Skript

Höhere Finanzmathematik

Steffen Schwarz

Sommersemester 2016

Dozent: PD Dr. Volkert Paulsen

Fakultät für Mathematik

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Übersicht:
1. Aktienmodelle

- · Allgemeines von einem Wiener-Prozess getriebenes Semimartingalmodell
  - Aufstellung des Modells
  - Bestimmung der äquivalenten Martingalmaße
  - Bewertung von Derivaten
  - Bestimmung von Replikationsstrategien
- · Spezielle Modelle
  - Stochastische Volatilitätsmodelle (z.B. Heston-Modell)

2. Rentenmärkte

- · Informelle Einführung (z.B. Bonds, Floor, Swap)
- · Shortrate Modelle/Zinsstrukturmodelle
  - Vasicek-Modelle
  - CIR-Modelle
- · Libor Markt Modelle

—————— Inhaltlich zu Vorlesung 'stochastische Analysis', WS 2015/2016 ——————

III Stochastische Differentialgleichungen

15.4.16

1 Starke Lösbarkeit

Sei W ein r−dimensionaler Wiener-Prozess und seien

> $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (entspricht der Geschwindigkeit eines Teilchens zum Zeitpunkt t)
>
> $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (entspricht einer Störung/einem Rauschen)

messbare Funktionen.
Zunächst soll definiert werden, was unter einer starken Lösbarkeit einer stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

mit Anfangsbedingung ξ zu verstehen ist.

Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem r−dimensionalen Wiener-Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ und kanonischer Filtration

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t).$$

Weiter ist die Startvariable ξ eine von $\mathcal{F}^W$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^d$.
Definiere

$$\mathcal{F}_t^{(0)} := \sigma(\xi, W_s : s \leq t)$$

sowie das System der vernachlässigbaren Mengen $\mathbb{N}$ durch

$$\mathbb{N} := \{N \subseteq \Omega : \exists A \in \mathcal{F}_\infty^{(0)} \text{ und } \mathbb{P}(A) = 0\}.$$

Gehe über zur vervollständigten Filtration durch

$$\mathcal{F}_t^{(1)} := \sigma(\mathcal{F}_t^{(0)} \cup \mathbb{N}) \quad \text{für alle } t \geq 0$$

und

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_{t+}^{(1)} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^{(1)}.$$

Definition 1.1. *Ein stochastischer Prozess X ist starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

mit Startvariable ξ, wenn gilt:

(i) *X ist adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$,*

(ii) $\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1$,

(iii) $\int_0^t |b_i(s, X_s)|ds + \int_0^t \sigma_{ij}^2(s, X_s)ds < \infty$ *$\mathbb{P}$-fast sicher,*

(iv) *X erfüllt die Integralgleichung*

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

welche komponentenweise definiert ist durch

$$X_t^{(i)} = \xi^{(i)} + \int_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq d, t \geq 0.$$

Bemerkung. *Die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung kann als Output eines dynamischen Systems interpretiert werden. X bestimmt die Entwicklung des Zustandes eines Teilchens in $\mathbb{R}^d$ unter Einfluss des Vektorfeldes b und des Rauschens W. Die Stärke des Einflusses des Rauschens wird bestimmt durch σ.*

Blackbox	*$b(t,X)$ entspricht einem Geschwindigkeitsvektor/Driftvektor zum Zeitpunkt t im Zustand X.* *$\sigma(t,X)$ entspricht einer Streuungsmatrix/Volatilitätsmatrix zum Zeitpunkt t um Zustand X.*

Die Änderung der Lösung kann näherungsweise für kurze Zeiten beschrieben werden durch

$$X_{t+h} - X_t \approx b(t,X_t)h + \sigma(t,X_t)\begin{pmatrix} W_{t+h}^{(1)} - W_t^{(1)} \\ \vdots \\ W_{t+h}^{(r)} - W_t^{(r)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(b(t,X_t)h, \sigma(t,X_t)\sigma^T(t,X_t)h^2).$$

Der Output eines solchen dynamischen Systems sollte eindeutig vom Input abhängen. Dies führt zur Definition der starken Eindeutigkeit.

Definition 1.2. *Das Paar (b,σ) erfüllt die Eigenschaft der starken Eindeutigkeit, falls für jeden Warhrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ mit $r-$dimensionalen Wiener-Prozess W, jede Startvariable ξ und für je zwei starke Lösungen X,Y von*

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

mit Anfangswert ξ gilt

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \quad \text{für alle } t \geq 0) = 1.$$

Beispiel 1.3. *Sei $b : [0,\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, messbar und nicht wachsend in x, d.h. für $x \leq y$ gilt*

$$b(t,x) \geq b(t,y) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Seien X,Y Lösungen von

$$dX_t = b(t,X_t)dt + dW_t$$

mit Anfangswert ξ. Dann sind X und Y nicht unterscheidbar, d.h.

$$\mathbb{P}(X = Y \quad \text{für alle } t \geq 0) = 1.$$

Beweis. Setze $Z_t := X_t - Y_t$ für alle $t \geq 0$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} Z_t &= \xi + \int_0^t b(x,X_s)ds + W_t - \xi - \int_0^t b(s,Y_s)ds - W_t \\ &= \int_0^t b(s,X_s) - b(s,Y_s)ds. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$0 \leq Z_t^2 \overset{\text{Itō}}{=} 2\int_0^t Z_s dZ_s + \underbrace{\langle Z\rangle_t}_{=0}$$

$$= 2 \int_0^t \underbrace{(X_s - Y_s)(b(s,X_s) - b(s,Y_s))}_{\le 0} ds$$
$$\le 0.$$

$\Rightarrow Z_t^2 = 0 \Rightarrow Z_t = 0 \quad$ für alle $t \ge 0$. □

Zunächst sollen Bedingungen an b und σ gestellt werden, sodass die starke Eindeutigkeit folgt.
Vorbereitend benötigt man das Lemma von Gronwall:

Lemma 1.4 (Lemma von Gronwall). *Seien $T > 0$ und $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft*

$$0 \le g(t) \le \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds \quad \textit{für alle } t \le T$$

mit $\beta \ge 0$ und $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.
Dann gilt:

$$g(t) \le \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds \quad \textit{für alle } t \le T.$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t} \int_0^t g(s)ds\right) &= e^{-\beta t} g(t) - \beta e^{-\beta t} \int_0^t g(s)ds \\
&= e^{-\beta t}(g(t) - \beta \int_0^t g(s)ds) \\
&\le e^{-\beta t}\alpha(t).
\end{aligned}$$

Also gilt

$$e^{-\beta t} \int_0^t g(s)ds \le \int_0^t \alpha(s) e^{-\beta s} ds.$$

Wegen der Voraussetzung folgt also

$$\begin{aligned}
g(t) &\le \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds \\
&\le \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds.
\end{aligned}$$

□

Hieraus kann auf die starke Eindeutigkeit geschlossen werden, wenn eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt ist. Es gilt allgemein: 15.4.16

$$x \in \mathbb{R}^d : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2$$

$$\sigma \in \mathbb{R}^{d\times r} : \|\sigma\|^2 = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^2$$

Satz 1.5. *Die Koeffizienten (b,σ) erfüllen die folgenden Bedingung:*
Für $n \geq 1$ gibt es eine Konstante K_n mit

$$\|b(t,x) - b(t,y)\|^2 + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2 \leq K_n \|x-y\|^2 \quad \text{für alle } t \geq 0, \|x\|, \|y\| \leq n.$$

Dann erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t \tag{1}$$

die Eigenschaft der starken Eindeutigkeit.

Bemerkung. *Da die Eigenschaft der starken Eindeutigkeit von dem Tupel (b,σ) abhängt, sagt man auch, dass das Tupel (b,σ) die Eigenschaft der starken Eindeutigkeit erfüllt.*

Beweis. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Wiener-Prozess W und unabhängiger Startvariable ξ. Seien X, Y Lösungen von Gleichung 7 zur Startvariable ξ.
Lokalisiere durch

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq n \text{ oder } \|Y_t\| \geq n\}$$

Dann gilt:

$$X_t^{\tau_n} - Y_t^{\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} b(u,X_u) - b(u,Y_u)du + \int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma(u,X_u) - \sigma(u,Y_u)dW_u.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|X_t^{\tau_n} - Y_t^{\tau_n}\|^2 &= \mathbb{E}\|\int_0^{t\wedge\tau_n} b(u,X_u) - b(u,Y_u)du + \int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma(u,X_u) - \sigma(u,Y_u)dW_u\|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}\|\int_0^{t\wedge\tau_n} b(u,X_u) - b(u,Y_u)du\|^2 + 2\mathbb{E}\|\int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma(u,X_u) - \sigma(u,Y_u)dW_u\|^2 \\
&\overset{\text{Isometrie}}{\leq} 2\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} \|b(u,X_u) - b(u,Y_u)\|du\right)^2 + 2\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma(u,X_u) - \sigma(u,Y_u)\|^2 du \\
&\underset{\text{Ungl.}}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}} 2t\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n} \|b(u,X_u) - b(u,Y_u)\|^2 du + 2\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma(u,X_u) - \sigma(u,Y_u)\|^2 du
\end{aligned}$$

$$\leq 2(1+t)K_n \int_0^t \mathbb{E}\|X_u^{\tau_n} - Y_u^{\tau_n}\|^2 du.$$

Gronwalls Lemma, angewendet auf

$$g(u) = \mathbb{E}\|X_u^{\tau_n} - Y_u^{\tau_n}\|$$

liefert

$$g \equiv 0 \quad \text{für alle } u \leq t.$$

$\Rightarrow X_u^{\tau_n} = Y_u^{\tau_n}$ für alle $u \leq t$
$\Rightarrow X^{\tau_n}$ ist nicht unterscheidbar von Y^{τ_n} für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow X$ ist nicht unterscheidbar von Y. □

Für die Existenz einer Lösung muss eine globale Lipschitz- und Wachstumsbedingung gefordert werden. Dann kann durch Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes eine starke Lösung eindeutig konstruiert werden.
Für jedes $T > 0$ sei

$$L_2^T := \{X : X \text{ ist adaptiert, stetig, } \mathbb{R}^d - \text{wertig und } \mathbb{E}\sup_{t\leq T} X_t^2 < \infty\}.$$

Durch $\|X\|_{2,T} := \left(\mathbb{E}\sup_{t\leq T}\|X_t\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ wird L_2^T zu einem Hilbertraum.
Wichtige Ungleichungen sind

Lemma 1.6. *Für jedes $X \in L_2^T$ gilt:*

(i) $\mathbb{E}\sup_{t\leq T}\|\int_0^t X_u du\|^2 \leq T\int_0^t \|X\|_{2,t}^2 dt,$

(ii) $\mathbb{E}\sup_{t\leq T}\|\int_0^t X_u dW_u\|^2 \leq 4\int_0^t \|X\|_{2,t}^2 dt.$

Beweis. (ii) folgt aus der Doob'schen L_2-Ungleichung für Martingale:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\leq T}\|\int_0^t X_u dW_u\|^2 &\leq 4\sup_{t\leq T}\mathbb{E}\|\int_0^t X_u dW_u\|^2 \\
&\overset{\text{Isō-}}{\underset{\text{Isometrie}}{=}} 4\sup_{t\leq T}\mathbb{E}\int_0^t \|X_u\|^2 du \\
&= 4\mathbb{E}\int_0^T \|X_u\|^2 du \\
&= 4\int_0^T \mathbb{E}\|X_u\|^2 du
\end{aligned}$$

$$\leq 4 \int_0^T \|X\|_{2,u}^2 du.$$

$\square$

Satz 1.7. *Gegeben sei die stochastische Differentialgleichung*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t. \tag{2}$$

(b, σ) erfüllen eine globale Lipschitz- und Wachstumsbedingung der Form:
Zu jedem $T > 0$ gibt es eine Konstante K mit

(i) $\|b(t,x) - b(t,y)\|^2 + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2 \leq K\|x - y\|^2$

(ii) $\|b(t,x)\|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2)$

für alle $t \leq T$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$.
Dann gibt es zu jedem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $r-$dimensionalen Wiener-Prozess W und unabhängiger Startvariable ξ, die

$$\mathbb{E}\|\xi\|^2 < \infty$$

erfüllt, einen $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierten Prozess X mit stetigen Pfaden, der die stochastische Differentialgleichung (2) mit Anfangsbedingung $X_0 = \xi$ löst. Hierbei ist $(F_t)_{t\geq 0}$ die von W und ξ erzeugte Filtration, die die usual conditions erfüllt.
Weiter gibt es zu jedem T eine Konstante C mit

$$\|X\|_{2,T}^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2)e^{Ct}.$$

Beweis. Fixiere $T > 0$. Die stochastische Differentialgleichung wird zunächst bis T eindeutig gelöst durch ein Fixpunktargument:
Definiere einen Operator

$$\begin{aligned} A: \quad & L_2^T \longrightarrow L_2^T \\ & X \mapsto \xi + \int_0^{\cdot} b(u, X_u)du + \int_0^{\cdot} \sigma(u, X_u)dW_u \end{aligned}$$

Der Operator A ist wohldefiniert, da es eine Konstante C_1 gibt, mit

$$\|A(X)\|_{2,t}^2 \leq C_1(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2 + \int_0^t \|X\|_{2,u} du) \quad \text{für alle } t \leq T, X \in L_2^T. \tag{3}$$

Entscheidend ist die Ungleichung

$$\|A^n(X) - A^n(Y)\|_{2,t}^2 \leq \frac{(C_2 t)^n}{n!}\|X - Y\|_{2,t}^2 \quad \text{für alle } t \leq T, X.Y \in L_2^T \tag{4}$$

mit $C_2 = 2K(T+4)$.
Hieraus folgt

(i) A ist ein stetiger Operator (da A Lipschitz stetig ist mit Konstante $\frac{(C_2 t)^n}{n!}$)

(ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : A^{n_0}$ ist eine Kontraktion auf L_2^T (denn ab n_0 wird $\frac{(C_2 t)^n}{n!} < 1$).

Wegen (ii) kann der Banach'sche Fixpunktsatz auf A^{n_0} angewendet werden.
Also konvergiert zu jedem Startprozess $Z \in L_2^T$ die Folge $(A^{kn_0(Z)})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt X von A^{n_0}.
Wegen der Stetigkeit von A ist X auch ein Fixpunkt von A und damit eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung bis T, denn

$$\begin{aligned} A(X) &= A(\lim_{k\to\infty} A^{kn_0}(X)) \\ &= \lim_{k\to\infty} A(A^{kn_0}(X)) \\ &= \lim_{k\to\infty} A^{kn_0}(A(X)) \\ &= X. \end{aligned}$$

Beweis von Gleichung 4 durch Induktion:
IA: $n = 0 \Rightarrow$ klar
IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
&\|A^{n+1}(X) - A^{n+1}(Y)\|_{2,t}^2 \\
&= \mathbb{E} \sup_{s\le t} \| \int_0^s b(u, A^n(X)_u) - b(u, A^n(Y)_u) du + \int_0^s \sigma(u, A^n(X)_u - \sigma(u, A^n(Y)_u) dW_u \|^2 \\
&\le 2\mathbb{E} \sup_{s\le t} \| \int_0^s b(u, A^n(X)_u) - b(u, A^n(Y)_u) du\|^2 + \| \int_0^s \sigma(u, A^n(X)_u) - \sigma(u, A^n(Y)_u) dW_u \|^2 \\
&\overset{\text{Lemma}}{\underset{1.6}{\le}} 2t \int_0^t \|b(\cdot, A^n(X).) - b(\cdot, A^n(Y).)\|_{2,u}^2 du + 8 \int_0^t \|\sigma(\cdot, A^n(X).) - \sigma(\sigma, A^n(Y).)\|_{2,u}^2 du \\
&\overset{\text{Lipschitz-}}{\underset{\text{Bedingung}}{\le}} 2K(T+4) \int_0^t \|A^n(X) - A^n(Y)\|_{2,u}^2 du \\
&\overset{IV}{\le} 2K(T+4) \frac{C_2^n}{n!} \int_0^t u^n \|X - Y\|_{2,u}^2 du \\
&\le \frac{C_2^{n+1}}{n!} \int_0^t u^n du \|X - Y\|_{2,t}^2 \\
&= \frac{C_2^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} \|X - Y\|_{2,t}^2
\end{aligned}$$

Es bleibt Gleichung 4 zu zeigen: 19.4.16

Wegen der linearen Wachstumsbedingung folgt für $x \in L_2^T$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{s\le t}\|b(s,X_s)\|^2 + \mathbb{E}\sup_{s\le t}\|\sigma(s,X_s)\|^2 &\le 2k^2\mathbb{E}\sup_{s\le t}(1+\|X_s\|^2)\\ &= 2k^2(1+\|X\|_{2,t}^2 \quad \text{für alle } t\le T.\end{aligned}$$

Also ist

$$b(\cdot,X.),\sigma(\cdot,X.)\in L_2^T$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\|A(X)\|_{2,t}^2 &= \mathbb{E}\left(\sup_{s\le t}\|\xi+\int_0^s b(u,X_u)du+\int_0^s\sigma(u,X_u)dW_u\|\right)^2\\ &\le 3\left(\mathbb{E}\|\xi\|^2+\mathbb{E}\sup_{s\le t}\|\int_0^s b(u,X_u)du\|^2+\mathbb{E}\sup_{s\le t}\|\int_0^s\sigma(u,X_u)dW_u\|^2\right)\\ &\le 3\left(\mathbb{E}\|\xi\|^2+t\int_0^t\|b(\cdot,X.)\|_{2,u}^2du+4\int_0^t\|\sigma(\cdot,X.)\|_{2,u}^2du\right)\\ &\le 3\left(\mathbb{E}\|\xi\|^2+k^2(4+t)(t+\int_0^t\|X\|_{2,u}^2du\right).\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung bei einer geeigneten Wahl von C_1

Für den Fixpunkt $X = A(X)$ folgt insbesondere

$$\mathbb{E}\sup_{s\le t}\|X_s\|^2 = \|X\|_{2,t}^2 = \|A(X)\|_{2,t}^2 \le C_1(1+\mathbb{E}\|\xi\|^2+\int_0^t\|X\|_{2,s}^2ds).$$

Anwendung des Gronwall'schen Lemmas mit

$$g(t) = \|X\|_{2,t}^2$$

liefert

$$\|X\|_{2,t}^2 \le C_1(1+\mathbb{E}\|\xi\|^2)e^{C_1t} \quad t\le T.$$

□

Aus der Monotoniebedingung für den Anfangswert kann auf eine Monotoniebedinung für die Lösung geschlossen werden.

Satz 1.8. (b,σ) *erfüllen die Voraussetzungen aus Satz 1.7. Sei ξ eine Startvariable der SDGL*

$$dX_t = b(t,X_t)dt+\sigma(t,X-t)dW_t$$

und sei

$$t\mathbb{E}\|\xi\|^{2p}<\infty \qquad \textit{für alle } p\ge 1.$$

Dann gibt es eine Konstante C, die nur von T,p und k abhängt, so dass

$\mathbb{E}\sup_{t_0\le s\le t}\|X_s\|^{2p} \le C(1+\mathbb{E}\|X_{t_0}\|^{2p})e^{C(t-t_0)}$ *und*

$\mathbb{E}\sup_{t_0\le s\le t}\|X_s - X_{t_0}\|^{2p} \le C(1+\mathbb{E}\|X_{t_0}\|^{2p})(t-t_0)^p$ *für alle* $0\le t_0\le t\le T$.

Das Theorem liefert insbesondere, dass das $2p$–te absolute Moment der Lösung endlich ist, denn setze $t_0 = 0$, so ist $X_{t_0} = \xi$ und

$$\mathbb{E}\|X_{t_0}\|^{2p} \le \mathbb{E}\sup_{s\le t}\|X_s\|^{2p} \le C(1+\mathbb{E}\|\xi\|^{2p})e^{Ct}.$$

Beweis. Idee: Rückführung auf den Fall $p = 1$ durch Anwendung der Itō-Formel. Sei $d = 1$.

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

$$\begin{aligned}
dX_t^\alpha &= \alpha X_t^{\alpha-1}dX_t + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)X_t^{\alpha-2}d\langle X\rangle_t\\
&= \alpha X_t^{\alpha-1}(b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t) + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)X_t^{\alpha-2}\sigma^2(t,X_t)dt\\
&= \alpha X_t^{\alpha-1}\sigma(t,X_t)dW_t + \left(\alpha X_t^{\alpha-1}b(t,X_t) + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)X_t^{\alpha-2}\sigma^2(t,X_t)\right)dt\\
&= \mu(t,X_t^\alpha)dt + \tilde\sigma(t,X_t^\alpha)dW_t
\end{aligned}$$

Ausgeführt ist dies im Buch Kloeden/Platen, Numerical Methods □

Ziel: Nachweis der Markov-Eigenschaft von starken Lösungen von SDGL.
Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ mit r–dimensionalen Wiener-Prozess W und einem von W unabhängigen Startvektor ξ.
Sei $(F_t)_{t\ge0}$ die von W und ξ erzeugte vollständige Filtration und sei X eine starke Lösung von

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

mit $X_0 = \xi$.
Wir setzen voraus, dass für jeden Anfangswert $(t,y)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ obige Differentialgleichung eindeutig durch einen Prozess

$$\left(X_{t+s}^{t,y}\right)_{s\ge0}$$

gelöst wird, d.h.

$$X_{t+s}^{t,y} = y + \int_t^{t+s} b(u,X_u^{t,y})du + \int_t^{t+s}\sigma(u,X_u^{t,y})dW_u \quad \text{für alle } s,t\ge0.$$

Man beachte, dass $(W(t-s)-W(t))_{s\ge0} = (W^t(s))_{s\ge0}$ ein Wiener-Prozess ist bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{t+s})_{s\ge0}$ adaptiert bezüglich der von $(W^t(s))_{s\ge0}$ erzeugten Filtration und damit unabhängig von $\mathcal{F}_t$.
Dies ist der Schlüssel, um die Markov-Eigenschaft zu zeigen.

Satz 1.9. *Erfüllt die SDGL*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = \xi$$

die obigen Vorraussetzungen, so ist die starke Lösung $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein Markov-Prozess, d.h. es gilt:*

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(X_{t+s})|X_t)$$

für alle $t, s \geq 0$ *und beschränkte, messbare* f.

Beweis. Als starke Lösung der SDGL erfüllt X die Gleichung

$$X_{t+s} - X_t = \int_t^{t+s} b(u, X_u)du + \int_t^{t+s} \sigma(u, X_u)dW_u$$

also

$$X_{t+s} = X_t + \int_t^{t+s} b(u, X_u)du + \int_t^{t+s} \sigma(u, X_u)dW_u.$$

Deshalb gilt:

$$X_{t+s}(u) = X_{t+s}^{t, X_t(\omega)}(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Genauer:
Bezeichne mit

$$F(t, t+s; y, \omega) := X_{t+s}^{t,y}(\omega) \quad \text{für alle } t, s \geq 0, y \in \mathbb{R}^d, \omega \in \Omega.$$

Dann ist

$$X_{t+s}(\omega) = F(t, t+s; X_t(\omega), \omega).$$

Dies ist eine Art Flussgleichung der SDE (stochastic differential equation)
Beachte: $\omega \mapsto F(t, t+s; y, \omega)$ ist stochastisch unabhängig von $\mathcal{F}_t$.
Man erhält

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(f(F(t, t+s; X_t(\cdot), \omega)|\mathcal{F}_t) = g(X_t)$$

mit $g(y) = \mathbb{E}f(F(t, t+s; y, \cdot))$.
Genauso folgt

$$\mathbb{E}(f(X_{t+s})|X_t) = \mathbb{E}f(F(t, t+s; X_t, \cdot))|X_t) = g(X_t).$$

□

Bemerkung. *Erläuterung der Markov Eigenschaft:* 22.4.16

$$\begin{aligned} X_{t+s}^{t,y}(\omega) &= F(t, y; t+s, \omega) \\ &= H_{t,t+s}(y, (W_{t+s}(\omega) - W_t(\omega))_{0\leq u\leq s}) \end{aligned}$$

$$X_{t+s}(\omega) = X_{t+s}^{t, X_t(\omega)}(\omega) = H_{t,t+s}(X_t(\omega), (W_{t+u}(\omega) - W_t(\omega))_{0\leq u\leq s}$$

Da X_t $\mathcal{F}_t$*−messbar ist und* $(W_{t+u} - W_t)_{0\leq u\leq s}$ *unabhängig von* $\mathcal{F}_t$ *ist, folgt die Markov-Eigenschaft im folgenden Lemma:*

Lemma 1.10. *Seien* $(M_1, \mathfrak{M}_1), (M_2, \mathfrak{M}_2)$ *messbare Räume, sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* $\mathcal{G}$ *eine Unter–*σ*–Algebra von* $\mathcal{F}$. *Seien* $X_1 : \Omega \longrightarrow M_1$ *und* $X_2 : \Omega \longrightarrow M_2$ *und* $h : (M_1 \times M_2, \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ *messbare Abbildungen.*
Es gelte:

(i) X_1 *ist unabhängig von* $\mathcal{G}$.

(ii) X_2 *ist messbar bezüglich* $\mathcal{G}$.

(iii) $\mathbb{E}(h(X_1, X_2)) < \infty$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(X_1, X_2)|\mathcal{G}) &= \mathbb{E}(h(X_1, X_2)|X_2)\\ &= \mathbb{E}(h(X_1, X_2)|X_2 = \cdot) \circ X_2\\ &= g(X_2) \text{ mit } g(y) = \mathbb{E}(h_1(X_1, X_2)|X_2 = y) = \mathbb{E}(h(X_1, y)\end{aligned}$$

Beweis. siehe Übung □

Definition 1.11. *Ist die Lösung der SDE zum Zeitpunkt* t *in* x, *so erreicht sie eine Menge* $A \in \mathcal{B}^d$ *zum Zeitpunkt* $t + s$ *mit Übergangswahrscheinlichkeit*

$$K(t, x; t + s, A) = \mathbb{P}(X^{t,x}_{t+s} \in A \qquad \text{für alle } t, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Fixiert man t *und* s, *so ist* $K(t, \cdot; t + s, \cdot)$ *ein (Übergangs-)Kern des Markov-Prozesses zu* t *und* $t + s$.

$$\begin{aligned}K(t, x; t + s, A) &= \mathbb{P}(X_{t+s} \in A|X_t = x)\\ &= \mathbb{P}(X^{t,x}_{t+s} \in A)\end{aligned}$$

Wegen der Markov-Eigenschaft gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{t+s} \in A|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}(X_{t+s} \in A|X_t)\\ &= K(t, X_t; t + s, A)\end{aligned}$$

Die Markov-Eigenschaft impliziert die Chapman Kolmogorov Gleichung:

Satz 1.12 (Chapman Kolmogorov Gleichung:)**.** *Sei* X *starke Lösung der SDE*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \qquad X_0 = \xi.$$

Sei $(K(t, \cdot; t + s, \cdot))_{t,s\geq 0}$ *die Familie der Übergangskerne.*
Dann gilt:

$$K(t, x; t + s, A) = \int_{\mathbb{R}} K(t + h, y; t + s, A)K(t, x; t + h, dy)$$

für alle $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}^d, h < s$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
K(t,x;t+s,A) &= \mathbb{P}(X_{t+s}^{t,x} \in A) \\
&= \mathbb{E}\mathbb{P}(X_{t+s}^{t,x} \in A | \mathcal{F}_{t+s} \\
&\overset{\text{Markov}}{\underset{\text{Eig}}{=}} \mathbb{E}\mathbb{P}(X_{t+s}^{t,x} \in A | X_{t+s}^{t,x}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{t+s}^{t,x} \in A | X_{t+h}^{t,x} = y) \mathbb{P}^{X_{t+h}^{t,x}}(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{t+s}^{t+h,y} \in A) \mathbb{P}^{X_{t+s}^{t,x}}(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} K(t+h,y;t+s,A) K(t,x;t+h,dy)
\end{aligned}
$$

□

Alternativ kann auch eine Beschreibung mittels Übergangsoperatoren durchgeführt werden.

Definition 1.13. *Sei*

$$b\mathcal{B}^d := \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} : \textit{messbar und beschränkt}\}.$$

Für $s, t \geq 0$ definiere den Übergangsoperator $T_{t,t+s} : b\mathcal{B}^d \longrightarrow b\mathcal{B}^d$ durch

$$
\begin{aligned}
T_{t,t+s} f(X) &= \mathbb{E} f(X_{t+s}^{t,x}) \\
&= \int f(y) K(t,x;t+s,dy).
\end{aligned}
$$

Die Familie der Übergangsoperatoren hat folgende Eigenschaften:

(i) $T_{t,t+s} = T_{t+h,t+s} \circ T_{t,t+h}$ für alle $t, s \geq 0, 0 \leq h < s$

(ii) $T_{t,t} = \mathrm{id} = \lim_{h \to 0} T_{t,t+h}$

(iii) $T_{t,t+s} f \geq 0$ für alle $f \geq 0, s, t \geq 0$

(iv) $T_{t,t+s} \mathbb{1} = \mathbb{1}$ für alle $t, s \geq 0$, wobei $\mathbb{1}_x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$

Haben die Übergangskerne Dichtequotienten bezüglich des Lebesgue-Maßes, so kommt man zu den sogenannten Übergangsdichten:

$$K(t,x;t+s,A) = \int_A p(t,x;t+s,y) dy.$$

Beispiel. *Ein Wiener-Prozess hat die Übergangsdichte*

$$p(t,x;t+s,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-\frac{1}{2s}(y-x)^2}$$

und

$$K(t,x;t+s,\cdot) = \mathbb{N}(x,s)$$

,da Inkremente von Wiener-Prozessen normalverteilt sind.

