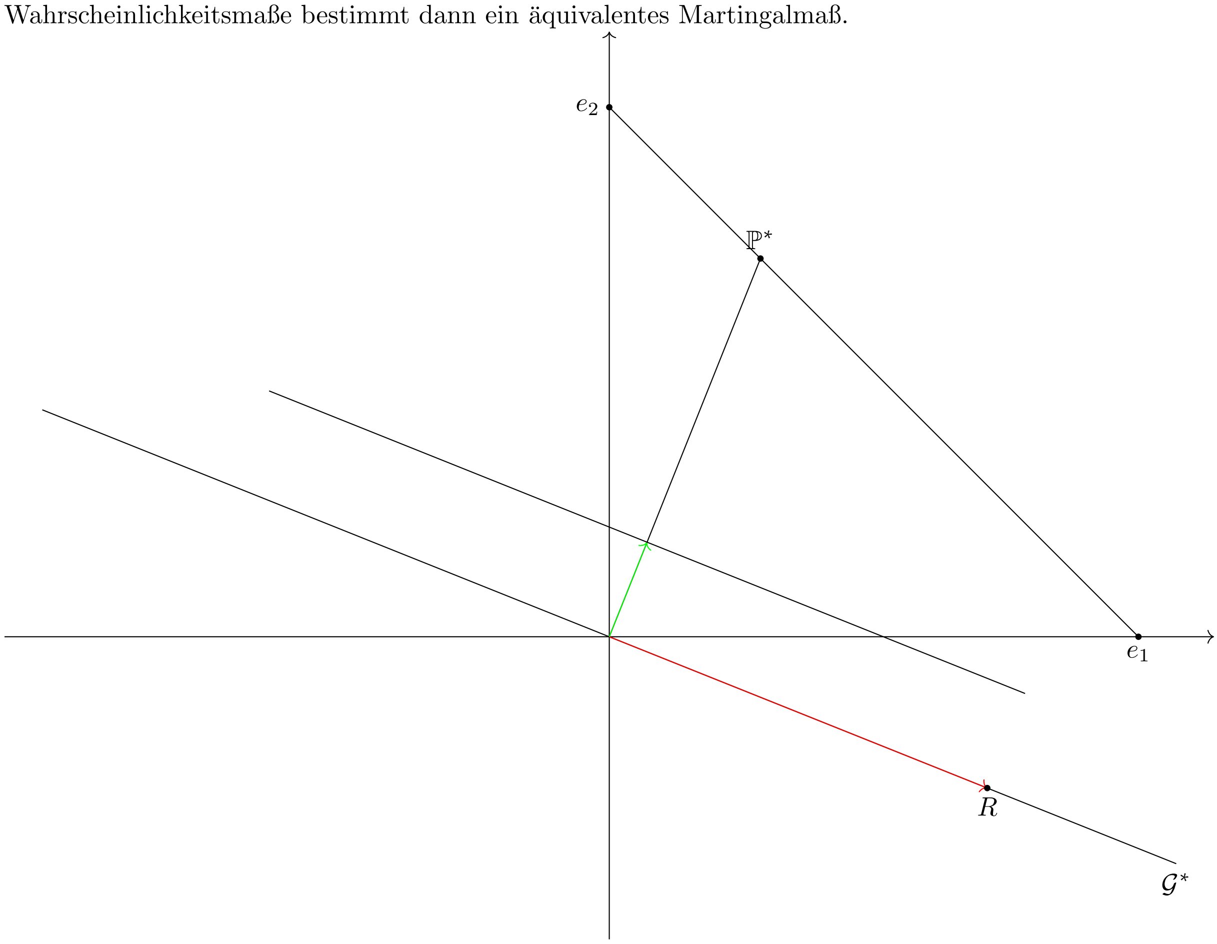
□

4.15 Veranschaulichung im Binomialmodell

Wir betrachten ein Binomialmodell über eine Periode mit einem Anfangsaktienkurs $S(0) = 1$. Dann sind $d < 1 + \rho < u$ weitere Parameter des Modells. Es gilt

$$\Delta S^*(1) = \frac{1}{1+\rho}(u,d) - (1,1) =: R \quad .$$

Also ist $\mathcal{G}^*$ der von R erzeugte Teilraum im $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{K}^*$ ist der Halbraum der zweidimensionalen Vektoren unterhalb von $\mathcal{G}^*$. Die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße entspricht der Verbindungsgeraden der Punkte $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$. Diese kompakte Menge kann durch eine Gerade parallel zum Erzeugnis von R von $\mathcal{G}^*$ bzw. auch $\mathcal{K}^*$ getrennt werden. Der Schnittpunkt der orthogonalen Geraden mit der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße bestimmt dann ein äquivalentes Martingalmaß.



4.16 Bestimmung von äquivalenten Martingalmaßen

4.16.1 CRR Modell

- N Perioden
- $Z_n := \sum_{i=1}^N X_i$, für $X_1, ..., X_N$ iid mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0)$

- $S(n) := S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N := \sigma(X_1, ..., X_N) = \sigma(Z_1, ..., Z_N)$
- $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, ..., X_n) = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$ für $n \leq N$.
- $\beta(n) = \prod_{i=1}^n (1+\varrho), \varrho > -1$
- $S^\star(n) = \frac{S(n)}{\beta(n)} = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} \frac{1}{(1+\varrho)^n} = S_0 \prod_{i=1}^n \frac{u^{X_i} d^{1-X_i}}{1+\varrho}$ ist ein geometrischer Random Walk.
- $S^\star$ ist ein Martingal genau dann, wenn

$$\mathbb{E}^\star \frac{u^{X_i} d^{1-X_i}}{1+\varrho} = 1 \Leftrightarrow up^\star + d(1-p^\star) = 1+\varrho \Leftrightarrow p^\star = \frac{(1+\varrho)-d}{u-d} \in (0,1) \Leftrightarrow d < 1+\varrho < u$$

Durch $p \in (0,1)$ werden alle äquivalenten CRR Modelle parametrisiert und genau für den Parameter $p^\star = \frac{(1+\varrho)-d}{u-d}$ ist das Modell arbitragefrei/risikoneutral. Dies bedeutet, dass $S^\star$ ein Martingal ist bzgl. dem Parameter $p^\star$. Im folgenden wird gezeigt, wie ein Wechsel zu einem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ durchgeführt werden kann. Hierzu wird die $\mathbb{P}$-Dichte bestimmt mit Hilfe der obigen Überlegungen.
Für alle $x \in \{0,1\}^N$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = x_1, ..., X_N = x_N) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i) \\
&= p^{\sum_{i=1}^N x_i} (1-p)^{N-\sum_{i=1}^N x_i} \\
&= p^{z_N}(1-p)^{N-z_N} \qquad \text{mit } z_N = \sum_{i=1}^N x_i
\end{aligned}$$

Für das gesuchte $\mathbb{P}^\star$ muss gelten:

$$\mathbb{P}^\star(X_1 = x_1, ..., X_N = x_N) = (p^\star)^{z_N}(1-p^\star)^{N-z_N} \qquad \text{mit } p^\star = \frac{1+\varrho-d}{u-d}$$

Wegen $\mathbb{P}^\star(X=x) = \frac{\mathbb{P}^\star(X=x)}{\mathbb{P}(X=x)} \mathbb{P}(X=x)$ für alle $x \in \{0,1\}^N$ ist die Dichte von $(\mathbb{P}^\star)^X$ bzgl $\mathbb{P}^X$ gegeben durch

$$l(x) = \frac{(p^\star)^{z_N}(1-p^\star)^{N-z_N}}{p^{z_N}(1-p)^{N-z_N}}$$

Hieraus erhält man durch

$$\begin{aligned}
L: \quad \Omega \quad &\longrightarrow \quad (0,\infty) \\
\omega \quad &\mapsto \quad l(\underbrace{X_1(\omega), ..., X_N(\omega)}_{X(\omega)}) = \frac{(p^\star)^{Z_N(\omega)}(1-p^\star)^{N-Z_N(\omega)}}{p^{Z_N(\omega)}(1-p)^{N-Z_N(\omega)}}
\end{aligned}$$

die Dichte von $\mathbb{P}^\star$ bezüglich $\mathbb{P}$.
Definiere also $\mathbb{P}^\star$ mittels

$$\mathbb{P}^\star(A) = \int_A L d\mathbb{P} \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$$

Dann ist $\mathbb{P}^\star$ äquivalent zu $\mathbb{P}$, da $L > 0$ $\mathbb{P}$-f.s. und es gilt

$$\mathbb{P}^\star(X=x) = \int_{\{X=x\}} L d\mathbb{P} = \left(\frac{p^\star}{p}\right)^{\sum_{i=1}^N x_i} \left(\frac{1-p^\star}{1-p}\right)^{N-\sum_{i=1}^N x_i} \mathbb{P}(X=x) = (p^\star)^{\sum_{i=1}^N x_i}(1-p^\star)^{N-\sum_{i=1}^N x_i}$$

Bezüglich des so definierten Maßes $\mathbb{P}^\star$ ist

$$S(n) = S_0 u^{Z_n} d^{n-Z_n} \qquad n = 0, ..., N$$

ein geometrischer Random Walk mit $\mathbb{E}^\star S(1) = S_0(1+\varrho)$.
Daher ist $(S^\star(n))$ ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal und $\mathbb{P}^\star$ damit ein äquivalentes Martingalmaß.

4.16.2 Trinomialmodell

Im Gegensatz zum Binomialmodell kann die Aktie im Trinomialmodell in jeder Periode drei mögliche Sprünge vollziehen. Modellieren kann man die Aktienpreisentwicklung durch einen stochastischen Prozess $S(n)_{n=0,\cdots N}$ mit

$$S_n = S_0 u^{Z_1(n)} d^{Z_2(n)} m^{n-(Z_1(n)+Z_2(n))}$$

für alle $n = 0 \cdots N$ mit

$$0 < d < m < u.$$

Dabei zählen die Prozesse Z_1, Z_2 die Anzahl der Aufwärtssprünge und die Anzahl der Abwärtssprünge. Diese sind definiert mittels

$$Z_1(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k = u\}} \quad , \quad Z_2(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k = d\}}$$

für alle $n = 0, \cdots, N$. Gefordert wird, dass alle $X_1, \cdots, X_N$ unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen sind mit

$$\mathbb{P}(X_1 = u) = p_1, \mathbb{P}(X_1 = m) = p_2, \mathbb{P}(X_3 = d) = (1 - (p_1 + p_2)).$$

Die Werte p_1 und p_2 kann man als Parameter verstehen, die die Verteilung des Aktienpreisprozesses festlegen. Weiter wird wie im Binomialmodell ein Geldmarktkonto mit periodischer Zinsrate ρ als Numeraire Asset betrachtet. Es ist also

$$\beta(n) = (1 + \rho)^n, \quad n = 0, \cdots, N.$$

Im Falle $1 + \rho \leq d$ oder $u \leq 1 + \rho$ ist die Aktie immer besser als das Geldmarktkonto oder umgekehrt. Deshalb ist mit einer analogen Argumentation wie im Binomialmodell das Modell nicht arbitragefrei. Im Falle

$$d < 1 + \rho < u$$

kann ein äquivalentes Martingalmaß konstruiert werden. Hierzu bestimmen wir Parameter p_1^*, p_2^*, so dass unter dem dazugehörigen Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ der Aktienpreisprozess ein Martingal wird. Wir gehen also davon aus, dass $X_1, \cdots, X_N$ iid sind unter $\mathbb{P}^*$ mit

$$\mathbb{P}^*(X_1 = u) = p_1^*, \mathbb{P}(X_1 = m) = p_2^*, \mathbb{P}(X_3 = d) = (1 - (p_1^* + p_2^*)).$$

Dann ist S ein geometrischer Random-Walk und damit ein Martingal genau dann, wenn

$$p_1^* u + p_2^* m + (1 - (p_1^* + p_2^*))d = 1 + \rho$$

gilt. Die Lösungen dieser Gleichung bilden eine zweidimensionale Hyperebene im $\mathbb{R}^3$, die mit dem Simplex der Parameter von Wahrscheinlichkeitsmaßen eine Strecke als Schnittmenge hat. Die Parameter dieser Strecke entsprechen einer Teilmenge der Menge aller äquivalenten Martingalmaße.
Zu bemerken ist, dass im Falle $N = 1$ die Menge aller Martingalmaße bestimmt worden ist. Im Mehrperiodenfall gibt es aber weitere äquivalente Martingalmaße. Zum Beispiel braucht die iid Voraussetzung an $X_1, \cdots, X_N$ nicht gegeben sein. Bei jeder Periode kann man unterschiedliche p_1^*, p_2^* wählen, die die obige Gleichung erfüllen. Dann ist die identische Verteilung nicht mehr erfüllt und man hat ein weiteres äquivalentes Martingalmaß konstruiert.

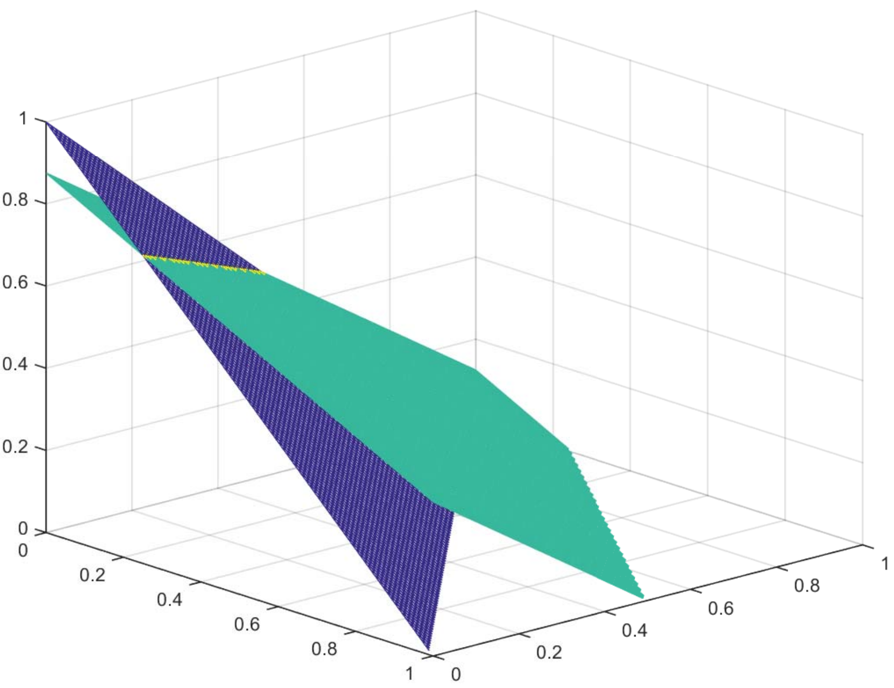


Abbildung 1: Martingalmaße im Trinomialmodell

5 Bewerten von Derivaten

Auch in diesem Kapitel setzen wir ein endliches Ω voraus und betrachten ein Finanzmarktmodell über N Perioden mit Preisprozess $(S_1, ..., S_d)$ der risky assets und S_0 des Numeraire Assets. Weiter nehmen wir an, dass $S_0(0) = 1$ ist. Ist dies nicht erfüllt, kann man dies entweder durch Normalisierung erreichen oder beachten, dass in den betreffenden Aussagen das Anfangskapital in Einheiten des Numeraire Assets notiert wird.
Grundannahme:

Der Finanzmarkt ist arbitragefrei.

Nach dem 1. Fundamentalsatz existiert also ein äquivalentes Martingalmaß, das nicht unbedingt eindeutig bestimmt sein muss. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Dann ist $\mathcal{P}$ eine konvexe Teilmenge aller zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße.

5.1 Claim und Hedge

Ein **Derivat** ist ein Wertpapier, dass eine Auszahlung am Ende der Laufzeit (hier: N) verbrieft. Dies bedeutet, dass dem Käufer des Derivats das Recht auf die im Derivat spezifizierte Auszahlung garantiert wird. Mathematisch gesehen entspricht dies einer $\mathcal{F}_N$ messbaren Abbildung C. Diese wird auch als **Claim** bezeichnet, z.B: $C = (S(N) - K)^+$. Der diskontierte Claim $C^\star = \frac{C}{S_0(N)}$ ist dann die Claimauszahlung, notiert in Einheiten des Numeraire Assets.
Denkt man an das Replikationsprinzip, so ist eine Strategie gesucht, die durch Handel am Finanzmarkt den Claim, also die Derivateauszahlung, repliziert. Im Finanzmarktmodell bedeutet dies:
Gesucht ist ein Anfangskapital V_0 und ein $H \in \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}$ ist die Menge aller vorhersehbaren Prozesse) mit

$$V_0 + \sum_{i=1}^{N} < H(n), \Delta S^\star(n) > = V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star.$$

V_0 und H definieren dann eindeutig eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (φ, H) mit $V_0((\varphi, H)) = V_0$ und $V_N((\varphi, H)) = C$.
Ist dies möglich, so heißt C **hedgebar** und (φ, H) bzw V_0 und H definieren eine **Hedgestrategie**.
In Analogie zum Replikationsprinzip kann man sich nun fragen:

Ist V_0 der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis für C?

Ein Anfangspreis $x > V_0$ liefert ein Arbitrage für den Verkäufer, denn:

- gehe short im Claim $\Rightarrow$ erhalte x.
- investiere V_0 in die selbstfinanzierende Handelsstrategie.
- $x - V_0$ ist dann der Gewinn am Anfang.
- Handel entsprechend der Strategie.
- Benutze den Gewinn der Handelsstrategie am Ende, um die short Position im Claim aufzulösen $\Rightarrow V_N(H) - C = 0$.
- $x - V_0$ ist der risikolose Gewinn.

Ein Anfangspreis $x < V_0$ liefert ein Arbitrage für den Käufer, denn:

- gehe short im Hedge $\Rightarrow$ erhalte V_0.
- investiere x in den Claim.
- $V_0 - x$ ist dann der Gewinn am Anfang.
- Handel entsprechend der short Position im Hedge.
- Benutze den Claim am Ende, um die short Position im Hedge aufzulösen $\Rightarrow C - V_N(H) = 0$.
- $V_0 - x$ ist der risikolose Gewinn.

Diese Argumentation legt nahe, dass $x = V_0$ der eindeutige arbitragefreie Anfangspreis eines hedgebaren Claims C ist. Im folgenden wird dies mathematisch präzisiert:

5.2 Law of One Price

Seien C ein hedgebarer Claim und $H, H' \in \mathcal{H}$ Hedgestrategien zu den Anfangspreisen V_0 und V_0'. Dann gilt:

$$V_0 = V_0' = \mathbb{E}^\star C^\star \qquad \text{für jedes } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

und

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(n) = V_H^\star(n) = V_{H'}^\star(n) = V_0' + (H' \cdot S^\star)(n) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n)$$

für alle $n = 1, ..., N$

Beweis. Dies folgt aus der Martingaleigenschaft von $S^\star$ bzw. $(H \cdot S^\star)$ bzgl. $\mathbb{P}^\star$:

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star = V_0' + (H' \cdot S^\star)(N)$$

Also gilt für jedes $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$

$$V_0 \overset{\mathbb{E}^\star((H \cdot S^\star))=0}{=} \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N)) = \mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{E}^\star(V_0' + (H' \cdot S^\star)(N)) = V_0'$$

Das gleiche Argument liefert:

$$\begin{aligned} V_H^\star(n) = V_0 + (H \cdot S^\star)(n) &= \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N)|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^\star(V_0' + (H' \cdot S^\star)(N)|\mathcal{F}_n) \\ &= V_0' + (H' \cdot S^\star)(n) \\ &= V_{H'}^\star(n) \end{aligned}$$

□

Diesen Satz kann man als mathematische Formalisierung des Replikationsprinzips aus der informellen Einführung ansehen, da er folgendes ausdrückt:
Liefern zwei selbstfinanzierende Handelsstrategien das gleiche Endvermögen, so müssen auch deren Anfangsvermögen übereinstimmen. Es wird darüber hinaus die noch etwas stärkere Aussage gezeigt, dass die gesamte Vermögensentwicklung eindeutig festgelegt ist.

5.3 Superreplizierbare Claims

Ein Claim heißt **upper hedgbebar** zum Anfangspreis V_0, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star$$

Dies ist der Fall, wenn

$$C^\star - V_0 \in \mathcal{K}^\star$$

Erinnerung: $\mathcal{G}^\star = \{(H \cdot S^\star)(N) : H \in \mathcal{H}\}$ und $\mathcal{K}^\star = \{C^\star : \exists G \in \mathcal{G}^\star \text{ mit } G \geq C^\star\}$

C heißt **strikt upper hedgebar** zum Anfangspreis V_0, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star$$

und

$$\mathbb{P}(V_0 + (H \cdot S^\star)(N) > C^\star) > 0$$

Ein Claim heißt **lower hedgbebar** zum Anfangspreis V_0, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \leq C^\star$$

C heißt **strikt lower hedgebar** zum Anfangspreis V_0, falls es ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) \leq C^\star$$

und

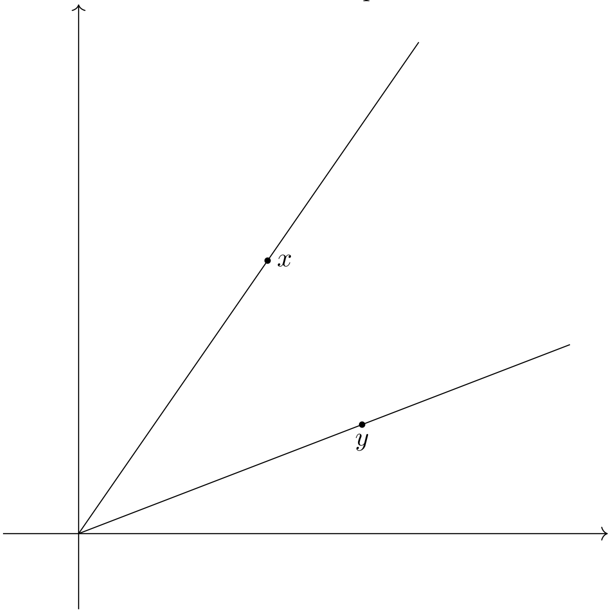
$$\mathbb{P}(V_0 + (H \cdot S^\star)(N) < C^\star) > 0$$

Der Kegel $\mathcal{K}^\star$ der zum Anfangskapital 0 upper hedgebaren Claims lässt sich durch die erwarteten Auszahlungen bzgl. der äquivalenten Martingalmaße charakterisieren. Dies ist eine Anwendung des Bipolartheorems.

5.4 Das Bipolartheorem

5.4.1 Definition ((konvexer) Kegel, Bipolar)

Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit einem Skalarprodukt. Ein $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Kegel**, wenn $\lambda x \in \mathcal{C}$ für alle $\lambda > 0, x \in \mathcal{C}$.

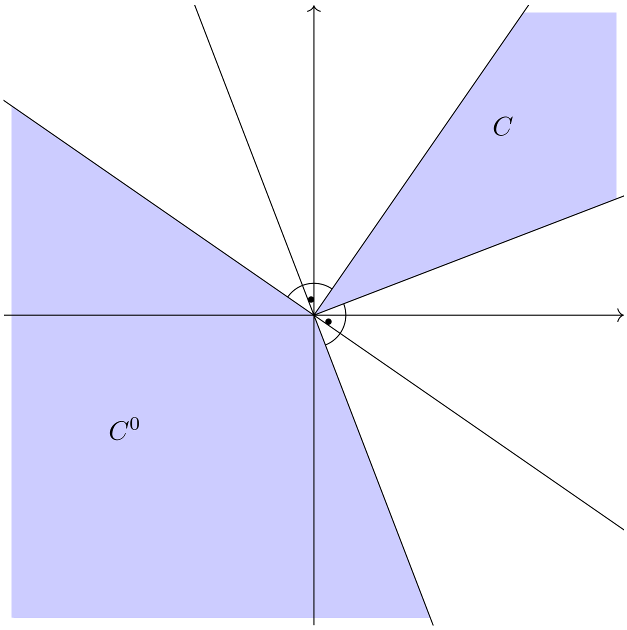


$\mathcal{C}$ heißt **konvexer Kegel**, wenn $\mathcal{C}$ konvex und ein Kegel ist, d.h. wenn gilt:

- $x \in \mathcal{C}, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathcal{C}$
- $x, y \in \mathcal{C} \Rightarrow x + y \in \mathcal{C}$

Zu einem Kegel $\mathcal{C}$ ist die Polarmenge $\mathcal{C}^0$ definiert durch

$$\mathcal{C}^0 := \{y \in \mathbb{R}^n :< x, y >\leq 0 \text{ für alle } x \in \mathcal{C}\}$$



$\mathcal{C}^0$ ist ein abgeschlossener Kegel, denn

$$y \in \mathcal{C}^0, \lambda > 0 \Rightarrow < x, \lambda y >= \lambda < x, y > \leq 0 \text{ für alle } \ x \in \mathcal{C}$$

Also ist auch $\lambda y \in \mathcal{C}^0$. Weiter ist für $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^0$ auch $y_1 + y_2 \in \mathcal{C}^0$, da

$$< y_1 + y_2, x >=< y_1, x > + < y_2, x > \leq 0.$$

Die Abgeschlossenheit schließlich folgt aus der Stetigkeit des Skalarprodukts.
Weiter ist die Polarbildung monoton fallend in der Inklusionsrelation, denn sind $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ Kegel, so gilt:

$$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \Rightarrow \mathcal{C}_2^0 \subset \mathcal{C}_1^0.$$

5.4.2 Das Bipolartheorem

Ist $\mathcal{C}$ ein konvexer Kegel, so stimmt das **Bipolar** von $\mathcal{C}$ mit dem Abschluss von $\mathcal{C}$ überein:

$$\underbrace{(\mathcal{C}^0)^0}_{\text{Bipolar}} = \underbrace{\overline{\mathcal{C}}}_{\text{Abschluss}}$$

Beweis. Zeige die gegenseitigen Inklusionen. Ist $x \in \mathcal{C}$, so gilt $< x, y > \leq 0$ für alle $y \in \mathcal{C}^0$. Dies bedeutet aber, dass $x \in (\mathcal{C}^0)^0$ ist. Somit folgt $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^{00}$. Wegen der Abgeschlossenheit der Polarmenge folgt $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}^{00}$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir ein $x \in \mathcal{C}^{00}$ und nehmen an, dass $x \notin \overline{\mathcal{C}}$ gilt. Dann können wir die kompakte Menge $\{x\}$ von der abgeschlossenen Menge $\overline{\mathcal{C}}$ trennen. Es gibt also einen Vektor η mit

$$\sup_{y \in \overline{C}} < y, \eta >= \beta << x, \eta > .$$

Da $\overline{C}$ ein Kegel ist, muss $\beta \geq 0$ sein. Dies impliziert $\eta \in \overline{\mathcal{C}}^0$. Da $x \in \mathcal{C}^{00}$ ist, ergibt sich ein Widerspruch, da

$$< x, \eta > \leq 0 \quad \text{und} \quad < x, \eta >> 0$$

gilt. □

Das Bipolartheorem kann man benutzen, um den Kegel $\mathcal{K}^*$ der mit Anfangskapital 0 upper hedgebaren Claims zu charakterisieren.

5.5 Charakterisierung der upper-hedgebaren Claims

Für einen Claim C sind äquivalent:

(a) $C^* \in \mathcal{K}^*$

(b) $\mathbb{E}^\star C^\star \leq 0$ für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$

Beweis. $\underline{(a) \Rightarrow (b):}$

Ist $C^\star \in \mathcal{K}^\star \Rightarrow \exists H \in \mathcal{H}$ mit $(H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star$
$\Rightarrow 0 = \mathbb{E}^\star((H \cdot S^\star)(N)) \geq \mathbb{E}^\star C^\star$ für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$

$\underline{(b) \Rightarrow (a):}$ Dies ergibt sich aus dem Bipolartheorem, wenn man folgende Idee verfolgt:

Erfüllt ein Claim C die Bedingung (b), so ist $C^* \in \mathcal{P}^0$.
Zu zeigen ist also: $\mathcal{P}^0 \subset \mathcal{K}^*$
Wegen der Monotoniebeziehung und des Bipolartheorems reicht es hierfür zu zeigen:

$$(\mathcal{K}^*)^0 \subset (\mathcal{P}^0)^0 = \overline{\mathcal{P}}.$$

Um diese Idee rigoros auszuführen, muss man bedenken, dass $\mathcal{P}$ kein Kegel ist und deshalb die Polarmenge nicht so viel Sinn gibt. Deshalb ist anstelle von $\mathcal{P}$ der davon erzeugte Kegel zu betrachten. Allgemein wird für eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ der von E erzeugte Kegel $cone(E)$ definiert durch:

$$cone(E) := \bigcap_{\substack{C \text{ Kegel} \\ E \subseteq C}} C = \quad \{\lambda x : \lambda > 0, x \in E\}.$$

Die Menge der äquivalenten Martingalmaße entspricht einer konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, wenn $n = |\Omega|$ ist. Für den davon erzeugten Kegel zeigen wir, dass er mit der Polarmenge von $\mathcal{K}^*$ übereinstimmt.

$$(\mathcal{K}^*)^0 = \overline{cone(\mathcal{P})} = cone(\overline{\mathcal{P}})$$

Beweis. Die Inklusion von rechts nach links folgt einfach aus der Tatsache, dass

$$\mathbb{E}^\star C^* \leq 0 \quad \text{für alle} \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P} \quad \text{und} \quad C^* \in \mathcal{K}^*$$

gilt, denn dies impliziert $\mathcal{P} \subset (\mathcal{K}^*)^0$. Damit folgt dies auch für den von $\mathcal{P}$ erzeugten Kegel. Wegen der Abgeschlossenheit der Polarmenge erhält man die behauptete Inklusion.