——— Inhaltlich zu Vorlesung 'Höhere Finanzmathematik', SS 2016 ———

I Modelle für Aktienmärkte

22.4.16

Ziel:

- Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Aktienkursen
- Charakterisierung der arbitragefreien Märkte
- Bewertung von Derivaten

Technische Vorbemerkungen

- Semimartingale werden betrachtet auf einem Zeitintervall $[0,T)$. In der stochastischen Analysis entspricht T gerade $+\infty$.
- Lokalisation wird für $[0,T)$ durchgeführt:
$(M_t)_{0\le t<T} \in \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}$, wenn $M_0 = 0$ und es existiert eine aufsteigende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit M^{τ_n} ist ein stetiges Martingal und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = T$.

$$M \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}} \Leftrightarrow M - M_0 \in \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}$$

$M \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}$ ist nach T fortsetzbar, falls $\lim_{t\nearrow T} M_t$ existiert $\mathbb{P}$–fast sicher. Dann wird M_T durch $M_T = \lim_{t\nearrow T} M_t$ definiert.

Bemerkung. *Ist* $\langle M\rangle_T := \lim_{t\nearrow T}\langle M\rangle_t < \infty$ $\mathbb{P}$*–fast sicher, so existiert* $\lim_{t\nearrow T} M_t$ $\mathbb{P}$*–fast sicher.*

- $(A_t)_{0\le t<T}$ heißt stetiger FV-Prozess, falls A adaptiert ist mit stetigen Pfaden, die $\mathbb{P}$–fast sicher auf jedem $[0,t], t<T$, von beschränkter Variation sind.
- $(X_t)_{0\le t<T}$ heißt stetiges Semimartingal, falls

$$X = X_0 + M + A$$

mit $M \in \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}, A \in FV^0_c$ und $\mathcal{F}_0$ messbarem X_0.

- Für $M \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}$ ist $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$, falls $(H(t))_{0\leq t<T}$ previsibel ist und $\int\limits_0^t H(s)^2 d\langle M\rangle_s < \infty$ $\mathbb{P}-$fast sicher für alle $0 \leq t < T$ erfüllt.
- Durch $\left(\int\limits_0^t H_s dM_s\right)_{0\leq t<T}$ wird ein stetiges lokales Martingal definiert. Existiert

$$\lim_{t\nearrow T}\int\limits_0^t H_s dM_s \,\mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

so wird definiert

$$\int\limits_0^T H_s dM_s = \lim_{t\nearrow T}\int\limits_0^t H_s dM_s.$$

- Für $A \in FV_c$ ist $K \in L_{\text{loc}}(A)$, falls K progressiv messbar ist und

$$\int\limits_0^t |K_s| dFV_{[0,s]}(A) < \infty \,\mathbb{P}\text{-fast sicher für alle } 0 \leq t < T.$$

Dann kann pfadweise $\left(\int\limits_0^t K_s dA_s\right)_{0\leq t<T}$ definiert werden.

1 Modellbeschreibung

26.4.16

Beschreibung eines Finanzmarktes

- Handelszeitraum $[0, T)$
- d risky assets (Aktien)
- Numeraire Asset (Geldmarktkonto) entspricht einem Verrechnungsfinanzgut. Preise werden auch in Einheiten des Numeraire Assets notiert.

1.1 Ein Semimartingalmodell

1. Annahme
Die Quelle des Zufalls für die d risky assets wird bestimmt durch einen $n-$dimensionalen Wiener-Prozess $W = (W_1, ..., W_n)$. Es gibt also einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t<T}, \mathbb{P})$ und einen $n-$dimensionalen Wiener-Prozess W, so dass $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t<T}$ die von W erzeugte Wiener-Filtration ist.
Kurz: W bestimmt den Zufall im Markt.
2. Annahme
Sei $(S_i(t))_{0\leq t<T}$ der Preisprozess des $i-$ten risky assets. Dann ist $(S_i(t))_{t\geq 0}$ ein positives, stetiges Semimartingal. Es gilt also

$$\mathbb{P}(S_i(t) > 0 \quad \text{für alle } 0 \leq t < T) = 1 \quad i = 1, ..., d.$$

3. Annahme
Der Preisprozess $(N(t))_{0 \le t < T}$ des Numeraire Assets ist ein positives, stetiges Semimartingal.

Bemerkung. - *Die erste Annahme ist die eigentliche einschränkende Annahme. Sie bestimmt, welcher latente (=verborgene) Zufall im Markt ist, der die Kurse treibt.*

- *Die zweite Annahme ist eine notwendige und damit natürliche, um arbitragefreie Märkte zu erhalten.*

  Kurz: Alle sinnvollen Finanzmarktmodelle müssen die zweite Annahme erfüllen.

- *Die dritte Annahme ist ähnlich zur zweiten einzuordnen.*

Bemerkung. *Das Vorhandensein eines Numeraire Assets ist wichtig, um ausreichenden Handel zu ermöglichen, der zu einer eindeutigen Bewertung von Derivaten führt. Häufig ist das Numeraire Asset ein Geldmarktkonto, dessen Preisprozess wir mit $(\beta(t))_{0 \le t < T}$ bezeichnen wollen.*

Definition. *Ein Numeraire Asset ist ein Geldmarktkonto genau dann, wenn $(N(t))_{0 \le t < T}$ ein positiver FV_c–Prozess ist.*

Bemerkung. *Oft wird das Geldmarktkonto als 'risikolose' Geldanlage angesehen. Das ist insofern richtig, als das die Schwankungen in der Entwicklung des Geldmarktkontos deutlich geringer sind als die Schwankungen der risky assets.*

Folgerungen aus den Annahmen
1. Der Preisprozess des i–ten risky assets:
Ito Formel wird angewendet auf

$$X_i(t) = \ln S_i(t) \quad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Man erhält

$$dX_i(t) = \frac{1}{S_i(t)} dS_i(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S_i(t)^2} d\langle S_i \rangle_t.$$

Für das Semimartingal

$$Y_i(t) = \int_0^t \frac{1}{S_i(u)} dS_i(u), \qquad \text{für alle } 0 \le t < T$$

gilt

$$\langle Y_i \rangle_t = \int_0^t \frac{1}{S_i(u)^2} d\langle S_i \rangle_u.$$

Also ist

$$dX_i(t) = dY_i(t) - \frac{1}{2} d\langle Y_i \rangle_t$$

und damit

$$X_i(t) = X_i(0) + Y_i(t) - \frac{1}{2}\langle Y_i\rangle_t.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} S_i(t) &= S_i(0)\exp\left(\ln S_i(t) - \ln S_i(0)\right) \\ &= S_i(0)\exp\left(Y_i(t) - \frac{1}{2}\langle Y_i\rangle_t\right). \end{aligned}$$

Damit erfüllt S_i die stochastische Differentialgleichung

$$dS_i(t) = S_i(t)dY_i(t), \qquad \text{für alle } 0 \le t < T$$

mit Anfangswert $S_i(0) \in (0,\infty)$.
Y_i hat eine Semimartingalzerlegung der Form

$$Y_i(t) = M_i(t) + C_i(t), \qquad \text{für alle } 0 \le t < T$$

mit $M \in \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}, C \in FV^0_c$.
Wegen $\langle Y_i\rangle = \langle M_i\rangle$ gilt also

$$S_i(t) = S_i(0)\exp\left(M_i(t) - \frac{1}{2}\langle M_i\rangle_t\right)\exp(C_i(t)), \qquad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

S_i erfüllt die SDE

$$dS_i(t) = S_i(t)(dM_i(t) + dC_i(t)).$$

<u>4. Annahme</u>
Für alle $1 \le i \le d$ hat C_i $\mathbb{P}$–fast sicher absolut stetige Pfade bezüglich des Lebesgue-Maßes, d.h. es gibt progressiv messbare Prozesse $(\mu_i(t))_{0\le t<T}$ mit

$$\int_0^t |\mu_i(s)|ds < \infty \qquad \text{für alle } 0 \le t < T$$

so dass

$$C_i(t) = \int_0^t \mu_i(s)ds.$$

Also gilt:

$$S_i(t) = S_i(0)\exp\left(M_i(t) - \frac{1}{2}\langle M_i\rangle_t\right)\exp\left(\int_0^t \mu_i(s)ds\right)$$

bzw.

$$dS_i(t) = S_i(t)(dM_i(t) + \mu_i(t)dt)$$

mit Anfangswert $S_i(0)$.

Da eine Wiener-Filtration vorliegt, hat das lokale Martingal M_i eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} M_i(t) &= \int_0^t \sigma_i(s)dW(s) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^t \sigma_{ij}(s)dW_j(s) \end{aligned}$$

mit vorhersehbaren Prozessen $\sigma_{i1}, ..., \sigma_{in}$, mit

$$\int_0^t |\sigma_i(s)|^2 ds < \infty \qquad \text{für alle } 0 \leq t < T.$$

Der Preisprozess des i−ten risky assets erfüllt also

$$S_i(t) = S_i(0) \exp\left(\int_0^t \sigma_i(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_i(s)|^2 ds \right) \exp\left(\int_0^t \mu_i(s)ds \right)$$

für alle $0 \leq t < T$ und damit

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)) \\ &= S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dW_j(t)). \end{aligned}$$

2. Das Numeraire Asset
Hier kann analog argumentiert werden.
Es gibt einen $\mathbb{R}^d$−wertigen previsiblen Prozess $(\sigma_N(t))_{0 \leq t < T}$ und einen progressiven messbaren Prozess $(\mu_N(t))_{0 \leq t < T}$ mit

$$\int_0^t |\sigma_N(s)|^2 ds < \infty \qquad \text{für alle } 0 \leq t < T$$

und

$$\int_0^t |\mu_N(s)| ds < \infty \qquad \text{für alle } 0 \leq t < T$$

sodass

$$N(t) = N(0) \exp\left(\int_0^t \sigma_N(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_N(s)|^2 ds \right) \exp\left(\int_0^t \mu_N(s)ds \right)$$

für alle $0 \leq t < T$.

Also

$$\begin{aligned} dN(t) &= N(t)(\mu_N(t)dt + \sigma_N(t)dW(t)) \\ &= N(t)(\mu_N(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{Nj}(t)dW_j(t). \end{aligned}$$

Ist $\sigma_N(t) \equiv 0$, so liegt ein Geldmarktkonto mit zufälliger Zinsrate $r(t) = \mu_N(t)$ vor und es gilt

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right) = \beta(t) \quad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Also

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt, \quad \beta(0) = 1.$$

1.2 Beispiele

a) Das klassische, eindimensionale Black-Scholes Modell

- konstante Volatilität $\sigma > 0$
- konstante Aktienrendite $\mu \in \mathbb{R}$
- konstante Zinsrate $r \in \mathbb{R}$
- ein Wiener-Prozess, der die Aktie treibt.

Das bedeutet:

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$$

mit Anfangswert $S_0 \in (0, \infty)$.

$$S(t) = S(0)e^{\mu t} \exp\left(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

und

$$dN(t) = N(t)rdt, \quad N(0) = 1$$

also

$$N(t) = e^{rt} = \beta(t), \quad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

b) Das klassische, mehrdimensionale Black-Scholes Modell

- d Aktien
- n treibende Wiener-Prozesse
- konstante Volatilitätsmatrix $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times n}$
- d konstante mittlere Aktienrenditen $\mu_1, ..., \mu_d$.

Dies bedeutet
$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} dW_j(t))$$
mit $S_i(0) \in (0, \infty)$ für alle $1 \le i \le d$ bzw.
$$S_i(t) = S_i(0) e^{\mu_i t} \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} W_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 t \right) \qquad \text{für alle } 1 \le i \le d.$$

Das Geldmarktkonto N geht analog zu a).

c) Das mehrdimensionale Black-Scholes Modell mit deterministischen Koeffizienten wie b), ersetze aber $\mu_1, ..., \mu_d$ und σ durch Funktionen $\mu_1, ..., \mu_d : [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma : [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$ mit
$$\int_0^t |\mu(s)| ds < \infty \quad 0 \le t < T$$
und
$$\int_0^t \|\sigma(s)\|^2 ds < \infty \quad 0 \le t < T.$$
Dann ist
$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i(t) dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t) dW_j(t)), \qquad \text{für alle } 1 \le i \le d.$$

d) Das mehrdimensionale Diffusionsmodell

- Volatilitätsmatrix $\sigma : [0,T) \times (0,\infty)^d \longrightarrow \mathbb{R}^{d \times n}$
- Driftfunktion $\mu : [0,T) \times (0,\infty)^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$

Der d–dimensionale Preisprozess der risky assets ist dann starke Lösung der SDE
$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i(t, S(t)) dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t, S(t)) dW_j(t)), \qquad \text{für alle } 1 \le i \le d.$$

Das Geldmarktkonto erfüllt
$$d\beta(t) = \beta(t) r(t, S(t)) dt$$
d.h.
$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(u, S(u)) du \right).$$
Wichtig ist: In einem Diffusionsmodell ist S ein d–dimensionaler Markov-Prozess als starke Lösung einer SDE.

1.3 Handel

29.4.16

- maximaler Handelszeitraum $[0, T)$
- Handeln kann man entsprechend einer Handelsstrategie (K, H), mit $K = (K(t))_{0\leq t<T}$ vorhersehbarer Prozess, der gegen $(N(t))_{0\leq t<T}$ integriert werden kann.

  $H = (H(t))_{0\leq t<T}$ ist ein d–dimensionaler vorhersehbarer Prozess, der gegen S integriert werden kann.
- $K(t)$ entspricht der Anzahl an Anteilen im Numeraire Asset zum Zeitpunkt t.
- $H_i(t)$ entspricht der Anzahl an Anteilen im i–ten risky asset zum Zeitpunkt t.
- Eine Handelsstrategie (K, H) induziert eine Vermögensentwicklung

$$\begin{aligned} V(t) &= K(t)N(t) + \sum_{i=1}^{d} H_i(t)S_i(t) \\ &= K(t)N(t) + H(t)S(t) \quad 0 \leq t < T \end{aligned}$$

- Gewinnentwicklung

$$\begin{aligned} G(t) &= \int\limits_{(0,t]} K(u)dN(u) + \sum_{i=1}^{d} \int\limits_{(0,t]} H_i(u)dS_i(u) \\ &= \int\limits_{(0.t]} K(u)dN(u) + \int\limits_{(0,t]} H(u)dS(u) \quad \text{für alle } 0 \leq t < T \end{aligned}$$

Definition 1.4. *Eine Handelsstrategie (K, H) heißt selbstfinanzierend, wenn der Vermögenszuwachs nur durch Gewinn aus dem Handel entsteht, d.h.*

$$V(t) - V(0) = \int\limits_{(0,t]} K(u)dN(u) + \int\limits_{(0,t]} H(u)dS(u) \quad \textit{für alle } 0 \leq t < T$$

und in differentialer Notation:

$$\begin{aligned} dV(t) &= K(t)dN(t) + H(t)dS(t) \\ &= K(t)dN(t) + \sum_{i=1}^{d} H_i(t)dS_i(t). \end{aligned}$$

Bei selbstfinanzierenden Handelsstrategien wird die Vermögensentwicklung, notiert in Anteilen des Numeraire Assets, nur bestimmt durch die Anfangsnotierung (d.h. des Anfangskapitals) und die Position in den risky assets (d.h. der Handelsstrategie H).
Sei $S_i^\star(t) := \frac{S_i(t)}{N(t)}$ für alle $1 \leq i \leq d, 0 \leq t < T$
und $V^\star(t) := \frac{V(t)}{N(t)}$ für alle $0 \leq t < T$.

Satz 1.5. *Eine Handelsstrategie (K,H) ist selbstfinanzierend genau dann, wenn*

$$V^\star(t) = \frac{V(0)}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \quad 0 \le t < T$$

gilt.

Beweis. Dies folgt aus der partiellen Integrationsformel für Semimartingale.
Beweis für $d = 1 = n$.
'$\Leftarrow$' Es gilt

$$V^\star(t) = V^\star(0) + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \quad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Zu zeigen:

$$V(t) = V(0) + \int_0^t K(u)dN(u) + \int_0^t H(u)dS(u) \quad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Mittels partieller Integration folgt:

$$dV(t) = d(V^\star(t)N(t)) = V^\star(t)dN(t) + N(t)dV^\star(t) + d\langle V^\star, N\rangle_t.$$

Nach Voraussetzung gilt:

$$dV^\star(t) = H(t)dS^\star(t)$$

Zu berechnen ist $dS^\star(t)$. Es gilt:

$$dS^\star(t) = d\frac{S(t)}{N(t)} = S(t)d\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{N(t)}dS(t) + d\langle S, \frac{1}{N}\rangle_t$$

und

$$\begin{aligned} d\frac{1}{N(t)} &= -\frac{1}{N(t)^2}dN(t) + \frac{1}{N(t)^3}d\langle N\rangle_t \\ &= -\frac{1}{N(t)^2}dN(t) + \frac{1}{N(t)}\sigma_N^2(t)dt \end{aligned}$$

da $dN(t) = N(t)(r(t)dt + \sigma_N^2(t)dW(t))$.
Also ist

$$dS^\star(t) = \frac{1}{N(t)}dS(t) - \frac{S(t)}{N(t)^2}dN(t) + \frac{S(t)}{N(t)}\sigma_N^2(t)dt - \frac{S(t)}{N(t)}\sigma(t)\sigma_N(t)dt.$$

Man beachte

$$d\langle V^\star, N\rangle_t = H(t)d\langle S^\star, N\rangle_t$$

$$
\begin{aligned}
&= H(t)\frac{S(t)}{N(t)}\sigma(t)N(t)\sigma_N(t)dt - H(t)\frac{S(t)}{N(t)^2}N(t)\sigma_N(t)N(t)\sigma_N(t)dt \\
&= H(t)S(t)(\sigma(t)\sigma_N(t) - \sigma_N(t)^2)dt.
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt also

$$
\begin{aligned}
dV(t) &= V^\star(t)dN(t) + N(t)dS^\star(t) + H(t)S(t)(\sigma(t)\sigma_N(t) - \sigma_N(t)^2)dt \\
&= V^\star(t)dN(t) + H(t)dS(t) - H(t)S^\star(t)dN(t) \\
&\quad + H(t)S(t)\sigma_N^2(t)dt - H(t)S(t)\sigma_N(t)\sigma(t)dt \\
&\quad + H(t)S(t)(\sigma(t)\sigma_N(t) - \sigma_N(t)^2)dt \\
&= H(t)dS(t) + (V^\star(t) - H(t)S^\star(t))dN(t) \\
&= H(t)dS(t) + K(t)dN(t)
\end{aligned}
$$

da $V^\star(t) = \frac{V(t)}{N(t)} = \frac{K(t)N(t)+H(t)S(t)}{N(t)} = K(t) + H(t)S^\star(t)$.
'$\Rightarrow$'
Analog; s. Übung. □

Bemerkung. *Bei einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie (K,H) ist die Wertentwicklung, notiert in Anteilen des Numeraire Assets, eindeutig bestimmt durch die Anfangsnotierung $V^\star(0) = \frac{V(0)}{N(0)}$ und das Handeln in den risky assets, denn*

$$V^\star(t) = V^\star(0) + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \quad \textit{für alle } 0 \le t < T.$$

Gibt man sich umgekehrt eine Anfangsnotierung $V^\star(0)$ vor und eine Handelsstrategie H bezüglich der risky assets, so gibt es genau einen previsiblen Prozess $(K(t))_{0\le t<T}$ derart, dass (K,H) selbstfinanzierend ist und

$$V^\star(t) = V^\star(0) + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \quad \textit{für alle } 0 \le t < T$$

erfüllt.
Bestimmung von $(K(t))_{0\le t<T}$:
Einerseits gilt:

$$V^\star(t) = K(t) + H(t)S^\star(t)$$

andererseits gilt wegen der Selbstfinanzierung

$$V^\star(t) = V^\star(0) + \int_0^t H(u)dS^\star(u).$$

Also gilt:

$$K(t) = V^\star(0) + \int_0^t H(u)dS^\star(u) - H(t)S^\star(t).$$

1.4 Arbitrage

Definition. *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (K, H) ist eine Arbitragemöglichkeit, wenn sie ohne Anfangskapital ein positives Vermögen schafft, d.h.*

$$V(0) = 0 \text{ und } \lim_{t \nearrow T} V(t) =: V(T) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}(V(T) > 0) > 0.$$

Bemerkung. *Beachte: Die Existenz von $\lim_{t \nearrow T} V(t)$ wird vorausgesetzt.*

Eine äquivalente Umformulierung ist:

Satz 1.6. *Es gelte $N(T) := \lim_{t \nearrow T} N(t) > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.*
Dann gibt es eine Arbitragemöglichkeit genau dann, wenn es einen previsiblen Prozess $(H(t))_{0 \leq t < T}$ gibt mit

$$\int_0^T H(u) dS^\star(u) \geq 0 \text{ und } \mathbb{P}\left(\int_0^T H(u) dS^\star(u) > 0\right) > 0.$$

Beweis. Die Voraussetzung stellt sicher, dass $\lim_{t \nearrow T} V(t)$ existiert genau dann, wenn $\lim_{t \nearrow T} V^\star(t)$ existiert.
Wegen

$$V^\star(T) = \underbrace{V^\star(0)}_{=0} + \int_0^T H(u) dS^\star(u)$$

folgt die Behauptung. □

Bemerkung. *Durch $(H(t))_{0 \leq t < T}$ wird die Möglichkeit geschaffen, einen risikolosen Gewinn zu erzielen. Diese Fassung des Arbitragebegriffes ist allerdings zu allgemein, da ein sinnvolles Modell wie z.B das Black-Scholes Modell eine Arbitragemöglichkeit bieten würde.*

Satz 1.7. *Im Black-Scholes Modell gibt es Arbitragemöglichkeiten.*

Beweis. Betrachte ein Black-Scholes Modell mit $\mu = r$. Es gilt

- $\beta(t) = e^{rt}$
- $dS(t) = S(t)(r dt + \sigma dW(t)), \quad \sigma > 0$
- $S^\star(t) = e^{-rt} S(t)$ ist ein Martingal
- $dS^\star(t) = S^\star(t) \sigma dW(t)$

Gesucht ist ein vorhersehbarer Prozess $(H(t))_{0\le t<T}$ mit

$$\lim_{t\nearrow T}\int_0^t H(u)dS^\star(u) = 1.$$

Dann kann mittels H eine Arbitragemöglichkeit konstruiert werden.
Ansatz:

$$V(t) = \int_0^t H(u)dS^\star(u) = \int_0^t \underbrace{H(u)\sigma S^\star(u)}_{f(u)}dW(u).$$

Wähle $H(u)$ so, dass

$$f(u) = H(u)\sigma S^\star(u), \quad 0\le u<T$$

eine deterministische Funktion ist, mit

$$\int_0^t f(u)^2du<\infty \qquad \text{für alle } 0\le t<T.$$

Wähle f so, dass

$$\int_0^T f(u)^2du=\infty$$

etwa

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{T-t}}.$$

Damit ist

$$M(t) := \int_0^t f(u)dW(u)$$

und

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t f(u)^2du \qquad \text{für alle } 0\le t<T$$

sowie

$$\langle M\rangle_T = \lim_{t\nearrow T}\langle M\rangle_t = \infty.$$

Setze

$$\tau := \inf\{0\le t<T : M(t)=1\}.$$

Dann ist

$$\mathbb{P}(\tau<T)=1.$$

Definiere nun H durch

$$H(u) = \begin{cases}\frac{f(u)}{\sigma S^\star(u)} & \text{falls } u\le\tau\\ 0 & \text{falls } u>\tau\end{cases}.$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\int_0^t H(u)dS^\star(u) &= \int_0^t f(u)\mathbb{1}_{(0,\tau]}(u)dW(u) \\
&= \int_0^{t\wedge\tau} f(u)dW(u) \\
&= M(t\wedge\tau)
\end{aligned}
$$

also

$$
\lim_{t\nearrow T} \int_0^t H(u)dS^\star(u) = M(\tau) = 1.
$$

□

Konsequenz: Die Klasse der möglichen Handelsstrategien ist zu groß und muss geeignet eingeschränkt werden. 3.5.16
Forderung: Beim Handel darf man sich nicht beliebig verschulden.

Definition 1.8. *Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie (K,H) heißt zulässig, wenn es ein $c>0$ gibt, mit*

$$
V^\star(t) \geq -c \quad \text{für alle } 0\leq t<T.
$$

Durch Anwenden von (K,H) kann man sich also nicht mehr als c Einheiten des Numeraire Assets verschulden.

Definition 1.10. *Ein Finanzmarkt heißt arbitragefrei, wenn es keine zulässigen Arbitragemöglichkeiten gibt.*

Bemerkung. *Mit dieser Definition ist auch das Black-Scholes Modell arbitragefrei, denn mit der im Beweis angesprochenen Strategie konnte man zwar ein Arbitrage erzeugen, doch musste man in Kauf nehmen sich zwischen dem Zeitpunkt 0 und τ mit positiver Wahrscheinlichkeit beliebig hoch zu verschulden. Durch die eingeführte untere Schranke ist solch eine Strategie nicht mehr erlaubt.*

Mit probabilistischen Methoden sollen arbitragefreie Märkte angegeben werden. Dies führt zum Begriff des äquivalenten Martingalmaßes.

Definition 1.11. *Gegeben sein ein Finanzmarkt entsprechend (1.1). Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ auf $(\Omega,\mathcal{F}_T)$ heißt äquivalentes Martingalmaß, falls gilt:*

(i) $\mathbb{P}^\star \sim \mathbb{P}$ *auf* $(\Omega,\mathcal{F}_T)$,

(ii) $(S_i^\star(t))_{0\leq t<T}$ *ist ein lokales Martingal bezüglich* $\mathbb{P}^\star$ *für alle* $1\leq i\leq d$.

Märkte mit äquivalentem Martingalmaß sind arbitragefrei:

Satz 1.12. *Existiert ein äquivalentes Martingalmaß, so gibt es keine zulässigen Arbitragemöglichkeiten.*

Beweis. Sei (K, H) eine selbstfinanzierende, zulässige Handelsstrategie. Dann gilt

$$V^\star(t) = V^\star(0) + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \quad \text{für alle } 0 \leq t < T.$$

Also ist $V^\star$ ein lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}^\star$, das

$$V^\star(t) \geq -c \quad \text{für alle } 0 \leq t < T$$

erfüllt.
Damit ist $V^\star$ ein Supermartingal, welches nach dem Martingalkonvergenzsatz $\mathbb{P}^\star$-fast sicher konvergiert für $t \nearrow T$. Wegen des Lemmas von Fatou gilt für alle s:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star(V^\star(T)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}^\star(\liminf_{t \nearrow T} V^\star(t)|\mathcal{F}_s) \\
&\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{t \nearrow T} \mathbb{E}^\star(V^\star(t)|\mathcal{F}_s) \\
&\leq V^\star(s).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt:

$$\mathbb{E}^\star V^\star(T) \leq V^\star(0).$$

□

Die Umkehrung von Satz 1.12 ist im Allgemeinen falsch. Auch wenn der Markt arbitragefrei ist, kann man nicht auf die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes schließen. Hierzu muss der Handel eine etwas stärke Bedingung erfüllen.

Definition 1.13. *Eine $\mathcal{F}_T$−messbare Abbildung $C \geq 0$ mit $\mathbb{P}(C > 0) > 0$ heißt free lunch with vanishing risk, wenn es eine Folge von selbstfinanzierenden zulässigen Handelsstrategien $((K_n, H_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, \infty)$ gibt, mit*

(i) $V_0((K_n, H_n)) \leq v_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) $V_T((K_n, H_n)) \geq C$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,

(iii) $\lim_{n \to \infty} v_n = 0$.

Ein Finanzmarkt erfüllt die No Free Lunch with Vanishing Risk (NFLVR) Bedingung, wenn es keinen free lunch with vanishing risk gibt.

Satz 1.14 (No Arbitrage Theorem). *Gegeben sei ein Finanzmarkt entsprechend (1.1). Dann sind äquivalent:*

(i) Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß.

(ii) Der Markt erfüllt die NFLVR Bedingung.

Beweis. siehe Orginalpaper von Delbaen und Schachermayer. □

Mit Hilfe des Satzes von Girsanov kann man entscheiden, ob es ein äquivalentes Martingalmaß gibt:

Satz 1.15. *Gegen sei ein Finanzmarkt entsprechend (1.1). Es existiere $N(T) := \lim_{t \nearrow T} N(t)$ und $N(T) > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Genau dann existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$, wenn es einen n–dimensionalen previsiblen Prozess $(\nu(t))_{0 \le t < T}$ gibt mit*

(i) $\int_0^T |\nu(s)|^2 ds < \infty$ *$\mathbb{P}$-fast sicher,*

(ii) $\mu(t) + \sigma(t)(\nu(t) - \sigma_N(t)) = (\mu_N(t) - |\sigma_N(t)|^2 + \sigma_N(t)\nu(t))\mathbb{1}$ *für alle* $0 \le t < T$,

(iii) $\mathbb{E}\exp\left(\int_0^T \nu(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\nu(s)|^2 ds\right) = 1.$

Beachte: $\mathbb{1} = (\underbrace{1, ..., 1}_{d})^T$

Beweis. $\underline{'\Rightarrow'}$ Sei $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß. Dann ist der Dichteprozess

$$L_t = \frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} \quad \text{für alle } 0 \le t < T$$

ein gleichgradig integrierbares Martingal mit

$$L_T = \lim_{t \nearrow T} L_t > 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Weiter hat L eine Exponentialmartingaldarstellung der Form

$$L_t = \exp\left(M(t) - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\right) \quad \text{für alle } 0 \le t < T$$

mit lokalem Martingal M.
Setze

$$\langle M \rangle(T) := \lim_{t \nearrow T} \langle M \rangle_t.$$

Da auf $\{\langle M(T) \rangle = \infty\}$

$$\frac{M(t)}{\langle M \rangle_t} \longrightarrow 0 \quad \text{für } t \nearrow T,$$

gilt

$$\ln L_t = M(t) - \frac{1}{2}\langle M\rangle_t = \langle M\rangle_t \left(\frac{M(t)}{\langle M\rangle_t} - \frac{1}{2}\right) \longrightarrow -\infty$$

auf $\{\langle M\rangle_T = \infty\}$.
Da $L_t > 0 \quad \mathbb{P}$-fast sicher folgt somit

$$\mathbb{P}(\{\langle M\rangle_T = \infty\}) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

also

$$\langle M\rangle_T < \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Der Martingaldarstellungssatz liefert einen previsiblen Prozess $(\nu(t))_{0\le t<T}$ mit

$$\int_0^t |\nu(s)|^2 ds < \infty \qquad \text{für alle } 0 \le t < T$$

und

$$M(t) = \int_0^t \nu(s) dW(s) \qquad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Wegen $\langle M\rangle_T < \infty \quad \mathbb{P}$-fast sicher ist

$$\int_0^T |\nu(s)|^2 ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und

$$M(T) = \lim_{t\nearrow T} M(t) = \int_0^T \nu(s) dW(s).$$

Also folgt

$$L_T = \exp\left(\int_0^T \nu(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\nu(s)|^2 ds\right)$$

und somit

$$1 = \mathbb{E}L_T = \mathbb{E}\exp\left(\int_0^T \nu(s) dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\nu(s)|^2 ds\right).$$

Damit gelten (i) und (iii).
zu (ii): Für $1 \le i \le d$ gilt:

$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t)dW_j(t)$$

$$dN(t) = N(t)(\mu_N(t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{Nj}(t)dW_j(t)$$

Die Itō-Formel liefert

$$\begin{aligned}
d\frac{1}{N(t)} &= -\frac{1}{N(t)^2}dN(t) + \frac{1}{N(t)^3}d\langle N\rangle_t \\
&= -\frac{1}{N(t)}(\mu_N(t)dt + \sigma_N(t)dW(t)) + \frac{1}{N(t)}|\sigma_N(t)|^2 dt \\
&\quad - \frac{1}{N(t)}((|\sigma_N(t)|^2 - \mu_N(t))dt - \sigma_N(t)dW(t)).
\end{aligned}$$

Partielle Integration impliziert

$$\begin{aligned}
d\frac{S_i(t)}{N(t)} &= S_i(t)d\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{N(t)}dS_i(t) + d\langle S_i, \frac{1}{N}\rangle_t \\
&= \frac{S_i(t)}{N(t)}((|\sigma_N(t)|^2 - \mu_N(t))dt - \sigma_N(t)dW(t)) \\
&\quad + \frac{S_i(t)}{N(t)}(\mu_i(t)dt + \sigma_i(t)dW(t)) \\
&\quad - \frac{S_i(t)}{N(t)}\sigma_N(t)\sigma_i(t)dt.
\end{aligned}$$

Also folgt

$$dS_i^\star(t) = S_i^\star(t)((|\sigma_N(t)|^2 + \mu_i(t) + \sigma_N(t)\sigma_i(t) - \mu_N(t))dt + (\sigma_i(t) - \sigma_N(t))dW(t)). \quad (5)$$

Der Satz von Girsanov liefert

$$W_j^\star(t) = W_j(t) - \int_0^t \nu(s)ds \quad 1 \leq j \leq n, 0 \leq t < T$$

sind n unabhängige Wiener-Prozesse bezüglich $\mathbb{P}^\star$.
Eingesetzt in Gleichung 5 liefert dies

$$\begin{aligned}
dS_i^\star(t) &= S_i^\star(t)(|\sigma_N(t)|^2 + \mu_i(t) - \sigma_N(t)\sigma_i(t) - \mu_N(t) + (\sigma_i(t) - \sigma_N(t))\nu(t))dt \\
&\quad + S_i^\star(t)(\sigma_i(t) - \sigma_N(t))dW^\star(t).
\end{aligned}$$

Also ist $S_i^\star$ ein lokales Martingal genau dann wenn der dt−Term verschwindet. d.h.

$$\begin{aligned}
&|\sigma_N(t)|^2 + \mu_i(t) + (\sigma_i(t) - \sigma_N(t))\nu(t) = \mu_N(t) + \sigma_N(t)\sigma_i(t) \\
\Leftrightarrow &\mu_i(t) + \sigma_i(t)\nu(t) - \sigma_i(t)\sigma_N(t) = \mu_N(t) - |\sigma_N(t)|^2 + \sigma_N(t)\nu(t).
\end{aligned}$$

Also gilt (ii). '$\Leftarrow$' Mit Hilfe von (i) und (ii) liefert der Satz von Girsanov ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ mit 6.5.16

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\vartheta(s)|^2 ds\right).$$

(ii) impliziert, dass

$$S_i^\star(t) = \frac{S_i(t)}{N(t)}, \quad 0 \leq t < T$$

ein lokales $\mathbb{P}^\star$−Martingal ist für alle $1 \leq i \leq d$. □

Bemerkung 1.16. *Ist N ein Geldmarktkonto, so lautet die Bedingung (ii) in Satz 1.15*

$$\mu(t) + \sigma(t)\vartheta(t) = r(t)\mathbb{1} \qquad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Beispiel 1.17. *a) eindimensionales Black-Scholes Modell*

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) \\ d\beta(t) &= \beta(t) r dt \end{aligned}$$

Setze $\vartheta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ *und*

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t\right).$$

Dann ist $\mathbb{P}^\star$ *ein äquivalentes Martingalmaß:*
Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ *gilt:*

$$dS(t) = S(t)(r dt + \sigma dW^\star(t)$$

mit $W^\star(t) = W(t) - \vartheta t$.
Beziehungsweise äquivalent:

$$dS^\star(t) = S^\star(t)\sigma dW^\star(t)$$

b) mehrdimensionales Black-Scholes Modell

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)(\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_j(t)) \qquad \text{für alle } 1 \le i \le d, 0 \le t < T \\ d\beta(t) &= \beta(t) r dt \end{aligned}$$

Ist die Gleichung

$$\mu + \sigma\vartheta = r\mathbb{1}$$

durch ein $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ *lösbar, so existiert ein äquivalentes Martingalmaß* $\mathbb{P}^\star$.

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\sum_{j=1}^n \vartheta_j W_j(t) - \frac{1}{2}|\vartheta|^2 t\right)$$

und

$$W^\star(t) = W(t) - \vartheta t$$

ist ein n*−dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich* $\mathbb{P}^\star$.
Außerdem ist

$$dS_i(t) = S_i(t)(r dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_j^\star(t)).$$

Ist $n = d$ *und* σ *invertierbar, so ist*

$$\vartheta = \sigma^{-1}(-(\mu - r\mathbb{1})).$$

c) Black-Scholes mit deterministischen Koeffizienten

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)) \\ d\beta(t) &= \beta(t)rdt \end{aligned}$$

Ist die Gleichung

$$\mu(t) + \sigma(t)\vartheta(t) = r(t)\mathbb{1} \qquad \text{für alle } 0 \le t < T$$

durch $\vartheta(t) \in \mathbb{R}^n$ lösbar und gilt

$$\int_0^T |\vartheta(s)|^2 ds < \infty$$

so wird durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\vartheta(s)|^2 ds \right) \qquad 0 \le t < T$$

ein äquivalentes Martingalmaß definiert.

$$W^\star(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)dt$$

ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^\star$ und

$$dS_i(t) = S_i(t)(r(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)dW_j^\star(t))$$

bezüglich $\mathbb{P}^\star$ für alle $1 \le i \le d$.

2 Bewerten von Derivaten

Wir betrachten einen Finanzmarkt entsprechend 1.1, das heißt

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \overline{\sigma}_{ij}(t)dW_j(t)) \quad 1 \le i \le d \\ dN(t) &= N(t)(\mu_N(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{Nj}(t)dW_j(t)). \end{aligned}$$

Wir setzen voraus, dass es ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ gibt.
Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ gibt es dann einen Wiener-Prozess $W^\star$, so dass

$$\begin{aligned} dS_i^\star(t) &= S_i^\star(t)\sigma_i(t)dW^\star(t) \\ &= S_i^\star(t)\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t)dW_j^\star(t) \qquad \text{für alle } 1 \le i \le d, 0 \le t < T \end{aligned}$$

gilt.
Hierbei ist

$$\sigma_{ij}(t) := \overline{\sigma}_{ij}(t) - \sigma_{Nj}(t)$$

und

$$S_i^\star(t) = \frac{S_i(t)}{N(t)}.$$

Kurz:

$$dS^\star(t) = S^\star(t)\sigma(t)dW^\star(t)$$

Ein Derivat ist ein Vertrag, der zum Termin T eine zufällige Auszahlung (/Ausschüttung) C zusichert. Dies wird durch den Begriff des T–Claims formalisiert.

Definition 2.1. *Ein T–Claim C ist eine $\mathcal{F}_T$–messbare Abbildung. C heißt replizierbar zum Anfangskapital $x \in \mathbb{R}$, wenn es einen previsiblen Prozess H gibt mit*

(i) $\frac{x}{N(0)} + \int_0^T H(u)dS^\star(u) = \frac{C}{N(T)} =: C^\star$

(ii) $\left(\int_0^t H(u)dS^\star(u)\right)_{0\le t<T}$ *ist ein gleichgradig integrierbares $\mathbb{P}^\star$–Martingal.*

H ist dann eine Replikationsstrategie für C zum Anfangskapital $x \in \mathbb{R}$.
x ist der Betrag in Euro, der vom Verkäufer des Claims benötigt wird, um das Risiko der short Position im Derivat vollständig zu eliminieren.

Bemerkung 2.2. *Ist H eine Replikationsstrategie zum Anfangskapital x für einen T–Claim C, so wird durch $(K(t), H(t))_{0\le t<T}$ mit*

$$K(t) = \frac{x}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) - H(t)S^\star(t) \quad \text{für alle } 0 \le t < T$$

eine selbstfinanzierende Handelsstrategie definiert mit Wertprozess $(V(t))_{0\le t<T}$, so dass

$$\begin{aligned} V^\star(t) &= \frac{x}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \quad \text{für alle } 0 \le t < T \\ &= \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$V(t) = N(t)V^\star(t) = N(t)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \quad 0 \le t < T.$$

Insbesondere ist damit $C^\star$ integrierbar bezüglich $\mathbb{P}^\star$ und

$$\frac{x}{N(0)} = \mathbb{E}^\star C^\star = \mathbb{E}^\star \frac{C}{N(T)}$$

sowie

$$V(T) = C.$$

Ist $C^\star \ge -a$ für ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist (K, H) auch zulässig.

Beweis. $\left(\int_0^t H(u)dS^\star(u)\right)_{0\le t<T}$ ist ein gleichgradig integrierbares $\mathbb{P}^\star$–Martingal mit

$$C^\star = \frac{x}{N(0)} + \int_0^T H(u)dS^\star(u).$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}^\star(\frac{x}{N(0)} + \int_0^T H(u)dS^\star(u)|\mathcal{F}_t) \\
&= \frac{x}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \\
&= V^\star(t) \quad 0 \le t < T.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{E}^\star C^\star = V^\star(0) = \frac{x}{N(0)}.$$

□

Folgerung 2.3. *Sind H_1 und H_2 Replikationsstrategien des Claims C zu den Anfangskapitalien x_1 und x_2, so gilt*

$$x_1 = x_2 \quad \textit{und} \quad \int_0^t H_1(u)dS^\star(u) = \int_0^t H_2(u)dS^\star(u)$$

für alle $0 \le t < T$.

Beweis. Wegen Bemerkung 2.2 gilt

$$\frac{x_1}{N(0)} = \mathbb{E}^\star C^\star = \frac{x_2}{N(0)} \Rightarrow x_1 = x_2$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{N(0)} + \int_0^t H_1(u)dS^\star(u) &= \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \\
&= \frac{x_2}{N(0)} + \int_0^t H_2(u)dS^\star(u).
\end{aligned}$$

Da $x_1 = x_2$ ist auch $\int_0^t H_1(u)dS^\star(u) = \int_0^t H_2(u)dS^\star(u)$ für alle $0 \le t < T$. □

Für einen replizierbaren Claim ist dessen "arbitragefreier" Wertprozess, notiert in Anteilen des Numeraire Assets, bestimmt durch

$$\left(\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t)\right)_{0\leq t<T}.$$

Satz 2.4. *Sei C ein replizierbarer $T-$Claim zum Anfangskapital x und Replikationsstrategie $(H(t))_{0\leq t<T}$. Sei $C^\star \geq -a$ für ein $a>0$.*
Dann gilt für jedes äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}_1^\star$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) &= \frac{x}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u)\\ &= \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \quad 0\leq t<T.\end{aligned}$$

Beweis. 1. Schritt Zeige die Behauptung für beschränktes $C^\star$.
Es gilt wegen Bemerkung 2.2

$$\frac{x}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \quad \text{für alle } 0\leq t<T.$$

Wegen $-a\leq C^\star\leq b$ ist auch

$$-a \leq \frac{x}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \leq b \quad \text{für alle } 0\leq t<T.$$

Also ist das lokale $\mathbb{P}_1^\star-$Martingal $\left(\int_0^t H(u)dS^\star(u)\right)_{0\leq t<T}$ beschränkt und somit ein gleichgradig integrierbares $\mathbb{P}_1^\star-$Martingal.
Also ist

$$\begin{aligned}\frac{x}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) &= \mathbb{E}_1^\star(x + \int_0^T H(u)dS^\star(u)|\mathcal{F}_t)\\ &= \mathbb{E}_1^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \quad \text{für alle } 0\leq t<T.\end{aligned}$$

Insbesondere ist

$$\mathbb{E}_1^\star C^\star = \frac{x}{N(0)} = \mathbb{E}^\star C^\star.$$

2. Schritt $C^\star\geq -a$
Durch Zurückführung auf den ersten Schritt kann man die Aussage zeigen. Dies ist aber eine aufwendigere Argumentation. □

10.5.16

Definition 2.5. *Sei $C \geq 0$ ein replizierbarer Claim. Dann heißt*

$$\mathbb{E}^\star C^\star$$

arbitragefreier Anfangspreis für C, notiert in Anteilen des Numeraire Assets.
$N(0)\mathbb{E}^\star C^\star$ ist der arbitragefreie Anfangspreis in Euro.
$(\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t))_{0\leq t<T}$ ist der arbitragefreie Preisprozess für C, notiert in Anteilen des Numeraire Assets.
Dementsprechend ist $(N(t)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t))_{0\leq t<T}$ der arbitragefreie Preisprozess für C in Euro.

Bemerkung. *Diese Definition ist sinnvoll, da ein um den Handel mit C erweiterter Finanzmarkt $\mathbb{P}^\star$ als äquivalentes Martingalmaß hat. Damit ist der erweiterte Markt arbitragefrei.*
Genauer:
Setzt man

$$N(t)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \qquad \textit{für alle } 0 \leq t < T$$

als Preisprozess für C im erweiterten Markt an, so hat dieser Markt $\mathbb{P}^\star$ als äquivalentes Martingalmaß.

Die Frage stellt sich, wann Claims replizierbar sind. Eine einfache Antwort findet man in sogenannten vollständigen Märkten.

Definition 2.6. *Ein Finanzmarkt heißt vollständig genau dann, wenn es ein eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß gibt.*

Anhand der Driftvektoren und Volatilitäten kann man entscheiden, ob der Markt vollständig ist:

$$\begin{aligned}
dS_i(t) &= S_i(t)(\mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \overline{\sigma}_{ij}(t)dW_j(t)) \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq d \\
dN(t) &= N(t)(\mu_N(t)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{Nj}(t)dW_j(t)
\end{aligned}$$

Die Bedingung (ii) aus Satz 1.15 kann äquivalent umformuliert werden zu

$$\mu(t) + \sigma(t)\vartheta(t) = \mu_N(t)\mathbb{1} + \sigma(t)\sigma_N(t)$$

wobei

$$\sigma_{ij}(t) := \overline{\sigma}_{ij}(t) - \sigma_{Nj}(t) \qquad \text{für alle } 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n.$$

Satz 2.7. *Ist $n > d$, so ist der Markt nicht vollständig.*

Beweis. Existiert kein äquivalentes Martingalmaß, so ist der Markt per Definition nicht vollständig. Existiert aber ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$, so existiert ein weiteres äquivalentes Martingalmaß, womit es kein eindeutiges mehr gäbe, der Markt also nicht vollständig wäre:
Sei $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß mit previsiblem $\mathbb{R}^n$–wertigen Prozess $(\vartheta(t))_{0\leq t<T}$ mit

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\vartheta(s)|^2 ds\right) \quad \text{für alle } 0 \leq t < T$$

und sei

$$\sigma(t)\vartheta(t) = \mu_N(t)\mathbb{1} - \mu(t) + \sigma(t)\sigma_N(t)$$

für $\lambda \otimes \mathbb{P}$–fast alle (t,ω) erfüllt.
Wegen $d < n$ ist Kern $\sigma(t) \neq \{0\}$ für alle $0 \leq t < T$. Wähle $\eta(t) \in$ Kern $\sigma(t)$ mit $|\eta(t)| = 1$ für alle $0 \leq t < T$. Benutze η zur Konstruktion eines weiteren äquivalenten Martingalmaßes.
Es gilt:

$$W^\star(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds \quad \text{für alle } 0 \leq t < T$$

ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^\star$ und

$$dS^\star(t) = S^\star(t)\sigma(t)dW^\star(t).$$

Setze

$$L(t) := \exp\left(\int_0^t \eta(s)dW^\star(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\eta(s)|^2 ds\right) \quad \text{für alle } 0 \leq t < T.$$

Wegen der Novikov Bedingung ist $(L(t))_{0\leq t<T}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. (Alternative Argumentation nutzt Satz von Lévy: Setze $B(t) = \int_0^t \eta(s)dW^\star(s), 0 \leq t < T$. Dann ist B ein lokales Martingal mit $\langle B\rangle_t = \int_0^t \underbrace{|\eta(s)|^2}_{=1} ds = t$. Also ist B ein Wiener-Prozess und $L(t) = \exp(B(t) - \frac{1}{2}t)$ ein $\mathbb{P}^\star$– Martingal.)
Definiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^{\star\star}$ durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^{\star\star}}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_t} = L(t) \quad \text{für alle } 0 \leq t < T.$$

Dann ist

$$W^{\star\star}(t) = W^\star(t) - \int_0^t \eta(s)ds \quad 0 \leq t < T$$

ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^{\star\star}$.
Es gilt:

$$dS^\star(t) = S^\star(t)\sigma(t)dW^\star(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= S^\star(t)\sigma(t)(dW^{\star\star}(t) + \eta(t)dt) \\
&= S^\star(t)(\underbrace{\sigma(t)\eta(t)}_{\substack{=0,\text{ da} \\ \eta\in\text{Kern }\sigma(t)}} dt + \sigma(t)dW^{\star\star}(t)) \\
&= S^\star(t)\sigma(t)dW^{\star\star}(t).
\end{aligned}
$$

Also ist $\mathbb{P}^{\star\star}$ ein weiteres äquivalentes Martingalmaß. □

Satz 2.8. *Ist $n < d$ und Kern $\sigma(t) = \{0\}$ fast sicher, so ist das Modell vollständig, falls*

$$\mu_N(t)\mathbb{1} - \mu(t) + \sigma(t)\sigma_N(t) = \sigma(t)\vartheta(t)$$

fast sicher lösbar ist und

$$\mathbb{E}\exp\left(\int_0^T \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\vartheta(s)|^2 ds\right) = 1.$$

Beweis. Da Kern $\sigma(t) = \{0\}$, ist obiges $\vartheta(t)$ eindeutig. Wegen

$$\mathbb{E}\exp\left(\int_0^T \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T |\vartheta(s)|^2 ds\right) = 1$$

existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$. Damit ist der Markt vollständig. □

Satz 2.9. *Es existiere ein äquivalentes Martingalmaß. Ist $n = d$ und $\sigma(t)$ invertierbar für $\lambda \otimes \mathbb{P}$–fast alle (t,ω), so ist das Modell vollständig.*

Beweis.

$$\mu(t) + \sigma(t)\vartheta(t) = \mu_N(t)\mathbb{1} + \sigma(t)\sigma_N(t)$$

ist eindeutig lösbar genau dann, wenn $\sigma(t)$ invertierbar ist. □

Satz. *Es existierte ein äquivalentes Martingalmaß. Ist $n = d$ und*

$$\lambda \otimes \mathbb{P}(\{(t,\omega) : \sigma(t) \text{ ist nicht invertierbar}\}) > 0$$

so ist das Modell nicht vollständig.

Beweis. Da

$$\lambda \otimes \mathbb{P}(\{(t,\omega) : \sigma(t) \text{ ist nicht invertierbar}\}) > 0$$

ist auf diesem Ereignis Kern $\sigma(t) \neq \{0\}$ und es kann, analog zu Satz 2.7 ein weiteres äquivalentes Martingalmaß konstruiert werden. Damit ist das Modell nicht vollständig. □

In einem vollständigen Markt ist jeder integrierbare Claim replizierbar.

Satz 2.10. *Gegeben sei ein vollständiger Markt mit eindeutigem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$. Sei C ein T–Claim mit $\mathbb{E}^\star|C^\star| < \infty$.*
Dann existiert zum Anfangskapital $x := N(0)\mathbb{E}^\star C^\star$ eine Replikationsstrategie für C.

Beweis. Der Martingaldarstellungssatz liefert eine stochastische Integraldarstellung des gleichgradig integrierbaren $\mathbb{P}^\star$–Martingals

$$\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^\star C^\star + \int_0^t \alpha(u)dW^\star(u).$$

$W^\star$ ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^\star$.
Wegen der Vollständigkeit ist $n \leq d$ und $\sigma(t)$ ist injektiv für fast alle t.
Zu bestimmen ist ein d–dimensionaler previsibler Prozess H mit

$$\int_0^t \alpha(u)dW^\star(u) = \int_0^t H(u)dS^\star(u).$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \int_0^t \alpha_j(s)dW_j^\star(s) &= \sum_{i=1}^d \int_0^t H_i(u)dS_i^\star(u) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \int_0^t H_i(u)S_i^\star(u)\sigma_{ij}(u)dW_j^\star(u) \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^t \sum_{i=1}^d H_i(u)S_i^\star(u)\sigma_{ij}(u)dW_j^\star(u)
\end{aligned}$$

Also ist zu lösen

$$\alpha_j(u) = \sum_{i=1}^d H_i(u)S_i^\star(u)\sigma_{ij}(u) \qquad \text{für alle } 1 \leq j \leq n$$

bzw.

$$\alpha(u) = \sigma^T(u)\begin{pmatrix} H_1(u)S_1^\star(u) \\ \vdots \\ H_d(u)S_d^\star(u) \end{pmatrix}.$$

Da Kern $\sigma(t) = \{0\}$, ist diese Gleichung eindeutig durch $(H(u))_{0\leq u<T}$ lösbar. □

Da wir α nicht explizit gegeben haben, ist dieser Satz für die Praxis nicht sehr hilfreich.
Da hilft der PDE Ansatz: 13.5.16

2.11 PDE Ansatz

Es liege ein vollständiges Diffusionsmodell entsprechend $d)$ in Beispiel 1.2 vor mit $n = d$, d.h.

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)(r(t,S(t))dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(t,S(t))dW_j^\star(t)) \qquad \text{für alle } 1 \le i \le d \\ d\beta(t) &= \beta(t)r(t,S(t))dt \end{aligned}$$

bezüglich des äquivalentes Martingalmaßes $\mathbb{P}^\star$. $W^\star$ ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^\star$. Sei $C^\star$ ein $T-$Claim der Form

$$C = h(S(T))$$

mit $\mathbb{E}^\star \frac{|h(S(T))|}{\beta(T)} < \infty$.
Dann gibt es eine Replikationsstrategie mit Wertprozess $(V(t))_{0 \le t < T}$, sodass

$$\begin{aligned} V(t) &= \beta(t)\mathbb{E}^\star\left(\frac{h(S(T))}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}^\star\left(h(S(T))\exp\left(-\int_t^T r(u,S(u))du\right)|\mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

Im Diffusionsmodell ist S ein $d-$dimensionaler Markov-Prozess. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathbb{E}^\star\left(h(S(T))\exp\left(-\int_t^T r(u,S(u))du\right)|S(t)\right) \\ &= v(t,S(t)) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \mathbb{E}^\star\left(h(S(T))\exp\left(-\int_t^T r(u,S(u))du\right)|S(t)=x\right) \qquad \text{für alle } 0 \le t < T, x \in (0,\infty)^d \\ &= \int h(y_T)\exp\left(-\int_t^T r(u,y_u)du\right)K_t(x,dy). \end{aligned}$$

mit $K_t(x,\cdot) = \mathbb{P}^\star(S(u))_{u \ge t} \in \cdot|S_t = x)$ und y_t die Realisierung eines Pfades von $S(t)$ zum Zeitpunkt t.
In vielen Diffusionsmodellen (Bedinung an σ, h; hier nicht genauer ausgeführt) reicht die Integrabilitätsbedingung $\mathbb{E}^\star|C^\star| < \infty$ aus für die Glattheit von v, sodass die Ito-Formel angewendet werden kann.
Es folgt:

$$dv(t,S(t)) = \partial_t v(t,S(t))dt + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} v(t,S(t))dS_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\partial_{x_j} v(t,S(t))d\langle S_i,S_j\rangle_t$$

$$= \partial_t v(t,S(t))dt + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} v(t,S(t))S_i(t)\big(r(t,S(t))dt + \sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t,S(t))dW_j^\star(t)\big)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \big(\partial_{x_i}\partial_{x_j} v(t,S(t))S_i(t)S_j(t)(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,S(t))\big)dt$$

wegen

$$\begin{aligned}
d\langle S_i,S_j\rangle_t &= d\langle \int_0^\cdot S_i(u)\sum_{k=1}^d \sigma_{ik}(u,S(u))dW_k^\star(u), \int_0^\cdot S_j \sum_{l=1}^d \sigma_{j,l}(u,S(u))dW_l^\star(u)\rangle_t \\
&= d\langle \sum_{k=1}^d \int_0^\cdot S_i(u)\sigma_{ik}(u,S(u))dW_k^\star(u), \sum_{l=1}^d \int_0^\cdot S_j(u)\sigma_{jk}(u,S(u))dW_l^\star(u)\rangle_t \\
&= \sum_{k=1}^d\sum_{l=1}^d d\langle \int_0^\cdot S_i(u)\sigma_{ik}(u,S(u))dW_k^\star(u), \int_0^\cdot S_j(u)\sigma_{jl}(u,S(u))dW_l^\star(u)\rangle_t \\
&= \sum_{k,l=1}^d S_i(u)\sigma_{ik}(u,S(u))S_j(u)\sigma_{jk}(u,S(u))d\langle W_k^\star, W_l^\star\rangle_u \\
&= S_i(u)S_j(u)(\sigma\sigma^T)_{ij}(u,S(u))du
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
dv(t,S(t)) = \big(\partial_t v(t,S(t)) &+ \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} v(t,S(t))S_i(t)r(t,S(t)) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}\partial_{x_j} v(t,S(t))S_i(t)S_j(t)(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,S(t))\big)dt \\
&+ \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} v(t,S(t))S_i(t)\sum_{j=1}^d \sigma_{ij}(t,S(t))dW_j^\star(t).
\end{aligned}$$

Da $(\beta^{-1}(t)v(t,S(t)))_{0\le t<T}$ ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal ist, folgt

$$\partial_t v(t,x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} v(t,x)x_i r(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}\partial_{x_j} v(t,x)x_i x_j(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,x) = r(t,x)v(t,x)$$

für alle $0\le t<T, x\in(0,\infty)^d$.
Also ist die Funktion

$$v:(0,T)\times(0,\infty)^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

Lösung des Cauchy-Problems

$$\partial_t v(t,x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} v(t,x)x_i r(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i}\partial_{x_j} v(t,x)x_i x_j(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,x) = r(t,x)v(t,x)$$

mit Endbedingung

$$\lim_{t\nearrow T} v(t,x) = h(x).$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung kann für gewöhnlich nicht explizit gefunden werden, wohl aber numerisch.
Mit diesem Ansatz erhält man auch die Replikationsstrategie, denn

$$dV(t) = dv(t, S(t)) = v(t, S(t))r(t)dt + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} v(t, S(t))S_i(t) \sum_{k=1}^{d} \sigma_{ij}(t, S(t))dW_j^\star(t)$$

impliziert mit partieller Integration

$$\begin{aligned} dV^\star(t) = d\frac{v(t, S(t))}{\beta(t)} &= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} v(t, S(t))S_i^\star(t) \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t, S(t))dW_j^\star(t) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} v(t, S(t))dS_i^\star(t). \end{aligned}$$

Also folgt

$$V^\star(t) = V^\star(0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \underbrace{\partial_{x_i} v(u, S(u))}_{H_i(u)} dS_i^\star(u)$$

mit $V^\star(0) = V(0) = \mathbb{E}^\star C^\star = v(0, S(0))$.
Man erhält also den sogenannten δ–Hedge durch

$$\begin{aligned} H_i(t) &= \partial_{x_i} v(t, S(t)) \quad \text{für alle } 1 \le i \le d, 0 \le t < T \\ K(t) &= V^\star(t) - \sum_{i=1}^{d} H_i(t)S_i^\star(t). \end{aligned}$$

2.12 PDE Ansatz bei Barriere Optionen

Gegen sei ein eindimensionaler vollständiger Finanzmarkt, d.h.

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(r(t, S(t))dt + \sigma(t, S(t))dW^\star(t)) \\ d\beta(t) &= \beta(t)r(t, S(t))dt \end{aligned}$$

bezüglich des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{P}^\star$.
Für eine Funktion $h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}^\star \frac{|h(S(T))|}{\beta(T)} < \infty$ soll die Preisfunktion einer Barriere Option bestimmt werden.
Dabei sind Barriere Optionen mit Barrieren $0 \le K < L \le \infty$ Optionen, die wertlos werden, wenn der Preisprozess des Underlyings während der Laufzeit die Schranken unter- bzw. überschreitet, d.h. eine Knock-Out Barriere Option hat die Auszahlung

$$C = h(S(T))\mathbb{1}_{\{\tau_0 > T\}}$$

mit

$$\tau_t := \inf\{u \ge t : S(u) \le K \text{ oder } S(u) \ge L\}$$

für alle $0 \le t < T$.