Für die Teilmengenbeziehung von links nach rechts, muss man sich zunächst überlegen, dass

$$L^+ \supset (\mathcal{K}^*)^0.$$

Dies folgt aus der Tatsache, dass

$$L^- \subset \mathcal{K}^* \quad \text{und} \quad (L^-)^0 = L^+$$

gilt. Hierbei bezeichnet L^- die Menge der messbaren Abbildungen X, die keine positiven Werte annehmen können, für die also $X(\omega) \leq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Jedes $C^* \leq 0$ wird vom hedgebaren Claim 0 übertroffen. Daher gilt $L^- \subset \mathcal{K}^*$.

Die zweite Identität ist elementar nachweisbar.

Da allgemein aus $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ folgt $\mathcal{C}_1^0 \supset \mathcal{C}_2^0$, erhält man $L^+ \supset (\mathcal{K}^*)^0$.

Ist $p : \Omega \to \mathbb{R} \in (\mathcal{K}^*)^0$, so hat also p nur nichtnegative Funktionswerte. Ist

$$\sum_{i=1}^n p(\omega_i) = 0,$$

so ist $p = 0$ und damit in $\overline{cone(\mathbb{P})}$ enthalten. Ist

$$\sum_{i=1}^n p(\omega_i) > 0,$$

so kann durch

$$\mathbb{P}^*(\omega) = \frac{p(\omega)}{\sum_{i=1}^n p(\omega_i)}$$

für alle $\omega \in \Omega$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert werden. Die Eigenschaft $p \in (\mathcal{K}^*)^0$ impliziert

$$\mathbb{E}^* C^* \leq 0 \quad \text{für alle} \quad C^* \in \mathcal{K}^*.$$

Satz 4.13 liefert, dass $\mathbb{P}^*$ ein Martingalmaß ist und somit $\mathbb{P}^* \in \overline{\mathcal{P}}$ gilt. Daher folgt

$$p \in cone(\overline{\mathcal{P}}) = \overline{cone(\mathcal{P})}.$$

□

Auf die Identität $(\mathcal{K}^*)^0 = \overline{cone(\mathcal{P})}$ wird nun das Bipolartheorem angewandt. Es ergibt sich

$$\mathcal{K}^* = (\mathcal{K}^*)^{00} = \overline{cone(\mathcal{P})}^0 = (cone(\mathcal{P})^0.$$

Ist $\mathbb{E}^* C^* \leq 0$ für alle $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$, so ist $C^* \in cone(\mathcal{P})^0$. Da $cone(\mathcal{P})^0 = \mathcal{K}^*$ gilt, folgt also $C^* \in \mathcal{K}^*$.

□

5.6 Upper und lower hedging Preise

Sei C ein Claim.

$$p_+(C) := \inf\{x \in \mathbb{R} : C^\star \text{ ist upper hedgebar zum Anfangskapital } x\}$$

und

$$p_-(C) := \sup\{x \in \mathbb{R} : C^\star \text{ ist lower hedgebar zum Anfangskapital } x\}$$

Aus Satz 5.5 folgt, dass das Infimum bzw. Supremum angenommen wird.

5.6.1 Satz

(a) Die Menge der upper hedging Preise ist ein abgeschlossenes Intervall $[p_+(C), \infty)$

(b) Die Menge der lower hedging Preise ist ein abgeschlossenes Intervall $(-\infty, p_-(C)]$

(c) $p_-(C) \leq p_+(C)$

Beweis. (a): Klar ist, dass die Menge der upper hedging Preise ein nach oben unbeschränktes Intervall bildet. Für die Abgeschlossenheit betrachte upper hedging Preise a_n mit $a_n \downarrow a$.
Zu zeigen ist, dass a ein upper hedging Preis ist.
Es gilt $C^\star - a_n \in \mathcal{K}^\star$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit wegen Satz 4.12

$$\mathbb{E}^\star(C^\star - a_n) \leq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}.$$

Wegen $C^\star - a_n \longrightarrow C^\star - a$ folgt

$$0 \geq \mathbb{E}^\star(C^\star - a_n) \longrightarrow \mathbb{E}^\star(C^\star - a) \text{ für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

Satz 5.5 liefert somit $C^\star - a \in \mathcal{K}^\star$.
Also ist a ein upper hedging Preis.

(b): (b) geht wie (a): a ist ein lower hedging Preis genau dann, wenn es ein $K \in \mathcal{G}^\star$ gibt mit

$$\begin{aligned} a + K \leq C^\star &\Leftrightarrow -(C^\star - a) \leq K \\ &\Leftrightarrow -(C^\star - a) \in \mathcal{K}^\star \end{aligned}$$

Für eine Folge von lower hedging Preisen (a_n) mit $a_n \uparrow a$ folgt also

$$\mathbb{E}^\star - (C^\star - a_n) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}.$$

Wegen $C^\star - a_n \longrightarrow C^\star - a$ folgt somit

$$E^\star(-(C^\star - a)) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}.$$

Dies impliziert aber $-(C^\star - a) \in \mathcal{K}^\star$. Also ist a ein lower hedging Preis.

(c): Ist a ein lower hedging Preis und b ein upper hedging Preis, so gilt:

$$\begin{aligned}(C^\star - b) \in \mathcal{K}^\star &\Leftrightarrow \mathbb{E}^\star(C^\star - b) \leq 0 \text{ für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}\\ &\Leftrightarrow \sup_{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^\star C^\star \leq b\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}-(C^\star - a) \in \mathcal{K}^\star &\Leftrightarrow E^\star(C^\star - a) \geq 0 \text{ für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}\\ &\Leftrightarrow \inf_{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^\star C^\star \geq a\end{aligned}$$

□

Prinzipiell ergeben sich also zwei Fälle:

a) $p_-(C) = p_+(C)$

Dies ergibt sich, wenn C hedgebar ist

b) $p_-(C) < p_+(C)$

Dies ergibt sich, wenn C nicht hedgebar ist

5.7 Charakterisierung der arbitragefreien Preise

Sei C ein Claim. Kann aus $x \in \mathbb{R}$ ein strikter $\substack{\text{upper}\\ \text{lower}}$ hedge finanziert werden, so ergibt sich ein Arbitrage für den $\substack{\text{Verkäufer}\\ \text{Käufer}}$.
Dies ist die Motivation für folgende Definition:

5.7.1 Definition (arbitragefreier Preis)

$x \in \mathbb{R}$ heißt **arbitragefreier Preis** für C, falls durch x weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge finanziert werden kann.
Mit $\Pi(C)$ bezeichne die Menge aller arbitragefreien Preise für C.

$\Pi(C)$ kann mittels des besten upper und lower hedging Preises charakterisiert werden:

5.7.2 Theorem

Für einen Claim C gilt:

(a) C ist hedgebar zum Anfangskapital x genau dann, wenn

$$p_-(C) = x = p_+(C)$$

(b) Ist C hedgebar zum Anfangskapital x, so ist

$$\mathbb{E}^\star C^\star = x \qquad \text{für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

und

$$\Pi(C) = \{x\}$$

(c) Ist C nicht hedgebar, so gilt

$$p_-(C) < p_+(C)$$

und

$$\Pi(C) = \big(p_-(C), p_+(C)\big) = \{\mathbb{E}^\star C^\star : \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}\}$$

Beweis. a): '$\underline{\Rightarrow}$': Sei C hedgebar zum Anfangskapital x. Dann existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$x + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star.$$

Also gilt

$$x + (H \cdot S^\star)(N) \leq C^\star \quad \text{und} \quad x + (H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star.$$

Somit ist x sowohl ein lower- als auch ein upper-hedging Preis, was

$$x \leq p_-(C) \leq p_+(C) \leq x$$

impliziert. Somit folgt $p_-(C) = p_+(C)$.

'$\Leftarrow$': Sei $p_-(C) = x = p_+(C)$
Wegen Satz 5.6.1 ist x ein upper und lower hedging Preis. Also ist

$$C^\star - x \in \mathcal{K}^\star \quad \text{und} \quad -(C^\star - x) \in \mathcal{K}^\star.$$

Also ist

$$C^\star - x \in \mathcal{K}^\star \cap (-\mathcal{K}^\star) = \mathcal{G}^\star.$$

Also existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$C^\star = x + (H \cdot S^\star)(N)$$

und somit ist C hedgebar zum Anfangskatpital x.

$b)$: Sei C hedgebar zum Anfangskapital x. Dann ist

$$C^\star - x \in \mathcal{G}^\star,$$

was

$$0 = \mathbb{E}^\star(C^\star - x) \Leftrightarrow \mathbb{E}^\star C^\star = x \quad \text{für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

impliziert.
noch zu zeigen:

$$\Pi(C) = \{x\}$$

"$\supseteq$": Es ist weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge aus x finanzierbar, denn

$$\mathbb{E}^\star C^\star = x = \mathbb{E}^\star(x + (H \cdot S^\star)(N)) \quad \text{für alle } H \in \mathcal{H}.$$

Also ist

$$x \in \Pi(C).$$

"$\subseteq$": Da $C^\star$ hedgebar zum Anfangskapital x ist, existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$x + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star.$$

Jedes $y > x$ kann man zur Finanzierung eines strikten upper hedge nutzen, denn

$$y + (H \cdot S^\star)(N) > x + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star$$

Also ist

$$(x, \infty) \cap \Pi(C) = \varnothing.$$

Jedes $y < x$ kann man zur Finanzierung eines strikten lower hedge nutzen, denn

$$y + (H \cdot S^\star)(N) < x + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star$$

Also ist

$$(-\infty, x) \cap \Pi(C) = \varnothing.$$

Da $x \in \Pi(C)$ ist also

$$\Pi(C) \subseteq \{x\}.$$

$c)$: Sei C nicht hedgebar. Wegen $a)$ gilt

$$p_-(C) < p_+(C).$$

"$\supseteq$": Gilt

$$p_-(C) < x < p_+(C),$$

so kann weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge aus x finanziert werden. Also ist

$$x \in \Pi(C).$$

"$\subseteq$": Ist

$$x \in \Pi(C),$$

so kann weder ein strikter upper, noch ein strikter lower hedge aus x finanziert werden.
Hieraus folgt:

$$x \in [p_-(C), p_+(C)]$$

Im Falle $p_-(C) < p_+(C)$ kann x kein Randpunkt sein, da für $x = \frac{p_+(C)}{p_-(C)}$ ein strikter $\substack{\text{upper}\\ \text{lower}}$ hedge finanziert werden kann. Also ist

$$\Pi(C) \subseteq (p_-(C), p_+(C).$$

Begründung für den strikten upper hedge:
Wegen der Abgeschlossenheit existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$p_+(C) + (H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star.$$

Wegen $p_-(C) < p_+(C)$ ist C nicht hedgebar, was

$$\mathbb{P}(p_+(C) + (H \cdot S^\star)(N) > C^\star) > 0$$

impliziert. Zeige weiter:

$$\sup_{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^\star C^\star = p_+(C)$$

und

$$\inf_{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^\star C^\star = p_-(C)$$

Ist $x < p_+(C)$, so existiert kein upper hedge für C mit Anfangskapital $x \Rightarrow C^\star - x \notin \mathcal{K}^\star$.
Wegen Satz 5.5 existiert ein $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ mit

$$\mathbb{E}^\star C^\star - x > 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}^\star C^\star > x$$

Ist $x > p_-(C)$, so existiert kein lower hedge für C mit Anfangskapital x. Also ist $-(C^\star - x) \notin \mathcal{K}^\star$.
Wegen Satz 5.5 existiert somit ein $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ mit

$$\mathbb{E}^\star C^\star - x < 0.$$

Also ist $x > \inf_{\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}} \mathbb{E}^\star C^\star$.
Bleibt noch zu zeigen:

$$(p_-(C), p_+(C)) = \{\mathbb{E}^\star C^\star : \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}\}.$$

"$\subseteq$": klar, da $\inf \mathbb{E}^\star C^\star = p_-(C)$ und $\sup \mathbb{E}^\star C^\star = p_+(C)$.
"$\supseteq$": Für $x = p_+(C)$ existiert ein strikter upper hedge, also existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$x + (H \cdot S^\star)(N) \geq C^\star$$

und

$$\mathbb{P}^\star(x + (H \cdot S^\star)(N) > C^\star) > 0$$

und damit folgt

$$x > \mathbb{E}^\star C^\star \qquad \text{für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

Für $x = p_-(C)$ existiert ein strikter lower hedge, also existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$x + (H \cdot S^\star)(N) \leq C^\star$$

und

$$\mathbb{P}^\star(x + (H \cdot S^\star)(N) < C^\star) > 0$$

und damit folgt

$$x < \mathbb{E}^\star C^\star \qquad \text{für alle } \mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$$

Also ist $p_-(C) < \mathbb{E}^\star C^\star < p_+(C)$ für alle $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$.

□

5.8 Erweitertes Finanzmarktmodell

Wir betrachten ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit $S = (S_1, ..., S_d)$ als Preisprozess der risky assets auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum. Mit S_0 bezeichne das Numeraire Asset und mit $(\mathcal{F}_n)_{n=0,...,N}$ den Informationsverlauf, wobei $\mathcal{F}_0$ trivial sei, d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ für alle $A \in \mathcal{F}_0$. Im Markt sei C die Auszahlung eines Derivates zum Zeitpunkt N. Das Konzept der arbitragefreien Bewertung ist bislang erklärt worden durch das Fehlen von strikten upper-hedge bzw. strikten lower-hedge Strategien, da solche zu Arbitragemöglichkeiten für den Verkäufer bzw. Käufer führen würden.
Alternativ kann man auch das Derivat bzw. dessen Auszahlung C als neues Finanzgut interpretieren, dass in den Markt emittiert wird. Die Frage ist dann, welchen Anfangspreis bzw. Preisprozess man für dieses Derivat verlangen muss, damit der um den Handel mit C erweiterte Finanzmarkt arbitragefrei ist. Wie wir im folgenden sehen werden, sind diese beiden Konzepte der arbitragfreien Bewertung konsistent in dem Sinne, dass sie die gleiche Menge an arbitragfeien Preisen generieren.
Das arbitragefreie Anfangspreisintervall für C ist gegeben durch

$$\Pi(C) = (p_-(C), p_+(C)) \text{ bzw. } \Pi(C) = \{p(C)\} \text{ falls } p_-(C) = p_+(C)$$

Der Finanzmarkt soll um den Handel mit C erweitert werden, so dass der erweiterte Finanzmarkt arbitragefrei bleibt. Der Claim wird dabei als $(d+1)$-tes risky asset angesehen mit Preisprozess

$$(S_{d+1}(n))_{n=0,...,N}.$$

Ist $x \in \Pi(C)$, so existiert ein $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ mit $x = \mathbb{E}^\star C^\star$. Durch

$$S_{d+1}(n) = S_0(n)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \quad \text{für alle} \quad n = 1, ..., N$$

kann dann ein Preisprozess definiert werden, für den gilt

$$S_{d+1}(N) = S_0(N)C^\star = C$$

und

$$S_{d+1}(0) = \underbrace{S_0(0)}_{=1}\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^\star C^\star = x$$

Weiter ist

$$S^\star_{d+1}(n) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \quad \text{für} \quad n = 0, ..., N$$

ein $\mathbb{P}^\star$- Martingal und damit definiert $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß für das erweiterte Modell

$$(S_1, ..., S_d, S_{d+1}).$$

Ist umgekehrt

$$(S_{d+1}(n))_{n=0,...,N}$$

ein Preisprozess für C mit $S_{d+1}(N) = C$ und ist das erweiterte Modell arbitragefrei, so exisitiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ für das erweiterte Modell. Insbesondere gilt

$$S_{d+1}(n) = S_0(n)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \qquad \text{für alle } n = 0, ..., N$$

Da $\mathbb{P}^\star$ auch ein äquivalentes Martingalmaß für das Ausgangsmodell ist und $S_{d+1}(0) = \mathbb{E}^\star C^\star$ ist, gilt

$$S_{d+1}(0) \in \Pi(C)$$

Insgesammt erhält man:

5.8.1 Theorem

Der Finanzmarkt ist um den Handel mit C arbitragefrei erweiterbar genau dann, wenn es ein $\mathbb{P}^\star \in \mathcal{P}$ gibt mit

$$S^\star_{d+1}(n) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \qquad \text{für alle } n = 0, ..., N.$$

5.9 Vollständigkeit

Für hedgebare Claims ist der arbitragefreie Anfangspreis eindeutig bestimmt. Finanzmärkte, in denen jeder Claim hedgebar ist, nennt man vollständig.

5.9.1 Definition (vollständig)

Ein Finanzmarkt heißt **vollständig**, falls $p_-(C) = p_+(C)$ für alle Claims C gilt.

5.10 2. Fundamentalsatz der Preistheorie

Für ein arbitragefreies Finanzmarktmodell mit äquivalentem Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ sind äquivalent:

(i) Das Modell ist vollständig

(ii) Das äquivalente Martingalmaß ist eindeutig, d.h.

$$\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^\star\}$$

(iii) Zu jedem $\mathbb{P}^\star$-Martingal M existiert eine Darstellung der Form

$$M_n = M_0 + (H \cdot S^\star)(n) \qquad \text{für alle } n = 0, ..., N$$

mit vorhersehbaren H.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\mathbb{P}_1^\star$ ein weiteres äquivalentes Martingalmaß. Für $A \in \mathcal{F}_N$ ist

$$C = \mathbb{1}_A S_0(N)$$

ein Claim mit $C^\star = \mathbb{1}_A$. Also gilt:

$$\mathbb{P}_1^\star(A) = \mathbb{E}_1^\star C^\star \overset{C \text{ hedgebar}}{=} \mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{P}^\star(A)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1^\star = \mathbb{P}^\star$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: $\mathcal{P} = \{\mathbb{P}^\star\} \Rightarrow p_+(C) = p_-(C)$ für alle C und damit ist jedes C hedgebar

$(i) \Rightarrow (iii)$: Sei M ein $(\mathcal{F}_n)$-Martingal bzgl. $\mathbb{P}^\star$. Dann ist

$$C = M_N S_0(N) \quad \text{ein Claim mit} \quad C^\star = M_N.$$

Wegen der Vollständigkeit ist C hegebar. Also existiert ein $V_0 \in \mathbb{R}$ und ein vorhersehbares H mit

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = \mathcal{C}^\star = M_N.$$

Also gilt

$$V_0 = \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N)) = \mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{E}^\star M_N = \mathbb{E}^\star M_0 = M_0$$

und

$$M_0 + (H \cdot S^\star)(n) = V_0 + (H \cdot S^\star)(n) = \mathbb{E}^\star(V_0 + (H \cdot S^\star)(N)|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^\star(M_N|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Ist C ein Claim, so ist

$$M_n = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_n) \qquad \text{für alle} \quad n = 0, ..., N$$

ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal.
Wegen (iii) gibt es zu $M_0 = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^\star C^\star$ ein vorhersehbares H mit

$$M_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star.$$

Also ist C hedgebar und der Finanzmarkt ist damit vollständig.

□

Man beachte, dass die Anfangsinformation durch eine triviale σ-Algebra $\mathcal{F}_0$ gegeben ist. Deshalb sind nur die Konstanten $\mathcal{F}_0$ messbar.

5.11 Vollständigkeit des CRR Modells

Das arbitragefreie CRR und das verallgemeinerte arbitragefreie CRR Modell sind vollständig.

Beweis. Dies folgt aus der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes, kann aber auch direkt durch allgemeines Ausrechnen von Hedgestrategien bewiesen werden. Der Nachweis der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes kann folgendermaßen geführt werden. In einem CRR Modell hat der Aktienpreisprozess die Form

$$S_n = S_0 \prod_{k=1}^{n} Y_k \quad , n = 0, \cdots, N$$

mit stochastisch unabhängigen und identisch verteilten $Y_1, \cdots, Y_N$, die jeweils die Werte u, d mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$ annehmen und den Informationsfluss über

$$\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \cdots, Y_n), \quad n = 0, \cdots N$$

bestimmen. Existiert auf $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N$ ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$, so ist zu zeigen, dass auch bezüglich $\mathbb{P}^*$ die Zufallsvariablen $Y_1, \cdots, Y_N$ stochastisch unabhängig sind mit

$$\mathbb{P}^*(Y_1 = u) = \frac{(1+\rho) - d}{u - d} = 1 - \mathbb{P}^*(Y_1 = d).$$

Dies kann man induktiv zeigen, denn für alle $n = 1, \cdots, N$ gilt wegen der Martingaleigenschaft von S^*

$$S_{n-1}(1+\rho) = \mathbb{E}^*(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}(u \mathbb{P}^*(Y_n = u | \mathcal{F}_{n-1}) + d \mathbb{P}^*(Y_n = d | F_{n-1})),$$

was

$$\mathbb{P}^*(Y_n = u | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{(1+\rho) - d}{u - d} = 1 - \mathbb{P}^*(Y_n = d | F_{n-1})$$

impliziert. Hieraus folgt, dass Y_n unter $\mathbb{P}^*$ stochastisch unabhängig von F_{n-1} ist mit

$$\mathbb{P}^*(Y_n = u) = \frac{(1+\rho) - d}{u - d} = 1 - \mathbb{P}^*(Y_n = d).$$

□

5.12 Call Option im CRR Modell

Wir wollen die Vollständigkeit des CRR-Modells ausnutzen, um eine Preisberechnung für eine Call-Option durchzuführen. Wir betrachten also ein CRR-Modell mit periodischer Zinsrate $\rho > -1$ und einem Aktienpreisprozess über N-Perioden der Form

$$S(n) = S(0) u^{Z(n)} d^{n - Z(n)} \quad n = 0, 1, \cdots, N$$

mit $d < 1 + \rho < u$. Der Prozess Z zählt dabei die Anzahl der Aufwärtssprünge

$$Z(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{Y_k = u\}} = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad n = 0, 1, \cdots, N,$$

wobei $Y_1, \cdots, Y_N$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind mit

$$\mathbb{P}(Y_k = u) = p = 1 - \mathbb{P}(Y_k = d) \quad k = 1, \cdots, N$$

und $X_k = 1_{\{Y_k = u\}}$ für $k = 1, \cdots, N$ gilt. Wir betrachten eine Call-Option mit Laufzeit N und Basispreis $K > 0$, welche dem Claim

$$C = (S(N) - K)^+ = (S(0) u^{Z(N)} d^{N - Z(N)} - K)^+$$

entspricht. Zu berechnen ist der arbitragefreie Anfangspreis dieser Option. Wegen der Vollständigkeit des CRR-Modells ist jeder Claim hedgebar. Also ist der arbitragefreie Anfangspreis $p(C)$ durch

$$p(C) = \mathbb{E}^*(C^*) = \mathbb{E}^*(\frac{1}{1+\rho})^N (S(N) - K)^+ = (\frac{1}{1+\rho})^N \mathbb{E}^*(S(0) u^{Z(n)} d^{n - Z(n)} - K)^+$$

gegeben. Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ sind $X_1, \cdots, X_N$ stochastisch unabhängig mit

$$\mathbb{P}^*(X_k = 1) = p^* = 1 - \mathbb{P}^*(X_k = 0) \quad k = 1, \cdots, N$$

und

$$p^* = \frac{1 + \rho - d}{u - d}.$$

Deshalb gilt

$$\mathbb{E}^*(\frac{1}{1+\rho})^N (S(N) - K)^+ \quad = \quad \mathbb{E}^*(\frac{1}{1+\rho})^N S(N) 1_{\{S(N)>K\}} - K(\frac{1}{1+\rho})^N \mathbb{P}^*(S(N) > K)$$

Man beachte

$$\begin{aligned} S(N) > K \quad &\Longleftrightarrow \quad u^{Z(N)} d^{N-Z(N)} > \frac{K}{S(0)} \\ &\Longleftrightarrow \quad Z(N) \log(\frac{u}{d}) + N \log(d) > \log(\frac{K}{S(0)}) \\ &\Longleftrightarrow \quad Z(N) > \frac{\log(\frac{K}{S(0)}) - N \log(d)}{\log(\frac{u}{d})} = b(N, S_0). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\mathbb{P}^*(S(N) > K) = \mathbb{P}^*(Z(N) > b(N, S_0)) = \mathrm{Bin}(N, p^*)(b(N, S_0), \infty)$$

eine Binomialwahrscheinlichkeit. Weiter ist

$$\mathbb{E}^*(\frac{1}{1+\rho})^N S(N) 1_{\{S(N)>K\}} \quad = \quad S(0)\mathbb{E}^* \frac{S^*(N)}{S(0)} 1_{\{S(N)>K\}} = S(0)\mathbb{P}_1^*(S(N) > K)$$

wobei das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_1^*$ definiert ist durch

$$P_1^*(A) = \int_A \frac{S^*(N)}{S(0)} d\mathbb{P}^*$$

für alle $A \in \mathcal{F}$. Bezüglich $\mathbb{P}_1^*$ sind die Indikatorvariablen $X_1, \cdots, X_N$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbb{P}_1^*(X_k = 1) = p_1^* = p^* \frac{u}{1+\rho} = 1 - \mathbb{P}_1^*(X_k = 0) \quad k = 1, \cdots, N$$

Hieraus folgt dann

$$\mathbb{P}_1^*(S(N) > K) = \mathbb{P}_1^*(Z(N) > b(N, S_0)) = \mathrm{Bin}(N, p_1^*)(b(N, S_0), \infty)$$

und damit

$$p(C) = S(0)\mathrm{Bin}(N, p_1^*)(b(N, S_0), \infty) - K(\frac{1}{1+\rho})^N \mathrm{Bin}(N, p^*)(b(N, S_0), \infty).$$

Man erhält also den Callpreis als gewichtete Differenz von zwei Binomialwahrscheinlichkeiten zu unterschiedlichen Parametern. Dies ist die sogenannte diskrete Black-Scholes Formel. Es verbleibt noch der Nachweis, dass $X_1, \cdots, X_N$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt bezüglich $\mathbb{P}_1^*$ sind mit

$$\mathbb{P}_1^*(X_k = 1) = p_1^* = p^* \frac{u}{1+\rho} = 1 - \mathbb{P}_1^*(X_k = 0) \quad k = 1, \cdots, N.$$

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_1^*$ hat die $\mathbb{P}^*$-Dichte

$$L(N) = \frac{S^*(N)}{S(0)} = \frac{u^{Z_N} d^{N-Z_N}}{(1+\rho)^N}.$$

Weiter gilt

$$L(n) := E^*(L(N)|\mathcal{F}_n) = \frac{S^*(n)}{S(0)} = \frac{u^{Z_n} d^{n-Z_n}}{(1+\rho)^n}$$

und für jedes $A \in \mathcal{F}_n$

$$\mathbb{P}_1^*(A) = \int_A L(N) d\mathbb{P}^* = \int_A L(n) d\mathbb{P}^*.$$

Die Behauptung folgt jetzt induktiv, denn für $n = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1^*(X(1) = 1) &= \int_{\{X(1)=1\}} \frac{u}{1+\rho} d\mathbb{P}^* = \frac{u}{1+\rho} p^* \\
\mathbb{P}_1^*(X(1) = 0) &= \int_{\{X(1)=0\}} \frac{u}{1+\rho} d\mathbb{P}^* = \frac{d}{1+\rho}(1-p^*).
\end{aligned}$$

Man beachte

$$\frac{u}{1+\rho}p^* + \frac{d}{1+\rho}(1-p^*) = p^*(\frac{u}{1+\rho} - \frac{d}{1+\rho}) + \frac{d}{1+\rho} = \frac{1+\rho-d}{u-d}\frac{u-d}{1+\rho} + \frac{d}{1+\rho} = 1.$$

Für den Induktionsschluss betrachte

$$(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1} \quad \text{und} \quad A = \{X_1 = x_1, \cdots X_{n-1} = x_{n-1}\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1^*(A \cap \{X_n = 1\}) &= \int_{A\cap\{X_n=1\}} L(n) d\mathbb{P}^* \\
&= \int_{A\cap\{X_n=1\}} \frac{u}{1+\rho} L(n-1) d\mathbb{P}^* \\
&= \frac{u}{1+\rho}\mathbb{E}^* 1_{\{X_n=1\}} 1_A L(n-1) = \frac{u}{1+\rho}\mathbb{P}^*(X_n = 1)\mathbb{E}^* 1_A L(n-1) \\
&= \frac{u}{1+\rho} p^* P_1^*(A).
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\mathbb{P}_1^*(A \cap \{X_n = 0\}) = \frac{d}{1+\rho}(1-p^*)P_1^*(A),$$

woraus die Unabhängigkeit von X_n von $\mathcal{F}_{n-1}$ folgt.
Auch können wir den eindeutigen arbitragefreien Preisprozess $(V(n))_{n=0,\cdots N}$ bestimmen mittels

$$\begin{aligned}
V(n) &= (1+\rho)^n \mathbb{E}^*(C^* | \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}^*((1+\rho)^{-(N-n)}(S(N) - K)^+ | \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}^*((1+\rho)^{-(N-n)} S(N) 1_{\{S(N)>K\}} | \mathcal{F}_n) + K(1+\rho)^{-(N-n)} \mathbb{P}^*(S(N) > K | \mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*(S(N) > K | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{P}^*(\frac{S(N)}{S(n)} S(n) > K | \mathcal{F}_n) \\
&= Bin(N-n, p^*)(b(N-n, S(n)), \infty).
\end{aligned}$$

Für die letzte Gleichheit beachte man, dass $\frac{S(N)}{S(n)}$ unabhängig von $\mathcal{F}_n$ und $S(n)$ nessbar bezüglich $\mathcal{F}_n$ sind. Die letzte Identität soll etwas genauer begründet werden. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_n$ wird erzeugt von $S(1), \cdots, S(n)$. Deshalb gilt

$$\mathbb{P}^*(\frac{S(N)}{S(n)} S(n) > K | \mathcal{F}_n) = \mathbb{P}^*(\frac{S(N)}{S(n)} S(n) > K | S(1), \cdots, S(n)).$$

Für die faktorisierte bedingte Wahrscheinlichkeit gilt dann für alle $s_1, \cdots, s_n$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^*(\frac{S(N)}{S(n)} S(n) > K | S(1) = s_1, \cdots, S(n) = s_n) &= \mathbb{P}^*(\frac{S(N)}{S(n)} > \frac{K}{s_n}) \\
&= Bin(N-n, p^*)(b(N-n, s_n), \infty)
\end{aligned}$$

Deshalb git obige Identität. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*((1+\rho)^{-(N-n)} S(N) 1_{\{S(N)>K\}} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}^*((1+\rho)^{-(N-n)} \frac{S(N)}{S(n)} S(n) 1_{\{S(N)>K\}} | \mathcal{F}_n) \\
&= \mathrm{Bin}(N-n, p_1^*)(b(N-n, S(n)), \infty) S(n),
\end{aligned}$$

da $\frac{S(N)}{S(n)}$ unabhängig von $\mathcal{F}_n$ und $S(n)$ nessbar bezüglich $\mathcal{F}_n$ sind. Insgesamt erhält man

$$V(n) = S(n)\mathrm{Bin}(N-n, p_1^*)(b(N-n, S(n)), \infty) - K(1+\rho)^{-(N-n)}\mathrm{Bin}(N-n, p^*)(b(N-n, S(n)), \infty).$$

Man kann dies auch so ausdrücken:
Der Preis einer Call-Option nach n Perioden ist der Anfangsreis einer Call-Option in einem CRR-Modell üner $N - n$ Perioden, welches aus $S(n)$ startet.