Dies ist ein einfaches Beispiel einer pfadabhängigen Option.
Der Preis von C zur Zeit t erfüllt

$$\begin{aligned}
p_t(C) &= \beta(t)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}^\star\left(h(S(T))\exp\left(-\int\limits_t^T r(u,S(u))du\right)\mathbb{1}_{\{\tau_0>T\}}|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{E}^\star\left(h(S(T))\exp\left(-\int\limits_t^T r(u,S(u))du\right)\mathbb{1}_{\{\tau_0>t\}}\mathbb{1}_{\{\tau_t>T\}}|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau_0>t\}}\mathbb{E}^\star\left(h(S(T))\exp\left(-\int\limits_t^T r(u,S(u))du\right)\mathbb{1}_{\{\tau_t>T\}}|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{1}_{\{\tau_0>t\}}v(t,S(t))
\end{aligned}$$

mit

$$v(t,x) = \mathbb{E}^\star\left(h(S(T))\exp\left(-\int\limits_t^T r(u,S(u))du\right)\mathbb{1}_{\{\tau_t>T\}}|S(t)=x\right) \qquad \text{für alle } K<x<L.$$

Die Funktion v erfüllt eine PDE mit Rand- und Endbedingung.
Herleitung der PDE:
Da $\beta^{-1}(t)p_t(C) = \mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \quad 0\le t<T$ ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal ist, ist auch

$$\beta^{-1}(t\wedge\tau_0)p_{t\wedge\tau_0}(C) = \beta^{-1}(t\wedge\tau_0)v(t\wedge\tau_0,S(t\wedge\tau_0)) \quad 0\le t<T$$

ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal.
Ito-Formel angewendet auf $v(t\wedge\tau_0,S(t\wedge\tau_0))$ führt auf die PDE

$$\partial_t v(t,x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2(t,x)\partial_x^2 v(t,x) + r(t,x)x\partial_x v(t,x) = r(t,x)v(t,x)$$

für alle $0\le t<T, K<x<L$.
Da $\lim\limits_{t\nearrow\tau_0} v(t,S(t)) = 0$ $\mathbb{P}^\star$–fast sicher folgen die Randbedingungen

$$\begin{aligned}
\lim_{x\nearrow L} v(t,x) &= 0 \qquad \text{für alle } 0\le t<T \\
\lim_{x\searrow K} v(t,x) &= 0 \qquad \text{für alle } 0\le t<T
\end{aligned}$$

und Endbedingung

$$\lim_{t\nearrow T} v(t,x) = h(x) \qquad \text{für alle } K<x<L.$$

2.13 Sharpe Ratio

24.5.16

Wir betrachten ein eindimensionales vollständiges Finanzmarktmodell

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)) \\ d\beta(t) &= \beta(t)r(t)dt. \end{aligned}$$

Bezüglich $\mathbb{P}$ kann dies als subjektive Einschätzung eines Investors interpretiert werden.

- $\mu(t) - r(t)$ ist die Überschussrendite der Aktie.
- $\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$ ist der Sharpe Ratio der Aktie, d.h. das "Verhältnis von Ertrag zu Risiko".
  Bedeutung: Bewertung des Ertrages in Einheiten des Risikos(der Volatilität) $\rightsquigarrow$ Market Price of Risk.
- $\vartheta(t) = -\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)} \quad 0 \le t < T$ führt zu einem Maßwechsel zum äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta^2(s)ds\right) \qquad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Ist $C > 0$ ein T–Claim mit $\mathbb{E}^\star|C^\star| < \infty$ und $\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) > 0$ $\mathbb{P}$–fast sicher, so kann C als weiteres gehandeltes Finanzgut im Markt aufgefasst werden mit arbitragefreiem Preisprozess

$$C(t) = \beta(t)\mathbb{E}^\star(C^\star|\mathcal{F}_t) \quad 0 \le t < T.$$

Da C ein positives Semimartingal bezüglich $\mathbb{P}$ ist, gibt es eine Darstellung der Form

$$dC(t) = C(t)(\mu_C(t)dt + \sigma_C(t)dW(t))$$

mit previsiblen Prozessen μ_C und σ_C. Dabei ist

- μ_C die Rendite des Derivates und
- σ_C die Volatilität des Derivates.

Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ gilt, da $\left(\frac{1}{\beta(t)}C(t)\right)_{0\le t<T}$ ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal ist,

$$dC(t) = C(t)(r(t)dt + \sigma_C(t)dW^\star(t)).$$

Da

$$dW^\star(t) = dW(t) - \vartheta(t)dt$$

folgt

$$dC(t) = C(t)\big((r(t) - \sigma_C(t)\vartheta(t))dt + \sigma_C(t)dW(t)\big).$$

Also gilt

$$\mu_C(t) = r(t) - \sigma_C(t)\vartheta(t).$$

Damit ist
$$\mu_C(t) - r(t)$$
die Überschussrendite von C.
Es gilt:
$$\frac{\mu_C(t) - r(t)}{\sigma_C(t)} = -\vartheta(t) = \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}.$$
Damit ist der Sharpe Ratio eine Invariante unter allen sinnvoll gehandelten Finanzgütern im Markt und wird durch die Girsanov Transformation bestimmt.
Bedeutung: Ein Investor kann in ein beliebiges Finanzgut investieren, da das Verhältnis von Ertrag zu Risiko konstant ist.

2.14 Konstruktion eines Geldmarktkontos im mehrdimensionalen, vollständigen Fall

Gegeben sei ein vollständiger Finanzmarkt der Form
$$dS_i(t) = S_i(t)(\mu_{S,i}(t) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{Sij}(t)dW_j(t)) \qquad \text{für alle } 1 \le i \le d$$
$$dN(t) = N(t)(\mu_N(t) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{Nj}(t)dW_j(t))$$
mit einem d–dimensionalen Wiener-Prozess W, der den Zufall bestimmt.
Der Markt sei vollständig, d.h.
$$\sigma_{ij}(t) := \sigma_{Sij}(t) - \sigma_{Nj}(t) \qquad \text{für alle } 1 \le i, j \le d, 0 \le t < T$$
ist eine invertierbare Matrix und durch
$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\vartheta(s)|^2 ds\right) \quad 0 \le t < T$$
wird das eindeutige bestimmte äquivalente Martingalmaß definiert, wobei
$$\vartheta(t) = \sigma^{-1}(t)\big((\mu_N(t) - |\sigma_N(t)|^2)\mathbb{1} + \sigma_S(t)\sigma_N(t) - \mu_S(t)\big)$$
$$W^\star(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds \quad d-\text{dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich } \mathbb{P}^\star.$$
Es gilt bezüglich $\mathbb{P}^\star$:
$$dS^\star(t) = S^\star(t)\sigma(t)dW^\star(t)$$
und
$$d\frac{1}{N(t)} = \frac{1}{N(t)}\big((|\sigma_N(t)|^2 - \mu_N(t) - \sigma_N(t)\vartheta(t))dt - \sigma_N(t)dW^\star(t)\big).$$
Setze
$$r^\star(t) = -(|\sigma_N(t)|^2 - \mu_N(t) - \sigma_N(t)\vartheta(t)) \qquad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Dann gilt:

$$d\frac{1}{N(t)} = \frac{1}{N(t)}(-r^\star(t)dt - \sigma_N(t)dW^\star(t)).$$

Dies bedeutet, dass der eindeutig bestimmte arbitragefreie Zinsratenprozess eines Geldmarktkontos durch $(r^\star(t))_{0\leq t<T}$ festgelegt ist.
Setze also

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r^\star(s)ds\right) \qquad \text{für alle } 0 \leq t < T.$$

Damit ist β der Preisprozess eines Geldmarktkontos mit Zinsrate $r^\star$, d.h.

$$d\beta(t) = \beta(t)r^\star(t)dt, \quad \beta(0) = 1$$

und

$$\begin{aligned} d\frac{\beta(t)}{N(t)} &= \beta(t)d\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{N(t)}d\beta(t) \\ &= -\frac{\beta(t)}{N(t)}\left(r^\star(t)dt + \sigma_N(t)dW^\star(t)\right) + \frac{\beta(t)}{N(t)}r^\star(t)dt \\ &= -\frac{\beta(t)}{N(t)}\sigma_N(t)dW^\star(t). \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{P}^\star$ ein äquivalentes Martingalmaß bezüglich der $d+1$ risky assets $S_1, ..., S_d, \beta$ und dem Numeraire Asset N. Ein Handel in diesen $d+2$ Finanzgütern hat keine zulässigen Arbitragemöglichkeiten.
Frage: Wie kann man das Geldmarktkonto replizieren?
Gesucht ist previsibler Prozess H, so dass

$$\frac{\beta(t)}{N(t)} = \frac{1}{N(0)} + \int_0^t H(u)dS^\star(u) \qquad \text{für alle } 0 \leq t < T.$$

Dann gibt es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Wertprozess

$$V(t) = \beta(t) \qquad \text{für alle } 0 \leq t < T$$

Es gilt

$$\begin{aligned} d\frac{\beta(t)}{N(t)} &= -\frac{\beta(t)}{N(t)}\sigma_N(t)dW^\star(t) \\ &= -\sum_{j=1}^d \frac{\beta(t)}{N(t)}\sigma_{Nj}(t)dW_j^\star(t) \end{aligned}$$

und

$$d\beta^\star(t) = H(t)dS^\star(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{d} H_i(t) dS_i^\star(t) \\
&= \sum_{i=1}^{d} H_i(t) S_i^\star(t) \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) dW_j^\star(t) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} H_i(t) S_i^\star(t) \sigma_{ij}(t) \right) dW_j^\star(t).
\end{aligned}
$$

Dies führt auf die Gleichung

$$
\sum_{i=1}^{d} H_i(t) S_i^\star(t) \sigma_{ij}(t) = -\frac{\beta(t)}{N(t)} \sigma_{Nj}(t) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq d
$$

bzw.

$$
\sigma^T(t) \begin{pmatrix} H_1(t) S_1^\star(t) \\ \vdots \\ H_d(t) S_d^\star(t) \end{pmatrix} = -\frac{\beta(t)}{N(t)} \sigma_N(t)
$$

bzw.

$$
\begin{pmatrix} H_1(t) S_1^\star(t) \\ \vdots \\ H_d(t) S_d^\star(t) \end{pmatrix} = (\sigma^T(t))^{-1} \left(-\frac{\beta(t)}{N(t)} \sigma_N(t) \right) = -\frac{\beta(t)}{N(t)} (\sigma^T)^{-1} \sigma_N(t).
$$

Für den Aktienanteil

$$
\pi_i(t) := \frac{H_i(t) S_i(t)}{V(t)} = \frac{H_i(t) S_i^\star(t)}{V^\star(t)} = \frac{H_i(t) S_i^\star(t)}{\frac{\beta(t)}{N(t)}} \quad 1 \leq i \leq d, 0 \leq t < T
$$

bedeutet dies

$$
\pi(t) = -(\sigma^T(t))^{-1} \sigma_N(t) \quad \text{für alle } 0 \leq t < T.
$$

Ist

$$
\exp\left(-\int_0^t \sigma_N(s) dW^\star(s) - \frac{1}{2} \int_0^t |\sigma_N(s)|^2 ds \right) \quad 0 \leq t < T
$$

ein gleichgradig integrierbares $\mathbb{P}^\star$–Martingal, so ist das Geldmarktkonto durch die durch H definierte selbstfinanzierte Handelsstrategie replizierbar.

Folgerung 2.11. *Sind die Koeffizienten $\sigma_S, \sigma_N, \mu_S, \mu_N$ konstant, so ist $r^\star$ konstant. Es liegt somit ein mehrdimensionales Black-Scholes Modell mit Zinsrate $r^\star$ vor.*

$$
r^\star = \mu_N - |\sigma_N|^2 + \sigma_N \vartheta
$$

Preise von Derivaten ergeben sich durch deren Black-Scholes Preise

3 Volatilitätsmodelle

27.5.16

Ziel: Aufstellung eines praxisrelevanten Modells.

3.1 Kalibrierung eines Black-Scholes Modells

Modellbezeichnung:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(rdt + \sigma dW^\star(t)) \\ d\beta(t) &= \beta(t) r dt \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t < T$ mit Volatilität σ und Zinsrate r.
Das Black-Scholes Modell wird vor allem bei kurzen Laufzeiten von $T = 3,6$ oder 9 Monaten gewählt. Die Zinsrate kann dann als Tagesgeldzinssatz, 3–Monats Zinssatz oder ähnliches gewählt werden. Diese Parameter (T, r) werden extern festgesetzt.
Problem: Wie kann man σ bestimmen?
Lösung: Die Volatilität bestimmt den Preis eines Derivates. Anfangspreise (Marktpreise) von gehandelten Calls und Puts stehen als zusätzliche Information für eine Kalibrierung zur Verfügung.
Im Black-Scholes Modell benötigt man den Marktpreis eines Calls um die Volatilität σ auszurechnen.
Genauer:

$$C(x, T, \sigma, K) := \mathbb{E}^\star e^{-rT}(S(T) - K)^+$$

ist der Marktpreis eines Calls mit Laufzeit T, Basis K, Anfangspreis x und Volatilität σ. Bezeichnet $C_M(T, K)$ den Marktpreis dieses Calls mit Laufzeit T und Basis K, so existiert genau ein

$$\sigma = \sigma_{\text{impl.}}(T, K)$$

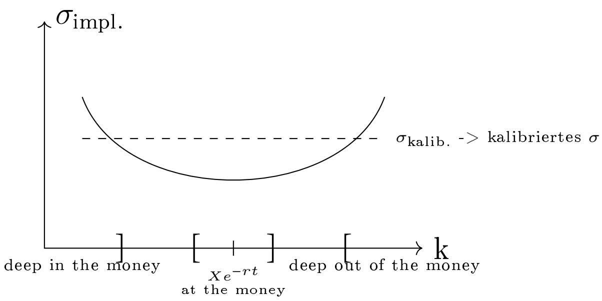
mit der Eigenschaft

$$C(x, T, \sigma, K) = C_M(T, K).$$

$\sigma_{\text{impl.}}$ ist die implizite Volatilität des Calls. Wäre das Black-Scholes Modell korrekt, so wäre $\sigma_{\text{impl.}}(t, k)$ eine Konstante. Tatsächlich beobachtet man aber eine gekrümmte Volatilitätsfläche

$$(t, K) \mapsto \sigma_{\text{impl.}}(t, K) \quad 0 < t < T, K > 0.$$

Diese Krümmung der Volatilitätsfläche wird als Smile-Effekt bezeichnet.
Bei festegehaltenem t hat die Schnittkurze $K \mapsto \sigma_{\text{impl.}}(t, K)$ etwa die Gestalt



Zur Kalibrierung eines Black-Scholes Modells werden Calloptionen mit gleichen Laufzeiten, aber unterschiedlichen Basispreisen gewählt und σ so bestimmt, dass der Fehler zwischen Markt und Modellpreisen minimal wird.

3.2 Kalibrierung eines Black-Scholes Modells mit deterministischer Volatilität

Modellgleichungen:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(rdt + \sigma(t)dW^\star(t)) \\ d\beta(t) &= \beta(t)rdt \end{aligned}$$

$\sigma : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ ist eine deterministische Funktion mit $\int_0^T \sigma^2(s)ds < \infty$. T und r wurden wieder extern festgelegt.
Zur Bestimmung von σ werden die Marktpreise $(C_M(t,K))_{0\le t<T,K>0}$ bzw. deren implizierte Volatilitätsfläche $(\sigma_{\text{impl.}}(t,K))_{0\le t<T,K>0}$ genutzt.
Wäre das Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilität korrekt, so wäre die Volatilitätsfunktion σ festgelegt durch die Marktpreise $(C_M(t,K))_{0\le t<T}$ bei fixiertem K.
Argument:
Durch den Marktpreis $C_M(t,K)$ ist $\int\limits_0^t \sigma^2(s)ds$ durch die impliziete Volatilität $\sigma_{\text{impl.}}(t,K)$ eindeutig festgelegt. Durch Differation nach t erhält man σ^2 und damit $\sigma(t)$ für alle $0 \le t < T$.
Für jedes $K > 0$ erhält man so eine Volatilitätsfunktion $(\sigma_K(t))_{0\le t<T}$.
Die Krümmung der impliziten Volatilitätsfläche in K bedeutet, dass auch das Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilität nicht sinnvoll ist.
Für eine Kalibrierung würde man aus den Funktionen $(\sigma(K))_{K>0}$ diejenige bestimmen, die die Marktpreise am besten erklärt, d.h., den Fehler zwischen Markt- und Modellpreisen minimiert.

3.3 Kalibrierung eines lokalen Volatilitätsmodells

Modellgleichungen:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(rdt + \sigma(t, S(t))dW^\star(t)) \\ d\beta(t) &= \beta(t)rdt \end{aligned}$$

$\sigma(t,x)$ bezeichnet für alle $0 \le t < T$ und $x > 0$ die lokale Volatilität.
Durch die Marktpreise $(C_M(t,K))_{0\le t<T,k>0}$ ist die lokale Volatilitätsfunktion eindeutig festgelegt.
Dies ist die Formel von Dupire:

$$\frac{1}{2}K^2\sigma^2(t,K) = \frac{\partial_t C(t,K) + K\partial_K C(t,K)}{\partial_K^2 C(t,K)} \qquad \text{für alle } 0 \le t < T, K > 0.$$

Beweis. Ist $f(t,\cdot)$ die Dichte von $S(t)$, d.h.

$$f(t,x)dx = \mathbb{P}^\star(S(t) \in dx)$$

so gilt:

$$C(t,K) = e^{-rt} \int\limits_0^\infty (x-K)^+ f(t,x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{-rt} \int_K^\infty (x-K) f(t,x) dx \\
&= e^{-rt} \int_K^\infty \int_K^x dy f(t,x) dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} e^{-rt} \int_K^\infty \int_y^\infty f(t,x) dx dy.
\end{aligned}
$$

Also

$$
\partial_K C(t,K) = -e^{-rt} \int_K^\infty f(t,x) dx
$$

und somit

$$
\partial_K^2 C(t,K) = e^{-rt} f(t,K). \tag{6}
$$

Die 2. partielle Ableitung nach K des Call-Preises bestimmt die Dichte des Aktienpreises. Im Diffusionsmodell erfüllt die Dichte f eine forward Kolmogorov Gleichung

$$
\begin{aligned}
\partial_t f(t,x) &= \frac{1}{2}\partial_x^2(x^2\sigma^2(t,x)f(t,x)) - \partial_x(rxf(t,x)) \\
&= \frac{1}{2}\partial_x^2(x^2\sigma^2(t,x)f(t,x)) - rf(t,x) - rx\partial_x f(t,x).
\end{aligned}
$$

Wegen Gleichung 6 gilt auch:

$$
\partial_t f(t,x) = \partial_t(e^{rt}\partial_x^2 C(t,x)) = re^{rt}\partial_x^2 C(t,x) + e^{rt}\partial_t\partial_x^2 C(t,x).
$$

Also folgt mit $f(t,x) = e^{rt}\partial_x^2 C(t,x)$:

$$
re^{rt}\partial_x^2 C(t,x) + e^{rt}\partial_x^2\partial_t C(t,x) = e^{rt}\frac{1}{2}\partial_x^2(x^2\sigma^2(t,x)\partial_x^2 C(t,x)) - re^{rt}\partial_x^2 C(t,x) - re^{rt}\partial_x\partial_x^2 C(t,x)
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\partial_x^2\partial_t C(t,x) &= \frac{1}{2}\partial_x^2(x^2\sigma^2(t,x)\partial_x^2 C(t,x)) - r\partial_x^2(x\partial_x C(t,x)) \\
&= \partial_x^2\big(\frac{1}{2}x^2\sigma^2(t,x)\partial_x^2 C(t,x) - rx\partial_x C(t,x)\big).
\end{aligned}
$$

Zweimal Aufintegrieren liefert Funktionen $\alpha(t), \beta(t)$ mit

$$
\frac{1}{2}x^2\sigma^2(t,x)\partial_x^2 C(t,x) = rx\partial_x C(t,x) + \partial_t C(t,x) + \alpha(t)x + \beta(t)
$$

Gilt (Randbedingung):

$$
\begin{aligned}
&x^2\sigma^2(t,x)\partial_x^2 C(t,x) = e^{-rt}x\sigma^2(t,x)f(t,x) \xrightarrow{x\to\infty} 0 \\
&x\partial_x C(t,x) = -e^{-rt}x\int_x^\infty f(t,y)dy \xrightarrow{x\to\infty} 0 \\
&\partial_t C(t,x) \xrightarrow{x\to\infty} 0
\end{aligned}
$$

so gilt $\alpha(t) = \beta(t) = 0$ für alle $0 \leq t < T$ und damit folgt die Formel von Dupire. $\square$

In bisherigen Volatilitätsmodellen geht man von der Vollständigkeit aus. 31.5.16
Vernünftig ist die Annahme: Es gibt exogene Faktoren, die den Kurs einer Aktie beeinflussen.
Beispiele sind Ereignisse wie 11.09.2001, Naturkatastrophen, wie Erdbeben, politische Ereignisse, wie Ausgänge von Wahlen, Nahostkrise uvm. Deshalb sind Finanzmärkte prinzipiell unvollständig.
Ein einfacher Ansatz zur Modellierung bietet das stochastsiche Volatilitätsmodell. Der exogene Einfluss bestimmt die Unsicherheit, also die Volatilität in den Finanzmärkten. Damit hängen die Kurse von dem exogenen Einfluss ab.

3.4 Das allgemeine stochastische Volatilitätsmodell für eine Aktie

Auf die Preisentwicklung einer Aktie wirken eine exogene und eine endogene Quelle des Zufalls, d.h.

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + f(Y(t))dW(t))$$

Die Volatilität hängt von einem stochastischen Prozess Y ab, der die Gleichung

$$dY(t) = b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dZ(t)$$

erfüllt. W und Z sind dabei eindimensionale, korrellierte Wiener-Prozesse mit Korrelationskonstante $\varrho \in (-1,1)$. Das bedeutet, $\langle W, Z\rangle_t = \varrho t$. W entspricht dabei der endogenen Quelle des Zufalls, Z der exogenen Quelle. ϱ wird in der Regel als negativ angesehen, da dann Aktienkurse und Volatilität sich gegeläufig verhalten. Ein steigender Kurs führt zu einer sinkenden Volatilität und ein fallender Kurs zu einer steigenden Volatilität. Dies ist der sogenannte Leverage-Effekt.
Frage: Wann sind solche Gleichungen lösbar?
Man löst zuerst die Gleichung für Y und dann die für S.

Satz 3.5 (Lösbarkeit der Volatilitätsgleichung)**.** *Erfüllen die Funktionen b und σ die lineare Wachstums- und Lipschitzbedinungen, d.h.*

$$\begin{aligned} |b(x)| &\le c_1 + c_2|x| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\ |b(x) - b(y)| &\le c|x-y| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

, analog für σ, so kann der Satz über die eindeutige starke Lösbarkeit von SDGL angewendet werden und man erhält zu jedem $y \in \mathbb{R}$ eine eindeutige starke Lösung der Gleichung

$$dY(t) = b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dW(t), \quad Y_0 = y.$$

Allerdings ist die Lipischtbedingung für σ bei interessanten Fällen nicht gegeben. Etwas schwächer ist die Yamada-Watanabe Bedingung.

Definition 3.6. *Eine Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfüllt die Yamada-Watanabe Bedingung,* *falls es eine strikt wachsende Funktion*

$$\rho : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

gibt, mit

$$\int_0^{\epsilon} \frac{1}{(\rho(x))^2} ds = +\infty$$

für ein $\epsilon > 0$, so dass

$$|g(x) - g(y)| \leq \rho(|x - y|)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Beispiel. $g(x) = \sqrt{|x|}$. *Dann ist g nicht Lipischtzstetig, da*

$$\lim_{x \searrow 0} g'(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Aber g erfüllt die Yamada-Watanabe Bedingung mit $\rho(x) = \sqrt{x}$.

Satz 3.7. *Die Funktion b erfülle die lineare Wachstums- und Lipischtzbedingung. Die Funktion σ sei stetig und erfülle die lineare Wachstums- und Yamada-Watanabe Bedingung.*
Dann ist die Gleichung

$$dY(t) = b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dZ(t), \quad Y(0) = y$$

eindeutig stark lösbar.

Beweisidee. Die Stetigkeit von b und σ liefert, dass die Gleichung schwach lösbar ist. Die Yamada-Watanabe Bedingung impliziert die pfadweise Eindeutigkeit der Lösung. Beides zusammen liefert die eindeutige starke Lösbarkeit. □

Bemerkung. *Für die Lösung gilt:*

$$\mathbb{E} \int_0^t Y^2(s) ds = \int_0^t \mathbb{E}Y^2(s) ds < \infty \qquad \text{für alle } t > 0.$$

3.8 Lösbarkeit des stochastischen Volatilitätsmodells

Modellgleichungen:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + f(Y(t))dW(t)) \\ dY(t) &= b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dZ(t) \\ d\langle W, Z\rangle_t &= \varrho dt \end{aligned}$$

Erfüllen b bzw. σ die Voraussetzungen aus Satz 3.5 oder Satz 3.7 und ist f eine stetige Funktion, so ist für jeden Startpunkt $y \in \mathbb{R}$ und $S(0) \in \mathbb{R}$ obiges System von stochastischen DGL eindeutig lösbar.

Beweis. Die Annahme von Satz 3.5 und Satz 3.7 impliziert die Lösbarkeit von Y. Die Lösung für S erhält man wegen der Stetigkeit von f durch

$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t f(Y(s))dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f(Y(s))^2 ds\right)e^{\mu t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

□

Formulierung der Modellgleichungen mittels unkorrelierter Wiener-Prozessen.
Ansatz: Ist $\widetilde{W} = \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}W - \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}Z$, so sind $\widetilde{W}$ und Z unabhängige Wiener-Prozesse und es gilt

$$W = \sqrt{1-\varrho^2}\widetilde{W} + \varrho Z.$$

Dies folgt mittels Lévy:
$\widetilde{W}$ ist ein lokales Martingal und es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{W} \rangle_t &= \langle \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}W - \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}Z\rangle_t \\
&= \frac{1}{1-\varrho^2}t + \frac{\varrho^2}{1-\varrho^2}t - 2\frac{\varrho}{1-\varrho^2}\underbrace{\langle W, Z\rangle_t}_{\varrho t} \\
&= \frac{1}{1-\varrho^2}t + \frac{\varrho^2}{1-\varrho^2}t - \frac{2\varrho^2}{1-\varrho^2}t \\
&= t.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\langle \widetilde{W}, Z\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\langle W, Z\rangle_t - \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}\langle Z, Z\rangle_t = \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}t - \frac{\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}t = 0$$

Die Modellgleichungen lautet dann:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= S(t)\big((\mu dt + f(Y(t))(\sqrt{1-\varrho^2}d\widetilde{W}(t) + \varrho dZ(t))\big) \\
dY(t) &= b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dZ(t)
\end{aligned}$$

und $\widetilde{W}$ und Z sind unabhängige Wiener-Prozesse.

3.9 Beispiele für Volatilitätsmodelle

(i) Hull-White Modell:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= S(t)(\mu dt + Y(t)dW(t)) \\
dY(t) &= Y(t)(\theta dt + \xi dZ(t)) \\
\langle W, Z\rangle_t &= \varrho t
\end{aligned}$$

mit $\mu, \theta \in \mathbb{R}, \xi > 0$ und $\varrho \in (-1, 1)$.

(ii) Stein-Stein Modell:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + Y(t)dW(t)) \\ dY(t) &= q(m - Y(t))dt + \sigma dZ(t) \\ \langle W, Z\rangle_t &= \varrho t \end{aligned}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, q, \sigma > 0, m \geq 0$ und $\varrho \in (-1,1)$.
Die Volatilität wird also bestimmt durch einen Vasicek-Prozess.
Günstig: Mean-reverting Eigenschaft.
(iii) Heston Modell:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + \sqrt{Y(t)}dW(t)) \\ dY(t) &= (a - bY(t))dt + c\sqrt{Y(t)}dZ(t) \\ \langle W, Z\rangle_t &= \varrho t \end{aligned}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}, c > 0, a, b \geq 0$ und $\varrho \in (-1,1)$.
Die quadratische Volatilität ist ein sogenannter CIR (Cox-Ingersoll-Ross) Prozess.
Y ist mean reverting, verbleibt aber in $[0,\infty)$ für alle Zeiten. Falls $b > 0$, so gilt

$$dY(t) = q_L(m - Y(t))dt + c\sqrt{Y(t)}dZ(t)$$

$q_L = b, m = \frac{a}{b}, m$ return Level und q_L Rückkehrrate. $\hookrightarrow$ Mean-reverting-Diffusion. Im Hill-White Modell und Stein-Stein Modell sind die stochastischen DGL für die Volatilitätsprozesse explizit lösbar. Die Analyse des CIR Prozesses ist etwas komplizierter, da die Gleichung nicht explizit lösbar ist. 3.6.16

3.10 CIR Prozess

Parameter

- Returnlevel $m > 0$
- Wiederkehrrate $q > 0$
- Diffusionskonstante σ

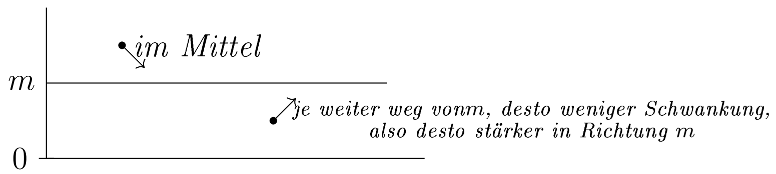
Ein stochastischer Prozess $(Y(t))_{t\geq 0}$ heißt CIR Prozess zum Startpunkt $y > 0$, wenn er die SDGL

$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dW(t), \quad Y(0) = y$$

löst.