5.13 Hedgen im CRR Modell

Für den Aktienpreisprozess im CRR Modell gilt:

$$S(n) = S(0)u^{Z_n}d^{n-Z_n} \qquad , \qquad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad , \quad n = 0, 1, \cdots N.$$

Die Anzahl der Aufwärtssprünge in den ersten n Perioden wird hierbei durch Z_n gezählt und legt fest, welcher Aktienkurs nach n Perioden vorliegt.
Wir betrachten ein sogenanntes pfadunabhängges Derivat. Dies ist ein Kontrakt, der dem Halter eine Auszahlung der Form $C = g(S(N))$ am Ende zusichert, wobei g eine reelle Funktion ist, die das Derivat spezifiziert. Zu bestimmen ist eine Replikationsstrategie für C. Diese ist festgelegt durch ein vorhersehbares H und Anfangskapital V_0 , so dass

$$V_0 + (H \cdot S^\star)(N) = C^\star = \frac{g(S(N))}{(1+\varrho)^N}$$

erfüllt ist. Zunächst kann man sich überlegen, dass der Preis $V(n)$ eines pfadunabhängigen Derivates nach n Perioden eine Funktion des Aktienkurses $S(n)$ ist, denn wegen der Markov-Eigenschaft von S gilt

$$\begin{aligned} V(n) &= (1+\rho)^n \mathbb{E}^*(C^*|\mathcal{F}_n) = (1+\rho)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(g(S(N)|\mathcal{F}_n) \\ &= (1+\rho)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(g(S(N)|S(n)) = v(n, S(n)) \end{aligned}$$

mit

$$v(n,s) = (1+\rho)^{-(N-n)}\mathbb{E}^*(g(S(N)|S(n) = s)$$

für alle möglichen Aktienkurse s nach n-Perioden. Bezeichne mit $v^*(n,s)$ den diskontierten Derivatepreis nach n Perioden bei Vorliegen des Aktienkurses s, also

$$\begin{aligned} v^*(n,s) &= (1+\rho)^{-n}v(n,s) \\ &= (1+\rho)^{-N}\mathbb{E}^*(g(S(N))|S(n) = s) \\ &= \mathbb{E}^*(C^*|S(n) = s) \end{aligned}$$

Es gilt nun die folgende Rekursionbeziehnung

$$\begin{aligned} v^*(n, S(n)) &= V^*(n) = \mathbb{E}^*(V^*(n+1)|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^*(v^*(n+1, S(n+1))|\mathcal{F}_n) = E^*(v^*(n+1, S(n+1))|S(n)) \\ &= p^*v^*(n+1), uS(n)) + (1-p^*)v^*(n+1, dS(n)). \end{aligned}$$

Ein möglicher Aktienkurs s nach n-Perioden wird bestimmt durch die Anzahl der Aufwärtssprünge $Z(n)$ nach n-Perioden. Es gilt

$$\{S(n) = s\} = \{Z(n) = k\} \Longleftrightarrow S(0)u^k d^{n-k} = s.$$

Für eine algorithmische Umsetzung ist es deshalb sinnvoller den Preis als Funktion der Anzahl der Aufwärtssprünge zu notieren. Setze also

$$v^*(n,k) = \mathbb{E}^*(C^*|S(n) = S(0)u^k d^{n-k}) \quad \text{für alle} \quad n = 0, \cdots N, k = 0, \cdots, n.$$

Die obige Rekursionsbeziehung lautet dann

$$v^*(n,k) = p^*v^*(n+1, k+1)) + (1-p^*)v^*(n+1, k).$$

Das Ausnutzen dieser Rekursionsbeziehung liefert ein algorithmisches Verfahren zur Preisberechnung mittels
Initialisierung:

$$v^\star(N,k) = \frac{1}{(1+\varrho)^N} g(S(0)u^k d^{N-k}) \qquad k = 0, ..., N$$

Rekursion: Für $n = N-1$ bis $n = 0$ ist

$$v^\star(n,k) = p^\star v^\star(n+1, k+1) + (1-p^\star)v^\star(n+1, k) \qquad k = 0, ..., n$$

Aus den berechneten Werten kann dann der diskontierte Preisprozess ausgedrückt werden mittels

$$V_n^\star = \sum_{k=0}^{n} v^\star(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n)=k\}}$$

Also ist der diskontierte Preisprozess und damit der diskontierte Wertprozess der Hedgestrategie algorithmisch berechnet.
Im folgenden soll auch die Hedge-Strategie algorithmisch berechnet werden. Gesucht ist $(H_n)_{n=1,\dots,N}$ mit

$$V_0 + \sum_{k=1}^{N} H(k)\Delta S^\star(k) = C^\star.$$

Das Einnehmen der Aktienposition in der n-ten Periode wird bestimmt durch den Aktienkurs am Ende der $n-1$-ten Periode, welcher durch $Z(n-1)$ bestimmt ist. Für jeden möglichen Wert k ist $h(n,k)$ zu berechnen, so dass sich dann

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} H(n)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}} = \sum_{k=0}^{n-1} h(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}}$$

hieraus ergibt.
Rekursive Berechnung von $h(n,k)$:
Man beachte, dass die diskontierte Vermögensentwicklung V^* über den diskontierten Preisprozess schon berechnet worden ist, bzw. berechnet werden kann. Überlegen muss man sich, wie die Wertänderung in jeder Periode durch einen Handel repliziert werden kann. Befinden wir uns am Anfang der n-ten Periode und haben $Z(n-1)=k$ Aufwärtssprünge gesehen, so beträgt das diskontierte Kapital am Anfang der Periode $v^*(n-1,k)$. Durch eine Anlage $h(n,k)$ in der Aktie soll dann die beiden möglichen diskontierten Vermögen $v^*(n,k+1), v^*(n,k)$ am Ende der Periode erreicht werden, i.e.

$$v^\star(n-1,k) + h(n,k)\Delta S^\star(n) = v^\star(n,Z_n) \qquad \text{auf } \{Z_{n-1}=k\}$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$v^\star(n-1,k) + h(n,k)S^\star(n-1)\left(\frac{u}{1+\varrho}-1\right) = v^\star(n,k+1)$$

$$v^\star(n-1,k) + h(n,k)S^\star(n-1)\left(\frac{d}{1+\varrho}-1\right) = v^\star(n,k)$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} h(n,k) &= \frac{v^\star(n,k+1)-v^\star(n-1,k)}{S^\star(n-1)(\frac{u}{1+\varrho}-1)} \\ &= \frac{v^\star(n,k)-v^\star(n-1,k)}{S^\star(n-1)(\frac{d}{1+\varrho}-1)} \qquad \text{für alle } k=0,\dots,n-1 \end{aligned}$$

Beachte: Auf $\{Z(n-1)=k\}$ ist

$$S^\star(n-1) = \frac{1}{1+\varrho}S(0)u^k d^{n-1-k}$$

Man erhält also den Wertprozess und Hedge für den Claim $C=g(S(N))$ durch folgenden Algorithmus:
<u>**Initialisierung:**</u>

$$v^\star(N,k) = g(S_0u^kd^{N-k})\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^N \qquad \text{für} \quad k=0,\cdots,N$$

<u>**Rekursionsschritt:**</u>
Für $n=N-1$ downto 0 und für $k=0$ to n do

$$\begin{aligned} v^\star(n,k) &= p^\star v^\star(n+1,k+1) + (1-p^\star)v^\star(n+1,k) \\ h(n+1,k) &= \frac{v^\star(n+1,k+1)-v^\star(n,k)}{S^\star(n,k)(\frac{u}{1+\varrho}-1)} \quad \text{mit} \quad S^\star(n,k) = S(0)u^kd^{n-k}\left(\frac{1}{1+\varrho}\right)^n. \end{aligned}$$

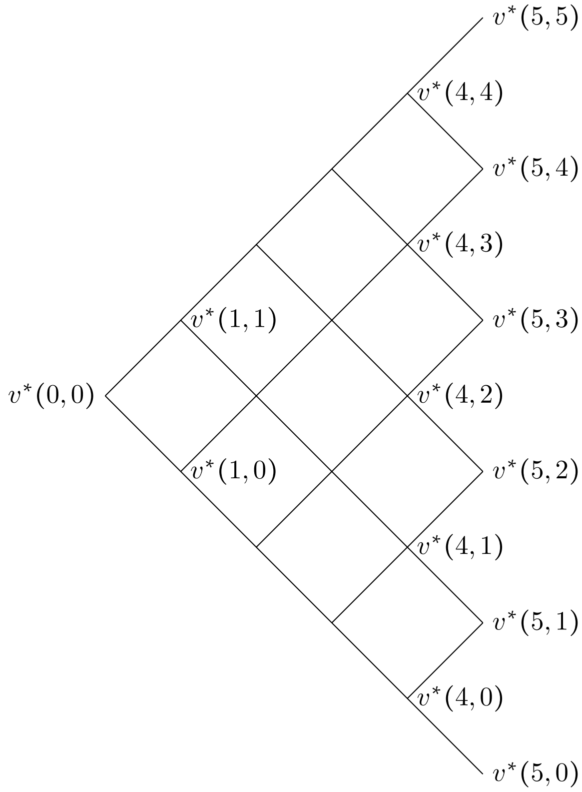
Den Wertprozess in Einheiten des Numeraire Assets für den Hedge erhält man durch

$$V_n^\star = \sum_{k=0}^{n} v^\star(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n)=k\}} \qquad n=0,\dots,N,$$

die Hedgingstrategie durch

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} h(n,k)\mathbb{1}_{\{Z(n-1)=k\}}$$

Man kann sich dies veranschaulichen im Binomialbaum.



$$\begin{aligned} v^\star(n,k) &= p^\star v^\star(n+1,k+1) + (1-p^\star)v^\star(n+1,k) \\ h(n+1,k) &= \frac{v^\star(n+1,k+1) - v^\star(n,k)}{S^\star(n,k)(\frac{u}{1+\varrho} - 1)} \\ &\quad \text{mit} \quad S^\star(n,k) = S(0)u^k d^{n-k}(\frac{1}{1+\varrho})^n \end{aligned}$$

5.14 Algorithmische Berechnung des upper und lower hedging Preises im Trinomialmodell

Prinzipiell kann wie im CRR Modell durch rückwärtige Berechnung in den jeweiligen Einperiodenmodellen die upper und lower hedge Strategie bestimmt werden.

<u>1. Schritt:</u> Einperiodenfall

$N = 1$, Anfangspreis S_0, Endkurse $\begin{pmatrix} uS_0 \\ mS_0 \\ dS_0 \end{pmatrix}$, Zinsrate ϱ mit $d < 1+\varrho < u$.

$$\Delta S^\star(1) = S^\star(1) - S^\star(0) = \begin{pmatrix} \frac{uS_0}{1+\varrho} - S_0 \\ \frac{mS_0}{1+\varrho} - S_0 \\ \frac{dS_0}{1+\varrho} - S_0 \end{pmatrix} = S_0 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{u}{1+\varrho} - 1 \\ \frac{m}{1+\varrho} - 1 \\ \frac{d}{1+\varrho} - 1 \end{pmatrix}}_{=:R} = S_0 R$$

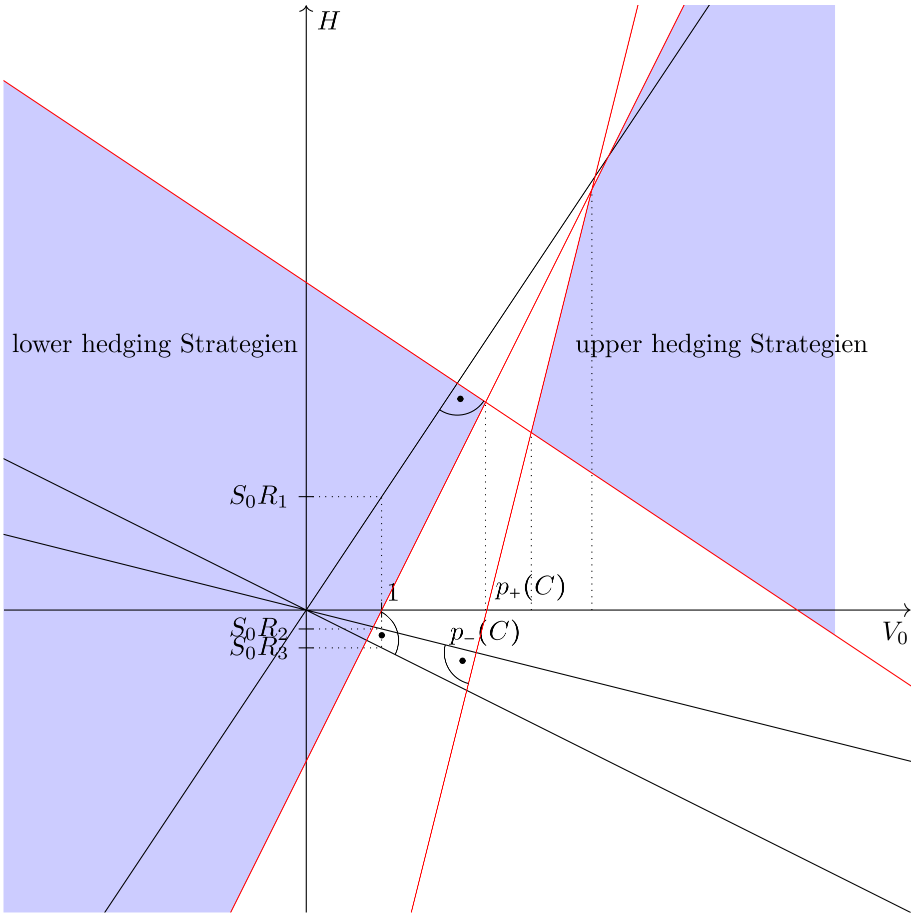
Ein Claim C entspricht einem Vektor $C = (c_1, c_2, c_3)$

$$C^\star = \begin{pmatrix} c_1^\star \\ c_2^\star \\ c_3^\star \end{pmatrix} \qquad \text{mit } c_i^\star = \frac{c_i}{1+\varrho}$$

Ein Anfangskapital V_0 und H Anteile im risky asset liefern einen upper Hedge, wenn

$$V_0 + H\Delta S^\star(1) \geq C^\star \Leftrightarrow \begin{pmatrix} V_0 + HS_0R_1 \\ V_0 + HS_0R_2 \\ V_0 + HS_0R_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1^\star \\ c_2^\star \\ c_3^\star \end{pmatrix}$$

Der Durchschnitt der Halbräume $\{(V_0, H) : V_0 + HS_0R_i \geq c_i^\star \text{ mit } i = 1,2,3\}$ entspricht der Menge der upper hedgbaren Claims.



$$V_0 + HS_0R_1 >= c_1^\star \Leftrightarrow < \begin{pmatrix} V_0 \\ H \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ S_0R_1 \end{pmatrix} >= c_1^\star$$

$$V_0 + HS_0R_2 >= c_2^\star \Leftrightarrow < \begin{pmatrix} V_0 \\ H \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ S_0R_2 \end{pmatrix} >= c_2^\star$$

$$V_0 + HS_0R_3 >= c_3^\star \Leftrightarrow < \begin{pmatrix} V_0 \\ H \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ S_0R_3 \end{pmatrix} >= c_3^\star$$

Numerische Berechnung:
Berechnung der Schnittpunkte:

$$\begin{array}{l} V_0^{(1)} + H^{(1)} S_0 R_2 = c_2^\star \\ V_0^{(1)} + H^{(1)} S_0 R_3 = c_3^\star \end{array} \Leftrightarrow H^{(1)} = \frac{c_3^\star - c_2^\star}{S_0(R_3 - R_2)} \Rightarrow V_0^{(1)} = c_2^\star - \frac{c - 3^\star - c_2^\star}{R_3 - R_2} R_2$$

Entsprechend:

$$V_0^{(2)} + H^{(2)} S_0 R_1 = c_1^\star$$
$$V_0^{(2)} + H^{(2)} S_0 R_3 = c_3^\star$$

und:

$$V_0^{(3)} + H^{(3)} S_0 R_1 = c_1^\star$$
$$V_0^{(3)} + H^{(3)} S_0 R_2 = c_2^\star$$

Ist

$$V_0^{(1)} = V_0^{(2)} = V_0^{(3)},$$

so ist

$$p_-(C) = p_+(C) = V_0^{(1)} \quad \text{und} \quad H^- = H^+ = H = H^{(1)} = H^{(2)} = H^{(3)}$$

der Hedge für C.
Andernfalls, bestimme l(inks), m(itte), r(echts), sodass

$$V_0^{(l)} \le V_0^{(m)} \le V_0^{(r)}.$$

Entscheide, ob $(V_0^{(m)}, H^{(m)})$ ein upper Hedge ist, durch

$$V_0^{(m)} + H^{(m)} S_0 R_m > c_m^\star.$$

Ist dies der Fall, so ist

$$p_+(C) = V_0^{(m)} \quad \text{und} \quad H^+ = H^{(m)}$$

der upper Hedge und

$$p_-(C) = V_0^{(l)} \quad \text{mit} \quad H^- = H^{(l)}$$

der lower Hedge.
Ist dies nicht der Fall, so ist

$$p_-(C) = V_0^{(m)} \quad \text{und} \quad H^- = H^{(m)}$$

der lower Hedge und

$$p_+(C) = V_0^{(r)} \quad \text{mit } H^+ = H^{(r)}$$

der upper Hedge.

<u>2. Schritt:</u> Mehr-Perioden-Fall
N-Perioden

$$S(n) = S_0 \prod_{i=1}^{n} Y_i,$$

(Y_i) iid (Y_i hat nur Werte in $\{m, u, d\}$)

$$S(n) = S_0 u^{Z_1(n)} d^{Z_2(n)} m^{n-(Z_1(n)+Z_2(n))}$$

mit

$$Z_1(n) = \sum_{k=1} \mathbb{1}_{\{Y_k=u\}}, Z_2(n) = \sum_{k=1} \mathbb{1}_{\{Y_k=d\}}.$$

Der Claim hat die Form

$$C = g(S(N)).$$

Rekursiv wird die upper und lower hedging Strategie berechnet:
<u>Initialisierung:</u>

$$v^+(N,(k,l)) = v^-(N,(k,l)) = (1+\varrho)^{-N} g(S_0 u^k d^l m^{N-(k+l)})$$

für $k = 0, \cdots, N, l = 0, \cdots, N-k$
<u>Rekursionsschritt</u>
for $n = N-1$ downwto 0:
for $k = 0, ..., n$ and for $l = 0, ..., n-k$
Berechne den upper hedging Preis, sowie den upper Hedge im Tinomialmodell mit Anfangskurs

$$S_0 u^k d^l m^{n-(k+l)}$$

und Claim

$$C^\star = (v^+(n+1,(k+1,l)), v^+(n+1,(k,l)), v^+(n+1,(k,l+1))).$$

Setze

$$v^+(n,(k,l)) = p_+(C) \quad \text{und} \quad h^+(n+1,(k,l)) = H^+.$$

Berechne den lower hedging Preis, sowie den lower Hedge im Trinomialmodell mit Anfangskurs

$$S_0 u^k d^l m^{n-(k+l)}$$

und Claim

$$C^\star = (v^-(n+1,(k+1,l)), v^-(n+1,(k,l)), v^-(n+1,(k,l+1))).$$

Setze:

$$v^{-}(n,(k,l)) = p_{-}(C) \quad \text{und } h^{-}(n+1,(k,l)) = H^{-}.$$

Es gilt:

$$v^{+}(0,(0,0)) = p_{+}(C)$$

ist das Anfangskapital des minimalen upper hedges und

$$H_n^{+} := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} h^{+}(n,(k,l)) \mathbb{1}_{\{Z_1(n-1)=k\}} \mathbb{1}_{\{Z_2(n-1)=l\}}$$

ist die minimale upper hedge Strategie.
Insbesondere gilt damit:

$$p_{+}(C) + \sum_{k=1}^{N} H(k) \Delta S^{\star}(k) \geq C^{\star}$$

Entsprechend:

$$v^{-}(0,(0,0)) = p_{-}(C)$$

ist das Anfangskapital des maximalen lower hedges und

$$H_n^{-} := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1-k} h^{-}(n,(k,l)) \mathbb{1}_{\{Z_1(n-1)=k\}} \mathbb{1}_{\{Z_2(n-1)=l\}}$$

ist die maximale lower hedge Strategie.
Insbesondere gilt damit:

$$p_{-}(C) + \sum_{k=1}^{N} H(k) \Delta S^{\star}(k) \leq C^{\star}$$

5.15 Allgemeine Call-Formel

Betrachte einen Finanzmarkt über N-Perioden mit

$$(S(n))_{n=0,\dots,N}$$

als Preisprozess für das risky asset mit $S(n) > 0$ für alle n. Sei $(\beta(n))_{n=0,\dots,N}$ ein Geldmarktkonto und $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$ die Filtration. Es gilt

$$\beta(n) = \prod_{k=1}^{n} (1 + \varrho(k))$$

mit vorhersehbaren Prozess $\varrho > -1$.
Wir betrachten einen Call mit Basis K, d.h. $C = (S(N) - K)^{+}$ ist die Claimauszahlung nach N Perioden.

Annahme: C ist hedgebar und das Modell ist arbitragefrei.

Dann ist

$$\mathbb{E}^{\star} C^{\star}$$

der eindeutige arbitragfreie Anfangspreis für C, wobei $\mathbb{P}^{\star} \in \mathcal{P}$ beliebig gewählt werden kann. Es gilt

$$\begin{aligned}
p(C) = E^{\star} C^{\star} &= \mathbb{E}^{\star} \left(\frac{(S(N) - K)^{+}}{\beta(N)} \right) \\
&= \mathbb{E}^{\star} \frac{S(N)}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - \mathbb{E}^{\star} \frac{K}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} \\
&= \mathbb{E}^{\star} S^{\star}(N) \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - K \mathbb{E}^{\star} \frac{1}{\beta(N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} \\
&= S(0) \mathbb{E}^{\star} \frac{S^{\star}(N)}{S(0)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}} - K B(0,N) \mathbb{E}^{\star} \frac{1}{\beta(N)} \frac{1}{B(0,N)} \mathbb{1}_{\{S(N)>K\}}
\end{aligned}$$

mit $B(0,N) = \mathbb{E}^{\star} \frac{1}{\beta(N)}$.
Definiere äquivalente Maße $\mathbb{P}_1^{\star}$ und $\mathbb{P}_2^{\star}$ durch

$$\left. \frac{d\mathbb{P}_1^{\star}}{d\mathbb{P}^{\star}} \right|_{\mathcal{F}_N} = \frac{S^{\star}(N)}{S(0)}$$

und

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_2^\star}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_N} = \frac{1}{\beta(N)}\frac{1}{B(0,N)}$$

Dann gilt:

$$p(C) = S(0)\mathbb{P}_1^\star(S(N) > K) - KB(0,N)\mathbb{P}_2^\star(S(N) > K).$$

Also erhält man, dass der Callpreis eine gewichtete Differenz von Ausübungswahrscheinlichkeiten sind, wobei das Ereignis der Callausübung unter verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaßen berechnet wird.
Im CRR Modell erhält man so die diskrete Black-Scholes Formel.

5.16 Exchange-Option

Die Call-und Putoption können als spezielle Beispiele einer Exchange-Option angesehen werden. Diese gibt das Recht, zu einem Ausübungszeitpunkt N ein Basisfinanzgut gegen ein anderes zu tauschen. In einem Finanzmarkt mit zwei Basisfinanzgütern, deren Preisprozesse gegeben sind durch

$$S_1(n), S_2(n) \quad n = 0, \cdots N$$

entspricht dies einem Derivat mit Claimauszahlung

$$C = (S_1(N) - S_2(N))^+.$$

Ist in einem arbitragefreien Markt, die Exchange-Option hedgebar, so kann man den arbitragefreien Anfangspreis $p(C)$ mit Hilfe eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ bestimmen mittels

$$p(C) = \mathbb{E}^* C^* = \mathbb{E}^* \frac{(S_1(N) - S_2(N))^+}{S_0(N)}.$$

Obiger Erwartungswert kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \frac{(S_1(N) - S_2(N))^+}{S_0(N)} &= \mathbb{E}^* \frac{S_1(N)}{S_0(N)} 1_{\{S_1(N) > S_2(N)\}} - \mathbb{E}^* \frac{S_2(N)}{S_0(N)} 1_{\{S_1(N) > S_2(N)\}} \\
&= S_1(0)\mathbb{E}^* \frac{S_1^*(N)}{S_1(0)} 1_{\{S_1(N) > S_2(N)\}} - S_2(0)\mathbb{E}^* \frac{S_2^*(N)}{S_2(0)} 1_{\{S_1(N) > S_2(N)\}} \\
&= S_1(0)\mathbb{P}_1^*(S_1(N) > S_2(N)) - S_2(0)\mathbb{P}_2^*(S_1(N) > S_2(N)) \qquad (31)
\end{aligned}$$

wobei $\mathbb{P}_1^*$ und $\mathbb{P}_2^*$ Wahrscheinlichkeitsmaße sind, die durch die $\mathbb{P}^*$-Dichten

$$L_1(N) = \frac{S_1^*(N)}{S_1(0)} \quad \text{und} \quad L_2(N) = \frac{S_2^*(N)}{S_2(0)}$$

definiert sind, i.e.

$$\mathbb{P}_1^*(A) = \int_A L_1(N) d\mathbb{P}^* \quad , \quad \mathbb{P}_2^*(A) = \int_A L_2(N) d\mathbb{P}^*$$

für alle $A \in \mathcal{F}_N$. Man erhält also, dass der arbitragefreie Anfangspreis der Exchange-Option eine gewichtete Differenz von zwei unterschiedlichen Ausübungswahrscheinlichkeiten ist. Die konkrete Berechnung ist dann modellabhängig.

5.17 Derivate mit Ausschüttungen

Bislang haben wir nur ein Derivat betrachtet, dass eine $\mathcal{F}_N$-messbare Auszahlung C zu einem festen Zeitpunkt N leistet. Dies wollen wir erweitern durch Einbeziehung von möglichen Ausschüttungen $(A_n)_{n=1,\cdots,N-1}$, die adaptiert sein sollen bezüglich des Informationsflusses im Finanzmarkt.
Ein solches Derivat heißt **replizierbar**, wenn es eine Handelsstrategie (ϕ, H) gibt mit

(i) $V_N = C$,

(ii) $A_n = \delta_n$ für alle $n = 1\cdots, N-1$.