Bemerkung. *Im Unterschied zum Vasicek Prozess hängt der Schwankungskoeffizient in der Differentialgleichung vom Zustand durch $y \mapsto \sigma\sqrt{y}$ ab. Man kann zeigen, dass deshalb der Prozess stets nicht negativ bleibt, d.h.*

$$\mathbb{P}(Y(t) \geq 0 \quad \textit{für alle } t \geq 0) = 1.$$



Die 0 *ist ein Randpunkt des Zustandraumes von* Y. *Ist* $2qm \geq \sigma^2$, *so erreicht* Y *die* 0 *nie, d.h.*

$$\mathbb{P}(Y(t) > 0 \quad \textit{für alle } t \geq 0) = 1.$$

Die Rückkehrrate zum langfristigen Mittel m *ist groß genug im Vergleich zur Diffusionskonstanten* σ.
Ist $2qm < \sigma^2$, *so erreicht* Y *die* 0 *mit Wahrscheinlichkeit* 1 *und wird danach reflektiert werden, d.h.*
Für $\tau_0 := \inf\{t \geq 0 :> Y(t) = 0\}$ *ist*

$$\mathbb{P}(\tau_0 < \infty) = 1.$$

Im Zustand $y = 0$ *liegt eine positive Drift vor und eine zufällige Schwankung von* 0. *Deshalb wird der Prozess nach* $(0, \infty)$ *reflektiert.*

Satz 3.11. *Sei* Y *ein CIR Prozess, d.h.*

$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dW(t), \quad Y(0) = y_0 > 0.$$

Dann gilt:

(*i*) $\mathbb{E}Y(t) = ye^{-qt} + m(1 - e^{-qt})$ *für alle* $t \geq 0$

(*ii*) $\mathbb{V}arY(t) = y\frac{\sigma^2}{q}(e^{-qt} - e^{-2qt}) + \frac{m\sigma^2}{2q}(1 - e^{-qt})^2$ *für alle* $t \geq 0$

(*iii*) $\lim\limits_{t \nearrow \infty} \mathbb{E}Y(t) = m$

(*iv*) $\lim\limits_{t \nearrow \infty} \mathbb{V}arY(t) = \frac{m\sigma^2}{2q}$

Beweis. Für jedes $t > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{E}\int_0^t Y^n(s)ds < \infty.$$

Weiter ist

$$Y(t) = y + \int_0^t q(m - Y(s))ds + \int_0^t \sigma\sqrt{Y(s)}dW(s)$$

und

$$M(t) := \int_0^t \sigma\sqrt{Y(s)}dW(s)$$

ist für $t \geq 0$ ein lokales Martingal mit

$$\mathbb{E}\langle M\rangle_t = \mathbb{E}\int_0^t \sigma^2 Y(s)ds < \infty \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Damit ist M ein Martingal und es folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y(t) &= y + \mathbb{E}\int_0^t q(m - Y(s))ds \\ &= y + qmt - q\int_0^t \mathbb{E}Y(s)ds.\end{aligned}$$

Also löst $f(t) := \mathbb{E}Y(t)$ die gewöhnliche DGL

$$f'(t) = -qf(t) + qm$$

zur Anfangsbedingung $f(0) = y$.
Mit dem Prinzip der Variation der Konstanten findet man

$$\mathbb{E}Y(t) = f(t) = ye^{-qt} + m(1 - e^{-qt}).$$

Für die Berechnung der Varianz wird zunächst das 2te Moment berechnet:
Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}Y^2(t) &= y^2 + 2\int_0^t Ys)dY(s) + \langle Y\rangle_s \\ &= y^2 + 2\int_0^t Y(s)q(m - Y(s))ds + 2\int_0^t Y(s)\sigma\sqrt{Y(s)}dW(s) + \int_0^t \sigma^2 Y(s)ds.\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathbb{E}\int_0^t Y^2(s)\sigma^2 Y(s)ds = \mathbb{E}\int_0^t \sigma^2 Y^3(s)ds < \infty$$

gilt

$$\mathbb{E}Y^2(t) = y^2 + 2qm\int_0^t \mathbb{E}Y(s)ds - 2q\int_0^t \mathbb{E}Y^2(s)ds + \int_0^t \sigma^2\mathbb{E}Y(s)ds.$$

Somit erfüllt $g(t) = \mathbb{E}Y^2(t)$ die gewöhnliche DGL

$$g'(t) = -2qg(t) + \underbrace{2qm + \sigma^2}_{\text{Inhomogenität}} f(t)$$

mit $f(t) = \mathbb{E}Y(t)$.

g wird durch Variation der Konstanten bestimmt.
Man erhält

$$g(t) = y^2 e^{-2qt} + m^2(1-e^{-2qt}) + \frac{\sigma^2 m}{2q}(1-e^{-2qt}) + 2(y-m)(e^{-qt}-e^{-2qt}) + \frac{\sigma^2}{q}(y-m)(e^{-qt}-e^{-2qt}).$$

Zusammen mit

$$f^2(t) = (\mathbb{E}Y(t))^2 = y^2 e^{-2qt} - 2yme^{-2qt} + m^2 e^{-2qt} + m^2 + 2m(y-m)e^{-qt}$$

folgt

$$\mathbb{V}arY(t) = y\frac{\sigma^2}{q}(e^{-qt} - e^{-2qt}) + \frac{m\sigma^2}{2q}(1 - e^{-qt})^2.$$

□

Durch Berechnung der Laplace-Transformierten kann man die eindimensionalen Randverteilungen prinzipiell bestimmen.

3.12 Laplacetransformierte des CIR Prozesses

Sei $(Y(t))_{t\geq 0}$ ein CIR Prozess, d.h.

$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dW(t), \quad Y(0) = y > 0.$$

Dann ist die Laplace-Transformierte gegeben durch:

$$\mathbb{E}e^{-\lambda Y(T)} = \exp\left(-A(\lambda, T) - yG(\lambda, T)\right)$$

mit

$$\begin{aligned}
A(\lambda, T) &= -\frac{2qm}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2qe^{qT}}{\sigma^2\lambda(e^{qT} - 1) + q(e^{qT} + 1) + q(e^{qT} - 1)}\right) \\
G(\lambda, T) &= \frac{2\lambda q}{\sigma^2\lambda(e^{qT} - 1) + q(e^{qT} + 1) + q(e^{qT} - 1)}.
\end{aligned}$$

Beweis. Mittels der Ito-Formel kann man eine PDE herleiten für

$$u(t, y) = \mathbb{E}(e^{-\lambda Y(T)} | Y(t) = y).$$

Diese kann man explizit lösen.
Wegen der Markov-Eigenschaft gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-\lambda Y(T)} | \mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}(e^{-\lambda Y(T)} | Y(t)) \\
&= u(t, Y(t)).
\end{aligned}$$

Also ist $(u(t, Y(t)))_{0\leq t<T}$ ein Martingal.

Die Ito Formel liefert:

$$\begin{aligned}
du(t,Y(t)) &= \partial_t u(t,Y(t))dt + \partial_y u(t,Y(t))dY(t) + \frac{1}{2}\partial_y^2 u(t,Y(t))d\langle Y\rangle_t \\
&= \partial_y u(t,Y(t))q(m-Y(t))dt + \partial_y u(t,Y(t))\sigma\sqrt{Y(t)}dW(t) + \partial_t u(t,Y(t))dt \\
&\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 Y(t)\partial_y^2 u(t,Y(t))dt \\
&= \underbrace{\Big(\partial_t u(t,Y(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 Y(t)\partial_y^2 u(t,Y(t)) + q(m-Y(t))\partial_y u(t,Y(t))\Big)}_{\overset{!}{=}0}dt \\
&\quad + \partial_y u(t,Y(t))\sigma\sqrt{Y(t)}dW(t).
\end{aligned}$$

Also erfüllt u die partielle DGL

$$\partial_t u(t,y) + \frac{1}{2}\sigma^2 y\partial_y^2 u(t,y) + q(m-y)\partial_y u(t,y) = 0 \tag{7}$$

auf $(0,T)\times(0,\infty)$ mit Endbedingung $\lim_{t\nearrow T} u(t,y) = e^{-\lambda y}$ für alle $y \geq 0$.
Die Lösung dieses Cauchy-Problems erhält man durch einen Ansatz der Form

$$u(t,y) = \exp\left(-f(\lambda,T-t) - yg(\lambda,T-t)\right) \qquad \text{für alle } y > 0, 0 \leq t < T.$$

Ausrechnen der partiellen Ableitungen und Einsetzen in die Gleichung 7 führt dann dazu, dass g und f die gewöhnlichen DGL

$$\begin{aligned}
g'(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 g^2(t) + qg(t) &= 0 \\
f'(t) - qmg(t) &= 0
\end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ erfüllen mit Anfangsbedinung $g(0) = \lambda$ und $f(0) = 0$.
Die erste Gleichung ist eine Ricatti Gleichung und wird durch $G(\lambda,\cdot)$ gelöst. f erhält man durch Aufintegrieren von g. □

Man kann die Verteilung von $Y(T)$ durch eine nicht zentrale χ^2–Verteilung ausdrücken. 7.6.16

Definition 3.12. *Für $\vartheta \in \mathbb{R} \setminus -\mathbb{N}$ ist die modifizierte Besselfunktion erster Ordnung I_ϑ definiert durch*

$$I_\vartheta(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\vartheta+1)} y^{\vartheta+2n} = y^\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\vartheta+1)} (\frac{y}{2})^{2n}$$

für alle $y > 0$.
Für $\vartheta \in -\mathbb{N}$ wird $I_\vartheta(y) = I_{-\vartheta}(y)$ gesetzt.

Die modifizierte Besselfunktion I_ϑ ist eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y^2 u''(y) + yu'(y) - (y^2 + \vartheta^2)u(y) = 0.$$

Ist $\vartheta \notin -\mathbb{N}$, so ist $(I_\vartheta, I_{-\vartheta}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen für obige Gleichung.
Mit Hilfe von I_ϑ kann man die Dichte einer nichtzentralen χ^2–Verteilung ausdrücken.

Definition 3.13. *Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen mit Mittelwert m_i und Varianz σ_i^2 für $1 \le i \le n$. Dann nennt man die Verteilung von*

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\sigma_i} \right)^2$$

eine nichtzentrale χ^2–Verteilung mit n Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{m_i}{\sigma_i} \right)^2 .$$

Kurz: $U \sim \chi^2(n, \lambda)$.
U hat eine Dichte der Form

$$f_{\chi^2(n,\lambda)}(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{\frac{n}{4} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{y+\lambda}{2}} I_{\frac{n}{2}-1}(\sqrt{\lambda y}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

Allgemein kann der Parameter n durch einen nichtnegativen rellen Parameter $\delta \ge 0$ ersetzt werden.
Eine χ^2–Verteilung mit $\delta \ge 0$ Freiheitsgraden und Nichtzentralitätsparameter $\lambda > 0$ hat die Dichte

$$f_{\chi^2(\delta,\lambda)}(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\lambda} \right)^{\frac{\delta}{4} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{y+\lambda}{2}} I_{\frac{\delta}{2}-1}(\sqrt{\lambda y}) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

Satz 3.14. *Sei Y ein CIR Prozess, d.h.*

$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma \sqrt{Y(t)} dW(t), \quad Y(0) = y_0 > 0$$

Dann ist die Dichte $\varrho(t, y)$ von $Y(t)$ gegeben durch

$$\varrho(t, y) = \frac{4qe^{qt}}{\sigma^2(e^{qt} - 1)} f_{\chi^2\left(\frac{4mq}{\sigma^2}, \frac{4qy_0}{\sigma^2(e^{qt}-1)}\right)} \left(\frac{4qe^{qt}y}{\sigma^2(e^{qt} - 1)} \right)$$

Hierdurch hat man die Übergangsdichte des Markov-Prozesses $(Y(t))_{t\ge0}$ bestimmt.
Beweis.
Möglichkeit 1: Man kann verifizieren, dass die Laplacetransformierte der angegeben Dichte mit der Laplacetransformierten von $Y(t)$ übereinstimmt. Dies tun wir aber nicht, stattdessen:
Möglichkeit 2: Man betrachtet den quadratischen Besselprozess und stellt fest, dass der CIR Prozess ein zeittransformierter quadratischer Besselprozess ist.

Definition 3.15. *Sei $\delta \ge 0$. Die eindeutige Lösung der Gleichung*

$$dX(t) = \delta dt + 2\sqrt{X(t)} dW(t), \quad X(0) = x_0 \ge 0$$

heißt quadratischer Besselprozess der Dimension δ zum Startwert $x_0 \geq 0$.
Kurz: X ist ein $BESQ^\delta_{x_0}$–Prozess.

Da $x \mapsto \sqrt{x}$ die Yamada-Watanabe Bedingung erfüllt, ist die stochastische DGL eindeutig lösbar und damit ist X wohldefiniert.

Satz 3.16. *Sei X ein $BESQ^\delta_{x_0}$–Prozess. Dann gilt:*

(*i*) $\mathbb{E}X(t) = x_0 + \delta t$

(*ii*) $\mathbb{V}arX(t) = 4x_0 t + 2\delta t^2$

(*iii*) $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda X(t)\right)\right] = (1+2t\lambda)^{-\frac{\delta}{2}} \exp\left(-\frac{x_0\lambda}{1+2t\lambda}\right)$ *für alle* $\lambda \geq 0, t > 0$

Beweis. Es gilt $\mathbb{E}\int\limits_0^T X^n(t)dt < \infty$ für alle $T > 0, n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$X(T) = x_0 + \delta T + 2\int\limits_0^T \sqrt{X(s)}dW(s)$$

gilt

$$\mathbb{E}X(T) = x_0 + \delta T.$$

Weiter ist

$$X(T) - (x_0 + \delta T) = 2\int\limits_0^T \sqrt{X(s)}dW(s).$$

Also

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}arX(T) &= \mathbb{E}\left[(X(T) - (x_0 + \delta T))^2\right] \\
&= 4\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^T \sqrt{X(s)}dW(s)\right)^2\right] \\
&= 4\mathbb{E}\left[\int\limits_0^T X(s)ds\right] \\
&= 4\int\limits_0^T \mathbb{E}X(t)dt \\
&= 4\int\limits_0^T x_0 + \delta t dt \\
&= 4x_0 T + 2\delta T^2
\end{aligned}$$

Zu (*iii*): Ansatz über PDE: Wegen der Markov Eigenschaft gilt

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda X(T)\right)|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda X(T)\right)|X(t)\right] = u(t, X(t)) \quad \text{für alle } 0 \leq t < T.$$

Ito-Formel angewendet auf u liefert:

$$\begin{aligned}du(t,X(t)) &= \partial_t u(t,X(t))dt + \partial_x u(t,X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 u(t,X(t))d\langle X\rangle_t\\ &= \big(\partial_t u(t,X(t)) + \delta\partial_x u(t,X(t)) + 2X(t)\partial_x^2 u(t,X(t))\big)\\ &\quad + 2\sqrt{X(t)}\partial_x u(t,X(t))dW(t)\end{aligned}$$

Da $(u(t,X(t)))_{t\geq 0}$ ein Martingal ist, erfüllt u die PDGL

$$\partial_t u(t,x) + \delta\partial_x u(t,x) + 2x\partial_x^2 u(t,x) = 0$$

auf $(0,T)\times(0,\infty)$ mit Endbedingung

$$\lim_{t\nearrow T} u(t,x) = \exp(-\lambda x)$$

für alle $x \geq 0$.
Ansatz für die Lösung:

$$u(t,x) = \exp(-f(\lambda,T-t) - g(\lambda,T-t)x).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= (f'(\lambda,T-t) + g'(\lambda,T-t)x)u(t,x)\\ \partial_x u(t,x) &= -g(T-t)u(t,x)\\ \partial_x^2 u(t,x) &= g^2(T-t)u(t,x).\end{aligned}$$

Einsetzen in die PDGL führt zu

$$\begin{aligned}&\partial_t u(t,x) + 2x\partial_x^2 u(t,x) + \delta\partial_x u(t,x)\\ &\qquad = \big(f'(T-t) + g'(T-t)x + 2xg^2(T-t) - \delta g(T-t)\big)u(t,x) \overset{!}{=} 0\\ &\Leftrightarrow x(g'(T-t) + 2g^2(T-t)) + f'(T-t) - \delta g(T-t) = 0 \qquad \text{für alle } x > 0, 0 < T-t < T\\ &\Leftrightarrow g'(s) = -2g^2(s), \quad f'(s) = \delta g(s) \qquad \text{für alle } 0 < s < T.\end{aligned}$$

Die Endbedingung für u führt auf eine Anfangsbedingung für f und g:

$$\begin{aligned}g'(s) &= -2g^2(s), \quad g(0) = \lambda\\ f'(s) &= \delta g(s), \quad f(0) = 0.\end{aligned}$$

Mittels Separation der Variablen kann die gewöhnliche DGL

$$z' = -2z^2, \quad z(0) = \lambda$$

durch

$$g(t) = \frac{\lambda}{1+2\lambda t}, \quad t \geq 0$$

gelöst werden:

$$\frac{dz}{dt} = -2t^2, \quad -\frac{1}{2z^2}dz = dt$$

$$t(z) - \underbrace{t(z_0)}_{=0} = -\int\limits_{z_0}^{z} \frac{1}{2y^2}dy = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2\lambda}.$$

Also ist

$$t(z) + \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2z}$$

$$\Leftrightarrow z(t) = \frac{\lambda}{1+2\lambda t}$$

□

10.6.16

Satz 3.17. *Sei X ein $BESQ^{\delta}_{x_0}$–Prozess, d.h.*

$$dX(t) = \delta dt + 2\sqrt{X(t)}dW(t), \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Dann gilt:

(i) *Ist $x_0 = 0$ und $\delta > 0$, so hat $X(t)$ die Dichte*

$$\varrho(t,x) = f_{\Gamma(\frac{\delta}{2},2t)}(x) \quad \text{für alle } t > 0, x \geq 0.$$

(ii) *Ist $x_0 > 0$ und $\delta > 0$, so hat $X(t)$ die Dichte*

$$\varrho(t,x) = f_{\chi^2(\delta,\frac{x_0}{t})}\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{für alle } t > 0, x \geq 0.$$

(iii) *Ist $x_0 > 0$ und $\delta = 0$, so gilt*

$$\mathbb{P}(X(t) \in A) = e^{-\frac{x_0}{2t}}\delta_{\{x_0\}}(A) + \int\limits_A \varrho(t,x)dx$$

mit

$$\varrho(t,x) = \frac{1}{t} f_{\chi^2(0,\frac{x_0}{t})}\left(\frac{x}{t}\right) \quad \text{für alle } t > 0, x \geq 0.$$

Dabei hat die $\Gamma(a,b)$–Verteilung die Dichte

$$f_{\Gamma(a,b)}(x) = \frac{1}{b^a\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\frac{x}{b}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

mit

- *$a > 0$ der Gestaltsparameter,*

- *$b > 0$ der Skalenparameter und*

- *$\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}dy$ für alle $a > 0$ die Gammafunktion.*

Beweis. (i). Sei $x_0 = 0, \delta > 0$. Dann ist

$$\mathbb{E}e^{-\lambda X(t)} = (1 + 2\lambda t)^{\frac{\delta}{2}}.$$

Man stellt durch Integration fest, dass dies die Laplacetransformierte einer $\Gamma\left(\frac{\delta}{2}, 2t\right)$ –Verteilung ist:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} f_{\Gamma(\frac{\delta}{2},2t)}(x)dx = (1 + 2\lambda t)^{-\frac{\delta}{2}} \qquad \text{für alle } \lambda \geq 0.$$

(ii). Sei $x_0 > 0, \delta > 0$. Setze $A(\lambda) := (1 + 2t\lambda)^{-1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}e^{-\lambda X(t)} &= A(\lambda)^{\frac{\delta}{2}} \exp\left(-\frac{x_0}{2t}\right)\exp\left(\frac{x_0 A(\lambda)}{2t}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{x_0}{2t}\right)\sum_{n=0}^\infty \frac{x_0^n A(\lambda)^{n+\frac{\delta}{2}}}{(2t)^n n!}.\end{aligned}$$

$A(\lambda)^{n+\frac{\delta}{2}}$ ist die Laplacetransformierte einer $\Gamma\left(n + \frac{\delta}{2}, 2t\right)$ –Verteilung, denn es gilt allgemein:

$$Z_1 \sim \Gamma(a_1, b), Z_2 \sim \Gamma(a_2, b) \Rightarrow Z_1 + Z_2 \sim \Gamma(a_1 + a_2, b).$$

Für die entsprechende Laplacetransformierte gilt dann

$$\mathbb{E}e^{-\lambda(Z_1+Z_2)} = \mathbb{E}e^{-\lambda Z_1}e^{-\lambda Z_2}$$

Weiter gilt dann:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\varrho(t,x)dx &= \exp\left(-\frac{x_0}{2t}\right)\sum_{n=0}^\infty \frac{x_0^n}{(2t)^n n!}\int_0^\infty e^{-\lambda x} f_{\Gamma(n+\frac{\delta}{2},2t)}(x)dx\\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \underbrace{\exp\left(-\frac{x_0 + x}{2t}\right)\sum_{n=0}^\infty \frac{x_0^n x^{n+\frac{\delta}{2}-1}}{n!\Gamma\left(n + \frac{\delta}{2}\right)(2t)^{2n+\frac{\delta}{2}}}}_{\varrho(t,x)} dx.\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\varrho(t,x) &= \frac{1}{2t}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\delta}{4}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x_0+x}{2t}} I_{\frac{\delta}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{x_0 x}}{t}\right)\\ &= \frac{1}{t} f_{\chi^2(\delta,\frac{x_0}{t})}\left(\frac{x}{t}\right).\end{aligned}$$

denn

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\delta}{4}-\frac{1}{2}} \frac{1}{2t} I_{\frac{\delta}{2}-1}\left(\frac{\sqrt{x_0 x}}{t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n x^{n+\frac{\delta}{2}-1}}{n!\Gamma\left(n+\frac{\delta}{2}\right)(2t)^{\frac{2n+\delta}{2}}}.$$

(iii) geht analog; siehe Übung. □

Durch Zeittransformation kann man aus einem Besselprozess einen CIR Prozess machen.

Satz 3.18. *Sei Y ein CIR Prozess der Form*

$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dW(t), \quad Y(0) = y_0 \geq 0$$

mit $q > 0, m \geq 0$ und $\sigma > 0$.
Sei X ein $BESQ_{y_0}^{\frac{4qm}{\sigma^2}}$–Prozess, also Lösung von

$$dX(t) = \frac{4qm}{\sigma^2}dt + 2\sqrt{X(t)}d\widetilde{W}(t). \tag{8}$$

Dann stimmt die Verteilung von $Y(t)$ überein mit der Verteilung von

$$e^{-qt}X(\eta(t))$$

mit

$$\eta(t) := \frac{\sigma^2}{4q}\left(e^{qt} - 1\right).$$

Beweis. $\eta(t) = \frac{\sigma^2}{4q}\left(e^{qt}-1\right)$ definiert eine bijektive Zeittransformation von $[0,\infty)$ mit Ableitung

$$\eta'(t) = \frac{\sigma^2}{4}e^{qt}.$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}\int_0^{\eta(t)} \sqrt{X(s)}d\widetilde{W}(s) &= \int_0^t \sqrt{X(\eta(u))}d\widetilde{W}(\eta(u)) \\ &= \int_0^t \sqrt{X(\eta(u))}dM(u)\end{aligned}$$

mit $M(u) := \widetilde{W}(\eta(u))$.
M ist ein L_2–Martingal mit $\langle M\rangle_t = \eta(t)$ für alle $t \geq 0$.
Durch

$$B(t) := \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\eta'(u)}}dM(u), \quad t \geq 0$$

wird ein Wiener-Prozess definiert, denn

$$\begin{aligned}\langle B\rangle_t &= \int_0^t \frac{1}{\eta'(u)} d\langle M\rangle_u \\ &= \int_0^t \frac{1}{\eta'(u)} d\eta(u) \\ &= \int_0^t \frac{1}{\eta'(u)} \eta'(u) du \\ &= t.\end{aligned}$$

Deshalb gilt

$$\int_0^{\eta(t)} \sqrt{X(s)} d\widetilde{W}(s) = \int_0^t \sqrt{X(\eta(u))}\sqrt{\eta'(u)} dB(u).$$

Also folgt in Integralschreibweise von Gleichung 8:

$$\begin{aligned}X(\eta(t)) &= y_0 + \frac{4qm}{\sigma^2}\eta(t) + 2\int_0^{\eta(t)} \sqrt{X(s)} d\widetilde{W}(s) \\ &= y_0 + \frac{4qm}{\sigma^2}\eta(t) + 2\int_0^t \sqrt{X(\eta(u))}\sqrt{\eta'(u)} dB(u)\end{aligned}$$

und damit

$$dX(\eta(t)) = \frac{4qm}{\sigma^2}\eta'(t)dt + 2\sqrt{X(\eta(t))}\sqrt{\eta'(t)} dB(t).$$

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}de^{-qt}X(\eta(t)) &= e^{-qt}dX(\eta(t)) - qe^{-qt}X(\eta(t))dt \\ &= e^{-qt}\frac{4qm}{\sigma^2}\eta'(t)dt + 2e^{-qt}\sqrt{X(\eta(t))}\sqrt{\eta'(t)}dB(t) - qe^{-qt}X(\eta(t))dt \\ &= qmdt + \sigma\sqrt{e^{-qt}}\sqrt{X(\eta(t))}dB(t) - qe^{-qt}X(\eta(t))dt \\ &= q(m - e^{-qt}X(\eta(t)))dt + \sigma\sqrt{e^{-qt}X(\eta(t))}dB(t).\end{aligned}$$

Also erfüllt $Y(t) = e^{-qt}X(\eta(t))$ die stochastische DGL

$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dB(t).$$

Also folgt die Behauptung. □

Ziel: Bestimmung eines äquivalenten Martingalmaßes in einem stochastischen Volatilitätsmodell.

Allgemeiner Ansatz:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + f(Y(t))dW(t)) \\ dY(t) &= b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dZ(t) \\ d\langle W, Z\rangle_t &= \varrho dt, \quad \varrho \in (-1,1) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu dt + f(Y(t))(\sqrt{1-\varrho^2}d\widetilde{W}(t) + \varrho dZ(t))) \\ dY(t) &= b(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dZ(t) \end{aligned}$$

mit unabhängigen Wiener-Prozessen $\widetilde{W}, Z$.
Aufgabe ist es, eine Girsanov-Transformation zu finden, sodass

$$dS(t) = S(t)(rdt + f(Y(t))(\sqrt{1-\varrho^2}d\widetilde{W}^\star(t) + \varrho dZ^\star(t)))$$

ist.
Bezeichne mit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die von $\widetilde{W}$ und Z erzeugte Wiener-Filtration.
Bezeichne mit $\left(\mathcal{F}_t^{(1)}\right)_{t\geq 0}$ die von $\widetilde{W}$ und mit $\left(\mathcal{F}_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$ die von Z erzeugte Wiener-Filtration.

Definition 3.19. *Ein Marktpreisprozess für Risiko ist ein stochastischer Prozess (ξ, γ) mit folgenden Eigenschaften*

(*i*) *ξ und γ sind previsibel (oder äquivalent progressiv messbar) bezüglich $\left(\mathcal{F}_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$.*

(*ii*) *$\int_0^t \xi^2(s)ds < \infty$ und $\int_0^t \gamma^2(s)ds < \infty$ für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.*

ξ heißt Marktpreisprozess des Risikos für die Aktie.
γ heißt Marktpreisprozess des Risikos für die Volatilität.

Satz 3.20. *Sei (ξ, γ) ein Marktpreisprozess des Risikos. Gilt*

$$\mathbb{E}L^{(\gamma)}(T) = \mathbb{E}\exp\left(-\int_0^T \gamma(s)dZ(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(s)ds\right) = 1$$

so kann auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ definiert werden durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L^{(\xi,\gamma)}(t)$$

mit

$$L^{(\xi,\gamma)}(t) := \exp\left(-\int_0^t \xi(s)d\widetilde{W}(s) - \int_0^t \gamma(s)dZ(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \xi^2(s) + \gamma^2(s)ds\right).$$

für alle $t \leq T$. Dann sind

$$W^\star(t) = \widetilde{W}(t) + \int\limits_0^t \xi(s)ds$$

und

$$Z^\star(t) = Z(t) + \int\limits_0^t \gamma(s)ds$$

unabhängige Wiener-Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.

Beweis. Entscheidend ist, dass ξ previsibel bezüglich $\left(\mathcal{F}_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$ ist. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\mathbb{E}L^{(\xi,\gamma)}(T) &= \mathbb{E}\mathbb{E}(L^{(\xi,\gamma)}(T)|\mathcal{F}_T^{(2)})\\ &= \mathbb{E}L^{(\gamma)}(T)\,\underbrace{\mathbb{E}\left(\int_0^T \xi(s)d\widetilde{W}(s) - \int_0^T \frac{1}{2}\xi^2(s)ds|\mathcal{F}_T^{(2)}\right)}_{=1}\\ &= \mathbb{E}L^{(\gamma)}(T)\\ &= 1\end{aligned}$$

Beachte:
$(\xi(t))_{t\geq 0}$ ist previsibel und $\left(\widetilde{W}(t)\right)_{t\geq 0}$ unabhängig bezüglich $\left(\mathcal{F}_t^{(2)}\right)_{t\geq 0}$. □

Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ gilt dann für Gleichung 3: 14.6.16

$$dS(t) = S(t)\Big((\mu - f(Y(t))(\sqrt{1-\varrho^2}\xi(t) + \varrho\gamma(t)))dt + f(Y(t))(\sqrt{1-\varrho^2}dW^\star(t) + \varrho dZ^\star(t))\Big)$$
$$dY(t) = (b(Y(t)) - \sigma(Y(t)))dt + \sigma(Y(t))dZ^\star(t).$$

ξ bestimmt sich aus der Gleichung

$$r = \mu - f(Y(t))(\sqrt{1-\varrho^2}\xi(t) + \varrho\gamma(t)).$$

Ist $f(Y(t)) \neq 0$ für alle $0 \leq t < T$ $\mathbb{P}$-fast sicher, so ist

$$\xi(t) = \frac{\mu - r}{\sqrt{1-\varrho^2}f(Y(t))} - \frac{\varrho\gamma(t)}{\sqrt{1-\varrho^2}}.$$

Gilt $\int\limits_0^T \xi^2(t)dt < \infty$, so kann ein äquivalentes Martingalmaß angegeben werden.
Es gilt:

$$\int\limits_0^T \xi^2(t)dt < \infty \Leftrightarrow \int\limits_0^T \frac{1}{f^2(Y(t))}dt < \infty.$$

Zusammengefasst ergibt sich also

Satz 3.21. *Sei* (ξ,γ) *ein Marktpreisprozess des Risikos mit*

$$\mathbb{E}\exp\left(-\int_0^T \gamma(s)dZ(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(s)ds\right) = 1.$$

Gilt $\int_0^T \frac{1}{f^2(Y(t))}dt < \infty$ $\mathbb{P}$*-fast sicher, so wird mittels*

$$\xi(t) = \frac{\mu - r}{\sqrt{1-\varrho^2}f(Y(t))} - \frac{\varrho\gamma(t)}{\sqrt{1-\varrho^2}}, \quad 0 \le t < T$$

ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ *definiert durch*

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)dZ(s) - \int_0^t \xi(s)d\widetilde{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^2(s) + \xi^2(s)ds\right), \quad 0 \le t < T$$

und $W^\star(t) = \widetilde{W}(t) + \int_0^t \xi(s)ds$ *und* $Z^\star(t) = Z(t) + \int_0^t \gamma(s)ds$ *sind unabhängige Wiener-Prozesse bezüglich* $\mathbb{P}^\star$.