Dabei ist der sogenannte Entnahmeprozess δ einer Handelsstrategie definiert durch

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 0 \\ \delta(n) &= V(n) - \big(\phi(n+1)S_0(n) + < H(n+1), S(n) >\big) \quad \text{für alle} \quad n = 1, \cdots N-1. \end{aligned} \tag{32}$$

Mit $\delta(n)$ wird der Wert definiert, der durch eine Handelsstrategie am Ende der $n-ten$ Periode entnommen wird. Zu beachten ist, dass das Vermögen einer Handelsstrategie am Ende der n-ten Periode vor der Entnahme definiert ist durch

$$V(n) = \phi(n)S_0(n) + < H(n), S(n) > .$$

Mit Hilfe der durch δ möglichen Entnahmen kann man also die Ausschüttungen des Derivates replizieren. Allgemein kann man die Wertenticklung einer Handelsstrategie (ϕ, H) ausdrücken mittels

$$V(n) = V(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\phi(k)\Delta S_0(k) + < H(k), \Delta S(k) >\big) - \sum_{k=1}^{n-1}\delta(k) \tag{33}$$

für alle $n = 0, 1, \cdots, N$, denn

$$\begin{aligned} V(n) &= V(0) + \sum_{k=1}^{n}\Delta V(k) = V(0) + \sum_{k=1}^{n} V(k) - V(k-1) \\ &= V(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\phi(k)S_0(k) + < H(k), S(k) > -\delta(k-1) - \phi(k)S_0(k-1) - < H(k), S(k-1)\big) \\ &= V(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\phi(k)\Delta S_0(k) + < H(k), \Delta S(k) >\big) - \sum_{k=1}^{n}\delta(k-1) \\ &= V(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\phi(k)\Delta S_0(k) + < H(k), \Delta S(k) >\big) - \sum_{k=1}^{n-1}\delta(k) \end{aligned}$$

Das Vermögen nach n-Perioden vor der Entnahme in n ergibt sich also aus dem Anfangsvermögen, der Summe der Periodengewinne und der Summe der Entnahmen der vergangenen Perioden.
Betrachtet man den diskontierten Vermögensprozess, so ergibt sich

$$V^*(n) = V(0) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^*(k) > - \sum_{k=1}^{n-1}\delta^*(k) \tag{34}$$

für alle $n = 0, \cdots N$, denn

$$\begin{aligned} V^*(n) &= V(0) + \sum_{k=1}^{n}\Delta V^*(k) = V(0) + \sum_{k=1}^{n} V^*(k) - V^*(k-1) \\ &= V(0) + \sum_{k=1}^{n}\big(\phi(k) + < H(k), S^*(k) > -\delta^*(k-1) - \phi(k) - < H(k), S^*(k-1)\big) \\ &= V(0) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^*(k) > - \sum_{k=1}^{n}\delta^*(k-1) \\ &= V(0) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^*(k) > - \sum_{k=1}^{n-1}\delta^*(k-1) \end{aligned}$$

Repliziert eine Handelsstrategie ein Derivat mit Endauszahlung C und Ausschüttungen $A(1), \cdots, A(N-1)$, so ergibt sich also für den diskontierten Wertprozess V^*

$$V^*(n) = V(0) + \sum_{k=1}^{n} < H(k), \Delta S^*(k) > - \sum_{k=1}^{n-1} A^*(k) \tag{35}$$

für alle $n = 0, \cdots N$. Weiter ist der Wertprozess der Replikationsstrategie durch die Endauszahlung und die Ausschüttungen eindeutig bestimmt.

5.17.1 Law of one Price für Derivate mit Ausschüttungen

Gegeben sei ein replizierbares Derivat mit Endauszahlung C und Ausschüttungen $A(1), \cdots, A(N-1)$. Dann ist der Vermögensprozess V einer jeden replizierenden Handelsstrategie eindeutig bestimmt durch

$$V^*(n) = \mathbb{E}^*(C^*|\mathcal{F}_n) + A^*(n) + \sum_{k=n+1}^{N-1}\mathbb{E}^*(A^*(k)|\mathcal{F}_n) \tag{36}$$

für alle $n = 0, \cdots N$. Insbesondere ist

$$V(0) = \mathbb{E}^* C^* + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{E}^* A^*(k)$$

die eindeutige arbitragefreie Anfangsbewertung des Derivates.

Beweis. Wird durch ein Anfangskapital $V(0)$ und einen vorhersehbaren Prozess H eine Replikationsstrategie bestimmt, so ergibt sich für den abdiskontierten Vermögensprozess

$$V^*(n) = V(0) - \sum_{k=1}^{n-1} A^*(k) + (H \cdot S^*)(n)$$

für alle $n = 0, 1, \cdots, N$. Da das Vermögen am Ende mit der Auszahlung übereinstimmt, gilt

$$C^* = V(0) - \sum_{k=1}^{N-1} A^*(k) + (H \cdot S^*)(N).$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*(C^* | \mathcal{F}_n) &= V(0) - \sum_{k=1}^{n} A^*(k) - \sum_{k=n+1}^{N-1} \mathbb{E}^*(A^*(k) | \mathcal{F}_n) + (H \cdot S^*)(n) \\
&= V^*(n) - A^*(n) - \sum_{k=n+1}^{N-1} \mathbb{E}^*(A^*(k) | \mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

für alle $n = 0, \cdots, N-1$. □

6 Amerikanische Derivate

Bei amerikanischen Derivaten ist der Auszahlungszeitpunkt des Claims nicht vorbestimmt. Der Halter hat die Möglichkeit den zufälligen Auszahlungszeitpunkt entsprechend einer Stoppstrategie zu wählen.
Wir betrachten einen Finanzmarkt über N-Perioden mit Informationsverlauf $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\cdots,N}$ und Preisprozess

$$S = (S_1, \cdots, S_d)$$

der risky assets sowie S_0 des Numeraire Assets. Wir bezeichnen mit $\mathcal{P}$ die nichtleere Menge der äquivalenten Martingalmaße und setzen $S_0(0) = 1$ voraus.

6.1 Amerikanischer Claim

Ein amerikanischer Claim ist ein bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\cdots,N}$ adaptierter reellwertiger Prozess

$$(Y(n))_{n=0,\cdots,N}.$$

Der **Käufer** des Claims hat das Recht während der Laufzeit entsprechend einer Stoppstrategie einen Ausübungszeitpunkt τ zu bestimmen, um dann eine Auszahlung $Y(\tau)$ zu erhalten.
Der **Verkäufer** des Claims kann seine Risikoposition auflösen, wenn es ein Anfangskapital x und ein $H \in \mathcal{H}$ gibt mit

$$x + (H \cdot S^*)(n) \geq Y^*(n) \quad \text{für alle} \quad n = 0, \cdots, N.$$

Das Anfangskapital x der obigen upper-hedging Strategie kann dann als Preis vom Verkäufer akzeptiert werden.

$$p_+(Y) = \inf\{x | \exists H \in \mathcal{H} : x + (H \cdot S^*)(n) \geq Y^*(n) \quad \text{für alle} \quad n = 0, \cdots, N\}$$

heißt dann **upper-hedging Preis** für Y.
Das Risiko des Käufers des Claims besteht darin, dass er einen Verkaufspreis x zahlen muss und sich nicht sicher sein kann, durch die Auszahlung des Claims den Verkaufspreis zurückzahlen zu können. Er kann ohne Risiko einen Verkaufspreis $x > 0$ akzeptieren, wenn er ein $H \in \mathcal{H}$ und eine Stoppzeit τ findet, so dass

$$Y^*(\tau) \geq x + (H \cdot S^*)(\tau),$$

denn er kann sich das Anfangskapital x leihen, dafür den Claim kaufen und entsprechend $-H$ bis τ handeln. Dann hat die Gesamtposition am Anfang einen Anfangswert 0 und in τ einen Wert

$$Y^*(\tau) - (x + ((-H) \cdot S^*)(\tau)) \geq 0.$$

Je größer x durch den Käufer gewählt werden kann, desto mehr kann der Käufer für den Claim Y ausgeben. Der Preis

$$p_-(Y) = \sup\{x | \exists H \in \mathcal{H} \text{ und } \ \tau : Y^*(\tau) \geq x + (H \cdot S^*)(\tau)\}$$

heißt dann lower hedging Preis.
Analog zu europäischen Claims kann man den upper und lower hedging Preis über die Menge der äquivalenten Martingalmaße ausdrücken.

6.2 Preisintervall für amerikanische Claims

Für jeden amerikanischen Claim Y gilt:

$$p_-(Y) \leq \inf_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}^* Y^*(\tau) \leq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}^* Y^*(\tau) \leq p_+(Y). \tag{37}$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{S}$ die Menge aller Stoppzeiten.

Beweis. Sei $x > p_+(Y)$. Dann existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$x + (H \cdot S^*)(n) \geq Y^*(n) \quad \text{für alle} \ \ n = 0, \cdots, N.$$

Da bezüglich jedem äquivalenten Martingalmaß $H \cdot S^*$ ein Martingal ist, folgt mit Optional Sampling für jedes $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ und $\tau \in \mathcal{S}$

$$x = \mathbb{E}^*\big(x + (H \cdot S^*)(\tau)\big) \geq \mathbb{E}^* Y^*(\tau).$$

Somit folgt

$$\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}^* Y^*(\tau) \leq x.$$

Da $x > p_+(Y)$ beliebig war, folgt die letzte Ungleichheit.
Zu $x < p_-(Y)$ existieren ein $H \in \mathcal{H}$ und eine Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}$, so dass

$$Y^*(\tau) \geq x + (H \cdot S^*)(\tau).$$

Also gilt für jedes äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$

$$\mathbb{E}^* Y^*(\tau) \geq \mathbb{E}^*\big(x + (H \cdot S^*)(\tau)\big) = x,$$

was

$$\sup_{\tau \in \mathcal{S}} E^* Y^*(\tau) \geq x \quad \text{für alle} \quad \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$$

impliziert. Somit folgt

$$\inf_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}^* Y^*(\tau) \geq x$$

und damit die Behauptung. □

Da der Käufer eines amerikanischen Claims eine optimale Stoppzeit finden muss, die eine für ihn optimale Auszahlung liefert, hat er ein sogenanntes optimales Stopproblem zu lösen.
Bei Wahl des Bewertungsmaßes $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}$ hat er eine Stoppzeit τ^* zu finden mit

$$v(\mathbb{P}^*, Y) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}^* Y^*(\tau) = \mathbb{E}^* Y^*(\tau^*).$$

Den Wert $v(\mathbb{P}^*, Y)$ nennt man auch Wert des Stopproblems und die Stoppzeit τ^* optimale Stoppzeit.
Der oben bewiesene Zusammenhang zum lower-und upper hedging Preis lässt sich also auch in der folgenden Form beschreiben.

$$p_-(Y) \leq \inf_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} v(\mathbb{P}^*, Y) \leq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}} v(\mathbb{P}^*, Y) \leq p_+(Y) \tag{38}$$

Man kann zeigen, dass die erste und letzte Ungleichheit wie bei den europäischen Derivaten durch eine Gleichheit ersetzt werden können. Dies bedarf aber einer weitergehenden Analyse und ist zum Beispiel im Buch von Föllmer und Schied ausgeführt.
In einem vollständigen Markt ist das äquivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt und man hat zur Bewertung von amerikanischen Claims ein Stopproblem unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ zu lösen. In diskreten Märkten bei endlicher Periodenanzahl ist dies auch mit dem Prinzip der Rückwärtsinduktion leicht möglich.

6.3 Das Prinzip der Rückwärtsinduktion

Wir betrachten ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ und definieren zu einem amerikanischen Claim Y die sogenannte Snellsche Einhüllende durch

$$\begin{aligned} U^*(N) &= Y^*(N) \\ U^*(n) &= \max\{Y^*(n), \mathbb{E}^*(U^*(n+1)|\mathcal{F}_n)\} \quad \text{für alle} \quad n = 0,1,\cdots N-1 \end{aligned} \tag{39}$$

Dann gilt:

1. Der Prozess $(U^*(n))_{n=0,\cdots,N}$ ist ein $\mathbb{P}^*$-Supermartingal mit $U^*(n) \geq Y^*(n)$ für alle $n = 0,1,\cdots N$.
2. Ist $(Z(n))_{n=0,\cdots,N}$ ein weiteres $\mathbb{P}^*$-Supermartingal mit $Z(n) \geq Y^*(n)$ für alle $n = 0,1,\cdots N$, so gilt $Z(n) \geq U^*(n)$ für alle $n = 0,\cdots N$.
3. Definiere für $n = 0,1,\cdots N$ die Stoppzeit τ_n^* durch
$$\tau_n^* = \inf\{k \geq n : Y^*(k) = U^*(k).$$
Dann gilt
$$\mathbb{E}^*(Y^*(\tau_n^*)|\mathcal{F}_n) = U^*(n) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}^*(Y^*(\tau)|\mathcal{F}_n) \tag{40}$$
für alle $n = 0,1,\cdots,N$. Insbesondere ist
$$\mathbb{E}^*Y^*(\tau_n^*) = \mathbb{E}^*U^*(n) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}_n} \mathbb{E}^*Y^*(\tau).$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{S}_n$ die Menge der Stoppzeiten, die nur Werte $\geq n$ annehmen können.

Beweis. Es gilt
$$U^*(n) = \max\{Y^*(n), \mathbb{E}^*(U^*(n+1)|\mathcal{F}_n)\} \geq \mathbb{E}^*(U^*(n+1)|\mathcal{F}_n).$$
Also ist U^* ein $\mathbb{P}^*$-Supermartingal, das Y^* dominiert.
Ist Z ein weiteres Supermartingal, das Y^* dominiert, so gilt

$$\begin{aligned} U^*(N) &= Y^*(N) \leq Z(N) \quad \text{und} \quad \text{für} \quad n < N \\ U^*(n) &= \max\{Y^*(n), \mathbb{E}^*(U^*(n+1)|\mathcal{F}_n)\} \\ &\leq \max\{Y^*(n), \mathbb{E}^*(Z(n+1)|\mathcal{F}_n)\} \\ &\leq \max\{Y^*(n), Z(n)\} \\ &= Z(n). \end{aligned}$$

Also dominiert Z auch U^*.
Die letzte Eigenschaft wird über Rückwärtsinduktion gezeigt. Für $n = N$ ist die Aussage klar.
Für $n < N$ und $\tau \in \mathcal{S}_n$ definiere $\tau' = \max\{\tau, n+1\} \in \mathcal{S}_{n+1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*(Y^*(\tau)|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}^*(Y^*(\tau)1_{\{\tau=n\}}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}^*(Y^*(\tau)1_{\{\tau>n\}}|\mathcal{F}_n) \\ &= Y^*(n)1_{\{\tau=n\}} + \mathbb{E}^*(Y^*(\tau')1_{\{\tau>n\}}|\mathcal{F}_n) \\ &= Y^*(n)1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\mathbb{E}^*(\mathbb{E}^*(Y^*(\tau')|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\ &\leq Y^*(n)1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}\mathbb{E}^*(U^*(n+1)|\mathcal{F}_n) \\ &\leq U^*(n)1_{\{\tau=n\}} + 1_{\{\tau>n\}}U^*(n) \\ &= U^*(n) \end{aligned}$$

Für $\tau = \tau_n^*$ liefert dieselbe Rechnung

$$\mathbb{E}^*(Y^*(\tau_n^*)|\mathcal{F}_n) = U^*(n)$$

und damit folgt die Behauptung.

□

Die Snellsche Einhüllende und die Doob-Meyer Zerlegung kann man benutzen, um in einem vollständigen Markt einen eindeutigen arbitragefreien Preis anzugeben.

6.4 Bewertung im vollständigen Markt

Der Markt sei vollständig mit eindeutigem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$. Dann gilt für jeden amerikanischen Claim Y.

$$p_-(Y) = \sup_{\tau\in\mathcal{S}} \mathbb{E}^* Y^*(\tau) = p_+(Y). \tag{41}$$

Beweis. Sei U^* die Snellsche Einhüllende von Y^* bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$. Die Doob-Meyer Zerlegung liefert ein eindeutiges Martingal M mit $M(0) = 0$ und einen eindeutigen vorhersehbaren wachsenden Prozess A mit $A(0) = 0$ und

$$U^* = U(0) + M - A.$$

Zu M existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit $M = H \cdot S^*$. Damit folgt

$$U(0) + (H \cdot S^*)(n) \geq U(0) + M(n) - A(n) = U^*(n) \geq Y^*(n)$$

für alle $n = 0, 1, \cdots N$. Also gilt

$$p_+(Y) \leq U(0).$$

Um zu zeigen, dass auch $U(0) \leq p_-(Y)$ gilt, betrachte die optimale Ausübungsstrategie

$$\tau^* = \inf\{n : U^*(n) = Y^*(n)\}$$

des Käufers. Dann gilt

$$Y^*(\tau^*) = U^*(\tau^*) = U(0) + M(\tau^*) - A(\tau^*).$$

Wegen der Optimalität von τ^* ist $A(\tau^*) = 0$, denn

$$U(0) = \mathbb{E}^* Y^*(\tau^*) = \mathbb{E}^* U^*(\tau^*) = U(0) + \mathbb{E}^* M(\tau^*) - \mathbb{E}^* A(\tau^*) = U(0) - \mathbb{E}^* A(\tau^*)$$

und somit $\mathbb{E}^* A(\tau^*) = 0$, was $A(\tau^*) = 0$ impliziert wegen der Monotonie. Somit gilt also

$$Y^*(\tau^*) = U^*(\tau^*) = U(0) + M(\tau^*) - A(\tau^*) = U(0) + (H \cdot S^*)(\tau^*)$$

was $p_-(Y) \geq U(0)$ impliziert. Insgesamt erhält man also

$$p_-(Y) = U(0) = p_+(Y).$$

□

Auch wenn das Prinzip der Rückwärtsinduktion ein Verfahren zur Berechnung des Preises eines amerikanischen Claims liefert, so ist dies im allgemeinen Modell numerisch schwierig durchzuführen. Im CRR-Modell kann für pfadunabhängige Claims eine einfache Implementierung durchgeführt werden.

6.5 Bewertung im CRR-Modell

Wir betrachten ein arbitragefreies CRR-Modell mit Aktienpreisprozess

$$S(n) = S(0) u^{Z(n)} d^{n-Z(n)}, \quad , Z(n) = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad n = 0, 1, \cdots N$$

und Geldmarktkonto $\beta(n) = (1+\rho)^n, \rho > -1$. In diesem Modell sei Y ein pfadunabhängiger amerikanischer Claim, i.e. es gibt eine Funktion $g(n,x)$,so dass

$$Y(n) = g(n, S(n)) \quad \text{für alle} \quad n = 0, 1, \cdots, N$$

gilt. Die Pfadunabhängigkeit stellt sicher, dass man die Markov-Eigenschaft nutzen kann, weshalb die Snellsche Einhüllende über dem Aktienpreisprozess faktorisiert. Sei also

$$U^*(n) \quad , n = 0, 1, \cdots N$$

die Snellsche Einhüllende von Y, welche den eindeutigen arbitragefreien Preisprozess des Claims in Einheiten des Numeraire Assets bezeichnet. Durch

$$U(n) = (1+\rho)^n U^*(n) \quad n = 0, 1, \cdots N$$

wird dann der Preis nach n Perioden in Euro ausgedrückt. Es gilt

$$U(N) = g(N, S(N)) =: u(N, S(N))$$

und

$$\begin{aligned} U(n) &= (1+\rho)^n \max\{Y^*(n), \mathbb{E}^*(U^*(n+1)|\mathcal{F}_n)\} \\ &= \max\{g(n, S(n)), \mathbb{E}^*(\frac{1}{1+\rho} U(n+1, S(n+1))|\mathcal{F}_n) \\ &= \max\{g(n, S(n)), \frac{1}{1+\rho}(U(n+1, uS(n))p^* + U(n+1, dS(n))(1-p^*))\} =: u(n, S(n)). \end{aligned}$$

Man sieht, dass der Preisprozess U nach dem Aktienkurs faktorisiert und die Berechnung der Preisfunktion u kann man rückwärts induktiv mittels folgendem Algorithmus durchführen.

Initialisierung: For $k = 0, 1, \cdots, N$ do

$$u(N, k) = g(N, S(0) u^k d^{N-k})$$

Rekursionsschritt:
for $n = N-1$ downto 0 do
for $k = 0, 1, \cdots, n$ do

$$u(n, k) = \max\{g(n, S(0) u^k d^{n-k}), \frac{1}{1+\rho}\big(u(n+1, k+1)p^* + u(n+1, k)(1-p^*)\big)\}.$$

Der Anfangspreis des Claims wird dann durch $u(0,0)$ zurückgegeben.

Prinzipiell hat man neben der Bewertung auch die optimale Ausübungsstrategie

$$\begin{aligned} \tau^* &= \inf\{n : U^*(n) = Y^*(n)\} \\ &= \inf\{n : u(n, S(n)) = g(n, S(n))\} \end{aligned} \tag{42}$$

ausgerechnet. Man kann sich die optimale Strategie veranschaulichen durch eine Zerlegung des Raumzeitbereiches in eine early exercise region und eine continuation region mittels

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(n, x) : v(n, x) = g(n, x)\} \\ \mathcal{C} &= \{(n, x) : v(n, x) > g(n, x)\} \end{aligned} \tag{43}$$

und

$$\tau^* = \inf\{n : (n, S(n)) \in \mathcal{E}\}.$$

Dies bedeutet:
Sieht man nach n Perioden den Aktienkurs x, so übt man genau dann aus, wenn $v(n, x) = g(n, x)$ gilt. Das Fortsetzen würde keinen mittleren Mehrgewinn gegenüber der sofortigen Ausübung ergeben.
Beim amerikanischen Put, der den Auszahlungsprozess

$$Y(n) = (K - S(n))^+ \quad , n = 0, 1, \cdots, N$$

hat, kann man die Struktur der early exercise region angeben. Es gibt sogenannte kritische Preise

$$K > b(1) > b(2) > \cdots > b(N)$$

so dass

$$\mathcal{C} = \{(n, x) : x > b(N-n)\}.$$

7 Das Black-Scholes Modell

Ziel: Modellierung von Finanzmärkten in stetiger Zeit.

7.1 Beschreibung des Modells

Der Finanzmarkt besteht aus:

- einem Geldmarktkonto
- einem risky asset
- der Laufzeit T

Geldmarktkonto:

- Annahme: deterministische, stetige Verzinsung mit Rate r. Daher entwickelt sich das Geldmarktkonto gemäß
$$\beta(t) = e^{rt} \qquad 0 \le t \le T$$

risky asset:

- Anfangskurs $S_0 > 0$
- Annahme:
  a) Die relativen Kursänderungen sind unabhängig und zeitlich stationär.
  b) Die Kursänderungen sind stetig.

Hieraus folgt, dass der Kursverlauf $(S(t))_{0 \le t \le T}$ des risky assets durch einen stochastischen Prozess der Form
$$S(t) = S(0)\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{\mu t} \qquad t \le T$$
mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ beschrieben werden kann.

$(W(t))_{t \ge 0}$ bezeichnet dabei einen Wiener-Prozess. Dieser ist definiert durch die folgenden Bedingungen:

(i) $W(0) = 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

(ii) Für beliebige $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, $n \in \mathbb{N}$ sind
$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$
stochastisch unabhängig.

(iii) Für alle $0 \le s, t > 0$ gilt:
$$W_{s+t} - W_s \sim W_t - W_0 = W_t \sim N(0,t)$$

(iv) $(W_t)_{t \ge 0}$ hat stetige Pfade

Wieso erfüllt das Modell die Annahmen?
Die relativen Kursänderungen in $t_1 < t_2 < ...t_{n-1} < t_n$ sind gegeben durch
$$\frac{S(t_1) - S(t_0)}{S(t_0)}, ..., \frac{S(t_n) - S(t_{n-1})}{S(t_{n-1})}.$$

Da
$$\frac{S(t_i) - S(t_{i-1})}{S(t_{i-1})} = \exp(\sigma(W(t_i) - W(t_{i-1})) - \frac{1}{2}\sigma^2(t_i - t_{i-1}))e^{\mu(t_i - t_{i-1})} - 1$$
folgt die Unabhängigkeit und zeitliche Stationarität der relativen Kursänderungen aus (ii) und (iii).
Die Annahme $b)$ ist erfüllt wegen (iv).
Dass das Modell aus den Annahmen folgt, ist nicht ganz so einfach zu beweisen.
Dies folgt aus der Tatsache, dass ein stochastischer Prozess X mit unabhängigen und stationären Zuwächsen, der stetige Pfade hat, notwendigerweise ein Wiener-Prozess mit Drift sein muss, d.h.
$$X(t) = \sigma W(t) + \nu t \qquad \text{mit } \sigma > 0 \text{ und } \nu \in \mathbb{R}$$

Nur aus der Annahme $a)$ ergeben sich sogenannte Levy-Prozess Modelle.

7.2 Approximation eines Black-Scholes Modells durch ein CRR Modell

Gegeben: Black-Scholes Modell mit den Parametern

$\sigma > 0$ für die Volatilität

$T > 0$ für die Laufzeit

$\mu > 0$ für den Trend

$r > 0$ für die Zinsrate

$$S(t) = S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Es soll in geeigneter Weise ein CRR Modell angepasst werden.
Teile hierzu den Zeitbereich in äquidistante Intervalle $[t_{i-1}, t_i]$ ein mit Intervalllänge $I_n = \Delta_n = \frac{T}{n}$.
Approximiere $S(t_j) = S(j\Delta)$ für $j = 1, ..., n$ durch

$$S_n(t_j) = S(0)u_n^{Z_n(j)} d_n^{j-Z_n(j)}$$

mit $Y_1, ..., Y_n$ iid, $\mathbb{P}(Y_i = u_n) = p_n = 1 - \mathbb{P}(Y_i = d_n)$.

$$Z_n(j) = \sum_{k=1}^{j} \mathbb{1}_{\{Y_k = u_n\}}$$

$(S_n(t_j))_{j=0,\ldots,n}$ definiert einen Aktienpreisprozess in einem CRR Modell.

Frage: Wie kann man u_n, d_n, p_n sinnvoll wählen?

Ansatz: Wähle u_n, d_n, p_n so, dass der Erwartungswert und die Varianz der log Rendite bis T übereinstimmen:
Es gilt im Black-Scholes Modell:

$$\mathbb{E}\log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) = \mathbb{E}(\mu T + \sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T$$

und

$$\text{Var } \log\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right) = \sigma^2 \text{Var } W_T = \sigma^2 T.$$

Im CRR Modell:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\log\frac{S_n(T)}{S_n(0)} &= \mathbb{E}\log\prod_{k=1}^{n} Y_k \\
&= \mathbb{E}\sum_{k=1}^{n}\log Y_k \\
&= n\mathbb{E}\log Y_1 \\
&= n((\log u_n)p_n + (\log d_n)(1-p_n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var } \log\frac{S_n(T)}{S_n(0)} &= \sum_{k=1}^{n}\text{Var } (\log(Y_1)) \\
&= n\left(p_n(\log u_n)^2 + (1-p_n)(\log d_n)^2 - ((\log u_n)p_n + (\log d_n)(1-p_n))^2\right)
\end{aligned}$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&p_n \log u_n + (1-p_n)\log d_n = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n} \\
&p_n \log^2 u_n + (1-p_n)\log^2 d_n) = \frac{\sigma^2 T}{n} + \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

welche durch

$$\log u_n = \frac{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{n} + \left(\frac{1-p_n}{p_n} \cdot \frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log d_n = \frac{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{n} - \left(\frac{p_n}{1-p_n} \cdot \frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

gelöst werden.
Strebt $p_n \longrightarrow p \in (0,1)$, so ist $d_n < \underbrace{e^{r\frac{T}{n}}}_{=1+\varrho_n} < u_n$, denn

$$\log u_n \sim \left(\frac{1-p_n}{p_n} \cdot \frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}} > r\frac{T}{n}$$

$$\log d_n \sim -\left(\frac{p_n}{1-p_n} \cdot \frac{\sigma^2 T}{n}\right)^{\frac{1}{2}} < r\frac{T}{n}$$

Im folgenden setze die Sprungwahrscheinlichkeit $p_n = p \in (0,1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definiere mit dem diskreten CRR Aktienprozess $(S_n(t_j))_{j=0,\dots,n}$ einen stochastischen Prozess $(S_n(t))_{0\le t\le T}$ durch

$$S_n(t) = S_n(t_{i-1}) \quad \text{für} \quad t_{i-1} \le t < t_i \quad \text{für alle } 1 \le i \le n.$$

Sei $t \in [0,T]$ fest. Für $i_n = \lfloor \frac{tn}{T} \rfloor = \lfloor \frac{t}{\Delta_n} \rfloor$ gilt:

$$i_n \frac{T}{n} \le t < (i_n + 1)\frac{T}{n}$$

$$\frac{i_n}{n} \longrightarrow \frac{t}{T}$$

Mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes für Dreieckschemata folgt

$$\log \frac{S_n(t)}{S_n(0)} = \log \frac{S_n(i_n \frac{T}{n})}{S_n(0)} = \underbrace{\log \frac{S_n(i_n \frac{T}{n})}{S_n(0)} - i_n \frac{1}{n}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}_{\longrightarrow N(0,\sigma^2 t) \text{ nach dem CLT}} + \underbrace{i_n \frac{1}{n}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}_{\longrightarrow(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

da $\mathbb{E}\log\left(\frac{S_n(i_n\frac{T}{n})}{S_n(0)}\right) = i_n\frac{1}{n}(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ und $\mathrm{Var}\ \log\left(\frac{S_n(i_n\frac{T}{n})}{S_n(0)}\right) = i_n\frac{1}{n}\sigma^2 T$.
Also gilt:

$$\log\left(\frac{S_n(t)}{S_n(0)}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t) \text{ in Verteilung}$$

Wegen $\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ folgt hieraus

$$S_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} S(t).$$

Für $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_k \le T$ folgt wegen der Unabhängigkeit und Stationarität von $\left(\log\left(\frac{S_n(j)}{S_n(0)}\right)\right)_{j=0,\dots,n}$ analog mit dem zentralen Grenzwertsatz

$$\left(\log\left(\frac{S_n(s_1)}{S_n(0)}\right), \dots, \log\left(\frac{S_n(s_k)}{S_n(0)}\right)\right) \xrightarrow{d} \left(\log\left(\frac{S(s_1)}{S(0)}\right), \dots, \log\left(\frac{S(s_k)}{S(0)}\right)\right).$$

Hieraus erhält man, dass die Familie der endlich dimensionalen Verteilungen von S_n gegen die Familie der endlich dimensionalen Verteilungen von S konvergiert.
Genauer:
Für alle $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \le T, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(S_n(t_1), \dots, S_n(t_k)) \xrightarrow{d} (S(t_1), \dots, S(t_k))$$

Zusammen mit einer Straffheitsbedingung folgt hieraus die schwache Konvergenz von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen S in $\mathbb{D}[0,T]$, mit

$$\mathbb{D}[0,t] := \{x : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R} : x \text{ ist rechsseitig stetig und hat linksseitige Limiten}\}.$$

7.2.1 Beispiel Put auf die Teslaaktie

Wir betrachten eine amerikanische Put-Option auf die Teslaaktie und wollen mit einem approximativen CRR-Modell den Preis berechnen. Die ausgewählte Put-Option hat die folgenden Kennzeichen:

- Wertpapierkennnummer ISIN:DE000JJ313J9
- Basispreis: 790 US Dollar
- Ausübungstag: 21.01.2022
- Restlaufzeit: 374 Tage

In Abhängigkeit vom augenblicklich gehandelten Teslaaktienkurs soll ein Preis ermittelt werden. Für die CRR Approximation werden die Informationen von Finanzinformationsdiensten genutzt. Es wird angenommen:

- Implizite Volatilität $78,38\%$,
- Zinsrate $0,34\%$
- Laufzeit $T = 374/365$,
- Startwert der Aktie: 820 US Dollar,
- Wechselkurs Euro-Dollar: $1,216$
- Periodenanzahl: 1000

Dies ergibt eine Approxomation durch ein CRR-Modell mit den folgenden Werten:

$$u = 1,025414 \quad d = 0,9752162 \quad \rho = 3,48384210^{-6} \quad p^* = 0,4937957 \quad n = 1000$$

Mit dem Algorithmus zur Bewertung von amerikanischen Optionen kann der Anfangspreis berechnet werden. Es ergibt sich ein Modellpreis von $190,8393$ Euro. Vergleicht man dies mit dem gehandelten Preis von 191 Euro, so erkennt man die Güte der Approximation.