Bezüglich $\mathbb{P}^\star$ ist $(e^{-rt}S(t))_{0\le t<T}$ ein lokales Martingal. Wann ist $S^\star(t) = e^{-rt}S(t)$ ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal?
Setzen wir $B(t) := \sqrt{1-\varrho^2}W^\star(t) + \varrho Z^\star(t)$, so gilt

$$S^\star(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t f(Y(s))dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(Y(s))ds\right).$$

$S^\star$ ist ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal, wenn

$$\mathbb{E}^\star S^\star(T) = S(0).$$

Da Y unabhängig von $W^\star$ ist, gilt

$$\mathbb{E}^\star S^\star(T) = S(0) \Leftrightarrow \mathbb{E}^\star \exp\left(\varrho\int_0^T f(Y(s))dZ^\star(s) - \frac{1}{2}\varrho^2\int_0^T f^2(Y(s))ds\right) = 1$$

denn

$$\mathbb{E}^\star S^\star(T) = S(0)\mathbb{E}^\star \exp\left(\int_0^T \sqrt{1-\varrho^2}f(Y(s))dW^\star(s) - \frac{1}{2}\int_0^T (1-\varrho^2)f^2(Y(s))ds\right)$$
$$\exp\left(\int_0^T \varrho f(Y(s))dZ^\star(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \varrho^2 f(Y(s))ds\right)$$

$$= S(0)\mathbb{E}^\star \exp\left(\int_0^T \varrho f(Y(s))dZ^\star(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \varrho^2 f(Y(s))ds\right)$$

$$\underbrace{\mathbb{E}^\star\left(\exp\left(\int_0^T \sqrt{1-\varrho^2} f(Y(s))dW^\star(s) - \frac{1}{2}\int_0^T (1-\varrho^2) f^2(Y(s))ds\right) | \mathcal{F}_T^{(2)}\right)}_{=1}$$

Anwendung auf das Heston-Modell, d.h.

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sqrt{Y(t)}dW(t), \quad S(0) = s_0 > 0$$
$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ(t), \quad Y(0) = y_0 > 0$$

mit $q > 0$, $m > 0$, $\sigma > 0$.
Zu untersuchen ist

$$\int_0^T f^{-2}(Y(s))ds = \int_0^T \frac{1}{Y(s)}ds$$

da $f(y) = \sqrt{y}$.
Ist $2qm \geq \sigma^2$, so erreicht der Prozess Y die 0 nie. Dann ist

$$\int_0^T \frac{1}{Y(s)}ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Ist $2qm > \sigma^2$, so gilt

$$\mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{Y(s)}ds < \infty \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Dies kann zurückgeführt werden auf eine entsprechende Aussage über den Bessel-Prozess.
Idee: Sei X ein $BESQ_{y_0}^{\frac{4qm}{\sigma^2}}$–Prozess. Dann gilt

$$\mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{X(s)}ds < \infty.$$

Dies verifiziert man über die Dichte des Bessel-Prozesses

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{X(s)}ds &= \int_0^T \mathbb{E}\frac{1}{X(s)}ds \\
&= \int_0^T \int_0^\infty \frac{1}{x} f(s,x)dxds \\
&= \int_0^T \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{1}{s} f_{\chi^2(\delta,\frac{y_0}{s})}\left(\frac{x}{s}\right)dxds
\end{aligned}$$

$$< \infty.$$

Der letzte Schritt gilt wegen des asymptotischen Verhaltens der Besselfunktion in der Nähe der Null.
Ist $2qm = \sigma^2$, so gilt

$$\mathbb{E}\int_0^T \frac{1}{Y(s)}ds = \infty.$$

Ist $2qm < \sigma^2$, so gilt

$$0 < \mathbb{P}\left(\int_0^T \frac{1}{Y(s)}ds = +\infty\right) < 1.$$

Zusammengefasst:

Satz 3.22. *Gegeben sei ein Heston-Modell*

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sqrt{Y(t)}dW(t)$$
$$dY(t) = q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ(t).$$

Dann gilt:

(*i*) *Ist $2qm \geq \sigma^2$, so gibt es zu jedem Marktpreis γ der Volatilität, der*

$$\mathbb{E}\left(-\int_0^T \gamma(s)dZ(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(s)ds\right) = 1$$

erfüllt, ein Marktpreis ξ für das Aktienrisiko, so dass durch ξ und γ ein äquivalentes Martingalmaß definiert wird.

(*ii*) *Ist $2qm < \sigma^2$ und $\mu \neq r$, so gibt es kein äquivalentes Martingalmaß.*

Berechnung eines Calloptionspreises im Heston-Modell.
Ansatz: Marktpreis der Volatilität ist proportional zur Volatilität, d.h.

$$\gamma(t) = \alpha\sqrt{Y(t)}$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \gamma^2(s)ds\right) = \mathbb{E}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T Y(s)\alpha^2 ds\right) < \infty.$$

Dies impliziert mit Hilfe des Novikov Kriteriums, dass

$$\left(\exp\left(-\int_0^t \gamma(s)dZ(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^2(s)ds\right)\right)_{0\leq t<T}$$

ein $\mathbb{P}$–Martingal ist.
Durch

$$\xi(t) = \frac{\mu - r}{\sqrt{1-\varrho^2}\sqrt{Y(t)}} - \varrho\frac{\gamma(t)}{\sqrt{1-\varrho^2}}$$

wird dann ein äquivalentes Martingalmaß definiert durch

$$\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(-\int_0^t \gamma(s)dZ(s) - \int_0^t \xi(s)d\widetilde{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \gamma^2(s) + \xi^2(s)ds\right)$$

und $W^\star(t) = \widetilde{W}(t) + \int_0^t \xi(s)ds$ und $Z^\star(t) = Z(t) + \int_0^t \gamma(s)ds$ sind unabhängige Wiener-Prozesse bezüglich $\mathbb{P}^\star$.
Es gilt dann bezüglich $\mathbb{P}^\star$:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= S(t)(rdt + \sqrt{Y(t)}(\sqrt{1-\varrho^2}dW^\star(t) + \varrho dZ^\star(t))) \\
dY(t) &= q(m - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ^\star(t) - \underbrace{\sigma\sqrt{Y(t)}\gamma(t)}_{\sigma\alpha Y(t)}dt \\
&= (qm - (q+\sigma\alpha)Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ^\star(t) \\
&= (q+\sigma\alpha)(\frac{qm}{q+\sigma\alpha} - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ^\star(t).
\end{aligned}$$

Es liegt also auch bezüglich $\mathbb{P}^\star$ ein Heston-Modell vor, da die quadratische Volatilität ein CIR Prozess mit transformierten Parametern ist.
Für die Berechnung der Calloption ist zu berechnen $\boxed{17.6.16}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^\star e^{-rT}(S(T)-K)^+ &= \mathbb{E}^\star e^{-rT}S(T)\mathbb{1}_{\{S(T)>K\}} - e^{-rT}K\mathbb{P}^\star(S(T)>K) \\
&= S(0)\mathbb{P}_1^\star(S(T)>K) - e^{-rT}K\mathbb{P}^\star(S(T)>K)
\end{aligned}$$

mit

$$\frac{d\mathbb{P}_1^\star}{d\mathbb{P}^\star}\bigg|_{\mathcal{F}_t} := \frac{1}{S(0)}e^{-rt}S(t) \qquad \text{für alle } 0 \le t < T.$$

Zu berechnen sind also $\mathbb{P}_1^\star(S(T)>K)$ und $\mathbb{P}^\star(S(T)>K)$. Dies geschieht durch Bestimmen der Fouriertransformierten von

$$X(T) := \ln S(T)$$

bezüglich $\mathbb{P}_1^\star$ und $\mathbb{P}^\star$.
Die Ito-Formel liefert

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \frac{1}{S(t)}dS(t) - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2(t)}d\langle S\rangle_t \\
&= \frac{1}{S(t)}S(t)(rdt + \sqrt{Y(t)}dW^\star(t)) - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2(t)}S^2(t)Y(T)dt
\end{aligned}$$

$$= (r - \frac{1}{2}Y(t))dt + \sqrt{Y(t)}dW^\star(t).$$

Zu betrachten ist

$$\mathbb{E}^\star e^{i\lambda X(T)} = \mathbb{E}^\star h(X(T), Y(T))$$

mit $h(x,y) = e^{-\lambda x}$. Auch eine Abhängigkeit der Funktion h von y ist zu betrachten, da X kein Markov-Prozess ist. Ausnutzen kann man aber die Markov-Eigenschaft von (X,Y), was zu einem PDE Ansatz führt. Setze

$$u(t,x,y) := \mathbb{E}^\star(h(X(T), Y(T)|X(t) = x, Y(t) = y).$$

Dann gilt wegen der Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\star(h(X(T), Y(T)|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}^\star(h(X(T), Y(T))|X(t), Y(t)) \\ &= u(t, X(t), Y(t)).\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass $u(t, X(t), Y(t)), t \geq 0$, als bedingter Erwartungswert, ein $\mathbb{P}^\star$−Martingal ist.
Die Ito-Formel liefert

$$\begin{aligned}du(t, X(t), Y(t)) &= \partial_t u(t, X(t), Y(t))dt + \partial_x u(t, X(t), Y(t))dX(t) \\ &\quad + \partial_y u(t, X(t), Y(t))dY(t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 u(t, X(t), Y(t))d\langle X\rangle_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_y^2 u(t, X(t), Y(t))d\langle Y\rangle_t + \partial_x\partial_y u(t, X(t), Y(t))d\langle X, Y\rangle_t \\ &= \partial_t u(t, X(t), Y(t))dt + \partial_x u(t, X(t), Y(t))(r - \frac{1}{2}Y(t))dt \\ &\quad + \partial_x u(t, X(t), Y(t))\sqrt{Y(t)}dW^\star(t) + \partial_y u(t, X(t), Y(t))b(a - Y(t))dt \\ &\quad + \partial_y u(t, X(t), Y(t))\sigma\sqrt{Y(t)}dZ^\star(t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 u(t, X(t), Y(t))Y(t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial_y^2 u(t, X(t), Y(t))\sigma^2 Y(t)dt + \partial_x\partial_y u(t, X(t), Y(t))\sigma Y(t)\varrho dt\end{aligned}$$

da $\langle X, Y\rangle_t = \sigma\sqrt{Y(t)}\sqrt{Y(t)}d\langle W^\star, Z^\star\rangle_t = \sigma Y(t)\varrho dt$

$$\begin{aligned}&= \Big[\partial_t u(t, X(t), Y(t)) + (r - \frac{1}{2}Y(t))\partial_x u(t, X(t), Y(t)) \\ &\quad + b(a - Y(t))\partial_y u(t, X(t), Y(t)) + \frac{1}{2}Y(t)\partial_x^2 u(t, X(t), Y(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 Y(t)\partial_y^2 u(t, X(t), Y(t)) + \varrho\sigma y\partial_x\partial_y u(t, X(t), Y(t))\Big]dt \\ &\quad + \partial_x u(t, X(t), Y(t))\sqrt{Y(t)}dW^\star(t) + \partial_y u(t, X(t), Y(t))\sigma\sqrt{Y(t)}dZ^\star(t).\end{aligned}$$

Also erfüllt u die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x,y) + (r - \frac{1}{2}y)\partial_x u(t,x,y)$$

$$
\begin{aligned}
&+ b(a-y)\partial_y u(t,x,y) + \frac{1}{2} y \partial_x^2 u(t,x,y)) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2 y \partial_y^2 u(t,x,y) + \varrho\sigma y \partial_x \partial_y u(t,x,y) \\
= 0 &
\end{aligned}
$$

auf $(0,T)\times\mathbb{R}\times[0,\infty)$ mit Endbedingung

$$\lim_{t\nearrow T} u(t,x,y) = e^{i\lambda x} \qquad \text{für alle } x\in\mathbb{R}, y\in[0,\infty).$$

Als Ansatz für eine Lösung wählt man

$$u(t,x,y) = \exp(C_\lambda(T-t) + D_\lambda(T-t)y + i\lambda x)$$

mit Funktionen $C_\lambda, D_\lambda : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Ausrechnen der partiellen Ableitung und Einsetzen in die partielle Differentialgleichung führt auf die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
D_\lambda'(s) &= (-b + i\lambda\varrho\sigma)D(s) + \frac{1}{2}\sigma^2 D^2(s) - \frac{1}{2}i\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 \\
C_\lambda'(s) &= abD(s) + ri\lambda
\end{aligned}
$$

mit Anfangsbedingungen $C_\lambda(0) = 0 = D_\lambda(s)$.
Die Differentialgleichung für D ist eine Ricatti-Gleichung und man erhält

$$D_\lambda(t) = \frac{b - i\sigma\varrho\lambda + d}{\sigma^2}\frac{1-e^{dt}}{1-ge^{dt}}$$

mit

$$
\begin{aligned}
g &= \frac{b-\varrho\sigma\lambda i + d}{b - \varrho\sigma\lambda i - d} \\
d &= \sqrt{(b - i\varrho\sigma\lambda)^2 + \sigma^2(i\lambda + \lambda^2)}
\end{aligned}
$$

Aufintegrieren liefert für C:

$$C_\lambda(t) = ri\lambda t + \frac{ab}{\sigma^2}\left((b - i\varrho\sigma\lambda + d)t - 2\ln\left(\frac{1-ge^{dt}}{1-g}\right)\right).$$

Also ist die Fouriertransformierte

$$
\begin{aligned}
u(\lambda) &= \mathbb{E}^\star\left(e^{i\lambda X(T)} | X(0) = x_0, Y(0) = y_0\right) \\
&= u(0, x_0, y_0) \\
&= \exp\left(C_\lambda(T) + D_\lambda(T)y_0 + i\lambda x_0\right)
\end{aligned}
$$

Man erhält

$$\mathbb{P}^\star(S(T) > K) = \mathbb{P}^\star(X(T) > \ln K)$$

durch Fourierinversion

$$\mathbb{P}^\star(S(T) > K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left(\frac{e^{-i\lambda \ln K}u(\lambda)}{i\lambda}\right)d\lambda.$$

Dieses Integral wird numerisch gelöst.
Weiter ist $P_1^\star(S(T) > K)$ zu bestimmen, wobei

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_1^\star}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{1}{S(0)}e^{-rt}S(t) = \frac{1}{S(0)}S^\star(t) =: L(t).$$

Es gilt

$$dS^\star(t) = S^\star(t)\sqrt{Y(t)}dW^\star(t).$$

Also als Dorleans-Exponential:

$$L(t) = \exp\left(\int_0^t \sqrt{Y(s)}dW^\star(s) - \frac{1}{2}\int_0^t Y(s)ds\right).$$

Girsanov liefert die Wiener-Prozesse

$$\begin{aligned} W^{\star\star} &= W^\star(t) - \langle W^\star, \int_0^t \sqrt{Y(s)}dW^\star(s)\rangle_t \\ Z^{\star\star} &= Z^\star(t) - \langle Z^\star, \int_0^t \sqrt{Y(s)}dW^\star(s)\rangle_t \end{aligned}$$

mit

$$\langle W^{\star\star}, Z^{\star\star}\rangle_t = \langle W^\star, Z^\star\rangle_t = \varrho t.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle W^\star, \int_0^t \sqrt{Y(s)}dW^\star(s)\rangle_t &= \int_0^t \sqrt{Y(s)}d\langle W^\star\rangle_s = \int_0^t \sqrt{Y(s)}ds \\ \langle Z^\star, \int_0^t \sqrt{Y(s)}dW^\star(s)\rangle_t &= \int_0^t \sqrt{Y(s)}d\langle Z^\star, W^\star\rangle_s = \int_0^t \sqrt{Y(s)}\varrho ds \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} dX(t) &= (r - \frac{1}{2}Y(t))dt + \sqrt{Y(t)}dW^\star(t) \\ &= (r - \frac{1}{2}Y(t))dt + \sqrt{Y(t)}dW^{\star\star} + \sqrt{Y(t)}\sqrt{Y(t)}dt \\ &= (r + \frac{1}{2}Y(t))dt + \sqrt{Y(t)}dW^{\star\star}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dY(t) &= b(a - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ^\star(t) \\
&= b(a - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ^{\star\star}(t) + \sigma\sqrt{Y(t)}\sqrt{Y(t)}\varrho dt \\
&= (b - \varrho\sigma)\left(\frac{ab}{b - \varrho\sigma} - Y(t)\right)dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ^{\star\star}(t) \\
&=: b_1(a_1 - Y(t))dt + \sigma\sqrt{Y(t)}dZ^{\star\star}(t)
\end{aligned}$$

Mit der gleichen Methode wie oben kann man die Fouriertransformierte von $X(T) = \ln S(T)$ bestimmen.
Man erhält

$$\begin{aligned}
u_1(\lambda) &= \mathbb{E}_1^\star\left(e^{i\lambda X(T)}|X(0) = x_0, Y(0) = y_0\right) \\
&= \exp\left(C_\lambda^{(1)}(T) + D_\lambda^{(1)}(T)y_0 + i\lambda x_0\right)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
C_\lambda^{(1)}(t) &= ri\lambda t + \frac{a_1 b_1}{\sigma^2}\left((b_1 - i\varrho\sigma\lambda + d_1)t - 2\ln\left(\frac{1 - g_1 e^{d_1 t}}{1 - g_1}\right)\right) \\
D_\lambda^{(1)}(t) &= \frac{b_1 - i\varrho\sigma\lambda + d_1}{\sigma^2}\frac{1 - e^{d_1 t}}{1 - g_1 e^{d_1 t}}
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{b_1 - \varrho\sigma i\lambda + d_1}{b_1 - \varrho\sigma i\lambda - d_1} \\
d_1 &= \sqrt{(\varrho\sigma\lambda i - b_1)^2 + \sigma^2(\lambda^2 - i\lambda)}.
\end{aligned}$$

Durch Fourierinversion kann dann

$$\mathbb{P}_1^\star(S(T) > K) = \mathbb{P}_1^\star(X(T) > \ln(K)$$

ausgerechnet werden.
Anwendung in der Praxis:
Das Heston-Modell ist unvollständig. Die Frage ist, welches äquivalente Martingalmaß zur Bewertung benutzt wird.
Ansatz:
Kalibrierung eines Heston-Modells an die beobachtbaren Marktpreise für Calloptionen.
Die Parameter des Modells sind

q Wiederkehrrate,

m Returnlevel der Volatilität,

α Proportionalitätsfaktor im Marktpreis der Volatitlität,

σ Schwankung der Volatilität,

ϱ Korrelation zwischen Aktie und Volatilität.

Diese Parameter bestimmen über die Heston-Formel den Modellpreis der Calloption. Man bestimmt die Parameter so, dass Modell- und Marktpreise möglichst gut übereinstimmen. Das so kalibrierte Modell benutzt man dann, um kompliziertere Derivate, die keine Marktpreise haben, zu bewerten.

II Bondmarktmodelle

21.6.16

1 Short rate Modelle

1.1 Allgemeine Annahmen

- Handelszeitraum $[0, T^\star]$.
- Die Quelle des Zufalls im Bondmarkt wird beschrieben durch einen $n-$dimensionalen Wiener-Prozess $(W(t))_{0\leq t\leq T^\star}$.
- Die Information im Markt ist die von W erzeugte Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T^\star}$.
- Die risky assets in diesem Modell sind $T-$Bonds. Ein $T-$Bond ist ein Wertpapier, das seinem Inhaber in T 1 Euro auszahlt mit $T \leq T^\star$. Dabei ist T die Fälligkeit des Bonds.

  Es werden keine Koupons (Zinsen) während der Laufzeit gezahlt.

  Ein $T-$Bond hat einen Preisprozess

$$(B(t,T))_{0\leq t\leq T}.$$

Folgende Annahmen werden gefordert:

(i) $B(T,T) = 1$,

(ii) $B(t,T)$, $0 \leq t \leq T$, ist ein positives Semimartingal mit stetigen Pfaden,

(iii) Der beschränkte Variationsanteil von $(B(t,T))_{0\leq t\leq T}$ hat absolut-stetige Pfade bezüglich des Lebesgue-Maßes.

(iv) $(B(t,T))_{t\leq T\leq T^\star}$, als Funktion in T, hat $\mathbb{P}$-fast sicher differenzierbare Pfade, d.h. $B(t,T)$ ist differenzierbar in T für $\mathbb{P}-$ alle ω bei festem t.

Folgerungen aus den Annahmen

Aus (ii) und (iii) ergibt sich, analog zum Aktienmarktmodell, dass $(B(t,T))_{0\leq t\leq T}$ eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} dB(t,T) &= B(t,T)(\mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)) \\ &= B(t,T)(\mu(t,T)dt + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j(t,T)dW_j(t)) \end{aligned}$$

erfüllt (argumentiere analog über $X(t) = \ln B(t,T)$, dann Ito etc.), mit previsiblen Prozessen $(\mu(t,T))_{0\le t\le T}$ und $(\sigma(t,T))_{0\le t\le T}$.
Aus (iv) folgt, dass der short rate Prozess

$$r(t) := -\frac{\partial}{\partial T}\ln(B(t,T))|_{T=t}$$

wohldefiniert ist.
Durch die short rate wird ein Geldmarktkonto

$$\beta(t) := \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right), \quad 0 \le t \le T^\star$$

bzw.

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt, \quad 0 \le\le T^\star$$

definiert.

1.2 Konstruktion eines arbitragefreien Marktes

Wir haben in diesem Modell n Wiener-Prozesse, die den Zufall bestimmen, aber unendlich viele risky assets, da für jedes $T \in [0,T^\star]$ ein neuer $T-$Bond definiert wird. Deshalb braucht man Bedingungen an die Driftfunktionen und Volatilitäten, dass das Modell arbitragefrei wird.
Betrachte zunächst $n = 1$.
Aufgabe ist es, ein äquivalentes Martingalmaß zu bestimmen.
Um eine Girsanovtransformation zu bestimmen, braucht man lediglich ein risky asset, d.h. einen $T-$Bond.
Wähle $T = T^\star$ und betrachte das Modell

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \beta(t)r(t)dt \\ dB(t,T^\star) &= B(t,T^\star)(\mu(t,T^\star)dt + \sigma(t,T^\star)dW(t)) \end{aligned}$$

Es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ genau dann für

$$\vartheta(t) = -\frac{\mu(t,T^\star) - r(t)}{\sigma(t,T^\star)} \quad \text{für alle } 0 \le t \le T^\star$$

wenn gilt:

$$\mathbb{E}\exp\left(\int_0^{T^\star}\vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^{T^\star}\vartheta^2(s)ds\right) = 1.$$

Dann wird durch

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta^2(s)ds\right), \quad 0 \le t \le T^\star$$

ein äquivalentes Martingalmaß auf $\mathcal{F}_{T^\star}$ definiert und

$$W^\star(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T^\star$$

ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^\star$. Dann gilt bezüglich $\mathbb{P}^\star$:

$$dB(t,T^\star) = B(t,T^\star)(r(t)dt + \sigma(t,T^\star)dW^\star(t)).$$

Für $T-$Bonds mit kürzerer Laufzeit $T < T^\star$ ergibt sich

$$\begin{aligned} dB(t,T) &= B(t,T)(\mu(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)) \\ &= B(t,T)((\mu(t,T) + \sigma(t,T)\vartheta(t))dt + \sigma(t,T)dW^\star(t)). \end{aligned}$$

$\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\right)_{0\leq t\leq T}$ ist ein lokales $\mathbb{P}^\star-$Martingal genau dann, wenn

$$\mu(t,T) + \sigma(t,T)\vartheta(t) = r(t).$$

Also müssen die Driftfunktionen $\mu(\cdot,T)$ und Volatilitäten $\sigma(\cdot,T)$ die Gleichung

$$\mu(t,T) + \sigma(t,T)\vartheta(t) = r(t) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T$$

erfüllen, bzw.

$$\frac{r(t) - \mu(t,T)}{\sigma(t,T)} = \vartheta(t) = \frac{r(t) - \mu(t,T^\star)}{\sigma(t,T^\star)} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T$$

Diese Bedingung ist nicht verwunderlich, denn in einem von einem Wiener-Prozess getriebenen arbitragefreien Markt ist der Sharpe Ratio eines jeden risky assets eine Invariante.
Man könnte auch gleich so argumentieren:
Durch den $T^\star-$Bond ist der Sharpe Ratio durch

$$\frac{\mu(t,T^\star) - r(t)}{\sigma(t,T^\star)} = -\vartheta(t)$$

eindeutig festgelegt.
Jedes weitere Finanzgut im arbitragefreien Markt hat den gleichen Sharpe Ratio, das heißt es gilt

$$\frac{\mu(t,T) - r(t)}{\sigma(t,T)} = -\vartheta(t) = \frac{\mu(t,T^\star) - r(t)}{\sigma(t,T^\star)} \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Sei nun $n = d \in \mathbb{N}$.
Wähle d Fälligkeiten mit

$$T_1 < T_2 < \ldots < T_d.$$

Betrachte den Markt

$$d\beta(t) = \beta(t)r(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
dB(t,T_i) &= B(t,T_i)(\mu(t,T_i)dt + \sigma(t,T_i)dW(t)) \\
&= B(t,T_i)(\mu(t,T_i)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t,T_i)dW_j(t))
\end{aligned}
$$

Ist die Matrix

$$
\sigma(t) := \sigma_j(t,T_i)_{\substack{1\le i\le d\\ 1\le j\le d}}
$$

invertierbar für alle $t \le T_1$, so kann $\vartheta(t)$ definiert werden durch

$$
\vartheta(t) = \sigma^{-1}(t)\left(r(t)\mathbb{1} - \begin{pmatrix} \mu(t,T_1) \\ \vdots \\ \mu(t,T_d) \end{pmatrix} \right).
$$

Gilt weiter

$$
\mathbb{E}\exp\left(\int_0^{T_1} \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^{T_1} |\vartheta(s)|^2 ds \right) = 1
$$

so wird durch

$$
\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^{t} \vartheta(s)dW(s) - \frac{1}{2}|\vartheta(s)|^2 ds \right)
$$

ein äquivalentes Martingalmaß definiert und

$$
W^\star(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s)ds
$$

ist ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^\star$.
Es gilt:

$$
dB(t,T_i) = B(t,T_i)(r(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t,T_i)dW_j^\star(t)).
$$

Also ist $\left(\frac{B(t,T_i)}{\beta(t)}\right)_{0\le t\le T_1}$ ein lokales $\mathbb{P}^\star$−Martingal für alle $1 \le i \le d$.
Der gesamte Bondmarkt ist für $t \le T_1$ arbitragefrei genau dann, wenn $\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\right)_{0\le t\le T}$ ein lokales $\mathbb{P}^\star$−Martingal ist für alle $T \le T_1$.
Dann ist für $T \le T_1$:

$$
\begin{aligned}
dB(t,T) &= B(t,T)(\mu(t,T)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t,T)dW_j(t)) \\
&= B(t,T)((\mu(t,T) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t,T)\vartheta_j(t))dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t,T)dW_j^\star(t)).
\end{aligned}
$$

Also muss gelten

$$
\mu(t,T) + \sum_{j=1}^{d} \sigma_j(t,T)\vartheta_j(t) = r(t) \quad \text{für alle } 0 \le t \le T.
$$

Damit sind alle T–Bonds mit Fälligkeit vor T_1 lokale $\mathbb{P}^\star$–Martingale. Da man frei ist in der Wahl der d risky assets, können die Zeitpunkte $T_1, ..., T_d$ in der Realität sehr nah an $T^\star$ liegen, sodass nur eher vernachlässigbar wenige T–Bonds nicht berücksichtigt werden. Betrachtet man z.B. $T^\star = 3$ Jahre, so können die Zeitpunkte $T_1, ..., T_d$ 10 Sekunden, 20 Sekunden und 30 Sekunden vor $T^\star$ gewählt werden.

Motivation der short rate

24.6.16

Frage: Was für eine Rendite kann für ein risikoloses Investment zwischen T und T_1 in t garantiert werden?
Anwort: Betrachte den T_1–Bond als Basisgut und vereinbare zum Termin T ein Termingeschäft (Forward) auf den T_1–Bond. Der Terminpreis (Forwardpreis in t), vereinbart in t, auf den T_1–Bond ist aus Arbitragegründen eindeutig bestimmt durch

$$F(t,T;T_1) = \frac{B(t,T_1)}{B(t,T)}$$

das heißt, für $F(t,T;T_1)$ in T erhält man einen T_1–Bond in T. Für 1 Euro gehe $\frac{1}{F(t,T;T_1)}$ Termingschäfte ein und erhalte $\frac{1}{F(t,T;T_1)} = \frac{B(t,T)}{B(t,T_1)}$ T_1–Bonds. Diese sind in T_1 jeweils 1 Euro wert. Also erhält man einen Gewinn von $\frac{B(t,T)}{B(t,T_1)} - 1$ Euro.
Dieser entspricht bei stetiger Verzinsung einer Rendite von $R_C(t;T,T_1)$, die sich aus

$$\exp\left((T_1 - T)R_C(t;T,T_1)\right) = \frac{B(t,T)}{B(t,T_1)}$$

berechnet. Lässt man in

$$R_C(t;T,T_1) = -\frac{1}{T_1 - T}(\ln B(t,T_1) - \ln B(t,T))$$

die Intervallänge $T_1 - T$ gegen Null streben, erhält man die stetige forwardrate f zum Termin T in t durch

$$f(t,T) = \lim_{T_1 \to T} R_C(t,T,T_1) = -\partial_T \ln B(t,T).$$

Im Modell wird vorrausgesetzt, dass die stetigen forwardrates existieren.

Bemerkung.

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \exp\left(\ln B(t,T)\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^T -\frac{\partial}{\partial s}\ln B(t,s)ds\right) \\ &= \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right) \end{aligned}$$

Preise von Nullkouponanleihen ergeben sich also aus den forwardrates und umgekehrt. Die short rate $r(t)$ ist die forwardrate in t, also

$$\begin{aligned} r(t) = f(t,t) &= \lim_{T_1 \to t} R_C(t;t,T_1) \\ &= \lim_{T_1 \to t} -\frac{1}{T_1 - t}(\ln B(t,T_1) - \underbrace{\ln B(t,t)}_{=0}) \\ &= -\left.\partial_T\right|_{T=t} \ln B(t,T) \end{aligned}$$

1.3 Short rate Modelle

Ausgehend von der Entwicklung für die short rate soll ein arbitragefreies Bondmarktmodell entwickelt werden. Anzugeben sind

- ein Wahrscheinlickeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}_{T^\star}, \mathbb{P})$, wobei sich $\mathcal{F}_{T^\star}$ durch einen Wiener-Prozess W ergibt,
- eine Familie von Bondpreisen $(B(t,T))_{0 \le t \le T}$ für jedes $T \le T^\star$,
- ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{T^\star})$, so dass $\left(\frac{B(t,T)}{\beta(t)}\right)_{0 \le t \le T}$ ein lokales Martingal ist bezüglich $\mathbb{P}^\star$ für alle $T \le T^\star$.

Betrachte also einen n–dimensionalen Wiener-Prozess W mit Wiener-Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ bezüglich eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$. Fixiere $T^\star > 0$. Damit ist $(\Omega, \mathcal{F}_{T^\star}, \mathbb{P})$ festgelegt.
<u>1. Annahme:</u> Die short rate ist eine Diffusion, das heißt, sie ist eine starke Lösung der stochastischen DGL

$$\begin{aligned} dr(t) &= m(t, r(t))dt + \delta(t, r(t))dW(t) \\ &= m(t, r(t))dt + \sum_{j=1}^{n} \delta_j(t, r(t))dW_j(t) \end{aligned}$$

mit Anfangsbedingung $r(0) = r_0 \in \mathbb{R}$.
$m : [0, T^\star] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\delta : [0, T^\star] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind so zu wählen, dass eine solche Lösung existiert.
<u>2. Annahme:</u> Es existiert ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinglichkeitsmaß $\mathbb{P}^\star$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{T^\star})$ mit

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^\star}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L(t) = \exp\left(\int_0^t \vartheta(s)dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\vartheta(s)|^2 ds\right) \qquad \text{für alle } 0 \le t \le T^\star$$

wobei $\vartheta(t) = \vartheta(t, r(t))$ für alle $t \le T^\star$ für eine Funktion $\vartheta : [0, T^\star] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
<u>3. Annahme:</u> Sei $\mathbb{E}^\star \frac{1}{\beta(T)} < \infty$ für alle $T \le T^\star$, wobei

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right).$$

Dann wird durch

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \beta(t)\mathbb{E}^\star\left(\frac{1}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^\star\left(\frac{\beta(t)}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^\star\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathcal{F}_t\right)
\end{aligned}
$$

für alle $t \leq T$ ein arbiragefreies Bondmarktmodell mit äquivalentem Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$ definiert, denn

$$
\frac{B(t,T)}{\beta(t)} = \mathbb{E}^\star\left(\frac{1}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t\right), \quad t \leq T
$$

ist ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal.
Im folgenden soll $B(t,T)$ und dessen Volatilität $\sigma(t,T)$ berechnet werden:
Wegen der 2. Annahme definiert

$$
W^\star(t) = W(t) - \int_0^t \vartheta(s,r(s))ds
$$

einen n–dimensionalen Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}^\star$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
dr(t) &= m(t,r(t))dt + \delta(t,r(t))dW(t)\\
&= (m(t,r(t)) + \sum_{j=1}^n \vartheta_j(t,r(t))\delta_{ij}(t,r(t)))dt + \delta(t,r(t))dW^\star(t).
\end{aligned}
$$

Also ist r eine Diffusion bezüglich $\mathbb{P}^\star$:

$$
dr(t) = b(t,r(t))dt + \delta(t,r(t))dW^\star(t)
$$

mit

$$
b(t,r(t)) = m(t,r(t)) + \vartheta(t,r(t))\delta(t,r(t)).
$$

Die Markov-Eigenschaft von r bezüglich $\mathbb{P}^\star$ impliziert

$$
\begin{aligned}
B(t,T) &= \mathbb{E}^\star\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}^\star\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|r(t)\right)\\
&= v_T(t,r(t))
\end{aligned}
$$

mit

$$
v_T(t,r) = \mathbb{E}^\star\left(\exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)|r(t) = r\right).
$$

Ito-Formel angewendet auf v_T impliziert:

$$\begin{aligned}
dB(t,T) &= dv_T(t,r(t)) \\
&= \partial_t v_T(t,r(t)) + \partial_x v_T(t,r(t))dr(t) + \frac{1}{2}\partial_x^2 v_T(t,r(t))d\langle r\rangle_t \\
&= \left[\partial_t v_T(t,r(t)) + \partial_x v_T(t,r(t))b(t,r(t)) + \frac{1}{2}\partial_x^2 v_T(t,r(t))|\delta(t,r(t))|^2\right]dt \\
&\quad + \partial_x v_T(t,r(t))\delta(t,r(t))dW^\star(t)
\end{aligned}$$

Also erfüllt v_T die partielle DGL

$$\partial_t v_T(t,r) + b(t,r)\partial_x v_T(t,r) + \frac{1}{2}|\delta(t,r)|^2\partial_x^2 v_T(t,r) = r v_T(t,r)$$

auf $(0,T)\times\mathbb{R}$ mit Endbedingung

$$\lim_{t\nearrow T} v_T(t,r) = 1.$$

Durch Lösen dieser partiellen DGL kann man die Bondpreise explizit berechnen. Auch gewinnt man deren Volatilitäten mittels

$$dB(t,T) = B(t,T)(r(t)dt + \underbrace{\frac{\partial_x v_T(t,r(t))}{v_T(t,r(t))}\delta(t,r(t))}_{\sigma(t,T)}dW^\star(t).$$

Bemerkung. *Eigentlich ist der Wechsel zum Maß $\mathbb{P}^\star$ nicht notwenig. Formal bedeutet dies, dass man $\vartheta(t,r) = 0$ setzt. Dann ist $\mathbb{P}^\star = \mathbb{P}$. Dies ist das sogenannte Matingal Modelling.*

1.4 Beispiele für short rate Modelle

24.6.16

a) *Vasicek Modell*
Einfaktormodell, $n = 1$,

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta dW(t)$$

mit $b, a, \delta > 0$.
- Vasicek-Prozess
- Returnlevel a
- Wiederkehrrate b

Lösen der partiellen DGL führt zu

$$B(t,T) = \exp\left(-h(T-t) - r(t)g(T-t)\right)$$

mit

$$h(s) = \left(a - \frac{\delta^2}{2b^2}\right)s + \left(\frac{\delta^2}{b^2} - a\right)\left(1 - e^{-bs}\right)\frac{1}{b} - \frac{\sigma^2}{2b^2}\frac{1}{2b}\left(1 - e^{-2bs}\right)$$

$$g(s) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-bs}\right)$$

Die Rendite (Yield) $Y(t,T)$ erhält man aus

$$\exp\left((T-t)Y(t,T)\right) = \frac{1}{B(t,T)}$$
$$\Leftrightarrow Y(t,T) = \frac{1}{T-t}(h(T-t) + g(T-t)r(t))$$

$Y(t,\cdot)$ ist die Rendite der Nullkouponanleihe, als Funktion der Fälligkeit. Die Anfangsrenditenkurve ist

$$Y(0,T) = \frac{1}{T}(g(T)r(0) + h(T)).$$

Die Rendite hängt affin von der short rate ab. Deshalb ist das Vasicek Modell ein Beispiel für ein affines Bondmarktmodell. Für den Bondpreis gilt:

$$dB(t,T) = B(t,T)(r(t)dt \underbrace{-g(T-t)\delta}_{\sigma(t,T)} dW(t)).$$

Dann ist

$$\sigma(t,T) = -g(T-t)\delta$$

die Volatilität des T−Bonds. $\sigma(t,T)$ ist deterministisch. Dies bedeutet, dass die Bewertung eines Derivates im Vasicek Modell analog zur Bewertung in einem Black-Scholes Modell mit deterministischer Volatilität erfolgen kann.

b) Das Cox-Ognersoll-Ross Modell (CIR Modell)

$$dr(t) = b(a - r(t))dt + \delta\sqrt{r(t)}dW(t)$$

mit $b, a, \delta > 0$ und $2ab \geq \delta^2$.
Lösen der partiellen DGL ergibt

$$B(t,T) = \exp\left(-h(T-t) - g(T-t)r(t)\right)$$

mit

$$h(s) = -\frac{2ab}{\delta^2}\ln\left(\frac{4\gamma e^{(\gamma+\frac{b}{2})s}}{(2\gamma+b)(e^{2\gamma s}-1)+4\gamma}\right)$$
$$g(s) = \frac{2(e^{2\gamma s}-1)}{(2\gamma+b)(e^{2bs}-1)+4\gamma}$$

und

$$\gamma = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2\delta^2}.$$

Damit ist das CIR Modell ebenfalls ein affines Bondmarktmodell mit

$$dB(t,T) = B(t,T)(r(t)dt \underbrace{-g(T-t)\delta\sqrt{r(t)}}_{\sigma(t,T)} dW(t)).$$

1.5 Bewertung in short rate Modellen

Gegeben sei ein arbitragefreies short rate Modell, das von einem n–dimensionalen Wiener-Prozess getrieben wird. Gibt es Fälligkeiten $T_1 < ... < T_n$, sodass

$$\sigma(t) := (\sigma_j(t, T_i))_{1 \le i,j \le n}$$

invertierbar ist für alle $0 \le t < T_1$, so ist das Modell vollständig, da dann das äquivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt ist.
Deshalb kann jeder T–Claim C mit $\mathbb{E}^\star |\frac{C}{\beta(T)}| < \infty$ eindeutig arbitragefrei durch

$$p_0(C) = \mathbb{E}^\star \frac{C}{\beta(T)}$$

heute in Euro bewertet werden.
Entsprechend in t durch

$$p_t(C) = \beta(t) \mathbb{E}^\star \left(\frac{C}{\beta(T)} | \mathcal{F}_t \right).$$

Zur Berechnung ist es vorteilhaft, den Forwardpreis

$$F(0, T; C) = \frac{p_0(C)}{B(0, T)}$$

bzw.

$$F(t, T; C) = \frac{p_t(C)}{B(t, T)}$$

zu bestimmen mit Hilfe des sogenannten Forwardmartingalmaßes in T.

Definition 1.6. *Das Forwardmartingalmaß $\mathbb{P}_T$ zum Termin $T > 0$ ist das zum Numeraire $(B(t, T))_{0 \le t \le T}$ gehörige äquivalente Martingalmaß.*
Genauer:

- (i) $\mathbb{P}_T \sim \mathbb{P}^\star$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}_T)$.
- (ii) *Für jedes Basisfinanzgut S ist* $\left(\frac{S(t)}{B(t,T)} \right)_{0 \le t \le T}$ *ein lokales $\mathbb{P}_T$–Martingal.*

$\frac{S(t)}{B(t,T)}$ *ist der sogennante Termin-/Forwardpreis in t.*

Zur Bestimmung von $\mathbb{P}_T$:
Wegen

$$\frac{B(t, T)}{\beta(t)} = \mathbb{E}^\star \left(\frac{1}{\beta(T)} | \mathcal{F}_t \right), \quad 0 \le t \le T$$

ist $\frac{B(t,T)}{\beta(t)}$ als bedingter Erwartungswert ein $\mathbb{P}^\star$–Martingal für alle $0 \le t \le T$.

Also wird durch

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^\star}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \underbrace{\frac{B(t,T)}{\beta(t)}}_{\substack{\mathbb{P}^\star-\text{MG, aber}\\ \mathbb{E}^\star=B(0,T)\neq 0}} \underbrace{\frac{1}{B(0,T)}}_{\substack{\text{Normier-}\\ \text{ungsfak-}\\ \text{tor}}} =: L(t), \quad 0 \le t \le T$$

ein zu $\mathbb{P}^\star$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß definiert.
Es gilt für jedes Basisgut S, dass

$$F(t,T;S) := \frac{S(t)}{B(t,T)}, \quad 0 \le t \le T$$

ein lokales $\mathbb{P}_T$–Martingal ist genau dann, wenn

$$\frac{S(t)}{B(t,T)} L(t), \quad 0 \le t \le T$$

ein lokales $\mathbb{P}^\star$–Martingal ist.
Da

$$\frac{S(t)}{B(t,T)} L(t) = \frac{S(t)}{B(t,T)} \frac{B(t,T)}{\beta(t)} \frac{1}{B(0,T)} = \frac{S(t)}{\beta(t)} \frac{1}{B(0,T)}$$

ist $F(t,T;S)$ ein lokales $\mathbb{P}_T$–Martingal für alle $0 \le t \le T$. Damit ist $\mathbb{P}_T$ das Forwardmartingalmaß zum Termin T.
Ist $T_1 \neq T$, so ist

$$\left(\frac{B(t,T_1)}{B(t,T)}\right)_{0 \le t \le T \wedge T_1}$$

ein $\mathbb{P}_T$–Martingal.

Bemerkung 1.7. *Wegen*

$$dB(t,T) = B(t,T)(r(t)dt + \sigma(t,T)dW^\star(t))$$

gilt

$$\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^\star}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \sigma(s,T)dW^\star(s) - \frac{1}{2}\int_0^t |\sigma(s,T)|^2 ds\right)$$

und

$$W^T(t) := W^\star(t) - \int_0^t \sigma(s,T)ds, \quad 0 \le t \le T$$

definiert einen Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_T$*.*

Anwendung bei der Bewertung von Derivaten
Sei $\mathbb{E}^\star \frac{|C|}{\beta(t)} < \infty$, C ein T–Claim und $p_t(C) = \beta(t)\mathbb{E}^\star\left(\frac{C}{\beta(T)}|\mathcal{F}_t\right)$ für alle $0 \le t \le T$.

Der Forward-/Terminpreis zum Termin T auf den Claim erfüllt

$$\begin{aligned} F(t,T;C) &= \frac{p_t(C)}{B(t,T)} \\ &= \frac{\beta(t)}{B(t,T)} \mathbb{E}^\star \left(\frac{C}{\beta(T)} | \mathcal{F}_t \right) \\ \text{Bayes-Formel ->} \quad &= \frac{\beta(t)}{B(t,T)} \mathbb{E}_T \left(\frac{C}{\beta(T)} \frac{1}{L(T)} | \mathcal{F}_t \right) L(t) \\ &= \mathbb{E}_T(C|\mathcal{F}_t). \end{aligned}$$

Alternativ hätte man, anstatt mit $\mathbb{P}^\star$ anzugfangen, auch die Bewertung mittels $\mathbb{P}_T$ durchführen können, da $\mathbb{P}_T$ das äquivalente Martingalmaß zum Numeraire $B(\cdot,T)$ ist.

$$\mathbb{E}_T \left(\frac{C}{B(T,T)} | \mathcal{F}_t \right) = \mathbb{E}_T \left(C | \mathcal{F}_t \right)$$

ist dann der Preis von C, notiert in Anteilen des Numeraire Assets. Der Europreis ergibt sich durch Multiplizieren mit dem Preis des Numeraire Asset, d.h.

$$p_t(C) = \mathbb{E}_T(C|\mathcal{F}_t) B(t,T)$$

bzw.

$$F(t,T;C) = \frac{p_t(C)}{B(t,T)} = \mathbb{E}_T(C|\mathcal{F}_t).$$

1.8 Berechnung des Callpreises

1.7.16

- Bondmarktmodell
- äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$
- T_1–Bond als risky asset
- Derivat ist der Call auf den T_1–Bond mit Ausübungszeitraum $T < T_1$, d.h.

$$C = (B(T,T_1) - K)^+ .$$

Für die Bewertung betrachte das Forwardmartingalmaß zum Termin T, gegeben durch

$$\left. \frac{dP_T}{d\mathbb{P}^\star} \right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{\beta(t)} \frac{1}{B(0,T)}.$$

Zu berechnen ist

$$\mathbb{E}_T \left((B(T,T_1) - K)^+ | \mathcal{F}_t \right), \qquad \text{für alle } 0 \le t \le T.$$

Es gilt:

$$\mathbb{E}_T(C|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_T\left(B(T,T_1)\mathbb{1}_{\{B(T,T_1)>K\}}|\mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}_T(K\mathbb{1}_{\{B(T,T_1)>K\}}|\mathcal{F}_t).$$

Weiter ist

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{\beta(t)}\frac{1}{B(0,T)}$$

und

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{T_1}}{d\mathbb{P}^\star}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T_1)}{\beta(t)}\frac{1}{B(0,T_1)}.$$

Da nach Bayes $\mathbb{E}_T(YL(T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{T_1}(Y|\mathcal{F}_t)L(t)$ gilt, ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_T\left(B(T,T_1)\mathbb{1}_{\{B(T,T_1)>K\}}|\mathcal{F}_t\right) &= \mathbb{E}_{T_1}\left(\mathbb{1}_{\{B(T,T_1)>K\}}|\mathcal{F}_t\right)F(t,T;T_1)\\ &= \mathbb{P}_{T_1}\left(B(T,T_1)>K|\mathcal{F}_t\right)F(t,T;T_1).\end{aligned}$$

Somit folgt für die Bewertung des Claims

$$\mathbb{E}_T(C|\mathcal{F}_t) = F(t,T;T_1)\mathbb{P}_{T_1}(B(T,T_1)>K|\mathcal{F}_t) - K\mathbb{P}_T(B(T,T_1)>K|\mathcal{F}_t)$$

bzw. für den arbitragefreien Preis

$$\begin{aligned}p_t(C) &= B(t,T)\mathbb{E}_T(C|\mathcal{F}_t)\\ &= B(t,T_1)\mathbb{P}_{T_1}(B(T,T_1)>K|\mathcal{F}_t) - KB(t,T)\mathbb{P}_T(B(T,T_1)>K|\mathcal{F}_t).\end{aligned}$$

Bis hierhin gilt diese Bewertung für jedes Bondmarktmodell. Erst die explizite Berechnung von $\mathbb{P}_{T_1}(B(T,T_1)>K|\mathcal{F}_t)$ bzw. $\mathbb{P}_T(B(T,T_1)>K|\mathcal{F}_t)$ hängt vom gewählten Bondmarktmodell ab.
Im Vasicek Modell gilt:

$$\begin{aligned}dB(t,T) &= B(t,T)(r(t)dt + \sigma(t,T)dW^\star(t))\\ dB(t,T_1) &= B(t,T_1)(r(t)dt + \sigma(t,T_1)dW^\star(t))\end{aligned}$$

Dann gilt mit Ito

$$dF(t,T;T_1) = F(t,T;T_1)(\underbrace{\sigma(t,T_1)-\sigma(t,T)}_{\eta(t)})dW^T(t)$$

wobei

$$W^T(t) = W^\star(t) - \int_0^t \sigma(t,T)dt$$

Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_T$. Die durch die Ito-Formel entstandenen Drift-Terme werden in W^T verarbeitet.

Wegen

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{T_1}}{d\mathbb{P}_T}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{F(t,T;T_1)}{F(0,T;T_1)} = \exp\left(\int_0^t \eta(s)dW^T(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s)ds\right)$$

ist

$$W^{T_1}(t) = W^T(t) - \int_0^t \eta(s)ds$$

ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_{T_1}$.
Also gilt

$$dF(t,T;T_1) = F(t,T;T_1)\eta(t)dW^{T_1}(t) + F(t,T;T_1)\eta(t)dt.$$

Im Vasicek Modell ist η eine deterministische Funktion, weshalb die bedingte Wahrscheinlichkeit durch die Normalverteilung bestimmt sind.
Genauer:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_T(B(T,T_1) > K|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}_T(F(T,T;T_1) > K|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{P}_T\left(F(t,T;T_1)\underbrace{\frac{F(T,T;T_1)}{F(t,T;T_1)}}_{\exp-\text{Martingal}} > K|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{P}_T\left(\underbrace{(F(t,T;T_1)}_{\mathcal{F}_t-\text{mb}}\underbrace{\exp\left(\int_t^T \eta(s)dW^T(s) - \frac{1}{2}\int_t^T \eta^2(s)ds\right) > K}_{\text{unabhängig von } \mathcal{F}_t}|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbb{P}_T\left(\exp\left(\int_t^T \eta(s)dW^T(s) - \frac{1}{2}\int_t^T \eta^2(s)ds\right) > \frac{K}{F(t,T;T_1)}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\frac{F(t,T;T_1)}{K} - \frac{1}{2}\int_t^T \eta^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \eta^2(s)ds}}\right)
\end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{T_1}(B(T,T_1) > K|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{P}_{T_1}(F(T,T;T_1) > K|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{P}_{T_1}\left(\exp\left(\int_t^T \eta(s)dW^{T_1}(s) + \frac{1}{2}\int_t^T \eta^2(s)ds\right) > \frac{K}{F(t,T;T_1)}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\ln\frac{F(t,T;T_1)}{K} + \frac{1}{2}\int_t^T \eta^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \eta^2(s)ds}}\right).
\end{aligned}$$

Beachte:

$$\begin{aligned}
\sigma(t,T) &= -g(T-t)\delta = -\frac{\delta}{b}\left(1-e^{-b(T-t)}\right),\\
\sigma(t,T_1) &= -g(T_1-t)\delta = -\frac{\delta}{b}\left(1-e^{-b(T_1-t)}\right),\\
\eta(t) &= \frac{\delta}{b}\left(e^{-b(T_1-t)}-e^{-b(T-t)}\right)\\
&= \frac{\delta}{b}e^{bt}\left(e^{-bT_1}-e^{-bT}\right)
\end{aligned}$$

1.9 Berechnung von Capletpreisen

- Bondmarktmodell
- äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{P}^\star$
- Ein Caplet ist ein Zinsderivat, dass eine Absicherung eines variablen Zinssatzes erlaubt:

Hierzu betrachtet man ein Zeitintervall $[T,T_1]$. Die diskrete (bis T) variable Zinsrate einer risikolosen Kapitalverzinsung zwischen T und T_1 ist

$$\frac{1}{T_1-T}\left(\frac{1}{B(T,T_1)}-1\right),$$

denn für 1 Euro, den man zum Zeitpunkt T in T_1–Bonds investiert, erhält man $\frac{1}{B(T,T_1)}$ T_1–Bonds. Diese sind in T_1 $\frac{1}{B(T,T_1)}$ Euro wert. Dann ist

$$\frac{1}{B(T,T_1)}-1$$

der Gewinn, welcher einer jährlichen Kapitalrendite von

$$\underbrace{\frac{1}{T_1-T}}_{\text{Zeitraum}}\underbrace{\left(\frac{1}{B(T,T_1)-1}\right)}_{\text{Gewinn}} =: \underbrace{R_d(T,T_1)}_{\text{Zinsrate}}$$

entspricht, wenn als Zinsmethode eine diskrete Verzinsung gewählt wird.
Ein Caplet zum Zeitintervall $[T,T_1]$ gibt dem Inhaber das Recht, den variablen Koupon

$$(T_1-T)R_d(T,T_1) = \frac{1}{B(T,T_1)}-1$$

gegen einen festen Koupon

$$(T_1-T)K$$

mit fester Zinsrate K in T_1 zu tauschen.

Man erhält folgende Auszahlung in T_1:

$$
\begin{aligned}
((T_1-T)R_d(T,T_1)-(T_1-T)K)^+ &= \left(\frac{1}{B(T,T_1)}-1-(T_1-T)K\right)^+\\
&= \left(\frac{1}{B(T,T_1)}-(1+K(T_1-T))\right)^+.
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung des Capletpreises wird der Terminpreis in T_1 des Derivates berechnet. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{T_1}\left(\frac{1}{B(T,T_1)}-(1+(T_1-T)K\right)^+ &= \mathbb{E}_{T_1}\left(\frac{B(T,T)}{B(T,T_1)}-(1+(T_1-T)K)\right)^+\\
&= \mathbb{E}_{T_1}\left(F(T,T_1;T)-(1+(T_1-T)K)\right)^+
\end{aligned}
$$

Der Terminpreis $(F(t,T_1;T))_{0\le t\le T}$ eines T–Bonds ist ein $\mathbb{P}_{T_1}$–Martingal.
Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
dF(t,T_1;T) &= F(t,T_1;T)\eta(t)dW^{T_1}(t),\\
dB(t,T) &= B(t,T)(r(t)dt+\sigma(t,T)dW^\star(t)),\\
dB(t,T_1) &= B(t,T_1)(r(t)dt+\sigma(t,T_1)dW^\star(t))
\end{aligned}
$$

und

$$\eta(t)=\sigma(t,T)-\sigma(t,T_1).$$

Also folgt $\boxed{5.7.16}$

$$\mathbb{E}_{T_1}F(T,T_1;T)\mathbb{1}_{\{F(T,T_1;T)>1+(T_1-T)K\}} = F(0,T_1;T)\mathbb{P}_T\big(F(T,T_1;T)>1+(T_1-T)K\big)$$

da

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_{T_1}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{F(t,T_1;T)}{F(0,T_1;T)}.$$

Also gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{T_1}\left(\frac{1}{B(T,T_1)}-(1+(T_1-T)K\right)^+\\
=&F(0,T_1;T)\mathbb{P}_T\big(F(T,T_1;T)>1+(T_1-T)K\big)\\
&\quad-(1+(T_1-T)K)\mathbb{P}_{T_1}\big(F(T,T_1;T)>1+(T_1-T)K\big).
\end{aligned}
$$

Als arbitragefreien Preis erhält man

$$
\begin{aligned}
Cl(0) &:= B(0,T_1)\mathbb{E}_{T_1}\left(\frac{1}{B(T,T_1)}-(1+(T_1-T)K\right)^+\\
&= B(0,T)\mathbb{P}_T\big(F(T,T_1;T)>1+(T_1-T)K\big)
\end{aligned}
$$

$$- \frac{(1 + (T_1 - T)K)}{B(0,T_1)} \mathbb{P}_{T_1}\big(F(T,T_1;T) > 1 + (T_1 - T)K\big).$$

Analog erhält man als Preis in t:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{T_1}\left(\frac{1}{B(T,T_1)} - (1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\right)^+ \\
=&F(t,T_1;T)\mathbb{P}_T\big(F(T,T_1;T) > 1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\big) \\
&- (1 + (T_1 - T)K)\mathbb{P}_{T_1}\big(F(T,T_1;T) > 1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\big)
\end{aligned}$$

bzw. als arbitragefreien Anfangspreis

$$\begin{aligned}
Cl(0) &= B(t,T_1)\mathbb{E}_{T_1}\left(\frac{1}{B(T,T_1)} - (1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\right)^+ \\
&= B(t,T)\mathbb{P}_T\big(F(T,T_1;T) > 1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\big) \\
&\quad - (1 + (T_1 - T)K)B(0,T_1)\mathbb{P}_{T_1}\big(F(T,T_1;T) > 1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\big).
\end{aligned}$$

Die explizite Berechnung von $\mathbb{P}_T$ und $\mathbb{P}_{T_1}$ hängt vom gewählten Modell ab. Im Vasicek Modell gilt zum Beispiel

$$dF(t,T_1;T) = F(t,T_1;T)\eta(t)dW^{T_1}(t)$$

mit

$$\eta(t) = \sigma(t,T) - \sigma(t,T_1)$$

welches deterministisch ist in t.
Wegen

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_T}{d\mathbb{P}_{T_1}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{F(t,T_1;T)}{F(0,T_1;T)} = \exp\left(\int_0^t \eta(s)dW^{T_1}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \eta^2(s)ds\right)$$

ist

$$W^T(t) := W^{T_1}(t) - \int_0^t \eta(s)ds$$

ein Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_T$.
Man erhält

$$\mathbb{P}_{T_1}\big(F(T,T_1;T) > 1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\big) = \Phi\left(h_1(F(t,T_1;T),t)\right)$$

und

$$\mathbb{P}_T\big(F(T,T_1;T) > 1 + (T_1 - T)K|\mathcal{F}_t\big) = \Phi\left(h_2(F(t,T_1;T),t)\right).$$

Dabei ist

$$h_1(x,t) = \frac{\ln\frac{x}{1+(T_1-T)K} - \frac{1}{2}\int_t^T \eta^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^T \eta^2(s)ds}}$$

und

$$h_2(x,t) = \frac{\ln \frac{x}{1+(T_1-T)K} + \frac{1}{2}\int\limits_t^T \eta^2(s)ds}{\sqrt{\int\limits_t^T \eta^2(s)ds}}.$$

1.10 Caplets, Caps, Floorlets und Floors

Ein Cap ist eine Aneinanderreihung von Caplets. Zu vorgegebener Tenorstruktur

$$T_0 < T_1 < ... < T_n$$

betrachtet man die zu den Zinsperioden $[T_{i-1}, T_i]$ gehörenden Caplets, die das Recht geben, den in T_{i-1} fixierten, variablen Koupon gegen einen festen Koupon $(T_i - T_{i-1})K$ in T_i zu tauschen.
Ein Cap induziert also folgenden Auszahlungsstrom: Zu jedem T_i ergibt sich eine Auszahlung der Form

$$(R_d(T_{i-1}, T_i) - K)^+(T_i - T_{i-1}).$$

Bezeichnet für $t \le T_0$ $Cl_i(t)$ den Preis des $i-$ten Caplets, so ist

$$Cap(t) = \sum_{i=1}^{n} Cl_i(t)$$

der Preis des Caps in t.
In der Praxis nutzt man Caps um sich gegen variable Zinsraten nach oben abzusichern. In einem Kreditvertrag beispielsweise wird als Kouponzahlung für die i-te Zinsperiode der variable Zinssatz

$$R_d(T_{i-1}, T_i)(T_i - T_{i-1})$$

als Koupon vereinbart.
Man möchte sichergehen, dass ein bestimmtes Zinsniveau K nicht übertroffen wird. Deshalb kauft man sich ein Cap für die passende Tenorstruktur zum Festzinssatz K. Dann wird im $i-$ten Zeitintervall die möglich Differenz

$$R_d(T_{i-1}, T_i) - K$$

durch den Cap bereitgestellt. Die Kosten der Absicherung zum Zeitpunkt $t \le T_0$ sind gegeben durch den Preis des Caps $Cap(t)$.
Satt Caplet und Cap kann man auch Floorlet und Floor analog definieren. Dies sind Zinsderivate mit Auszahlung

$$(K - R_d(T_{i-1}, T_i))^+$$

in T_i.
Anwendung:
Man muss die Koupons eines Festzinskredits zur Tenorstruktur

$$T_0 < T_1 < ... < T_n$$

bezahlen und möchte, wenn es günstig ist, diese durch variable Koupons bedienen.
Lösung: Kaufe einen Floor, der zur Tenorstruktur des Festzinskredits passt. Ist in der i−ten Zinsperiode

$$K > R_d(T_{i-1}, T_i)$$

so reicht $R_d(T_{i-1}, T_i)$ zum Bedienen der Koupons aus, da die Differenz

$$K - R_d(T_{i-1}, T_i)$$

durch den Floorlet finanziert wird.