7.3 Eigenschaften des Wiener Prozesses

7.3.1 Definition (Wienerprozess bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(W(t))_{t\geq 0}$ heißt **Wiener-Prozess bzgl** $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, wenn gilt:

(i) W ist adaptiert bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

(ii) $W(0) = 0 \quad \mathbb{P}$-f.s.

(iii) $W(t) - W(s)$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_s$ für alle $0 \leq s \leq t$

(iv) $W(t) - W(s) \sim W(t-s) \sim N(0, t-s)$ für alle $0 \leq s \leq t$

(v) W hat $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade

Im folgenden sollen Martingale bestimmt werden:

7.3.2 Satz

Sei W ein Wiener-Prozess bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann gilt:

(i) W ist ein Martingal

(ii) $(W(t)^2 - t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal

(iii) $(\exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t))_{t\geq 0}$ ist ein Martingal für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Aussagen erhält man durch Ausnutzen der unabhängigen Zuwächse beim Wiener-Prozess.

(i)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(t)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(W(s)+W(t)-W(s)|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}(W(s)|\mathcal{F}_s)+\mathbb{E}(W(t)-W(s)|\mathcal{F}_s)\\ &= W(s)+\underbrace{\mathbb{E}(W(t)-W(s))}_{\sim N(0,t-s)=0} \qquad \text{für alle } s\le t\end{aligned}$$

(ii) Für $s \le t$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(t)^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((W(s)+W(t)-W(s))^2|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}(W(s)^2+2W(s)(W(t)-W(s))+(W(t)-W(s))^2|\mathcal{F}_s)\\ &= W(s)^2+\mathbb{E}(2W(s)W(t)-W(s))|\mathcal{F}_s)+\mathbb{E}((W(t)-W(s))^2|\mathcal{F}_s)\\ &= W(s)^2+2W(s)\underbrace{\mathbb{E}(W(t)-W(s)|\mathcal{F}_s)}_{=\mathbb{E}(W(t)-W(s))=0}+\mathbb{E}((W(t)-W(s))^2)\\ &= W(s)^2+\mathbb{E}((W(t)-W(s))^2)\\ &= W(s)^2+\mathbb{E}(W(t-s)^2)\\ &= W(s)^2+(t-s)\end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbb{E}(W(t)^2-t|\mathcal{F}_s) = W(s)^2-s$$

(iii) Für $s \le t$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(\vartheta W(t))|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(s)+W(t)-W(s)))|\mathcal{F}_s)\\ &= \mathbb{E}(\exp(\vartheta W(s))\exp(\vartheta(W(t)-W(s))|\mathcal{F}_s)\\ &= \exp(\vartheta W(s))\mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(t)-W(s)))|\mathcal{F}_s)\\ &= \exp(\vartheta W(s))\mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(t)-W(s))))\\ &= \exp(\vartheta W(s))\mathbb{E}(\exp(\vartheta(W(t-s))))\\ &= \exp(\vartheta W(s))\exp(\frac{1}{2}\vartheta^2(t-s))\end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathbb{E}(\exp(\vartheta W(t)-\frac{1}{2}\vartheta^2 t)|\mathcal{F}_s) = \exp(\vartheta W(s)-\frac{1}{2}\vartheta^2 s)$$

□

Ziel: Konstruktion des äquivalenten Martingalmaßes im Black-Scholes Modell

7.4 Maßwechsel

Sei $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$ eine Filtration. Sei $(L_t)_{t\ge0}$ ein positives Martingal bzgl $\mathbb{P}$ und $\overline{\mathbb{P}}$ ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß aus $(\Omega,\mathcal{F})$ mit

$$\left.\frac{d\overline{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t \qquad \text{für alle } t\ge 0$$

Dann gilt:

(i) Ist Y messbar bezüglich $\mathcal{F}_t$ und existiert $\overline{\mathbb{E}}Y$, so gilt:

$$\overline{\mathbb{E}}(Y|\mathcal{F}_s) = \frac{\mathbb{E}(YL_t|\mathcal{F}_s)}{L_s} \qquad \text{für alle } s\le t.$$

Dabei ist $\overline{E}Y = \int Y d\overline{\mathbb{P}}$ und $\overline{\mathbb{E}}(Y|\mathcal{F}_s)$ der bedingte Erwartungswert von Y bzgl $\overline{\mathbb{P}}$.

(ii) $(M_t)_{t\ge0}$ ist ein $\overline{\mathbb{P}}$-Martingal genau dann, wenn $(M_tL_t)_{t\ge0}$ ein $\mathbb{P}$-Martingal ist.

(iii) Ist $(R_t)_{t\geq 0}$ ein positives $\mathbb{P}$-Martingal mit $\mathbb{E}R_t = 1$ für alle $t \geq 0$, so kann auf jedem $\mathcal{F}_T$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q_T definiert werden, so dass

$$\frac{dQ_T}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = R_t \qquad \text{für alle } t \leq T.$$

Beweis. zu (i): Sei Y $\mathcal{F}_t$-messbar und $A \in \mathcal{F}_s$.

$$\begin{aligned}\int_A Y d\overline{\mathbb{P}} = \int_A Y L_t d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{E}(Y L_t|\mathcal{F}_s) d\mathbb{P} \\ &= \int_A \frac{\mathbb{E}(Y L_t|\mathcal{F}_s)}{L_s} d\overline{\mathbb{P}}, \text{ da } \frac{d\mathbb{P}}{d\overline{\mathbb{P}}}\bigg|_{\mathcal{F}_s} = \frac{1}{L_s}\end{aligned}$$

zu (ii):

$$\begin{aligned}(M_t) \text{ ist ein } \overline{\mathbb{P}}\text{-Martingal } &\Leftrightarrow \overline{\mathbb{E}}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s \qquad \text{für alle } s \leq t \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(M_t L_t|\mathcal{F}_s)\frac{1}{L_s} = M_s \qquad \text{für alle } s \leq t \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(M_t L_t|\mathcal{F}_s) = M_s L_s \qquad \text{für alle } s \leq t \\ &\Leftrightarrow ML \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{-Martingal}\end{aligned}$$

zu (iii): Wegen $\mathbb{E}R_T = 1$ definiert $Q_T(A) = \int_A R_T d\mathbb{P}$ für alle $A \in \mathcal{F}_T$ ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
Für $A \in \mathcal{F}_t$ mit $t \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned}Q_T(A) = \int_A R_T d\mathbb{P} &= \int_A \mathbb{E}(R_T|\mathcal{F}_t) d\mathbb{P} \\ &= \int_A R_t d\mathbb{P}\end{aligned}$$

Also ist $R_t = \frac{dQ_T}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{F}_t}$

□

7.5 Girsanov Transformation (einfachster Fall)

Sei $(W(t))_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Sei für $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein weiteres Maß $\mathbb{P}_\vartheta$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ gegeben, mit

$$\frac{d\mathbb{P}_\vartheta}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)$$

für alle $t \geq 0$, wobei $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t)$. Dann wird durch

$$\overline{W}(t) = W(t) - \vartheta t$$

für alle $t \geq 0$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_\vartheta$ definiert.

Beweis. Zeige die definierenden Eigenschaften des Wiener-Proesses bezüglich $\mathbb{P}_\vartheta$:

(i) $(\overline{W}(t))_{t\geq 0}$ hat stetige Pfade mit $\overline{W}(0) = 0$

(ii) $\overline{W}(t) - \overline{W}(s)$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und $N(0, t-s)$ verteilt.

zu (i): klar

zu (ii): Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und messbar.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta(g(\overline{W}(t) - \overline{W}(s))|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(g(\overline{W}(t) - \overline{W}(s))L_t|\mathcal{F}_s)\frac{1}{L_s} \\
&\quad \text{mit } L_t = \exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t) \\
&= \mathbb{E}(g(W(t) - W(s) - \vartheta(t-s))\frac{L_t}{L_s}|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(g(W(t) - W(s) - \vartheta(t-s))\exp(\vartheta(W(t) - W(s)) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s))|\mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}g(W(t) - W(s) - \vartheta(t-s))\exp(\vartheta(W(t) - W(s)) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s)) \\
&= \mathbb{E}g(W(t-s) - \vartheta(t-s))\exp(\vartheta W(t-s) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s)) \\
&= \mathbb{E}_\vartheta g(\overline{W}(t-s))
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:
$\overline{W}(t) - \overline{W}(s)$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und genau so verteilt wie $\overline{W}(t-s)$. Dies ist eine $N(0, t-s)$ Verteilung, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\vartheta g(\overline{W}(t)) &= \mathbb{E}g(W(t) - \vartheta t)\exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t) \\
&= \mathbb{E}g(W(t) - \vartheta t)\exp(\vartheta(W(t) - \vartheta t) + \frac{1}{2}\vartheta^2 t) \\
&= e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\int g(x)e^{\vartheta x}N(-\vartheta t, t)(dx) \\
&= e^{\frac{1}{2}\vartheta^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int g(x)e^{\vartheta x}\exp(-\frac{1}{2t}(x+\vartheta t)^2)dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int g(x)e^{-\frac{1}{2t}x^2}dx \\
&= \int g(x)N(0,t)(dx)
\end{aligned}$$

Also hat $\overline{W}(t)$ eine $N(0,t)$-Verteilung bzgl $\mathbb{P}_\vartheta$.

□

7.6 Äquivalentes Martingalmaß im Black-Scholes Modell

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.
Sei W ein Wiener-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
Wir betrachten einen Finanzmarkt über den Handelszeitraum $[0,T]$ und setzen als Preisprozess eines risky assets

$$S(t) = S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), 0 \leq t \leq T.$$

Dabei sind

- $S(0) > 0$ Anfangspreis
- $\mu \in \mathbb{R}$ Trendparameter
- σ Volatilität

Sei $\beta(t) = e^{rt}, t \geq 0$ der Preisprozess eines Geldmarktkontos mit Zinsrate r.

7.6.1 Definition (äquivalentes Martingalmaß)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ heißt **äquivalentes Martingalmaß** genau dann, wenn

(i) $\mathbb{P}^\star$ ist äquivalent zu $\mathbb{P}$ auf $\mathcal{F}_T$

(ii) $S^\star(t) := \frac{S(t)}{\beta(t)} = e^{-rt}S(t), 0 \le t \le T$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal.

Ansatz zur Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes

$$\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)$$

Zu bestimmten ist ϑ:
Girsanov liefert

$$W^\star(t) = W(t) - \vartheta t, t \ge 0$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl $\mathbb{P}^\star$.
Bzgl. $\mathbb{P}^\star$ gilt:

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\ &= S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma(W^\star(t) + \vartheta t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\ &= S(0)\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{(\mu+\sigma\vartheta)t} \end{aligned}$$

Also
$S^\star(t) = e^{-rt}S(t) = S(0)\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{(\mu+\sigma\vartheta-r)t}$
und damit
$(S^\star(t))$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal genau dann, wenn

$$\mu - r + \sigma\vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$$

Ergebnis: Für $\vartheta = -\frac{\mu-r}{\sigma}$ ist $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß.

7.6.2 Bemerkung:

Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ gilt:

$$S(t) = S(0)e^{rt}\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \ge 0$$

Also ist $S(t)$ ein geometrischer Wiener-Prozess mit Trend r und Volatilität σ.
$\left(\frac{S^\star(t)}{S(0)}\right)_{t\ge0}$ ist ein $\mathbb{P}^\star$-Martingal und damit ein positives Martingal mit

$$\mathbb{E}^\star\frac{S^\star(t)}{S(0)} = \frac{S^\star(0)}{S(0)} = 1$$

Deshalb kann ein Maßwechsel durchgeführt werden.

$$\frac{d\mathbb{P}^\star_\sigma}{d\mathbb{P}^\star}\bigg|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S^\star(t)}{S(0)} = \exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Da $W^\star$ ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^\star$ ist, gilt nach Girsanov

$$W^{\star\star}(t) = W^\star(t) - \sigma t, t \ge 0$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^\star_\sigma$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)\exp(\sigma W^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t))e^{rt} \\ &= S(0)\exp(\sigma(W^{\star\star}(t) + \sigma t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)e^{rt} \\ &= S(0)e^{(r+\sigma^2)t}\exp(\sigma W^{\star\star}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \end{aligned}$$

Der Aktienpreisprozess $(S(t))_{t\ge0}$ ist ein geometrischer Wiener-Prozess

mit Trend/Drift μ	Volatilität σ	bzgl. $\mathbb{P}$.
mit Trend/Drift r	Volatilität σ	bzgl. $\mathbb{P}^\star$.
mit Trend/Drift $r + \sigma^2$	Volatilität σ	bzgl. $\mathbb{P}^\star_\sigma$.

7.7 Bewertung von Claims

Ein Derivat ist ein Wertpapier, das eine zufällige Auszahlung C zum Zeitpunkt T garantiert.
Im mathematischen Modell entspricht dies einer $\mathcal{F}_T$ messbaren Zufallsvariablen C.
Annahme:

$$\mathbb{E}^\star|C^\star| < \infty \quad \text{, wobei } \; C^\star := e^{-rT}C.$$

Klar ist:

$$\mathbb{E}^\star|C^\star| < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}^\star|C| < \infty$$

Anders als in diskreter Zeit können wir jetzt noch nicht einen Handel im Finanzmarkt mathematisch definieren, da die Grundlagen der stochastischen Analysis fehlen. Vorgreifend können wir aber ohne Beweis feststelllen, dass C durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie replizierbar ist. Deshalb gibt es einen eindeutigen arbitragefreien Preisprozess $(p_t(C))_{0\le t\le T}$. Analog zum diskreten Black-Scholes Modell ist dieser gegeben durch

$$e^{-rt}p_t(C) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \qquad 0 \le t \le T$$

Insbesondere ist der Anfangspreis

$$p_0(C) = \mathbb{E}^\star(C^\star) = \mathbb{E}^\star(e^{-rT}C).$$

7.7.1 Black-Scholes Formel

Betrachtet wird eine Calloption

$$C = (S_T - K)^+$$

Zu bestimmen ist

$$\mathbb{E}^\star(e^{-rT}(S_T - K)^+|\mathcal{F}_t) = p_t(C)e^{-rt}$$

Sei zunächst $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star(e^{-rT}(S_T - K)^+) &= \mathbb{E}^\star e^{-rT} S_T \mathbb{1}_{\{S_T>K\}} - \mathbb{E}^\star e^{-rT} K \mathbb{1}_{\{S_t>K\}} \\
&= S(0)\mathbb{E}^\star \frac{S_T^\star}{S(0)} \mathbb{1}_{\{S_T>K\}} - e^{-rT} K \mathbb{E}^\star \mathbb{1}_{\{S_T>K\}} \\
&= S(0) \underbrace{\mathbb{P}_\sigma^\star(S_T > K)}_{(1)} - e^{-rT} K \underbrace{\mathbb{P}^\star(S_T > K)}_{(2)}
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der ersten Wahrscheinlichkeit ist zu erinnern, dass unter $\mathbb{P}_\sigma^\star$ der Aktienpreis in T dir Darstellung

$$S_T = S(0)\exp(\sigma W_T^{\star\star} - \frac{1}{2}\sigma^2 T)e^{(r+\sigma^2)T}$$

mit einem Wiener-Prozess $W^{\star\star}$ bezüglich $\mathbb{P}_\sigma^\star$ hat. Deshalb gilt zu (1):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\sigma^\star(S_T > K) &= \mathbb{P}_\sigma^\star\left(\log\left(\frac{S_T}{S(0)}\right) > \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}_\sigma^\star\left(\sigma W_T^{\star\star} - \frac{1}{2}\sigma^2 T + (r+\sigma^2)T > \log\left(\frac{K}{S(0)}S\right)\right) \\
&= \mathbb{P}_\sigma^\star\left(\underbrace{\frac{W_T^{\star\star}}{\sqrt{T}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\left(\frac{K}{S(0)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T - (r+\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \text{ mit } \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}x^2}dx
\end{aligned}$$

zu (2):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\star(S_T > K) &= \mathbb{P}^\star\left(\log\left(\frac{S_T}{S(0)}\right) > \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}^\star\left(\sigma W_T^\star - \frac{1}{2}\sigma^2 T + rT > \log\left(\frac{K}{S(0)}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}^\star\left(\underbrace{\frac{W_T^\star}{\sqrt{T}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\left(\frac{K}{S(0)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T - rT}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

Ergebnis:
Bezeichnet $c(S_0, T, K)$ den Anfangspreis einer Calloption mit Laufzeit T, Basis K und Anfangsaktienkurs S_0, so gilt:

$$\begin{aligned}
c(S_0, T, K) &= S_0 \Phi(h_1(S_0, T)) - K e^{-rT} \Phi(h_2(S_0, T)) \\
\text{mit } h_1(S_0, T) &= \frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \\
\text{und } h_2(S_0, T) &= \frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis können ir nutzen, um den arbitragefreien Preisprozess einer Call-Option auszurechnen. Da der Aktienpreisprozess, gegeben $\mathcal{F}_t$, sich verhält wie in einem Black-Scholes Modell mit Laufzeit $T-t$ und Anfangskurs S_t ergibt sich für den Callpreis zum Zeitpunkt t

$$p_t(C) = c(S_t, T-t, K).$$

Dies kann man mit Hilfe der Markov-Eigenschaft zeigen:

$$\begin{aligned}
p_t(C) &= \mathbb{E}^\star(e^{-rT}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) e^{rt} = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^\star((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^\star((S_T - K)^+ | S_t) \\
&= \mathbb{E}^\star(e^{-r(T-t)}(S_T - K)^+ | S_t) \\
&= c(S_t, T-t, K)
\end{aligned}$$

denn

$$\mathbb{E}^\star((S_T - K)^+ | S_t = x) = \mathbb{E}^\star((S_{T-t} - K)^+ | S_0 = x).$$

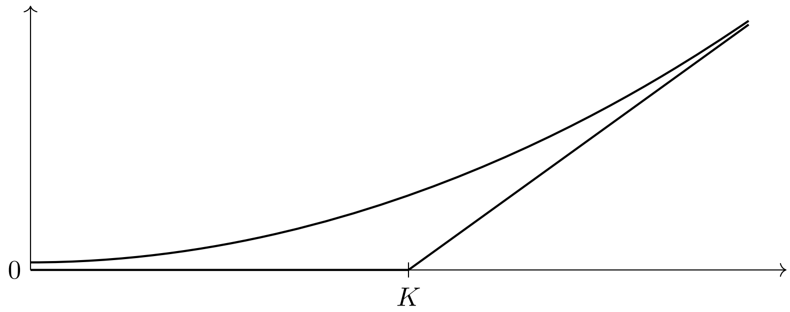
Man kann auch folgendermaßen argumentieren:

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^\star((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^\star((S_t \frac{S_T}{S_t} - K)^+ | \mathcal{F}_t) = c(S_t, T-t, K),$$

denn $\frac{S_T}{S_t}$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_t$ und genauso verteilt wie S_{T-t}.

7.7.2 Greeks

Der Call-Preis hängt von verschiedenen Einflussgrößen ab. Deren Wirkung spielt beim Handel mit diesen Optionen eine Rolle, weshalb diese Kennzahlen als sogenannte Greeks veröffentlicht werden.
Sei $c(x, t, \sigma, K)$ der Preis einer Calloption mit Laufzeit t, Volatilität σ, Basis K und Anfangskurs der Aktie x.



Eigenschaften für

$$c(x,t,\sigma,K) = x\Phi(h_1(x,t)) - Ke^{-rt}\Phi(h_2(x,t))$$

i) $\lim\limits_{t\searrow 0} = c(x,t,\sigma,K) = (x-K)^+$

ii) $\partial_t c + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_x^2 c + rx\partial_x = rc$ auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$
Dies ist die Black-Scholes Differentialgleichung. Diese folgt aus der Identität

$$x\varphi(h_1(x,t)) - Ke^{-rt}\varphi(h_2(x,t)) = 0.$$

Man kann die partielle Differentialgleichung auch mit Methoden der stochastischen Analysis unter Verwendung der Ito-Formel ausrechnen.

iii) **Delta:**
c ist strikt wachsend als Funktion des Aktienanfangskurses mit

$$\Delta = \partial_x c = \Phi(h_1) > 0$$

Das Delta gibt den Aktienanteil in der Replikationsstrategie an. Setze

$$H(t) = \partial_x c(S_t, T-t), \Psi(t) = -Ke^{-rT}\Phi(h_2(S_t, T-t)).$$

Dann wird durch $(\Psi(t), H(t))_{0\leq t\leq T}$ eine selbstfinanzierenden Handelsstrategie definiert, welche die Calloption repliziert. Also

$$\begin{aligned}
V_t((H,\Psi)) &= H(t)S(t) + \Psi(t)\beta(t)\\
&= S(t)\Delta(t) + \Psi(t)\beta(t)\\
&= S(t)\Phi(h_1(S(t),T-t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(h_2(S(t),T-t))\\
&= c(S(t),K,T-t)
\end{aligned}$$

ist der Preis der Calloption mit Fälligkeit T in t bei Aktienkurs $S(t)$ in t.

iv) **Gamma:**
$\Gamma := \partial_x^2 c = \varphi(h_1(x,t))\partial_x h_1(x,t) = \frac{\varphi(h_1(x,t))}{\sigma\sqrt{t}x} > 0$
Beachte $\partial_x h_1(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}x}$
Γ ist ein Maß für die Änderung des Δ und gibt in der Anwendung an, wie sensitiv der Δ-Hedge gegenüber einer Änderung im Aktienanteil ist. Deshalb ist das Gamma im Risikomanagement eine wichtige Kenngröße.

v) **Theta:**
$\Theta := \partial_t c = \frac{x\sigma}{2\sqrt{t}}\varphi(h_1(x,t)) + Kre^{-rt}\Phi(h_2(x,t)) > 0$
Der Preis der Option ist monoton wachsend in der Laufzeit.

vi) **Lambda/Vega:**
$\nu = \Lambda := \frac{\partial c}{\partial\sigma} = x\varphi(h_1(x,t))\sqrt{t} > 0$
Eine höhere Volatilität signalisiert eine erhöhte Unsicherheit im Markt, die zu höheren Optionspreisen führt.

vii) **Rho:**
$\varrho := \frac{\partial c}{\partial r} = Kre^{-rt}\Phi(h_2(x,t)) > 0$
Der Optionspreis wächst mit der Zinsrate.

7.7.3 Δ-Hedge

Wir betrachten ein Derivat C, das zu einer Laufzeit T eine Claimauszahlung C zusichert und nehmen an, dass der arbitragefreie Anfangspreis in einem Black-Scholes Modell mit Anfangsaktienkurs x die Form hat

$$p(C) = \mathbb{E}^* e^{-rT} C = v_C(T, x).$$

Dies ist z.B. bei pfadunabhängigen Optionen der Form $C = g(S(T))$ der Fall. Die partielle Ableitung des Preises nach dem Aktienkurs

$$\Delta_C(T, x) = \partial_x v_C(T, x)$$

nennt man das Delta des Derivates.

1. Aktie:
   Für $C = S(T)$ ist der Preis $v_C(T, x) = x$ und damit ist das Delta der Aktie 1.

2. Geldmarktkonto:
   Für $C = 1$ ist $v_C(T, x) = e^{-rT}$ und damit das Delta des Geldmarktkontos 0. Die Aktie hat keinen Einfluss auf den Preis eines Geldmarktkontos.

Ein Verkäufer des Derivates geht eine short Position im Derivat ein und kann versuchen durch das Eingehen einer long oder short Position in der Aktie, das Risiko zu eliminieren. Zu bestimmen ist die Anzahl $H(T)$ an Aktien, so dass das Delta der Gesamtposition verschwindet. Die Gesamtposition ist

$$G = -C + H(0)S(T)$$

und kann als Derivat mit Auszahlung G in T aufgefasst werden. Das Delta der Gesamtposition setzt sich aus den Delta der Einzelpositionen zusammen, d.h.

$$\Delta_G(T, x) = -\Delta_C(T, x) + H(0)\Delta_S(T, x) = -\Delta_C(T, x) + H(0).$$

Verschwindet das Δ der Gesamtposition, so hat die Aktie keinen Einfluss auf den Preis der Gesamtposition und man nennt ein solches Portfolio risikoneutral. Dies bedeutet, dass eine short Position im Derivat durch Halten von $H(0) = \Delta_C(T, x)$ Aktien deltaneutral und damit risikoneutral wird. Das Risiko ist am Anfang eliminiert worden. Das deltaneutrale Portfolio verhält sich am Anfang wie eine Position im Geldmarktkonto. Mit Hilfe des Delta-Hedge kann die Position der Replikationsstrategie gewonnen werden durch

$$H(0)S(0) - K(0) = v_C(T, x).$$

Diese risikoneutrale Gesamtposition gilt aber nur für den Anfang. Zu einem Zeitpunkt $t > T$ kann aber analog vorgegangen werden. Dann liegt ein Aktienkurs $S(t)$ vor bei einer Restlaufzeit von $T - t$. Also ist

$$\Delta_G(T - t, S(t)) = -\Delta_C(T - t, S(t)) + H(t) = 0$$

zu bestimmen, was

$$H(t) = \Delta_C(T - t, S(t))$$

impliziert. Man erhält also, dass das Halten von $H(t)$ Aktien zu jedem Zeitpunkt t das Risiko des Derivates während der gesamten Laufzeit eliminiert. Eine Replikationsstrategie erhält man durch

$$H(t)S(t) + K(t)\beta(t) = v_C(T - t, T - t).$$

Beispiele sind

1. Call:
   - Laufzeit T,
   - Basis K,
   - Anfangsaktienkurs x

   Dann ist

   $$\Delta_C(T, x) = \Phi(h_1(T, x))$$

   mit

   $$h_1(T, x) = \frac{\log\left(\frac{x}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Man beachte $0 < \Delta_C(T,x) < 1$. Der Delta-Hedge besteht also in einer long Position in der Aktie.

Konkretes Beispiel:

$$T = 1, \quad x = 8 = K, \quad \sigma = 0.4, \quad r = 0.04$$

Dann ist

$$\Delta_C(T,x) = \phi(0.3) = 0.618.$$

Es müssen also 0.618 Aktien gekauft werden, um die short Position des Calls risikoneutral zu machen.

2. Put:
Laufzeit und Basis sollen die des Calls sein. Dann kann man das Delta des Puts aus der Preisformel für den Put und Ableiten nach dem Aktienkurs bestimmen. Alternativ kann man aber auch das Portfolio aus long Call und short Put betrachten. Wegen

$$(S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+ = (S(T) - K)$$

ist

$$\Delta_C(T,x) - \Delta_P(T,x) = \Delta_S(T,x) = 1$$

und somit

$$\Delta_P(T,x) = \Delta_C(T,x) - 1 = \Phi(h_1(T,x)) - 1.$$

Für den Delta-Hedge muss man also short in den Put gehen.

Für das obige konkrete Beispiel bedeutet dies

$$\Delta_P(T,x) = \phi(0.3) - 1 = 0.618 - 1 = -0.382.$$

Die short Position im Put wird also risikoneutral durch einen Leerverkauf von 0.382 Aktien.