1.11 Swaps

Es gibt

$$\begin{aligned} \text{Payer-Swap} &= \text{Cap} - \text{Floor} \\ \text{Receiver-Swap} &= \text{Floor} - \text{Cap} \end{aligned}$$

Genauer:

- Tenorstruktur
$$T_0 < T_1 < \ldots < T_n$$
- Festzinssatz K,
- Nominal N.

Ein Swap ist ein Tauschgeschäft, das in jeder Zinsperiode die variablen Zinsen gegen den festen Zinssatz tauscht. Dabei gibt es keine Option den Swap auszuführen oder nicht, es wird in jeder Periode getauscht. Dann gilt beim Payer-Swap:
In T_i ergibt sich die Auszahlung

$$N(T_i - T_{i-1})(R_d(T_{i-1}, T_i) - K), \quad \text{für alle } 1 \le i \le n$$

und beim Receiver-Swap ergibt sich

$$N(T_i - T_{i-1})(K - R_d(T_{i-1}, T_i)), \quad \text{für alle } 1 \le i \le n.$$

Bewertung von Swaps

8.7.16

Erinnerung: In t kann man durch Termingeschäfte auf den T_i−Bond zum Termin T_{i-1} den Gewinn

$$\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1$$

für ein Investment von 1 Euro zwischen T_{i-1} und T_i realisieren. Dies entspricht einem diskreten jährlichen Zinssatz von

$$\Phi_d(t; T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left(\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right)$$

der s.g. Forwardzinsrate.
Beachte:

$$\Phi_d(T_{i-1};T_{i-1},T_i) = R_d(T_{i-1},T_i).$$

Bemerkung. *$\Phi_d(t;T_{i-1},T_i)$ ist der Terminpreis von $R_d(T_{i-1},T_i)$ zum Termin T_i.*

Beweis.

$$R_d(T_{i-1},T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)} - 1\right)$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{T_i}(R_d(T_{i-1},T_i)|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_{T_i}\left(\frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)} - 1\right)|\mathcal{F}_t\right)\\
&= \mathbb{E}_{T_i}\left(\frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(\frac{B(T_{i-1},T_{i-1})}{B(T_{i-1},T_i)} - 1\right)|\mathcal{F}_t\right)\\
&= \frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(E_{T_i}(F(T_{i-1},T_i;T_{i-1})|\mathcal{F}_t) - 1\right)\\
&= \frac{1}{T_i - T_{i-1}}(F(t,T_i;T_{i-1}) - 1)\\
&= \frac{1}{T_i - T_{i-1}}\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right)\\
&= \Phi_d(t;T_{i-1},T_i)
\end{aligned}$$

□

Damit erhält man auch den arbitragefreien Europreis in t der Auszahlung $R_d(T_{i-1},T_i)$ in T_i:

$$B(t,T_i)\Phi_d(t;T_{i-1},T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}}(B(t,T_{i-1}) - B(t,T_i)).$$

Dies liefert den Preis des Payer-Swaps in t:

$$\begin{aligned}
Swap(t) &= N\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})(\Phi_d(t;T_{i-1},T_i) - K)B(t,T_i)\\
&= N\sum_{i=1}^{n}(B(t,T_{i-1}) - B(t,T_i)) - N\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i)\\
&= N(B(t,T_0) - B(t,T_n)) - N\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i).
\end{aligned}$$

Was bedeutet es, wenn

$Swap(t) > 0 \Rightarrow$ Die Auszahlung der variablen Koupons sind in t mehr wert, als die der festen.

$Swap(t) < 0 \Rightarrow$ Die Auszahlung der variablen Koupons sind in t weniger wert, als die der festen.

$Swap(t) = 0 \Rightarrow$ Die Auszahlung der variablen und festen Koupons sind in t gleich viel wert.

Anwendung: Ein variabel verzinster Kredit hat kein Zinsänderungsrisiko. Durch Eingehen einer Swapposition kann aus dem Festzinskredit ein variabel verzinster Kredit gemacht werden und dadaurch das Zinsänderungsrisiko eliminiert werden.
Der Festzins K, bei dem $Swap(t) = 0$ gilt, nennt man Swaprate $R_{Swap}(t)$. Diese kann man auf 2 Arten bestimmen:
1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
K = R_{Swap}(t) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i)(\Phi_d(t;T_{i-1},T_i) - K) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i)\Phi_d(t;T_{i-1},T_i) = K\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{(T_i - T_{i-1})B(t,T_i)}{\sum_{k=1}^{n}(T_k - T_{k-1})B(t,T_k)}}_{\omega_i(t)} \Phi_d(t;T_{i-1},T_i) = K.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$R_{Swap}(t) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i(t)\Phi_d(t;T_{i-1},T_i).$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
Swap(t) = 0 &\Leftrightarrow B(t,T_0) - N(t,T_n) = K\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i) \\
&= \Leftrightarrow \frac{B(t,T_0) - B(t,T_n)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i)} = K.
\end{aligned}$$

Also

$$R_{Swap}(t) = \frac{B(t,T_0) - B(t,T_n)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i)}.$$

Der Preis des Swaps kann auch mit der Swaprate ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
Swap(t) &= B(t,T_0) - B(t,T_n) - K\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i) \\
&= R_{Swap}(t)\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i) - K\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i) \\
&= (R_{Swap}(t) - K)\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})B(t,T_i)}_{N(t)} \\
&= (R_{Swap}(t) - K)N(t)
\end{aligned}$$

1.12 Swaption

Eine Payer-Swaption gibt dem Inhaber das Recht, in T_0 in einen Payer-Swap mit Tenorstruktur

$$T_0 < T_1 < ... < T_n$$

und Festzinssatz K einzusteigen.
Eine Swaption wird in T_0 ausgeführt, wenn

$$Swap(T_0) \geq 0.$$

Sie verusacht den Zahlungsstrom eines Swaps in $T_1, ...T_n$. Dieser Zahlungsstrom wird in T_0 durch $Swap(T_0)$ bewertet. Daher kann eine Swaption als T_0-Claim interpretiert werden mit Auszahlung

$$C = Swap(T_0)^+.$$

Es gilt:

$$Swap(T_0)^+ = (R_{Swap}(T_0) - K)^+ N(T_0).$$

Bewertung einer Swaption

Hierzu betrachtet man den Swapratenprozess $(R_{Swap}(t))_{0 \leq t \leq T_0}$ und führt einen Maßwechsel zu einem Maß $\mathbb{P}_{Swap}$ durch. Bezüglich diesem Maß ist der Swapratenprozess dann ein Martingal.

Definition. *Sei*

$$N(t) := \sum_{i=1}^{n} (T_i - T_{i-1}) B(t, T_i) \quad \text{für alle } 0 \leq t \leq T_0.$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_{Swap}$ heißt Swapmartingalmaß, wenn es das äquivalente Martingalmaß zum Numeraire N ist, d.h.

(i) $\mathbb{P}_{Swap} \sim \mathbb{P}_{T_0}$ *auf* $(\Omega, \mathcal{F}_{T_0})$,

(ii) $\left(\frac{S(t)}{N(t)}\right)_{0 \leq t \leq T_0}$ *ist ein lokales $\mathbb{P}_{Swap}-$Martingal für alle Basisfinanzgüter S.*

Bestimmung von $\mathbb{P}_{Swap}$:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{Swap}}{d\mathbb{P}_{T_0}}\right|_{\mathcal{F}_t} =: L(t).$$

Es gilt: $\frac{S(t)}{N(t)}$ ist ein lokales $\mathbb{P}_{Swap}-$Martingal genau dann, wenn $\frac{S(t)}{N(t)} L(t)$ ein lokales $\mathbb{P}_{T_0}-$Martingal ist.
Weiter gilt:
$\frac{S(t)}{B(t,T_0}$ ist ein lokales $\mathbb{P}_{T_0}-$Martingal, für das gilt

$$\frac{S(t)}{B(t, T_0)} = \frac{S(t)}{N(t)} L(t) c$$

für eine Konstante c. Also ist

$$L(t) = \frac{N(t)}{B(t,T_0)}\frac{1}{c}.$$

Wegen der Normierung gilt also

$$L(t) = \frac{N(t)}{B(t,T_0)}\frac{B(0,T_0)}{N(0)}.$$

Also definiert

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{Swap}}{d\mathbb{P}_{T_0}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{N(t)}{B(t,T_0)}\frac{B(0,T_0)}{N(0)}, \qquad \text{für alle } 0 \le t \le T_0$$

das Swapmartingalmaß.
Für die arbitragefreie Bewertung ergibt sich somit als arbitragefreier Europreis

$$\begin{aligned} p_t(C) &= N(t)\mathbb{E}_{Swap}\left(\left.\frac{(R_{Swap}(T_0) - K)^+ N(T_0)}{N(T_0)}\right| \mathcal{F}_t\right) \\ \Leftrightarrow p_t(C) &= N(t)\mathbb{E}_{Swap}\left((R_{Swap} - K)^+ | \mathcal{F}_t\right). \end{aligned}$$

Zur Berechung ist also der Swapratenprozess unter $\mathbb{P}_{Swap}$ zu bestimmen. $(R_{Swap}(t))_{0\le t\le T_0}$ ist ein positives $\mathbb{P}_{Swap}$–Martingal.
Also gibt es einen previsiblen Prozess σ_{Swap}, so dass

$$dR_{Swap}(t) = R_{Swap}(t)\sigma_{Swap}(t)dW_{Swap}(t)$$

mit W_{Swap} Wiener-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_{Swap}$.
Prinzipiell kann man die Volatilität σ_{Swap} der Swaprate berechnen, doch ist die Formel sehr kompliziert und kann nicht für effektive Berechnungen genutzt werden. Deshalb werden Vereinfachungen benutzt.
Die einfachste Methode ist anzunehmen, dass $(\sigma_{Swap}(t))_{0\le t\le T_0}$ eine deterministische Funktion in t ist. Dann ergibt sich als Swaption-Preis die Formel von Black, die analog zur Black-Scholes Formel ausgerechnet werden kann.

2 Libor Marktmodell

12.7.16

Das Libor Marktmodell ist beliebt bei Banken, da es ein Zinsmodell ist, das von beobachtbaren Markpreisen ausgeht. Modelliert werden die diskreten Fowardraten/Liborraten $\Phi_d(t, T_{i-1}, T_i)$.

2.1 Aufbau des Modells

Gegeben sei eine Tenorstruktur

$$T_0 < T_1 < \dots < T_N$$

mit Intervalllängen

$$\delta_i = T_i - T_{i-1}.$$

Die T_i–Bonds $i = 0, ..., N-1$, bilden die Basisfinanzgüter mit Preisprozessen $(B(t, T_i))_{0 \le t \le T_i}$, $i = 0, ..., N-1$. Der T_N–Bond dient als Numeraire Asset mit Preisprozess $(B(t, T_N))_{0 \le t \le T_N}$. Hierdurch wird ein zeitstetiges Finanzmarktmodell definiert mit N Basisfinanzgütern und dem T_N–Bond als Numeraire Asset.
Beachte: Das i–te Finanzgut steht nur bis T_i zur Verfügung und kann anschließend nicht mehr zum Hedgen verwendet werden.
Annahmen:

- Die Quelle des Zufalls wird beschrieben durch einen d–dimensionalen Wiener-Prozess $(W(t))_{t \ge 0}$. Das heißt wir haben einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (F_t)_{t \ge 0}, \mathbb{P})$ mit $(F_t)_{t \ge 0}$ Wiener-Filtration eines d–dimensionalen Wiener-Prozesses.
- Die Preisprozesse der $N+1$ Bonds sind stetige, positive Semimartingale mit $B(T_i, T_i) = 1$ für alle $i = 0, ..., N$.
- Das Modell ist arbitragefrei. Es existiert also ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_{T_N}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{T_N})$, sodass
  (i) $\mathbb{P}_{T_N} \sim \mathbb{P}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_{T_N})$,
  (ii) $\left(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_N)}\right)_{0 \le t \le T_i}$ ist ein lokales $\mathbb{P}_{T_N}$–Martingal für alle $0 \le i \le N-1$.

  Wir fordern die leicht stärkere Bedingung, dass $\left(\frac{B(t,T_i)}{B(t,T_N)}\right)_{0 \le t \le T_i}$ ein $\mathbb{P}_{T_N}$–Martingal ist für alle $0 \le i \le N-1$.

Bemerkung. *$\mathbb{P}_{T_N}$ ist das Forwardmartingalmaß zum Termin T_N, da es das äquivalente Martingalmaß zum Numeraire Asset $(B(t, T_N))_{0 \le t \le T_N}$ ist.*

Bemerkung. *In der Definition des Modells wird bewusst kein Geldmarktkonto verwendet, da man so das Problem nicht bekommt, die short rate nicht beobachten zu können.*

Für die Zinsperiode von T_{i-1} nach T_i ist der diskrete Forwardzinssatz zum Zeitpunkt $t \le T_i$ gegeben durch

$$\begin{aligned} L_i(t) &:= \Phi_d(t; T_{i-1}, T_i) \\ &= \frac{1}{\delta_i}\left(\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1\right) \end{aligned}$$

Das ist die i–te Liborrate.
Bemerkung: Für jedes $1 \le i \le N$ ist der Liborratenprozess L_i ein Semimartingal,da

$$\frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} = \frac{B(t, T_{i-1})/B(t, T_N)}{B(t, T_i)/B(t, T_N)}$$

ein Quotient von Semimartingalen ist. Wir nehmen zusätzlich an, dass die Liborraten strikt positiv sind.

2.2 Terminal Measure

Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_{T_N}$ wird auch als Terminal Measure bezeichnet, da T_N der letzte Zeitpunkt auf der Tenorstruktur ist. Bezüglich $\mathbb{P}_{T_N}$ wird die Entwicklung der Liborrate prinzipiell geklärt.
Wir beginnen mit $(L_N(t))_{0\le t\le T_{N-1}}$:

$$L_N(t) = \frac{1}{\delta_N}\left(\frac{B(t,T_{N-1})}{B(t,T_N)} - 1\right)$$

ist nach Voraussetzung ein $\mathbb{P}_{T_N}$–Martingal . Deshalb existiert ein previsibler $\mathbb{R}^d$–wertiger Prozess $(\sigma^{(N)}(t))_{0\le t\le T_{N-1}}$, sodass

$$\begin{aligned} dL_N(t) &= L_N(t)\sigma^{(N)}(t)dW(t) \\ &= L_N(t)\sum_{j=1}^{d}\sigma_j^{(N)}(t)dW_j(t). \end{aligned}$$

$\left(\sigma^{(N)}(t)\right)$ bestimmt die Volatilitäten der N Liborraten. Durch das positive Martingal L_N kann der Maßwechsel zum Forwardmartingalmaß $\mathbb{P}_{T_{N-1}}$ aus gedrückt werden.

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{T_{N-1}}}{d\mathbb{P}_{T_N}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T_{N-1})}{B(t,T_N)}\frac{B(0,T_N)}{B(0,T_{N-1})} = \frac{\delta_N L_N(t)+1}{\delta_N L_N(0)+1} =: R_N(t)$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} dR_N(t) &= \frac{\delta_N}{\delta_N L_N(0)+1}dL_N(t) \\ &= \frac{\delta_N}{\delta_N L_N(0)+1}L_N(t)\sigma^{(N)}(t)dW(t) \\ &= R_N(t)\frac{\delta_N L_N(t)}{\delta_N L_N(t)+1}\sigma^{(N)}(t)dW(t). \end{aligned}$$

Wir erhalten also eine Exponentialdarstellung für den Dichtequotientenprozess:

$$R_N(t) = \exp\left(\int_0^t \frac{\delta_N L_N(s)}{\delta_N L_N(t)+1}\sigma^{(N)}(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \left|\frac{\delta_N L_N(s)}{\delta_N L_N(s)+1}\sigma^{(N)}(s)\right|^2 ds\right).$$

Der Satz von Girsanov liefert einen Wiener-Prozess $W^{(N-1)}$, definiert durch

$$W^{(N-1)}(t) = W(t) - \int_0^t \frac{\delta_N L_N(s)}{\delta_N L_N(s)+1}\sigma^{(N)}(s)ds$$

bezüglich $\mathbb{P}_{T_{N-1}}$.

Im nächsten Schritt wird die Dynamik der $N-1$-ten Liborrate

$$L_{N-1}(t) = \frac{1}{\delta_{N-1}}\left(\frac{B(t,T_{N-2})}{B(t,T_{N-1})} - 1\right)$$

bestimmt.
L_{N-1} ist ein positives Semimartingal bezüglich $\mathbb{P}_{T_N}$. Deshalb gibt es previsible Prozesse $(\sigma^{(N-1)}(t))_{0\le t\le T_{N-2}}$ und $(\mu^{(N-1)}(t))_{0\le t\le T_{N-2}}$, sodass

$$dL_{N-1} = L_{N-1}(t)(\mu^{(N-1)}(t)dt + \sigma^{(N-1)}(t)dW(t)).$$

Da L_{N-1} ein $\mathbb{P}_{T_{N-1}}-$ Martingal ist, ist $\left(\mu^{(N-1)}(t)\right)$ eindeutig bestimmt. Wegen

$$dW(t) = dW^{(N-1)}(t) + \frac{\delta_N L_N(t)}{\delta_N L_N(t)+1}\sigma^{(N)}(t)dt$$

folgt durch Einsetzen

$$dL_{N-1}(t) = L_{N-1}(t)\left((\mu^{(N-1)}(t)+\frac{\delta_N L_N(t)}{\delta_N L_N(t)+1}\sigma^{(N)}(t)\sigma^{(N-1)}(t))dt+\sigma^{(N-1)}(t)dW^{(N-1)}(t)\right)$$

Da L_{N-1} ein $\mathbb{P}_{T_{N-1}}$–Martingal ist, muss

$$\begin{aligned}\mu^{(N-1)}(t) &= -\frac{\delta_N L_N(t)}{\delta_N L_N(t)+1}\sigma^{(N)}(t)\sigma^{(N-1)}(t)\\ &= -\sum_{j=1}^{d}\frac{\delta_N L_N(t)}{\delta_N L_N(t)+1}\sigma_j^{(N)}(t)\sigma_j^{(N-1)}(t).\end{aligned}$$

Das $\mathbb{P}_{T_{N-1}}$–Martingal L_{N-1} bestimmt den Maßwechsel zum Forwardmartingalmaß $\mathbb{P}_{T_{N-2}}$:

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{T_{N-2}}}{d\mathbb{P}_{T_{N-1}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T_{N-2})}{B(t,T_{N-1})}\frac{B(0,T_{N-1})}{B(0,T_{N-2})} = \frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(t)+1}{\delta_{N-1}L_{N-1}(0)+1} =: R_{N-1}(t).$$

Somit folgt analog:

$$dR_{N-1}(t) = R_{N-1}(t)\frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(t)}{\delta_{N-1}L_{N-1}(t)+1}\sigma^{(N-1)}(t)dW^{N-1}(t).$$

Girsanov liefert den Wiener-Prozess $W^{(N-2)}$

$$W^{(N-2)}(t) = W^{(N-1)}(t) - \int_0^t \frac{\delta_{N-1}L_{N-1}(s)}{\delta_{N-1}L_{N-1}(s)+1}\sigma^{(N-1)}(s)ds$$

bezüglich $\mathbb{P}_{T_{N-2}}$ für alle $0 \le t \le T_{N-2}$.
Dies kann man induktiv fortsetzen. Man erhält also folgendes Ergebnis: 15.7.16

Bezüglich $\mathbb{P}_{T_N}$ haben die Liborraten $(L_i(t))_{0\le t\le T_{i-1}}$, $1 \le i \le N$, die Dynamik

$$dL_i(t) = L_i(t)\left(-\sum_{k=i+1}^{N} \eta_{ik}(t)dt + \sigma^{(i)}(t)dW(t)\right)$$

mit

$$\eta_{ik}(t) := \frac{\delta_k L_k(t)}{\delta_k L_k(t)+1}\sigma^{(i)}(t)\sigma^{(k)}(t).$$

Für die Forwardmartingalmaße $\mathbb{P}_{T_1}, ..., \mathbb{P}_{T_N}$ gilt

$$\left.\frac{d\mathbb{P}_{T_{i-1}}}{d\mathbb{P}_{T_i}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta_i L_i(t)+1}{\delta_i L_i(0)+1} = R_i(t)$$

und

$$dL_i(t) = L_i(t)\sigma^{(i)}(t)dW^{(i)}(t)$$

mit Wiener-Prozess $W^{(i)}$ bezüglich $\mathbb{P}_{T_i}$.
Durch Spezifikation der Volatilitäten $\sigma^{(i)}$, $i = 1,\cdots,n$ ist also das Modell vollständig bestimmt. Der prinzipielle Ansatz für eine Modellspezifikation besteht darin, die Volatilitäten anhand von beobachtbaren Cap- und Swaptionpreisen zu bestimmen, in dem Sinne, dass Modellpreise möglichst gut die Marktpreise erklären.

2.3 Das lognormale Libormarktmodell

Modellpreise können berechnet werden, wenn prinzipielle Annahmen an die Volatilitäten gefordert werden. Dies erleichtert dann eine Modellkalibrierung an Marktdaten. Ein Ansatz besteht darin, lognormale Liborraten zu betrachten. Dies Modell wird im folgenden angegeben.

- Tenorstruktur $T_0 < T_1 < ... < T_N$,
- $L_i(t) = \frac{1}{\delta_i}\left(\frac{B(t,T_{i-1})}{B(t,T_i)} - 1\right), \quad 0 \le t \le T_{i-1}$,
- $\mathbb{P}_{T_i}$ Forwardmartingalmaß,
- $Z = (Z_1, ..., Z_N)$ ein $N-$dimensionaler korrelierter Wiener-Prozess mit

  $$\langle Z_k, Z_l\rangle_t = \varrho_{kl} t$$

  für $k \neq l : -1 < \varrho_{kl} < 1$.

  Jeder Wiener-Prozess treibt eine Liborrate. Durch die Abhängigkeit in den Komponenten des Wiener-Prozesses erhält man auch eine Abhängigkeit der Liborraten.

  Man beachte, dass mit Hilfe von Girsanov wie in Unterunterabschnitt 2.2 $N-$dimensionale Wiener-Prozesse $Z^{(i)} = (Z_1^{(i)}, ..., Z_N^{(i)})$ bezüglich $\mathbb{P}_{T_i}$ konstruiert werden können mit Korrelation $(\varrho_{kl})_{1\le k,l\le N,k\neq l}$.

Im lognormalen Libormarktmodell wird angenommen, dass die Liborraten folgende Dynamik erfüllt:

$$dL_i(t) = L_i(t)\lambda_i(t)dZ_i^{(i)}(t)$$

für alle $1 \le i \le N$ und deterministische Funktionen $\lambda_1, ..., \lambda_N$.
Bezüglich $\mathbb{P}_{T_i}$ ist also die i−te Liborate $L_i(t)$ eine lognormalverteilte Zufallsvariable. Der Vorteil ist, dass Preise von Caplets im lognormalen Libormarktmodell einfach berechnet werden können.

2.4 Bewertung von Caplets im lognormalen Libormarktmodell

In der Zinsperiode $[T_{i-1}, T_i]$ liefert ein Caplet die Auszahlung

$$\delta_i(L_i(T_{i-1}) - K)^+ = \delta_i \left(\frac{1}{\delta_i} \left(\frac{B(T_{i-1}, T_{i-1})}{B(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) - K \right)^+$$

in T_i.
Bewertung:
Berechnung des Terminpreises zum Termin T_i:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{T_i}\left((L_i(T_{i-1}) - K)^+\delta_i|\mathcal{F}_t\right) &= \delta_i L_i(t)\mathbb{E}_{T_i}\left(\underbrace{\frac{L_i(T_{i-1})}{L_i(t)}}_{\text{pos. MG}} \mathbb{1}_{\{L_i(T_{i-1})>K\}} \right) - \delta_i K \mathbb{P}_{T_i}(\underbrace{L_i(T_{i-1})}_{\sim \log \mathcal{N}} > K|\mathcal{F}_t) \\
&= \delta_i L_i(t) Q_{T_i}(L_i(T_{i-1}) > K|\mathcal{F}_t) - \delta_i K \mathbb{P}_{T_i}(L_i(T_{i-1}) > K|\mathcal{F}_t).
\end{aligned}$$

Wegen

$$dL_i(t) = L_i(t)\lambda_i(t)dZ_i^{(i)}(t)$$

folgt

$$\mathbb{P}_{T_i}(L_i(T_{i-1}) > K|\mathcal{F}_t) = \Phi(h_2(L_i(t), t))$$

und wegen

$$dL_i(t) = L_i(t)\lambda_i(t)dB^{(i)}(t) - \frac{1}{2}\lambda_i(t)L_i(t)dt$$

bezüglich Q_{T_i} folgt

$$Q_{T_i}(L_i(T_{i-1}) > K|\mathcal{F}_t) = \Phi(h_1(L_i(t), t)).$$

Dabei sind

$$h_1(x, t) = \frac{\ln \frac{x}{K} + \frac{1}{2}\int_t^{T_{i-1}} \lambda_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^{T_{i-1}} \lambda_i^2(s)ds}}$$

und

$$h_2(x, t) = \frac{\ln \frac{x}{K} - \frac{1}{2}\int_t^{T_{i-1}} \lambda_i^2(s)ds}{\sqrt{\int_t^{T_{i-1}} \lambda_i^2(s)ds}}.$$

Der arbitragefreie Europreis in t ist somit

$$Cl_i(t) = B(t, T_i)\delta_i\big(L_i(t)\Phi(h_1(L_i(t), t)) - K\Phi(h_2(L_i(t), t))\big).$$

Dies ist die Formel von Black für Caplets. Mit Hilfe dieser Formel kann man auch Cap-Preise berechnen und zur Kalibrierung des Modells nutzen.
Bemerkung zur Kalibrierung: Die Parameter des Modells sind

- deterministische Volatilitätsfunktionen $\lambda_1, ..., \lambda_N$, die in der Praxis durch endlich viele Parameter spezifiziert werden.

- Korrelation ϱ_{kl} der treibenden Wiener-Prozesse.

Beobachtbare Größen sind

- Cap-Preise

- Swaption-Preise.

Für jedes $T_0 < T_\alpha < ... < T_\beta < T_N$, innerhalb der Tenorstruktur, sieht man den Cap- und Swaption-Preis. Man berechnet den Marktpreis mit Hilfe der Formel von Black für Caplets bzw. Swaptions (Formel geht analog). Man bestimmt dann die Parameter so, dass Markt- und Modellpreise möglichst gut übereinstimmen. Die Betrachtung von Swaptions ist notwendig, da sonst keine Aussage über die Korrelation getroffen werden könnte.

2.5 Weitere Libormarktmodelle

$a)$ Diffusionsmodelle

$dL_i(t) = L_i(t)\lambda_i(t)\sigma(L_i(t))dZ^{(i)}(t)$

- λ_i ist eine deterministische Funktion der Zeit
- σ ist eine Funktion des Zustandes.

Dies entspricht dem Diffusionsansatz bei den Aktienmodellen.

$b)$ Liborratenmodell mit stochastischer Volatilität

- Das Analogon zum Heston Modell

Die Volatilität de $i-$ten Liborrate wird exogen bestimmt durch

$$\sigma_i(t) = \sqrt{V(t)}\lambda_i(t), \quad 1 \leq i \leq N$$

mit V ein CIR-Prozess bezüglich $\mathbb{P}_{T_N}$ der Form

$$dV(t) = a(b - V(t))dt + c\sqrt{V(t)}dB(t)$$

und λ_i eine deterministische Funktion der Zeit.

Bezüglich $\mathbb{P}_{T_N}$ sind $Z_1, ..., Z_N, B$ korrelierte Wiener-Prozesse. Beim Maßwechsel zu $\mathbb{P}_{T_i}$ erhält man korrelierte Wiener-Prozesse $Z_1^{(i)}, ..., Z_N^{(i)}, B^{(i)}$ und es ergibt sich eine Änderung in der Drift für die Dynamik von V.

Man erhält folgende Struktur

$$dL_i(t) = L_i(t)\lambda_i(t)\sqrt{V(t)}dZ_i^{(i)}(t)$$
$$dV(t) = a(b - \zeta(t)V(t))dt + c\sqrt{V(t)}dB^{(i)}(t).$$

Wie eine Kalibrierung in der Praxis umgesetzt wird, ist in den Masterarbeiten von Hasow, Santen, Hülsbusch und Cresnik genauer ausgeführt (vgl. Homepage von Dr. Paulsen, `http://wwwmath.uni-muenster.de/statistik/paulsen/Abschlussarbeiten/Masterarbeiten/`(21