7.7.4 Γ-Hedge

Um das Risiko vollständig während der Laufzeit zu eliminieren, muss ständig eine deltaneutrale Gesamtposition eingenommen werden. Dies erfordert eine zeitstetige Änderung der Aktienposition, welches nur im theoretischen Modell möglich ist. In der Praxis kann immer nur zu diskreten Zeitpunkten eine Änderung der Aktienposition vorgenommen werden. In der Zwischenzeit wird durch die Änderung des Aktienkurses die Deltaneutralität verletzt, so dass Risiken entstehen. Je stärker die Änderung des Delta ist, je stärker ist dabei auch das entstehende Risiko, weshalb das Gamma eines Derivates die Sensitivität bezüglich des entstehenden Risikos durch diskretes Handeln widerspiegelt. Wie oben betrachten wir ein Derivat C, das zu einer Laufzeit T eine Claimauszahlung C zusichert und nehmen an, dass der arbitragefreie Anfangspreis in einem Black-Scholes Modell mit Anfangsaktienkurs x die Form hat

$$p(C) = \mathbb{E}^* e^{-rT} C = v_C(T,x).$$

Die zweite partielle Ableitung des Preises nach dem Aktienkurs

$$\Gamma_C(T,x) = \partial_x^2 v_C(T,x)$$

wird Gamma des Derivates genannt.
Für $C = S(T)$, also einer Aktie, verschwindet das Gamma, da das Delta konstant 1 ist.
Haben wir ein Portfolio G aus Derivaten $C_1, \cdots, C_n$, so ist das Gamma der Gesamtposition

$$G = C_1 + \cdots + C_n$$

bestimmt durch die Summe der Gammas der Einzelpositionen, i.e.

$$\Gamma_G(T,x) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{C_k}(T,x).$$

Ziel beim Risikomanagement ist es, ein Portfolio zu bilden, das sowohl deltaneutral als auch gammneutral ist. Dann wird das Risiko eliminiert und eine zeitdiskrete Änderung der Positionen verursacht ein geringeres Risiko als wenn nur dein deltaneutrales Portfolio benutzt wird.

1. Call:
   Wir betrachten einen Call mit Basis K und Laufzeit T. Um einen Γ-Hedge zu berechnen, der also sowohl delta- als auch gammaneutral ist, ist es notwendig neben der Aktie auch noch ein weiteres Finanzgut, etwa einen Call zur gleichen Laufzeit, aber mit anderer Basis K_1 hinzuzunehmen. Sei also C_1 ein solcher Call. Wir bilden folgendes Portfolio

$$G = -C + H(0)S(T) + K(0)C_1.$$

   Die unbekannten Größen $H(0)$ und $K(0)$, die die Anzahl an Aktien und K_1-Calls angeben, die die Gesamtposition delta-und gammaneutral machen, bestimmen sich aus:

$$\begin{aligned} \Delta_G(T,x) &= -\Delta_C(T,x) + H(0) + K(0)\Delta_{C_1}(T,x) = 0 \\ \Gamma_G(T,x) &= -\Gamma_C(T,x) + K(0)\Gamma_{C_1}(T,x) = 0 \end{aligned} \tag{44}$$

   Hieraus erhält man

$$K(0) = \frac{\Gamma_C(T,x)}{\Gamma_{C_1}(T,x)} = \frac{\varphi(h_1(x,T,K))\partial_x h_1(x,t,K)}{\varphi(h_1(x,T,K_1))\partial_x h_1(x,T,K_1)} = \frac{\varphi(h_1(x,T,K))}{\varphi(h_1(x,T,K_1))}$$

   und

$$H(0) = \Delta_C(T,x) - K(0)\Delta_{C_1}(T,x).$$

   Nimmt man im obigen Zahlenbeispiel einen Call mit Basis $K_1 = 12$ hinzu, so ergibt sich

$$K(0) = 1.237 \quad , \quad H(0) = 0.324.$$

   Man verringert also die Aktienposition und kauft dafür Call-Optionen zur Basis K_1, um das Portfolio gammaneutral zu bekommen.

2. Put:
   Laufzeit und Basis sollen die des Calls sein. Dann kann man das Delta des Puts aus der Preisformel für den Put und Ableiten nach dem Aktienkurs bestimmen. Alternativ kann man aber auch das Portfolio aus long Call und short Put betrachten. Wegen

$$(S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+ = (S(T) - K)$$

   ist

$$\Gamma_C(T,x) - \Gamma_P(T,x) = \Gamma_S(T,x) = 0$$

   und somit

$$\Gamma_P(T,x) = \Gamma_C(T,x).$$

   Für einen Put im obigen Beispiel mit Basis $K = 8$ betrachte zum zusätzlichen Hedgen einen weiteren Put mit Basis $K_1 = 12$. Dann bestimmt sich der Γ-Hedge aus den Gleichungen.

$$\begin{aligned} -\Delta_P(T,x) + H(0) + K(0)\Delta_{P_1}(T,x) &= 0 \\ -\Gamma_P(T,x) + K(0)\Gamma_{P_1}(T,x) &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

   Hieraus erhält man

$$K(0) = \frac{\Gamma_P(T,x)}{\Gamma_{P_1}(T,x)} = \frac{\Gamma_C(T,x)}{\Gamma_{C_1}(T,x)} = 1.237.$$

   und

$$\begin{aligned} H(0) &= \Delta_P(T,x) - K(0)\Delta_{P_1}(T,x) = \Delta_C(T,x) - 1 - K(0)(\Delta_{C_1}(T,x) - 1) \\ &= \Delta_C(T,x) - K(0)\Delta_{C_1}(T,x) + K(0) - 1 = 0.324 + 0.237 = 0.561. \end{aligned}$$

   Im Vergleich zum Δ-Hedge kauft man also 0.561 Aktien und 1.237 Puts mit Basis $K_1 = 12$

7.7.5 Vega-Hedge

Eine weitere Größe, die das Risiko einer Hedgestrategie bestimmt, ist die Volatilität. Dies wird durch das Vega-bzw. Lambda einer Position bezeichnet. Wie oben betrachten wir ein Derivat C, das zu einer Laufzeit T eine Claimauszahlung C zusichert und nehmen an, dass der arbitragefreie Anfangspreis in einem Black-Scholes Modell mit Anfangsaktienkurs x die Form hat

$$p(C) = \mathbb{E}^* e^{-rT} C = v_C(T, x, \sigma).$$

Die partielle Ableitung des Preises nach der Volatilität

$$\nu_C(T, x) = \partial_\sigma v_C(T, x, \sigma)$$

wird Vega oder auch Lambda des Derivates genannt.
Für $C = S(T)$, also einer Aktie, verschwindet das Vega. Für einen Call und einen Put zur Basis K gilt für das Vega

$$\nu_C(T, x, \sigma) = \nu_P(T, x, \sigma) = x\varphi(h_1(x, T))\sqrt{T} = x^2 T \sigma \Gamma_C(T, x) > 0.$$

Haben wir ein Portfolio G aus Derivaten $C_1, \cdots, C_n$, so ist das Vega der Gesamtposition

$$G = C_1 + \cdots + C_n$$

bestimmt durch die Summe der Vegas der Einzelpositionen, i.e.

$$\nu_G(T, x, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} \nu_{C_k}(T, x, \sigma).$$

Ziel beim Risikomanagement ist es, ein Portfolio zu bilden, das sowohl delta-,gamma- als auch vegaeutral ist. Dann wird das Risiko der Volatilitätsänderung beim Hedgen eliminiert. Um dies zu erreichen, muss ein weiteres Finanzgut hinzugenommen werden.

1. Call:
   Wir betrachten einen Call mit Basis K und Laufzeit T. Um einen ν-Hedge zu berechnen, der also sowohl delta-,gamma- als auch veganeutral ist, ist es notwendig neben der Aktie, mindestens zwei weitere Finanzgüter hinzuzunehmen, etwa zwei weitere Calls zu unterschiedlichen Laufzeiten $T < T_1 < T_2$. Seien also C_1 und C_2 solche Calls. Wir bilden folgendes Portfolio

   $$G = -C + H_S(0)S(T) + H_1(0)C_1 + H_2(0)C_2$$

   Zu bestimmen sind $H_S(0), H_1(0)$ und $H_2(0)$, so dass die drei Neutralitätsbedingungen erfüllt sind. Also sind die Gleichungen

   $$\begin{aligned} 0 &= \Delta_G(T, x) = -\Delta_C(T, x) + H_S(0) + H_1(0)\Delta_{C_1}(T_1, x) + H_2(0)\Delta_{C_2}(T_2, x) \\ 0 &= \Gamma_G(T, x) = -\Gamma_C(T, x) + H_1(0)\Gamma_{C_1}(T_1, x) + H_2(0)\Gamma_{C_2}(T_2, x) \\ 0 &= \nu_G(T, x) = -\nu_C(T, x) + H_1(0)\nu_{C_1}(T_1, x) + H_2(0)\nu_{C_2}(T_2, x) \end{aligned}$$

   zu lösen.

2. Put:

   Hier kann ähnlich wie beim Call argumentiert werden.

   Wie beim Γ stimmt das Vega des Puts mit dem Vega des Calls bei gleicher Laufzeit und Basis überein, da das Vega der Aktie verschwindet. Um eine veganeutrale Strategie zu bestimmen, kann wie beim Call vorgegangen werden.

7.7.6 Smile-Effekt

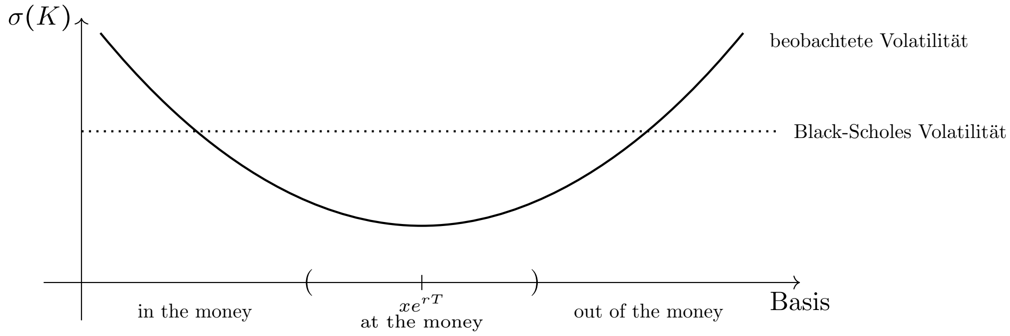
Das Black-Scholes Modell ist ein sehr einfaches Modell zur Beschreibung von Aktienkursen.

Erklärt das Modell die empirischen Phänomene?

Antwort: Nein, da der beobachtbare Smile-Effekt im Black-Scholes Modell nicht erklärbar ist.
Um dies zu erklären, fixiere wir eine Aktie mit Anfangskurs x, einer Laufzeit T und die zur Laufzeit gehörende Zinsrate r.
Wir betrachten den Callpreis als Funktion der Basis.
Zu verschiedenen Basispreisen K sind Marktpreise $c_{\text{Markt}}(K)$ der dazugehörigen Option abrufbar.
Zu jedem K kann die Modellvolatilität $\sigma(K)$ so bestimmt werden, dass Modellpreis und Marktpreis übereinstimmen, d.h.

$$c(x, T, \sigma(K), K) = c_{\text{Markt}}(K)$$

$\sigma(K)$ heißt die zur Basis K gehörige implizite Volatilität.
Wäre das Black-Scholes Modell exakt richtig, so müsste $\sigma(K)$ als Funktion in K konstant sein. Man stellt jedoch fest, das $\sigma(K)$ folgenden Verlauf hat:



Dieser am Markt beobachtbare Smile-Effekt widerspricht der Annahme eines Black-Scholes Modells.
Verbesserung: Ersetze die globale Volatilität σ durch eine lokale Volatilitätsfunktion $(t, x) \mapsto \sigma(t, x)$.
Es ergibt sich dann bzgl. eines äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^\star$ der Aktienpreisprozess

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma(t, S(t))dW^\star(t))$$

Dieser wird gelöst durch

$$S(t) = S(0)e^{rt} \exp\left(\int_0^t \sigma(u, S(u))dW^\star(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u, S(u))du\right)$$

In einem solchen Markt kann aus empirischen Optionspreisen für unterschiedliche Laufzeiten und strikes eine lokale Volatilitätsfunktion σ ermittelt werden, so dass Modell-und Marktpreise übereinstimmen. Dies ist die sogenannte Formel von Dupiere.

7.7.7 Beispiel: Aktienanleihe

Als Anwendungsbeispiel wollen wir eine Aktienanleihe auf die Teslaaktie betrachten. Dies ist ein Zertifikat, das von der Hypo-Vereinsbank am 21.01.2021 emittiert wird. Kennzeichen dieses Derivates sind:

- Wertpapierkennnummer: ISIN DE000HVB50E1
- Referenzaktie: Tesla gehandel an der Nasdag in Dollar
- Nominal (Nennbetrag): 1000 Euro
- Referenzpreis: Kurs der Teslaaktie am 22.01.2021
- Basispreis: 80% des Referenzpreises
- Zinsrate: 16%
- Laufzeit: 1 Jahr
- Bezugsverhältnis: Nominal*Wechselkurs/Basispreis

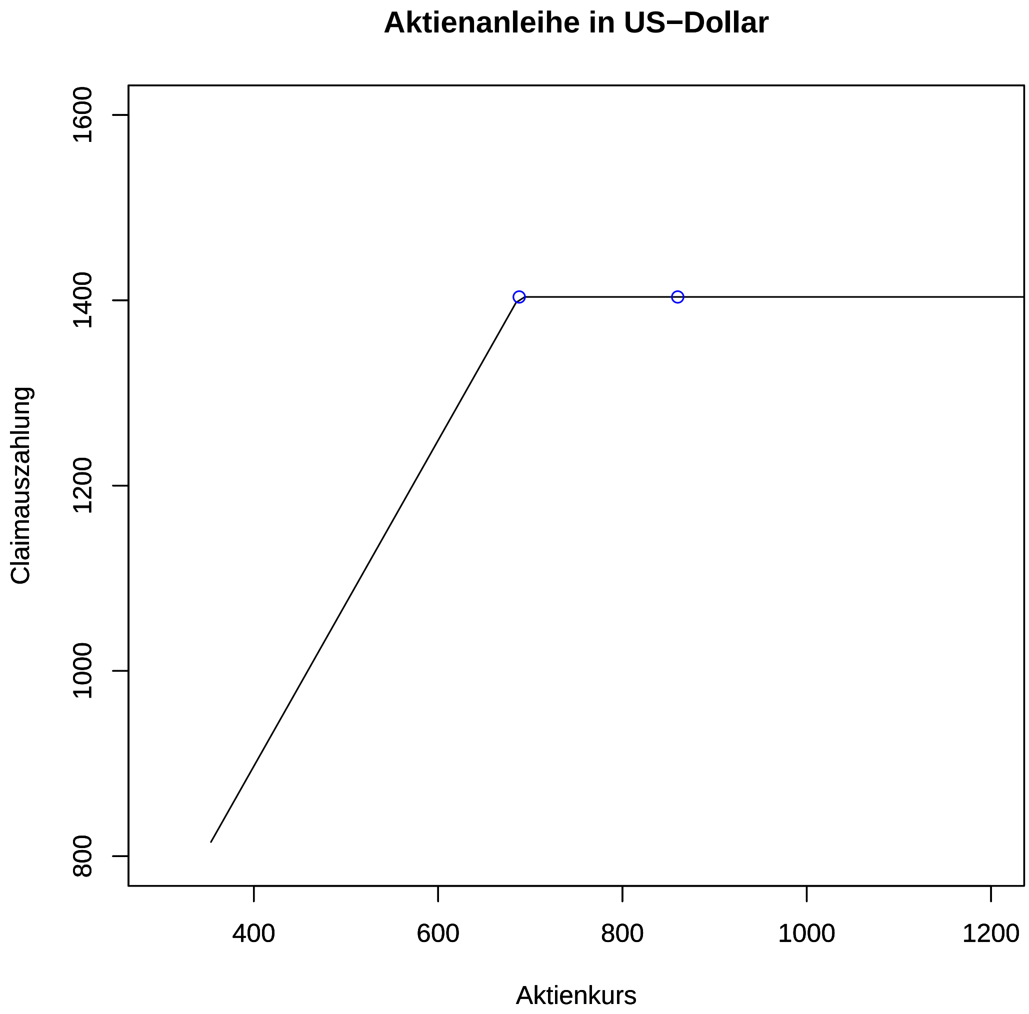


Abbildung 2: Plot der Claimauszahlung der Aktienanleihe in T

Wirkungsweise: Bezeichne mit N das Nominal, R die Zinsrate, K den Basispreis, T die Laufzeit, w den Wechselkurs Euro zu US Dollar und S die Kursentwicklung der Teslaaktie. Der Inhaber der Aktienanleihe erhält nach einem Jahr die Kouponzahlung

$$C = N \cdot R \cdot T \quad \text{Euro} \quad = \quad N \cdot R \cdot T \cdot w \quad \text{Dollar.}$$

Ist am Ende des Jahres der Kurs oberhalb des Basispreises, so erhält er das Nominal, andernfalls werden Teslaaktien entsprechend der durch das Bezugsverhältnis angegebenen Anzahl geliefert. Dies entspricht einer Claimauszahlung in Dollar

$$A = \begin{cases} Nw + Cw & , S(T) > K \\ \frac{Nw}{K} S(T) + Cw & , S(T) \leq K \end{cases}.$$

Im Falle $S(T) \leq K$ ergibt sich im Vergleich zum Nominal ein Verlust der Höhe

$$(Nw - \frac{Nw}{K} S(T)) = \frac{Nw}{K}(K - S(T)).$$

Durch Kauf von $\frac{Nw}{K}$ Putoptionen zum Basispreis K kann man also das Risiko eliminieren und das Portfolio aus

- Aktienanleihe
- $\frac{Nw}{K}$ Putoptionen

repliziert die sichere Auszahlung $Nw + Cw$ Dollar in T. Deshalb ist der Dollarpreis der Aktienanleihe gegeben durch

$$p_0(A) = (N + C)wB(0,T) - \frac{Nw}{K} p(S(0), T, K).$$

Durch Division mit w erhält man den Preis in Euro. In einem Black-Scholes Modell kann so der Preis berechnet werden und hängt wesentlich von der Volatilität der Aktie ab. Die Aktienanleihe wird zum Nominal emittiert. Die implizite Volatilität ergibt sich durch die Volatilität, die den Black-Scholes Preis mit dem Nominal übereinstimmen lässt.
Im Falle $r = 0,043\%$ erhält man so eine implizite Volatilität von ca. 60%.

7.7.8 Bewertung von Barriere Optionen

Eine Barriere Option ist ein Beispiel für ein Derivat, dessen Auszahlung am Ende auch durch dessen Verhalten während der Laufzeit bestimmt wird. Deshalb ist eine Bewertung dieser pfadabhängigen Auszahlungsverpflichtung schwieriger als die eines pfadunabhängigen Calls. Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit Handelszeitraum $[0, T]$ der Form

$$\begin{aligned} S(t) &= S_0 e^{\mu t} \exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), \\ \beta(t) &= e^{rt} \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq T$.
Ein down and out Call mit Basis K, Laufzeit T und Barriere $B < S_0$ ist ein Claim mit Auszahlung

$$C = (S(T) - K)^+ 1_{\{\inf_{t \leq T} S(t) > B\}}.$$

Für die Bewertung kann eine analoge Vorgehensweise wie beim Call durchgeführt werden. Es ist die abdiskontierte Claimauszahlung bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} p_0(C) &= \mathbb{E}^* e^{-rT} (S(T) - K)^+ 1_{\{\inf_{t \leq T} S(t) > B\}} \\ &= \mathbb{E}^* e^{-rT} S(T) 1_{\{S(T) > K, \inf_{t \leq T} S(t) > B\}} - K e^{-rT} \mathbb{P}^*(S(T) > K, \inf_{t \leq T} S(t) > B) \\ &= S_0 \mathbb{P}^*_\sigma(S(T) > K, \inf_{t \leq T} S(t) > B) - K e^{-rT} \mathbb{P}^*(S(T) > K, \inf_{t \leq T} S(t) > B), \end{aligned}$$

wobei das Maß $\mathbb{P}^*_\sigma$ durch die $\mathbb{P}^*$-Dichte $\frac{1}{S_0} e^{-rT} S(T)$ definiert ist. Weiter erhält man durch elementare Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*(S(T) > K, \inf_{t \leq T} S(t) > B) &= \mathbb{P}^*(-\log \frac{S(T)}{S_0} < \log \frac{S_0}{K}, -\inf_{t \leq T} \log \frac{S(t)}{S_0} < \log \frac{S_0}{B}) \\ &= \mathbb{P}^*(X(T) < \frac{1}{\sigma} \log \frac{S_0}{K}, \sup_{t \leq T} X(t) < \frac{1}{\sigma} \log \frac{S_0}{B}) \end{aligned}$$

mit $X(t) = -\frac{1}{\sigma} \log \frac{S(t)}{S_0} = -W^*(t) + (\frac{1}{2}\sigma - \frac{r}{\sigma})t$. Der Prozess X ist ein Wiener-Prozess mit Drift $a = \frac{1}{2}\sigma - \frac{r}{\sigma}$ und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus folgender

7.7.9 Bemerkung:

Ist X ein Wiener-Prozess mit Drift $a \in \mathbb{R}$ bezüglich einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}, z \geq x$

$$\mathbb{P}(X(T) \leq x, \sup_{t \leq T} X(t) \leq z) = \Phi(\frac{x - aT}{\sqrt{T}}) - e^{2az}\Phi(\frac{x - 2z - aT}{\sqrt{T}}). \tag{46}$$

Eine Anwendung dieser Bemerkung liefert also

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(S(T) > K, \inf_{t \leq T} S(t) > B) &= \Phi(\frac{\frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{K} - aT}{\sqrt{T}}) - \exp(2a\frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{B})\Phi(\frac{\frac{1}{\sigma}\log\frac{S_0}{K} - \frac{2}{\sigma}\log\frac{S_0}{B} - aT}{\sqrt{T}}) \\ &= \Phi(\frac{\log\frac{S_0}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{S_0}{B})^{\frac{2a}{\sigma}}\Phi(\frac{\log\frac{B^2}{S_0K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})\end{aligned}$$

Bezüglich $\mathbb{P}^*_\sigma$ kann analog argumentiert werden, da der Aktienkurs ein geometrischer Wiener-Prozess mit Trend $r + \sigma^2$ und Volatilität σ ist. Es ergibt sich

$$\mathbb{P}^*_\sigma(S(T) > K, \inf_{t \leq T} S(t) > B) = \Phi(\frac{\log\frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}) - (\frac{S_0}{B})^{\frac{2b}{\sigma}}\Phi(\frac{\log\frac{B^2}{S_0K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}})$$

mit $b = -\frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma$.
Fasst man alle Terme zusammen, erhält man für den Anfangspreis $p(C)$ der Barriere Option

$$p(C) = c(S_0, T, K) - (\frac{S_0}{B})^{2b}\sigma c(S_0, T, K\frac{S_0^2}{B^2}),$$

da $\frac{2a}{\sigma} = \frac{2b}{\sigma} + 2$ ist.
Es verbleibt, die Bemerkung zu beweisen.

Beweis. Die Aussage folgt aus dem Spiegelungsprinzip und einer Anwendung des Satzes von Girsanov. Zunächst betrachten wir den Fall einer Drift $a = 0$. Dann ist X ein Wiener-Prozess W. Wir bezeichnen mit $M(t) = \sup_{s \leq t} W(s)$ das sogenannte Running Maximum von W. Für $x \in \mathbb{R}$ und $z \geq x$ gilt unter Ausnutzung des Spiegelungsprinzips

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W(T) \leq x, M(T) \geq z) &= \mathbb{P}(\hat{W}(T) \geq z + z - x, M(T) \geq z) \\ &= \mathbb{P}(\hat{W}(T) \geq 2z - x, \sup_{t \leq T}\hat{W}(t) \geq z) = \mathbb{P}(\hat{W}(T) \geq 2z - x) \\ &= \Phi(\frac{x - 2z}{\sqrt{T}})\end{aligned}$$

Hierbei ist für

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : W(t) = z\}$$

$$\hat{W}(t) = \begin{cases} W(t) & \text{für } t \leq \tau \\ W(\tau) - (W(t) - W(\tau) & \text{für } t \geq \tau \end{cases} \tag{47}$$

der an τ gespiegelte Prozess. Das Spiegelungsprinzip besagt, dass $\hat{W}$ wieder ein Wiener-Prozess definiert. Somit folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W(T) \leq x, M(T) \leq z) &= \mathbb{P}(W(T) \leq x) - \mathbb{P}(W(T) \leq x, M(T) \geq z) \\ &= \Phi(\frac{x}{\sqrt{T}}) - \Phi(\frac{x - 2z}{\sqrt{T}}).\end{aligned}$$

Im zweiten Schritt wird Girsanov angewendet. Da $W(t) = X(t) - at, t \geq 0$ einen Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}$ definiert, kann mittels

$$\frac{d\mathbb{P}_a}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(aW(t) - \frac{1}{2}a^2t)$$

für alle $t \geq 0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_a$ auf $\Omega, \mathcal{F}_T)$ definiert werden. Girsanov liefert, dass $W(t) = W(t) - at + at$ ein Wiener-Prozess mit Drift a bezüglich $\mathbb{P}_a$ ist. Somit gilt

$$\mathbb{P}(X(T) \leq x, \sup_{t \leq T} X(t) \leq z) = \mathbb{P}_a(W(T) \leq x, M(T) \leq z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\{W(T)\leq x, M(T)\leq z\}} \exp(aW(T) - \frac{1}{2}a^2T)d\mathbb{P} \\
&= \mathbb{E}g(W(T))1_{\{M(T)\leq z\}}
\end{aligned}
$$

mit $g(y) = \exp(ay - \frac{1}{2}a^2T)1_{(-\infty,x]}(y)$. Zu bestimmen ist die bedingte Verteilung von $W(T)$ - gegeben $\{M(T) \leq z\}$. Wegen des ersten Schrittes gilt für die bedingte Verteilungsfunktion

$$
\mathbb{P}(W(T) \leq x | M(T) \leq z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq z \\ \frac{\Phi(\frac{x}{\sqrt{T}}) - \Phi(\frac{x-2z}{\sqrt{T}})}{\mathbb{P}(M(T)\leq z)} & \text{falls } x \leq z. \end{cases} \tag{48}
$$

Durch Differentiation nach x erhält man die bedingte Dichte

$$
h(y) = \frac{1}{\sqrt{T}\mathbb{P}(M(T) \leq z)}(\varphi(\frac{y}{\sqrt{T}}) - \varphi(\frac{y-2z}{\sqrt{T}}))
$$

für alle $y \leq z$. Somit folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}g(W(T))1_{\{M(T)\leq z\}} &= \mathbb{P}(M(T) \leq z) \int_{-\infty}^{\infty} g(y)h(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{T}}(\varphi(\frac{y}{\sqrt{T}}) - \varphi(\frac{y-2z}{\sqrt{T}})) \exp(ay - \frac{1}{2}a^2T)dy \\
&= \Phi(\frac{x-aT}{\sqrt{T}}) - e^{2az}\Phi(\frac{x-2z-aT}{\sqrt{T}}),
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{T}}\varphi(\frac{y}{\sqrt{T}}) \exp(ay - \frac{1}{2}a^2T)dy \\
=\ & \mathbb{E}1_{\{W(T)\leq x\}} \exp(aW(T) - \frac{1}{2}a^2T) \\
=\ & \mathbb{P}_a(W(T) \leq x) = P_a(W(T) - aT \leq x - aT) = \Phi(\frac{x-aT}{\sqrt{T}})
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{T}}\varphi(\frac{y-2z}{\sqrt{T}}) \exp(ay - \frac{1}{2}a^2T)dy \\
=\ & \mathbb{E}1_{\{W(T)+2z\leq x\}} \exp(a(W(T)+2z) - \frac{1}{2}a^2T) \\
=\ & \exp(2az)\mathbb{P}_a(W(T) + 2z \leq x) \\
=\ & \exp(2az)\Phi(\frac{x-2z-aT}{\sqrt{T}})
\end{aligned}
$$

□

7.8 Numeraire Wechsel

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit

- Bankkonto: $\beta(t) = e^{rt} \quad ,t \geq 0$
- risky asset: $S(t) = e^{\mu t}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \quad ,t \geq 0.$

Bislang sind Preise von Finanzgütern und Derivaten durch Geldeinheiten (Euro) festgelegt worden. Ein abdiskontierter Preis

$$
e^{-rt}S(t) = \frac{S(t)}{\beta(t)}
$$

gibt den Wert des risky assets zum Zeitpunkt t in Anteilen des Geldmarktkontos wieder.
Ist C ein Derivat mit Fälligkeit in T und $p_t(C)$ dessen Geldpreis zum Zeitpunkt t, so kann

$$
\frac{p_t(C)}{\beta(t)} = e^{-rt}p_t(C)
$$

aufgefasst werden als Wert des Derivates in Geldmarktkontoanteilen. Ist $\mathbb{P}^*$ das äquivalente Martingalmaß, so gilt

$$\frac{p_t(C)}{\beta(t)} = \mathbb{E}^*(\frac{C}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t).$$

Man hat also folgenden Zusammenhang:
Der Wert von C in t, ausgedrückt durch Geldmarktkontoanteile, stimmt mit dem Erwartungswert der Claimauszahlung, notiert in Geldmarktkontoanteilen, überein.

$$p_t^*(C) = \frac{p_t(C)}{\beta(t)} = \mathbb{E}^*(\frac{C}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(C^*|\mathcal{F}_t).$$

Mit $\star$ bezeichnen wir den Wert ausgedrückt in Geldmarktkontoanteilen.
Das Geldmarktkonto fungiert als Numeraire, als Verrechnungsgröße.
Vom mathematischen Standpunkt liegt hier eine Willkür vor. Es kann genauso das risky asset als Numeraire, Verrechnungseinheit, dienen. So ist etwa

$$\frac{\beta(t)}{S(t)}$$

der Wert des Bankkontos, notiert in Anteilen des risky assets.
Eine Bewertung kann genauso durchgeführt werden, wenn die Aktie als Numeraire gewählt wird. Allerdings ändert sich natürlich das äquivalente Martingalmaß.

7.8.1 Aktienmartingalmaß

Das äquivalente Martingalmaß in einem Black-Scholes Modell mit Aktie als Numeraire wird Aktienmartingalmaß genannt. Genauer lautet die Definition
Ein Wahrscheinlchkeitsmaß $\bar{\mathbb{P}}$ heißt Aktienmartingalmaß, wenn gilt:

(i) $\bar{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}$,

(ii) Der Prozess $(\frac{\beta(t)}{S(t)})$ ist ein $\bar{\mathbb{P}}$-Martingal.

Die Wertentwicklung des Geldmarktkontos, notiert in Aktienanteilen, ist ein $\bar{\mathbb{P}}$-Martingal.
Bestimmung von $\bar{\mathbb{P}}$:
Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ hat $\frac{\beta(t)}{S(t)}$ die Darstellung

$$\frac{\beta(t)}{S(t)} = \frac{1}{S(0)}e^{rt}e^{-rt}\exp(-\sigma W^*(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t) = \frac{1}{S(0)}\exp(-\sigma W^*(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

mit einem Wiener-Prozess W^* bezüglich $\mathbb{P}^*$. Mit Girsanov wird der Ansatz verfolgt:

$$\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\theta W^*(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t) \quad ,t > 0.$$

Der Prozess

$$\bar{W}(t) = W^*(t) - \theta t, t > 0$$

ist dann ein Wiener-Prozess bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$. Gesucht ist also ein θ so, dass

$$\exp(-\sigma W^*(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t) = \exp(-\sigma(\bar{W}(t) + \theta t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t) = \exp(-\sigma\bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)\exp(\sigma^2 t - \sigma\theta t)$$

ein $\bar{\mathbb{P}}$-Martingal ist. Dies ist der Fall genau dann, wenn $\sigma = \theta$. Definiert man also $\bar{\mathbb{P}}$ auf $\mathcal{F}_T$ durch

$$\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) = L(t) \quad ,0 \le t \le T,$$

so ist

$$\bar{\mathbb{P}} \sim \mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}$$

und

$$\frac{\beta(t)}{S(t)} = \frac{1}{S(0)}\exp(-\sigma\bar{W}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) = \frac{1}{S(0)}\frac{1}{L(t)}.$$

Die oben stehende Konstruktion mit Hilfe des Satzes von Girsanov wäre nicht notwendig gewesen, denn das Aktienmartingalmaß ist schon vorher bestimmt worden, ohne es zu nennen.
Bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ ist

$$\frac{S^*(t)}{S(0)} = \frac{S(t)}{S(0)\beta(t)} = \exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \quad t \geq 0$$

ein positives Martingal mit Erwartungswert 1. Deshalb kann das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*_\sigma$ definiert werden durch

$$\frac{d\mathbb{P}^*_\sigma}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{S^*(t)}{S(0)} = \frac{S(t)}{S(0)\beta(t)} = \exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \quad 0 \leq t \leq T.$$

Bezüglich $\mathbb{P}^*_\sigma$ ist $\frac{\beta(t)}{S(t)}$ ein Martingal, da

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}^*_\sigma}|_{\mathcal{F}_t} = S(0)\frac{\beta(t)}{S(t)} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Gezeigt ist also, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*_\sigma$ das Aktienmartingalmaß im Black-Scholes Modell ist.
Durch die Wahl des Numeraire haben wir verschiedene Möglichkeiten, einen Claim zu bewerten. Dadurch ergibt sich eine auf den ersten Blick nicht offensichtliche Identität. Sei C eine Claimauszahlung in Euro zur Fälligkeit T mit $\mathbb{E}^*|\frac{C}{\beta(T)}| < \infty$. Dann gilt für den arbitragefreien Europreis $p_t(C)$ in t

$$\beta(t)\mathbb{E}^*(\frac{C}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t) = p_t(C) = S(t)\bar{\mathbb{E}}(\frac{C}{S(T)}|\mathcal{F}_t).$$

Links ist der Preis mit Hilfe des Geldmarktkontos und des äquivalenten Martingalmaßes berechnet worden, während rechts dieser mit der Aktie als Numeraire und dem Aktienmartingalmaß bestimmt worden ist. Beide Rechnungen müssen zum selben Ergebnis führen. Man kann dies aber auch nochmal mathematisch mit der Formel von Bayes verifizieren. Wegen

$$\frac{d\bar{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) = L(t) \quad ,0 \leq t \leq T$$

und

$$\frac{S(t)}{L(t)} = \beta(t)S(0)$$

gilt

$$S(t)\bar{\mathbb{E}}(\frac{C}{S(T)}|\mathcal{F}_t) = \frac{S(t)}{L(t)}\mathbb{E}^*(\frac{C}{S(T)}L(T)|\mathcal{F}_t) = \beta(t)\mathbb{E}^*(\frac{C}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t).$$

Dies kann man benutzen, um die nicht offensichtliche Put-Call Symmetrie von Carr zu zeigen.

7.8.2 Symmetrie von Carr

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell und bezeichnen mit $c(S(0),K,T)$ bzw. $p(S(0),K,T)$ den Preis einer Call-Option bzw Put-Option zur Laufzeit T, Basis K und Anfangsaktienkurs $S(0)$. Es gilt also bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$

$$c(S(0),K,T) = \mathbb{E}^*\frac{(S(T)-K)^+}{\beta(T)} \quad , \quad p(S(0),K,T) = \mathbb{E}^*\frac{(K-S(T))^+}{\beta(T)}.$$

Die Symmetrie von Carr besagt, dass

$$c(S(0),K,T) = p(\frac{K}{\beta(T)}, S(0)\beta(T), T)$$

gilt.
Dies kann man vom Prinzip her nachrechnen aus den expliziten Formeln für den Call und den Put. Man kann dies aber auch durch Betrachtung des Aktienmartingalmaßes $\bar{\mathbb{P}}$ zeigen, denn es gilt

$$c(S(0),K,T) = \mathbb{E}^*\frac{(S(T)-K)^+}{\beta(T)} = S(0)\bar{\mathbb{E}}\frac{(S(T)-K)^+}{S(T)}$$

$$
\begin{aligned}
&= S(0)\bar{\mathbb{E}}(1-\frac{K}{S(T)})^+ = \bar{\mathbb{E}}(S(0)-\frac{S(0)K}{S(T)})^+ \\
&= \bar{\mathbb{E}}(S(0)-\frac{S(0)K}{\beta(T)}\frac{\beta(T)}{S(T)})^+ \\
&= \bar{\mathbb{E}}\left(\frac{1}{\beta(T)}(S(0)\beta(T)-S(0)K\frac{\beta(T)}{S(T)})^+\right)
\end{aligned}
$$

Der stochastische Prozess $(\frac{S(0)K\beta(t)}{S(t)})_{t\geq 0}$ hat bezüglich $\bar{\mathbb{P}}$ die Darstellung

$$
K\exp(-\sigma\bar{W}(t)-\frac{1}{2}t^2) = \frac{K}{\beta(T)}\beta(T)\exp(-\sigma\bar{W}(t)-\frac{1}{2}t^2).
$$

In T ist dies der Preis einer Aktie in einem Black-Scholes Modell mit Anfangskurs $\frac{K}{\beta(T)}$, Volatilität σ und Zinsrate r. Deshalb gilt

$$
c(S(0),K,T) = p(\frac{K}{\beta(T)},S(0)\beta(T),T),
$$

was die behauptete Symmetrie zeigt.
Im Falle $r=0$ kann man Anfangspreis und Basis vertauschen, wenn man vom Call zum Put übergeht.

7.9 Das Black-Scholes Modell mit Dividenden

Dividendenzahlungen sind Kapitalausschüttungen einer Aktiengesellschaft an ihre Anteilseigner und müssen bei der Bewertung von Derivaten berücksichtigt werden. Vorher wird noch kurz auf die stochastische Differentialgleichung eingegangen, die von einem geometrischen Wiener-Prozess erfüllt wird.
Die relative Zuwachsrate einer Aktie in einem Black-Scholes Modell zwischen t und $t+h$ ist ungefähr gegeben durch

$$
\frac{S(t+h)-S(t)}{S(t)} \approx \mu h + \sigma(W(t+h)-W(t))
$$

für kleine h. Man sagt auch, dass der Aktienpreisprozess die stochastische Differentialgleichung

$$
dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))
$$

erfüllt. Eine Lösung hiervon ist gegeben durch

$$
S(t) = S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma W(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 t) \quad ,t\geq 0.
$$

In einem Black-Scholes Modell mit Dividendenzahlung wird postuliert, dass kontinuierlich in der Zeit mit einer Rate δ Dividenden an den Aktienbesitzer ausgeschüttet werden. Diese Kapitalauszahlung mindert das Eigenkapital des Unternehmens und damit den Aktienkurs entsprechend der Rate der Dividendenauszahlung. Ausgedrückt mittels einer stochastischen Differenzengleichung führt dies auf

$$
\frac{S(t+h)-S(t)}{S(t)} \approx (\mu-\delta)h + \sigma(W(t+h)-W(t))
$$

bzw. durch Grenzübergang h gegen 0 auf

$$
dS(t) = S(t)((\mu-\delta)dt + \sigma dW(t))
$$

Diese stochastische Differentialgleichung wird gelöst durch

$$
S(t) = S(0)\exp((\mu-\delta)t)\exp(\sigma W(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 t) \quad ,t\geq 0.
$$

Als Ergebnis halten wir fest.

Definition 1. *Ein Black-Scholes Modell mit Dividenrate δ, Trendparameter μ, Volatilität $\sigma>0$ und Zinsrate r über einem Handelszeitraum $[0,T]$ liegt vor, wenn gilt*

$$
S(t) = S(0)\exp((\mu-\delta)t)\exp(\sigma W(t)-\frac{1}{2}\sigma^2 t)
$$

als Preisprozess für das risky asset und

$$\beta(t) = e^{rt}$$

für das Geldmarktkonto für alle $0 \le t \le T$. Ein Aktienbesitzer erhält eine kumulierte Dividenauszahlung der Form

$$D(t) = \int_0^t \delta S(u)du$$

für alle $0 \le t \le T$.

Ein Modell mit Dividendenauszahlung kann in ein Modell ohne Dividendenauszahlung im folgenden Sinne überführt werden. Reinvestiert man die Dividende sofort wieder in die Aktie, kauft also entsprechend Aktienanteile, so entwickelt sich das Vermögen eines Aktienbesitzers, der am Anfang eine Aktie hält, entsprechend dem Prozess

$$V(t) = S(0)e^{\mu t}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \quad , t \ge 0,$$

welcher einer Entwicklung in einem Black-Scholes Modell ohne Dividende entspricht.
Wegen der Dividendenzahlungen muss der Begriff des äquivalenten Martingalmaßes in einem Modell mit Dividenden anders definiert werden.

Definition 2. *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*$ heißt äquivalentes Martingalmaß in in einem Black-Scholes Modell mit Dividenrate δ, falls*

$$\left(e^{-rt}S(t) + \int_0^t e^{-ru}\delta S(u)du\right)_{t\ge0}$$

ein $\mathbb{P}^*$-Martingal bildet und $\mathbb{P}^*$ äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist.

Im folgenden soll erklärt werden, wieso diese Definition Sinn macht?
Ein Kauf der Aktie in t und Halten bis $t+s$ benötigt ein Kapital $S(t)$ in t. Diese Aktie induziert zwischen t und $t+s$ einen Zahlungsstrom $(\delta S(u))_{t\le u\le t+s}$. Eine Bewertung in t dieses Zahlungsstroms mit Hilfe des äquivalenten Martingalmaßes und eine Bewertung in t der $t+s$ long Position in der Aktie führt zu einem Kapitalwert

$$V(t) = \mathbb{E}^*(\int_t^{t+s} e^{-r(u-t)}\delta S(u)du|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}^*(e^{-rs}S(t+s)|\mathcal{F}_t).$$

Beide Kapitalwerte müssen übereinstimmen, was $V(t) = S(t)$ impliziert. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} e^{-rt}S(t) + \int_0^t e^{-ru}\delta S(u)du &= \mathbb{E}^*(\int_t^{t+s} e^{-ru}\delta S(u)du|\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}^*(e^{-r(s+t)}S(t+s)|\mathcal{F}_t) + \int_0^t e^{-ru}\delta S(u)du \\ &= \mathbb{E}^*(\int_0^{t+s} e^{-ru}\delta S(u)du + e^{-r(s+t)}S(t+s)|\mathcal{F}_t), \end{aligned}$$

was die gewünschte Martingaleigenschaft impliziert.
Das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ kann wieder mit einer Girsanov Transformation bestimmt werden. Der Ansatz ist also

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t), \quad t \ge 0$$

mit noch zu bestimmendem θ. Der Prozess

$$W^*(t) = W(t) - \theta t \quad , t \ge 0$$

ist dann ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*$. Es gilt also

$$dS(t) = S(t)((\mu-\delta)dt + \sigma dW(t)) = S(t)\big((\mu - \delta + \theta\sigma)dt + \sigma dW^*(t)\big).$$

Zu überlegen ist, wann

$$\left(e^{-rt}S(t) + \int_0^t e^{-rs}\delta S(s)ds\right)_{t\ge0}$$

ein $\mathbb{P}^*$-Martingal ist. Für

$$Y(t) = e^{-rt}S(t) + \int_0^t e^{-rs}\delta S(s)ds$$

folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} dY(t) &= e^{-rt}dS(t) - re^{-rt}S(t)dt + \delta e^{-rt}S(t)dt \\ &= e^{-rt}S(t)\big((\mu-\delta+\theta\sigma)dt + \sigma dW^*(t)\big) + e^{-rt}S(t)(\delta - r)dt \\ &= e^{-rt}S(t)(\mu+\sigma\theta - r)dt + e^{-rt}\sigma S(t)dW^*(t) \end{aligned}$$

Also ist Y ein $\mathbb{P}^*$-Martingal genau dann, wenn

$$\mu + \sigma\theta - r = 0 \Longleftrightarrow \theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$$

gilt. Man beachte, dass bezüglich $\mathbb{P}^*$ der Aktienpreisprozess S die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)\big((r-\delta)dt + \sigma dW^*(t)\big)$$

erfüllt. Somit hat S bezüglich $\mathbb{P}^*$ die Darstellung

$$S(t) = S(0)e^{(r-\delta)t}\exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0.$$

Dies kann man mit Hilfe der stochastischen Differentialgleichung für den Aktienpreisprozess und Übergang zu W^* gezeigt werden. Es gilt wegen $dW^*(t) = dW(t) - \theta dt$

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)\big((\mu-\delta)dt + \sigma dW(t)\big) \\ &= S(t)\big((\mu-\delta+\sigma\theta)dt + \sigma dW^*(t)\big) \\ &= S(t)\big((r-\delta)t + \sigma dW^*(t)\big) \end{aligned}$$

Diese stochastische Differentialgleichung wird gelöst durch

$$S(t) = S(0)e^{(r-\delta)t}\exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), t \geq 0.$$

Oben ist eine partielle Integrationsformel verwendet worden, die erst in der stochastischen Analysis gezeigt wird, aber man folgendermaßen motivieren kann.
Die Produktregel für differenzierbare Funktion lautet:

$$(F \cdot G)' = F \cdot G' + G \cdot F'.$$

Dies bedeutet

$$(F\cdot G)(t) - (F\cdot G)(0) = \int_0^t F(u)G'(u)du + \int_0^t G(u)F'(u)du.$$

Die Ableitungen G' und F' können als Dichten von signierten Maßen μ_G bzw. μ_F aufgefasst werden. Somit folgt:

$$G(b) - G(a) = \mu_G((a,b]) = \int_a^b G'(u)du$$

Man sagt auch kurz:

$$dG(t) = G'(t)dt$$

und die obige Produktregel kann anders formuliert werden durch

$$d(F\cdot G)(t) = F(t)G'(t)dt + G(t)F'(t)dt = F(t)dG(t) + G(t)dF(t).$$

Der Vorteil ist, dass wir eine Formulierung haben, bei der die Ableitung nicht mehr auftritt. Dies öffnet den Weg zu einer Verallgemeinerung. Ein signiertes Maß μ_F muss nicht eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes haben, ist aber mit der Funktion F über den Zusammenhang

$$F(b) - F(a) = \mu_F((a,b]) \quad ,\text{für alle} \quad a < b \in \mathbb{R}$$

verbunden. Die Funktion F ist eine sogenannte Funktion von beschränkter quadratischer Variation und man kann mit elementarer Analysis die folgende partielle Integrationsformel zeigen.

Bemerkung 1. *Seien F, G stetige Funktionen von beschränkter Funktion. Dann gilt für alle $a < b \in \mathbb{R}$*

$$(F\cdot G)(b) - (F\cdot G)(a) = \int_a^b F(t)dG(t) + \int_a^b G(t)dF(t).$$

Auf die signierten Maße übertragen bedeutet dies

$$d(F\cdot G) = F\,dG + G\,dF.$$

Allerdings stellt sich weiter das Problem, dass der Aktienpreisprozess S keine Pfade von beschränkter Variation hat, weshalb die obige partielle Integrationsformel nicht einfach übernommen werden kann. In der stochastischen Analysis wird das Ito Integral eingeführt und so erklärt, was die Integration gegen ein Semimartingal bedeutet. Insbesondere wird die folgende Integrationsformel

$$d(F \cdot S)(t) = F(t)dS(t) + S(t)dF(t)$$

gezeigt, die oben bei der Herleitung des äquivalenten Martingalmaßes benutzt wurde.

7.9.1 Black-Scholes Formel mit Berücksichtigung einer Dividende

Wir betrachten ein Black-Scholes Modell mit Volatilität σ , Zinsrate r und Dividendenrate δ und wollen einen Claim mit Auszahlung C in T bewerten. mit Hilfe des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^*$ führt dies zur Bewertungsformel

$$p_0(C) = \mathbb{E}^* \frac{C}{\beta(T)},$$

was vom Ansatz der Formel im Modell ohne Dividende entspricht. Zu beachten ist allerdings, dass die äquivalenten Martingalmaße in beiden Modellen variieren, so dass Preise durch eine Dividende beeinflusst werden. Als Beispiel betrachten wir einen Call mit Basis K und Laufzeit T, also den Claim

$$C = (S(T) - K)^+$$

und bezeichnen mit $c(S(0), K, r, \delta, T)$ dessen Anfangspreis. Es gilt also

$$\begin{aligned} c(S(0), K, r, \delta, T) &= \mathbb{E}^*(e^{-rT}(S(T) - K)^+) \\ &= \mathbb{E}^* e^{-rT} S(T) 1_{\{S(T)>K\}} - e^{-rT} K \mathbb{P}^*(S(T) > K) \\ &= e^{-\delta T} \mathbb{E}^* e^{-(r-\delta)T} S(T) 1_{\{S(T)>K\}} - e^{-rT} K \mathbb{P}^*(S(T) > K) \\ &= S(0) e^{-\delta T} \mathbb{P}^*_\delta(S(T) > K) - e^{-rT} K \mathbb{P}^*(S(T) > K) \end{aligned}$$

Hierbei ist das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*_\delta$ definiert durch

$$\frac{d\mathbb{P}^*_\delta}{d\mathbb{P}^*}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{e^{-(r-\delta)T} S(T)}{S(0)} = \exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t).$$

Damit ist

$$W^{**}(t) = W^*(t) - \sigma t$$

ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^*_\delta$ und es gilt

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) e^{(r-\delta)t} \exp(\sigma W^*(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\ &= S(0) e^{(r-\delta)t} \exp(\sigma (W^*(t) - \sigma t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t) \\ &= S(0) e^{(r-\delta+\sigma^2)t} \exp(\sigma W^{**}(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \end{aligned}$$

ist ein geometrischer Wiener-Prozess mit Drift $r - \delta + \sigma^2$ und Volatilität σ bezüglich $\mathbb{P}^*_\delta$. Analog zur Herleitung der Black-Scholes Formel ohne Dividende folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*_\delta(S(T) > K) &= \mathbb{P}^*_\delta(\log \frac{S(T)}{S(0)} > \log(\frac{K}{S(0)})) \\ &= \mathbb{P}^*_\delta\big((r - \delta + \sigma^2)T + \sigma W^{**}(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T > \log(\frac{K}{S(0)})\big) \\ &= \mathbb{P}^*_\delta\big(W^{**}(T) > \frac{\log(\frac{K}{S(0)}) - (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\big) \\ &= \Phi\big(\frac{\log(\frac{S(0)}{K}) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\big) \\ &= \Phi(h_1(S(0), T, r - \delta)). \end{aligned}$$

Ebenso erhält man

$$\mathbb{P}^*(S(T) > K) = \Phi\big(\frac{\log \frac{S(0)}{K} + (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\big) = \Phi(h_2(S(0), T, r - \delta))$$

und damit schließlich

$$c(S(0), K, r, \delta) = S(0) e^{-\delta T} \Phi(h_1(S(0), T, r - \delta)) - K e^{-rT} \Phi(h_2(S(0), T, r - \delta)).$$

7.9.2 Berücksichtigung einer vorab bekannten Dividendenzahlung

Statt einer kontinuierlichen Dividendenauzahlung entsprechend einer Rate am Aktienpreis wird in der Praxis schon vorab für ein Geschäftsjahr an diskreten Terminen eine konstante vorab bekannte Dividendenzahlung vereinbart. Dies hat etwa die Form 30 Cent pro Aktie am 07. Mai. Bei der Bewertung eines Derivates, ist solch eine Dividende zu berücksichtigen, da eine Dividendenauszahlung einen sofortigen Aktienpreisrückgang entsprechend der Dividendenzahlung nach sich zieht.
Wir betrachten jetzt einen Call mit Laufzeit T, der eine Claimauszahlung der Form $C = (S(T) - K)^+$ verbrieft. Es gebe Dividendenzahlungen pro Aktie der Höhe

$$D_1, \cdots, D_n$$

zu Zeitpunkten

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < T.$$

Da die Dividendenauszahlungen zu einem Rückgang des Aktienpreises führen, ist ein Call in einem Modell mit Dividendenzahlung weniger wert als in einem Modell ohne Dividendenzahlung. In der Praxis führt man folgendes Verfahren zur Bewertung eines Calls durch:

1. berechne den Kapitalwert $D_0 = \sum_{i=1}^n D_i e^{-rt_i}$
2. berechne den Callpreis entsprechend der Black-Scholes Formel ohne Dividende bei Anfangsaktienkurs $S(0) - D_0$.

Da mit einem geringeren Aktienstartpreis gerechnet wird, ergibt sich eine Preisreduktion unter Berücksichtigung der Höhe der Dividendenzahlung.
Den Preis einer Put-Option kann man dann mit einer modifizierten Put-Call Parität aus dem Replikationsprinzip herleiten.

Bemerkung 2. *Ist D_0 der heutige Kapitalwert der zukünftigen Dividenzahlungen, so gilt für die Anfangspreise P, C einer Put-bzw. Call-Option mit Basis K zur Laufzeit T*

$$P + S_0 = C + D_0 + Ke^{-rT}.$$

Beweis. Wir argumentieren mit dem Replikationsprinzip und betrachten nur den Fall einer Dividendenzahlung D_1 in t_1. Dann ist $D_0 = D_1 e^{-rt_1}$ der heutige Kapitalwert der Dividende. Wir betrachten die folgenden Strategien

(i)
- Halten der Aktie
- Anlegen der Dividende in t_1 auf das Geldmarktkonto
- Halten einer Put-Option mit Basis K

(ii)
- Halten einer Call-Option mit Basis K
- Halten von D_0 Geldmarktkontoeinheiten bis T
- Halten von Ke^{-rT} Geldmarktkontoeinheiten bis T

Dann haben beide Strategien ausschüttungsfreie Wertprozesse, die in T die Werte

$$S(T) + D_1 e^{r(T-t_1)} + (K - S(T))^+ = \max\{S(T), K\} + D_0 e^{rT}$$

und

$$(S(T) - K)^+ + K + D_0 e^{rT} = \max\{S(T), K\} + D_0 e^{rT}.$$

haben. Beide Strategien haben den gleichen Endwert und müssen deshalb nach dem Replikationsprinzip zu jedem Zeitpunkt gleich bewertet werden. Insbesondere am Anfang ergibt sich

$$C + D_0 + Ke^{-rT} = S(0) + P,$$

was der obigen Put-Call Parität entspricht.

□

7.10 Das Black-Scholes Modell für 2 Aktien

- Handelszeitraum $[0,T]$
- Informationsverlauf $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$
- Geldmarktkonto $\beta(t) = e^{rt}$, $0 \leq t \leq T$
- Unabhängige Wiener-Prozesse W_1, W_2, die die Aktien treiben

$$\begin{aligned} S_1(t) &= S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma_1(\varrho W_2(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1(t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t) \\ S_2(t) &= S_2(0)e^{\mu_2 t}\exp(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t) \end{aligned} \tag{49}$$

Hierbei sind

- $0 \leq t \leq T$,
- $0 < S_1(0), S_2(0)$ Anfangskurse,
- $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ Trendparameter,
- σ_1, σ_2 Volatilitäten,
- $|\varrho| \leq 1$ Korrelation zwischen den Wiener-Prozessen.

Bemerkung 3. *Der Prozess*

$$B(t) = \varrho W_2(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1(t), 0 \leq t \leq T$$

ist ein Wiener-Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ *mit*

$$Cov(B(t), W_2(t)) = Cov(\varrho W_2(t), W_2(t)) = \varrho t.$$

Bestimmung des äquivalenten Martingalmaßes:
Ansatz: Zweimalige Anwendung des Satzes von Girsanov:
1. Schritt: Girsanov auf Aktie 2 anwenden:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{\vartheta_2}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\vartheta_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 t)$$

Dann ist nach Girsanov

$$W_2^\star(t) = W_2(t) - \vartheta_2 t, \qquad t \geq 0$$

ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$.

Weiter sind $W_2^\star(t)$ und $W_1(t)$ unabhängige Wienerprozesse bzgl. $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$.

Beweis. Für $h, g : C[0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar und beschränkt.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\vartheta_2} h((W_2^\star(t))_{0\leq t\leq T} g((W_1(t))_{0\leq t\leq T}) &= \int h((W_2^\star(t))_{0\leq t\leq T}) g((W_1(t))_{0\leq t\leq T}) \underbrace{\exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T)}_{\text{Dichte}} d\mathbb{P} \\ &= \int h((W_2^\star(t))_{0\leq t\leq T}) \exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T) d\mathbb{P} \int g((W_1(t))_{0\leq t\leq T}) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}_{\vartheta_2} h((W_2^\star(t))_{0\leq t\leq T}) \mathbb{E}_{\vartheta_2} g((W_1(t))_{0\leq t\leq T}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da } \mathbb{E}_{\vartheta_2} g((W_1(t))_{0\leq t\leq T}) &= \int g((W_1())_{0\leq t\leq T}) \exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E} g((W_1(t))_{0\leq t\leq T}) \underbrace{\mathbb{E}\exp(\vartheta_2 W_2(T) - \frac{1}{2}\vartheta_2^2 T)}_{=1} \\ &= \mathbb{E} g((W_1(t))_{0\leq t\leq T}) \end{aligned}$$

Wir erhalten also:

- $W_2^\star$ und W_1 sind stochastisch unabhängig,
- W_1 ist bzgl. $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$ genauso verteilt wie bzgl $\mathbb{P}$.

Dies liefert die Behauptung $\square$

Bezüglich $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$ gilt:

$$\begin{aligned} S_2(t) &= S_2(0)e^{\mu_2 t}\exp(\sigma_2 W_2(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t) \\ &= S_2(0)e^{\mu_2 t}\exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)e^{\vartheta_2\sigma_2 t} \end{aligned}$$

Also ist $e^{-rt}S_2(t) = S_2^\star(t)$ ein Martingal, genau dann wenn

$$\mu_2 + \vartheta_2\sigma_2 = r \Leftrightarrow \vartheta_2 = -\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}$$

Setzt man ϑ_2 entsprechend, so folgt also für die Darstellung der zweiten Aktie bezüglich $\mathbb{P}_{\vartheta_2}$

$$S_2(t) = S_2(0)e^{rt}\exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t).$$

<u>2. Schritt</u> Wende Girsanov auf Aktie 1 an (genauer: auf W_1):
Für $\vartheta_1 \in \mathbb{R}$ definiere:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}}{d\mathbb{P}_{\vartheta_2}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\vartheta_1 W_1(t) - \frac{1}{2}\vartheta_1^2 t), \qquad 0 \leq t \leq T$$

Girsanov liefert wieder, dass

$$W_1^\star(t) = W_1(t) - \vartheta_1 t, \qquad t \geq 0$$

ein Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$ ist.
Analog zum 1. Schritt gilt:

$W_1^\star$ und $W_2^\star$ sind stochastisch unabhängige Wiener-Prozesse bzgl. $\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$.

Bezüglich $\mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$ gilt:

$$\begin{aligned} S_2(t) &= S_2(0)e^{rt}\exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t) \quad \text{ da } \vartheta_2 = -\frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \\ S_1(t) &= S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma_1(\varrho W_2(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1(t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t) \\ &= S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma_1(\varrho(W_2^\star(t) + \vartheta_2 t) + \sqrt{1-\varrho^2}(W_1^\star(t) + \vartheta_1 t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t) \\ &= S_1(0)e^{\mu_1 t}\exp(\sigma_1\varrho\vartheta_2 t + \sqrt{1-\varrho^2}\vartheta_1\sigma_1 t)\exp(\sigma_1(\varrho W_2^\star(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(t)) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t)) \end{aligned}$$

Also ist $(e^{-rt}S_1(t))_{t\geq 0} = (S^\star(t))_{t\geq 0}$ ein Martingal genau dann wenn

$$\begin{aligned} & \mu_1 + \sigma_1\vartheta_2\varrho + \sqrt{1-\varrho^2}\vartheta_1\sigma_1 = r \\ \Leftrightarrow \vartheta_1 &= -\frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\left(\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} - \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2}\varrho\right) \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}^\star = \mathbb{P}_{(\vartheta_1,\vartheta_2)}$ ein äquivalentes Martingalmaß.

Bemerkung 4. *$\mathbb{P}^\star$ ist eindeutig bestimmt.*

7.10.1 Bewertung einer Exchange-Option

Wir betrachten den Claim

$$C = (S_2(T) - S_1(T))^+.$$

Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ gilt:

$$S_2(t) = S_2(0)e^{rt}\exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)$$

$$S_1(t) \quad = \quad S_1(0)e^{rt}\exp(\sigma_1 B_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t)$$

mit

$$B_1(t) = \varrho W_2^\star(t) + \sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(t)$$

Wiener-Prozess bzgl. $\mathbb{P}^\star$.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star e^{-rT}(S_2(T) - S_1(T))^+ &= \mathbb{E}^\star e^{-rT}S_2(T)\mathbb{1}_{\{S_2(T)>S_1(T)\}} - \mathbb{E}^\star e^{-rT}S_1(T)\mathbb{1}_{\{S_2(T)>S_1(T)\}} \\
&= S_2(0)\mathbb{P}_2^\star(S_2(T) > S_1(T)) - S_1(0)\mathbb{P}_1^\star(S_2(T) > S_1(T))
\end{aligned}$$

mit

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_2^\star}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S_2^\star(t)}{S_2(0)} = \exp(\sigma_2 W_2^\star(t) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 t)$$

und

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_1^\star}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_t} := \frac{S_1^\star(t)}{S_1(0)} = \exp(\sigma_1 B_1(t) - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t).$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\log\frac{S_2(T)}{S_1(T)} &= \log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} + \sigma_2 W_2^\star(T) - \frac{1}{2}\sigma_2^2 T - \sigma_1 B_1(T) + \frac{1}{2}\sigma_1^2 T \\
&= \log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} + (\sigma_2 - \sigma_1\varrho)W_2^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)T
\end{aligned}$$

gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_2^\star(S_2(T) > S_1(T)) \\
&= \mathbb{P}_2^\star\left(\log\tfrac{S_2(T)}{S_1(T)} > 0\right) \\
&= \mathbb{P}_2^\star\left((\sigma_2 - \sigma_1\varrho)W_2^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} - \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)T\right) \\
&= \mathbb{P}_2^\star\left((\sigma_2 - \sigma_1\varrho)(W_2^\star(T) - \sigma_2 T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} - \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)T + \sigma_1\sigma_2\varrho T\right) \\
&= \mathbb{P}_2^\star\left(\underbrace{\frac{(\sigma_2 - \sigma_1\varrho)(W_2^\star(T) - \sigma_2 T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T)}{\sqrt{T(\sigma_2^2 - 2\varrho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\frac{S_1(0)}{S_2(0)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)T + \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2 - 2\varrho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2)}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)T - \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2 - 2\varrho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2)}}\right)
\end{aligned}$$

Bezüglich $\mathbb{P}_1^\star$ sind

$$W_2^\star(t) - \sigma_1\varrho t \quad \text{und} \quad W_1^\star(t) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}t \quad t \geq 0$$

unabhängige Wiener-Prozesse. Dies ist an dieser Stelle nicht klar und etwas schwieriger zu beweisen.
Somit gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_1^\star(S_2(T) > S_1(T)) \\
&= \mathbb{P}_1^\star\left(\log\tfrac{S_2(T)}{S_1(T)} > 0\right) \\
&= \mathbb{P}_1^\star\left((\sigma_2 - \sigma_1\varrho)W_2^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}W_1^\star(T) > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} - \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)T\right) \\
&= \mathbb{P}_1^\star\Big((\sigma_2 - \sigma_1\varrho)(W_2^\star(T) - \sigma_1\varrho T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}(W_1^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}T) \\
&\qquad > \log\tfrac{S_1(0)}{S_2(0)} - \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)T + \sigma_1^2\varrho^2 T - \sigma_1\sigma_2\varrho T + \sigma_1^2(1-\varrho^2)T\Big) \\
&= \mathbb{P}_1^\star\left(\underbrace{\frac{(\sigma_2 - \sigma_1\varrho)(W_2^\star(T) - \sigma_1\varrho T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}(W_1^\star(T) - \sigma_1\sqrt{1-\varrho^2}T)}{\sqrt{T(\sigma_2^2 - 2\varrho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2)}}}_{\sim N(0,1)} > \frac{\log\frac{S_1(0)}{S_2(0)} + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)T - \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2 - 2\varrho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2)}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\log\frac{S_2(0)}{S_1(0)} - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)T + \sigma_1\sigma_2\varrho T}{\sqrt{T(\sigma_2^2 - 2\varrho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2)}}\right)
\end{aligned}$$

7.11 Preisberechnung mittels Simulation

Wie wir gesehen haben, kann die Preisberechnung von Derivaten durch Bestimmung der mittleren abdiskontierten Claimauszahlung bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes geschehen. Bei pfadunabhängigen Claimauszahlungen, etwa bei Call oder Put, ist dies auch in der Regel durch Integration über eine Normalverteilung möglich. Bei pfadabhängigen sogenannten exotischen Optionen ist dies deutlich schwieriger und kann nur in Spezialfällen, wie etwa einseitigen Barriere-Optionen, explizit durchgeführt werden. Ist eine explizite Berechnung nicht möglich, so kann approximativ der Preis über eine Monte-Carlo Simulation berechnet werden. Dies stellt auch in anderen Modellen in der Praxis eine weit verbreitete Methode zur Preisbestimmung dar. Im folgenden soll dies erläutert werden.
Gegeben sei ein Black-Scholes Modell der Form

$$\begin{aligned}\beta(t) &= e^{rt}\\ S(t) &= S(0)e^{rt}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t, \quad 0 \le t \le T\end{aligned}$$

über einem Handelszeitraum $[0,T]$. Wir gehen also davon aus, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ schon das äquivalente Martingalmaß ist und betrachten ein Derivat, dass eine $\mathcal{F}_T$-messbare Auszahlung C zum Zeitpunkt T liefert. Dies bedeutet, dass die Auszahlung C von der gesamten Entwicklung des Prozesses $(S(t))_{0\le t\le T}$ abhängen kann. Es gibt also eine Funktion $g : C([0,T]) \to \mathbb{R}$, so dass

$$C = g\big((S(t))_{0\le t\le T}\big)$$

gilt. Zu bestimmen ist approximativ

$$p(C) = \mathbb{E}e^{-rT}C = \mathbb{E}e^{-rT}g\big((S(t))_{0\le t\le T}\big).$$

Dies kann mittels eines Monte-Carlo Verfahrens durchgeführt werden, welches auf dem starken Gesetz der großen Zahlen beruht. Die Aufgabe lautet:

1. Erzeuge N unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen $C_1, \cdots, C_N$, die in etwa so verteilt sind wie C und
2. berechne $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N C_i$

Das starke Gesetz der großen Zahlen liefert dann, dass

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N C_i \longrightarrow \mathbb{E}C$$

für $N \to \infty$, falls alle C_i exakt die gleiche Verteilung haben wie C. Da ein zeitstetiger Aktienpreisprozess vorliegt, ist aber die Erzeugung der exakten Verteilung von C in der Regel nicht möglich. Die Lösung S der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW(t))$$

kann näherungsweise durch eine Diskretisierung in der Zeit approximiert werden. Etwa mit einem sogenannten Euler-Schema zu einer Schrittweite $h > 0$ kann ein Pfad entlang der Punkte

$$S_h(t_i) \quad t_i = ih, i = 0, \cdots, n, h = \frac{T}{n}$$

erzeugt werden durch

$$\begin{aligned}S_h(t_0) &= S(0)\\ S_h(t_i) &= S_h(t_{i-1}) + S_h(t_{i-1})\big(rh + \sigma\sqrt{h}Z_i\big) \quad i = 1, \cdots n\end{aligned}$$

mit n stochastisch unabhängigen, identisch $N(0,1)$-verteilten $Z_1, \cdots Z_n$. Hieraus kann man dann einen Pfad in $C([0,1])$ erhalten durch lineare Interpolation der diskret erzeugten Werte. Lässt man die Zeitdiskretisierung h gegen 0 streben, so konvergiert der erzeugte Pfad in Verteilung gegen die Verteilung des Pfades des Aktienpreisprozesses und man hat das „in etwa"bei der Durchführung der Monte Carlo Simulation geklärt. Genauer lautet das Verfahren also folgendermaßen

1. Wähle eine Diskretisierungsschrittweite $h = \frac{T}{n}$

2. Wähle eine Anzahl von zu erzeugenden Pfaden N

3. Erzeuge mit einem Euler-Schema N unabhängige Pfade

$$(S_h^{(1)}(t))_{0\le t\le T}, \cdots, (S_h^{(N)}(t))_{0\le t\le T}$$

und berechne

$$p_h(C) = e^{-rT}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} g\big((S_h^{(k)}(t))_{0\le t\le T}\big).$$

Dann ist $p_h(C)$ eine Approximation für den Preis $p(C)$.
Statt einer Pfaderzeugung mittels eines Euler-Schemas kann ein Pfad des Aktienpreisprozesses näherungsweise auch folgendermaßen erzeugt werden. Wir wissen, dass der logarithmierte Aktienpreisprozess die Gestalt hat

$$\log(S(t)) = \log(S(0)) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)$$

Da der Wiener-Prozess unabhängige Zuwächse hat kann man diesen einfach simulieren durch

$$\begin{aligned} W(t_0) &= 0 \\ W(t_i) &= W(t_{i-1}) + \sqrt{t_i - t_{i-1}}Z_i \end{aligned}$$

und Interpolation zwischen den Punkten. Hierbei sind die Z_i wieder unabhängige $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Ein so erzeugter Pfad eines Wiener-Prozesses generiert einen Pfad des Aktienpreisprozesses. Das Euler-Schema bietet den Vorteil, dass es auch auf komplexere Modelle anwendbar ist, etwa, wenn der Aktienpreisprozess eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dS(t) = S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t))$$

erfüllt.

7.11.1 Twin Win Zertifikat

Wir wollen das obige Monte-Carlo Verfahren benutzen, um approximativ eine Bewertung des Twin Win Zertifikates durchzuführen. Dies ist ein Zertifikat, das von der Hypo Vereinsbank in 2009 emittiert wurde. Die Wirkungsweise ist die folgende:

1. Laufzeit 4 Jahre

2. Bleibt der Dax während der Laufzeit zwischen 50% und 150% des Anfangswertes, so erhält man eine Auszahlung am Ende entsprechend der Änderung zum Anfangswert.

3. Wird während der Laufzeit die untere oder obere Barriere gerissen, so erhält man am Ende der Laufzeit das 1.1-fache des eingesetzten Kapitals.

In Formeln kann man dies wie folgt ausdrücken:
Bezeichne mit

1. $N = 100$ das Nominal, R die Verzinsung,

2. $S(0)$ den Anfangspreis des Dax,

3. $b_1 = \frac{1}{2}S(0)$, $b_2 = \frac{3}{2}S(0)$ die untere und obere Barriere

4. $(S(t))_{0\le t\le T}$ den Preisprozess des Dax.

5. $T = 4$ die Laufzeit.

Dann ist die Auszahlung des Zertifikates in T gegeben durch

$$C = N + \frac{N}{S(0)}|S(T) - S(0)|1_{\{\inf_{t\le T} S(t) > b_1, \sup_{t\le T} S(t) < b_2\}} + NR1_{\{\inf_{t\le T} S(t)\le b_1 \text{ oder } \sup_{t\le T} S(t)\ge b_2\}}.$$

Das Zertifikat hört sich für den Käufer sehr attraktiv an, denn er besitzt vollständigen Kapitalschutz und kann auf vielfältige Weise an der Entwicklung des Dax partizipieren. Es stellt sich die Frage unter

TwinWin.pdf

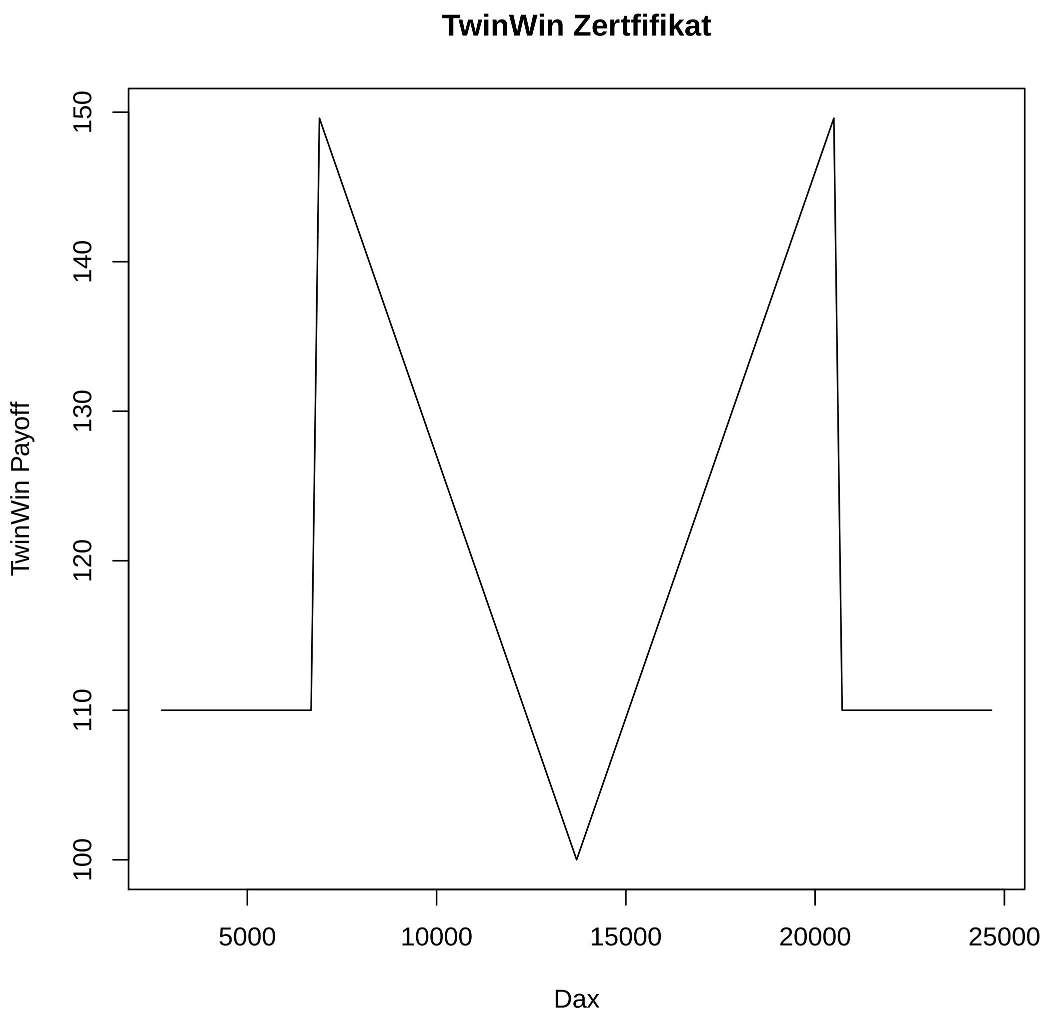


Abbildung 3: Plot der Auszahlung des TwinWin Zertfikats

welchen Marktbedingungen man solch ein Zertifikat für den Nominalpreis emittieren kann. Deshalb soll eine Bewertung in einem Black-Scholes Modell durchgeführt werden.
Wir geben uns eine Volatiltät $\sigma > 0$ und ein Zinsrate r vor, so dass

$$S(t) = S(0)e^{rt}\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), \quad 0 \le t \le T$$

angenommen werden kann. Dann ist der Derivatepreis

$$\mathbb{E}e^{-rT}C$$

zu bestimmen. Da die Auszahlung C durch zweiseitige Barriereoptionen bestimmt wird, gibt es keine einfache explizite Berechnungsformel. Daher bietet sich eine approximative Bestimmung mittels eines Monte-Carlo Verfahrens an. Wendet man das obige Verfahren an, so ergeben sich folgende Ergebnisse

Volatilität σ	0.31	0.34
Zinsrate r	0.03	0.01
Rendite R	0.1	0.0
Preis	100.1	100.08
p	0.74	0.8

Mit p wird hierbei die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass eine Barriere gerissen wird. Die approximativen Werte wurden berechnet mit einer Erzeugung von 50000 Pfaden bei einer Zeitdiskretisierung von 1000 äquidistanten Intervallen.
Man erkennt, dass in einem heutigen Marktumfeld eine Rendite von $R = 0.1$ nicht mehr finanzierbar wäre. Man würde die Rendite auf $R = 0$ absenken.

7.12 Miscellanea

Hier geben wir einen Überblick über verschiedene Derivate, die im Black-Scholes Modell eine explizite Bewertungsformel haben. Gegeben sei ein Black-Scholes Modell mit Zinsrate r, Volatilität σ und Anfangsaktienkurs $S(0$. Unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ hat der Aktienpreisprozess also eine Darstellung der Form

$$S(t) = S(0)\exp(rt)\exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

und das Geldmarktkonto die Form

$$\beta(t) = e^{rt}.$$

7.12.1 Digitale Option

Ein digitaler Call bzw. digitaler Put ist ein Derivat, dass zu einer Basis K und Laufzeit T die Auszahlung

$$DC = 1_{\{S(T)>K\}} \quad \text{bzw.} DP = 1_{\{S(T)<K\}}$$

zusichert. Diese Optionen werden bewertet durch

$$d_C(T, S(0), K) = \mathbb{E}^* e^{-rT} 1_{\{S(T)>K\}} = e^{-rT}\mathbb{P}^*(S(T) > K) = e^{-rT}\Phi(h_2(S(0), T))$$

mit

$$h_2(S_0, T) = \frac{\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

und

$$d_p(T, S(0), K) = \mathbb{E}^* e^{-rT} 1_{\{S(T)<K\}} = e^{-rT}\mathbb{P}^*(S(T) < K) = e^{-rT}\Phi(-h_2(S(0), T)).$$

7.12.2 Asset or nothing Option

Die Asset or nothing Option ist ein Derivat, das zu einer Laufzeit T und einer Basis K eine Auszahlung

$$A = S(T)1_{\{S(T)>K\}}$$

in T zusichert. Wegen

$$C = A - K \cdot DC$$

gilt für den Anfangspreis

$$c_A(T, S(0)) = c(T, S(0)) - K d_C(T, S(0)).$$

7.12.3 Gap-Option

Im Unterschied zur Call-und Put-Option wird bei der Gap-Option die ausgezahlte Differenz von einer Schwelle bestimmt Zur Laufzeit T, Basis K und Schwelle G ist die Auszahlung eines Gap-Calls definiert durch

$$GC = (S(T) - G)1_{\{S(T) \geq K\}}$$

und die eines Gap-Puts durch

$$GP = (G - S(T))1_{\{S(T) \leq K\}}.$$

Man beachte, dass im Falle $G > K$ die Auszahlung eines Gap-Calls und im Falle $G < K$ die Auszahlung eines Gap-Puts negativ sein kann.
Wegen

$$C + (K - G) \cdot DC = GC \quad , \quad P + (G - K) \cdot DP = GP$$

folgt mit dem Replikationsprinzip für den Preis $g_C(T, S(0), K)$ des Gap-Calls und $g_P(T, S(0), K)$ des Gap-Puts

$$g_C(T, S(0), K) = c(T, S(0), K) + (K - G)d_C(T, S(0), K)$$

und

$$g_P(T, S(0), K)) = p(T, S(0), K) + (G - K)d_P(T, S(0), K).$$

7.12.4 PayLater Option

Eine PayLater-Option ist eine spezielle Gap-Option bei der der Anfangspreis verschwindet. Der Gap $D = G - K$ wird dabei so bestimmt, dass die Gap-Option am Anfang nichts kostet. Die Auszahlung eines PayLater Calls ist gegeben durch

$$PLC = (S(T) - (K + D))1_{\{S(T) \geq K\}}$$

und dies eines Puts mit $D = K - G$ gegeben durch

$$PLP = (K - D - S(T))1_{\{S(T) \leq K\}}$$

Die Differenz D wird so ausgehandelt, dass die Option am Anfang kostenlos ist. Aus Arbitragegründen ist durch diese Nebenbedingung die Differenz D eindeutig bestimmt, denn aus

$$0 = g_C(T, S(0), K) = c(T, S(0), K) + (K - G)d_C(T, S(0), K)$$

folgt

$$D = \frac{c(T, S(0), K)}{d_C(T, S(0), K)}.$$

Beim Put ergibt sich sich $D = K - G$ aus

$$0 = p(T, S(0), K) + (G - K)d_P(T, S(0), K)$$

was

$$D = \frac{p(T, S(0), K)}{d_P(T, S(0), K)}$$

impliziert.

7.12.5 Zusammengesetzte Option

Die zusammengesetzte Option ist eine Option auf eine Option. Das Underlying, worauf sich die Option bezieht ist ebenfalls eine Option. Diese wird auch als Compound-Option bezeichnet. Man kann etwa eine Call-Option mit Laufzeit $T + T_1$ und Basis K_1 als Underlying wählen. Diese Call-Option hat in T einen Preis

$$C(T) = c(T_1, S(T), K_1).$$

Ein Compound Call auf diesen Call ist dann ein Derivat, das einem die Auszahlung

$$CC = (C(T) - K)^+$$

zusichert. Ein Compound-Put hätte die Auszahlung

$$PC = (K - C(T))^+.$$

Anstelle des Calls könnte man auch einen Put als Underlying wählen. Dieser hätte in T einen Wert von

$$P(T) = p(T_1, S(T), K_1)$$

und man erhält einen Compound Call durch

$$CP = (P(T) - K)^+$$

bzw. einen Compound-Put durch

$$PP = (K - P(T))^+.$$

Die Berechnung des Anfangspreises einer Compound-Option ist explizit möglich, aber aufwendig. Ein prinzipieller Ansatz soll hier für den Compound-Call vorgestellt werden. Wir betrachten also als underlying den Preisprozess eines Calls mit Basis K_1 und Laufzeit $T + T_1$ über den Zeitraum $[0, T]$. Dieser Preisprozess hat wegen der Black-Scholes Formel für Calls die Darstellung

$$\begin{aligned} C(t) &= \mathbb{E}^* e^{-r(T+T_1-t)}(S(T+T_1) - K_1)^+ | \mathcal{F}_t) \\ &= c(T + T_1 - t, S(t), K_1) \\ &= S(t)\Phi(h_1(S(t), T + T_1 - t, K_1)) - Ke^{-r(T+T_1-t)}\Phi(h_2(S(t), T + T_1 - t, K_1) \end{aligned}$$

Auf dieses Underlying wird ein Call mit Basis K und Laufzeit T betrachtet, der also in T die Auszahlung

$$CC = (C(T) - K)^+$$

zusichert. Dieser Claim hat den Anfangspreis

$$\begin{aligned} c_{cc}(S(0), T, K) &= \mathbb{E}^* e^{-rT}(C(T) - K)^+ = \mathbb{E}^* e^{-rT}(C(T) - K)1_{\{C(T)>K\}} \\ &= \mathbb{E}^* e^{-rT} C(T) 1_{\{C(T)>K\}} - Ke^{-rT}\mathbb{P}^*(C(T) > K) \\ &= C(0)\mathbb{E}^* \frac{e^{-rT}C(T)}{C(0)} 1_{\{C(T)>K\}} - Ke^{-rT}\mathbb{P}^*(C(T) > K) \end{aligned}$$

Der abdiskontierte Preisprozess $(e^{-rt}C(t))_{t\geq 0}$ ist ein positives Martingal unter $\mathbb{P}^*$. Deshalb kann ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^*_C$ definiert werden durch

$$\mathbb{P}^*_C(A) = \int_A \frac{e^{-rt}C(t)}{C(0)} d\mathbb{P}^*$$

für alle $A \in \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T$. Somit ergibt sich

$$c_{cc}(S(0), T, K) = C(0)\mathbb{P}^*_C(C(T) > K) - Ke^{-rT}\mathbb{P}^*(C(T) > K).$$

Man erkennt also eine analoge Struktur zur einfachen Black-Scholes Call Formel. Da

$$C(T) = g(S(T))$$

mit $g(x) = c(T, x, K_1)$ und g das Intervall $(0, \infty)$ streng monoton wachsend auf das Intervall $(0, \infty)$ abbildet, gibt es einen Aktienkurs s^* ,so dass

$$C(T) > K \Longleftrightarrow S(T) > s^*$$

gilt. Das s^* erhält man durch Lösen von $g(s) = K$ Somit folgt

$$\mathbb{P}^*(C(T) > K) = \mathbb{P}^*(S(T) > s^*) = \Phi(h_2(S(0), T, s^*)).$$

Die Berechnung von

$$\mathbb{P}^*_C(C(T) > K) = \mathbb{P}^*_C(S(T) > s^*)$$

ist auch prinzipiell möglich, kann aber hier nicht durchgeführt werden, da mit Hilfe der stochastischen Analysis die Verteilung von $S(T)$ unter dem Maß $\mathbb{P}^*_C$ berechnet werden muss. Hierzu ist die Anwendung eines allgemeineren Satzes von Girsanov notwendig.

7.12.6 Chooser Option

Bei der Chooser-Option hat man die Wahl zu einem bestimmten Zeitpunkt in einen Call oder einen Put einzutreten. Wir betrachten also eine Put und eine Call-Option mit Laufzeit T und Basis K. Die Chooser-Option gibt einem das Recht zu einem festen Zeitpunkt $T_1 < T$ zu wählen, ob man den Call oder den Put erhalten möchte. Rational wird man sich für den Call entscheiden, wenn dieser in T_1 mehr wert ist als der Put. Deshalb kann man die Chooser-Option als ein Derivat ansehen, dass eine Auszahlung

$$Ch = (S(T) - K)^+ 1_{\{c(T-T_1,S(T_1))>p(T-T_1,S(T_1))\}} + (K - S(T))^+ 1_{\{c(T-T_1,S(T_1))<p(T-T_1,S(T_1))\}}$$

in T zusichert. Es gilt

$$Ch = (S(T) - K)^+ + (K - S(T))1_{\{c(T-T_1,S(T_1))<p(T-T_1,S(T_1))\}}.$$

Der erste Summand ist ein Call mit Laufzeit T und Basis K. Den Preis des zweiten Summanden kann man folgendermaßen berechnen.

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^* e^{-rT}(K - S(T))1_{\{c(T-T_1,S(T_1))<p(T-T_1,S(T_1))\}} \\ = & \mathbb{E}^*\,\mathbb{E}^*\big(e^{-rT}(K - S(T))1_{\{c(T-T_1,S(T_1))<p(T-T_1,S(T_1))\}}|\mathcal{F}_{T_1}\big) \\ = & \mathbb{E}^* 1_{\{c(T-T_1,S(T_1))<p(T-T_1,S(T_1))\}}(Ke^{-rT} - e^{-rT_1}S(T_1) \end{aligned}$$

Wegen der Put-Call Parität gilt

$$c(T - T_1, S(T_1)) + Ke^{-r(T-T_1)} = S(T_1) + p(T - T_1, S(T_t)).$$

Also ist

$$c(T - T_1, S(T_1)) > p(T - T_1, S(T_t)) \Longleftrightarrow S(T_1) > Ke^{-r(T-T_1)}$$

und damit

$$\mathbb{E}^* e^{-rT}(K - S(T))1_{\{c(T-T_1,S(T_1))<p(T-T_1,S(T_1))\}} \quad = \quad \mathbb{E}^* e^{-rT_1}(Ke^{-r(T-T_1)} - S(T_1))1_{\{S(T_1)<Ke^{-r(T-T_1)}\}}.$$

Somit folgt für den Anfangspreis der Chooser-Option

$$p_{ch}(S(0), T_1, T, K) = c(S(0), T, K) + p(S(0), T_1, Ke^{-r(T-T_1)}).$$

7.12.7 Lookback-Option

Die Lookback-Option ist neben der einseitigen Barrieren-Option ein pfadabhängiges Derivat, für welche es eine explizite Preisformel gibt. Zu einer Laufzeit T gibt es verschiedene Ausführungen einer Lookback-Option. Etwa

$$\max_{0\le t\le T} S(t) - S(T) \quad \text{oder} \quad S(T) - \min_{0\le t\le T} S(t)$$

oder auch

$$(\max_{0\le t\le T} S(t) - K)^+ \quad \text{oder} \quad (K - \min_{0\le t\le T} S(t))^+.$$

Da die gemeinsame Verteilung von $\max_{0\le t\le T} S(t)$ und $S(T)$ bzw. $\min_{0\le t\le T} S(t)$ und $S(T)$ bestimmt worden sind mit dem Spiegelungsprinzip und Girsanov, kann man explizite Berechnungsformeln herleiten.