Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Sommersemester 2019
Januar 2016

Stochastik

Aufgaben zum Üben: Teil 2

Knifflige Aufgaben zu Ereignissen

Aufgabe 1

Seien A und B Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] \geq 0.6$ und $\mathbb{P}[B] \geq 0.6$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[A \cap B] \geq 0.2$.

Aufgabe 2

Seien A und B unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}[A \cup B] = 8/9$ und $\mathbb{P}[A \cap B] = 4/9$. Bestimmen Sie $\mathbb{P}[A]$ und $\mathbb{P}[B]$.

Aufgabe 3

Es seien $A_1, \ldots, A_9 \subset \Omega$ paarweise disjunkte Ereignisse. Zeigen Sie: Unter diesen Ereignissen gibt es mindestens 3, die jedes für sich eine Wahrscheinlichkeit von höchstens $1/7$ haben.

Aufgabe 4

Es seien A, B, C drei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] = 0.7$, $\mathbb{P}[B] = 0.7$ und $\mathbb{P}[C] = 0.7$. Sei D das Ereignis "genau eines der drei Ereignisse A, B, C tritt ein". Welchen maximalen Wert kann $\mathbb{P}[D]$ annehmen?

Aufgabe 5

In einer Urne liegt ein Ball, der entweder schwarz (mit Wahrscheinlichkeit $1/2$) oder weiß (ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $1/2$) ist. Außerdem legt man in diese Urne einen weißen Ball. Danach zieht man zufällig einen Ball aus der Urne, und dieser stellt sich als weiß heraus. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der in der Urne verbliebene Ball ebenfalls weiß ist?

Diskrete Zufallsvariablen

Aufgabe 6

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien Poisson-verteilt mit Parametern λ_1 und λ_2. Außerdem seien X_1 und X_2 unabhängig. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_1 = k | X_1 + X_2 = n]$, wobei $0 \leq k \leq n$.

Aufgabe 7

Seien X und Y unabhängige und mit Parameter $p \in (0, 1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariablen, d.h.

$$\mathbb{P}[X = i] = \mathbb{P}[Y = i] = p(1 - p)^{i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

(a) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[X_1 = k | X_1 + X_2 = n]$ für $n \in \{2, 3, \ldots\}$ und $k \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X > Y]$.

Aufgabe 8

In einem Topf liegen n schwarze Kugeln mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ und zwei weiße Kugeln A und B. Man zieht die Kugeln aus dem Topf zufällig und ohne Zurücklegen bis man die beiden weißen Kugeln gezogen hat. Es sei N die Anzahl der dafür benötigten Ziehungen. Bestimmen Sie $\mathbb{P}[N = k]$ für $k \in \{2, 3, \ldots, n+2\}$.

Aufgabe 9

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis sie zweimal hintereinander die gleiche Seite gezeigt hat. Es sei X die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $X = n$ für $n = 2, 3, \ldots$.

Aufgabe 10

Ein Insekt hat 2000 Eier gelegt. Aus jedem Ei schlüpft eine Larve, die mit Wahrscheinlichkeit $1/1000$ überlebt und sich zu einem erwachsenen Insekt entwickelt. Die Ereignisse, dass die einzelnen Larven sich entwickeln, sind unabhängig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es mindestens einen erwachsenen Nachkommen gibt? (Approximation reicht).

Aufgabe 11

(a) Seien $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ und $Y \sim \text{Poi}(\mu)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \text{Poi}(\lambda + \mu)$.

(b) Seien $X \sim \text{Bin}(n, p)$ und $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ unabhängig. Zeigen Sie, dass $X + Y \sim \text{Bin}(n+m, p)$.

Dabei dürfen Sie beliebige Methoden verwenden.

Aufgabe 12

Seien $A \subset \Omega$ und $B \subset \Omega$ zwei Ereignisse. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1}_{A \cup B} + \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B.$$

Erwartungswert: Allgemeine Eigenschaften

Aufgabe 13

Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k].$$

Aufgabe 14

Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\left(\min(X, Y)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[X \geq k]\mathbb{P}[Y \geq k].$$

Aufgabe 15 (6 Punkte)

Aus einer aus m Ehepaaren bestehenden Bevölkerung (der Größe $2m$) werden $n \leq 2m$ verschiedene Personen rein zufällig ausgewählt und beschenkt. Wie groß ist der Erwartungswert der Anzahl der leer ausgehenden Ehepaare? (Ein Ehepaar geht leer aus, wenn *beide* Partner kein Geschenk erhalten).

Aufgabe 16

Es seien $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ Ereignisse.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = 1 - (1 - \mathbb{1}_{A_1}) \cdots (1 - \mathbb{1}_{A_n}).$$

(b) Beweisen Sie mit Hilfe der obigen Identität die Siebformel:

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \ldots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n].$$

Varianz und Kovarianz: Allgemeine Eigenschaften

Aufgabe 17

Sei X eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Var}\,(X + c) = \mathrm{Var}\, X$ für jede Konstante c.

Aufgabe 18

Es seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Var}\,(X + Y) + \mathrm{Var}\,(X - Y) = 2\mathrm{Var}\, X + 2\mathrm{Var}\, Y.$$

Aufgabe 19

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$ und $\mathrm{Var}\, X = \mathrm{Var}\, Y = 1$. Bestimmen Sie

(a) $\mathrm{Var}(X + 2Y - 1)$.

(b) $\mathrm{Var}(X + XY)$.

Aufgabe 20

Seien X und Y unabhängig mit $\mathbb{P}[X = 1] = \mathbb{P}[Y = 1] = p$ und $\mathbb{P}[X = 0] = \mathbb{P}[Y = 0] = 1 - p$, wobei $0 < p < 1$.

(a) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert?

(b) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig?

Aufgabe 21

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = 0$, $\mathbb{E}[X_i^2] = \sigma^2$ und $\mathbb{E}[X_i^4] = v$ für

$i = 1, \ldots, n$. Dabei seien σ^2 und v bekannte Parameter. Sei $S = X_1 + \ldots + X_n$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[S]$, $\mathbb{E}[S^2]$ und $\mathbb{E}[S^4]$.

Aufgabe 22

Man würfelt mit einem fairen Würfel bis man 10 Mal eine 6 gewürfelt hat. Es sei X die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie $\mathbb{E}X$ und $\operatorname{Var} X$.

Aufgabe 23

Man wirft einen fairen Würfel n Mal. Es sei S_1 die Anzahl der Würfe, bei denen eine 1 erscheint, und S_2 die Anzahl der Würfe, bei denen eine 2 erscheint. Bestimmen Sie $\operatorname{Cov}(S_1, S_2)$.

Stetige Zufallsvariablen

Aufgabe 24

Sei (X, Y) ein auf dem Quadrat $[0,1]^2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ uniform verteilter Zufallspunkt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X^2 + Y^2 \le 1]$.

Aufgabe 25

Sei U uniform verteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\sqrt{U}$.

Aufgabe 26

Ein Stab der Länge 1 wird an einer zufälligen, uniform verteilten Stelle in zwei Stücke zerbrochen. Es sei G die Länge des größeren Teilstücks. Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von G.

Aufgabe 27

In einer Wand befindet sich ein äußerlich nicht sichtbares Drahtgeflecht aus 4 mm starkem Draht, das Rechtecke mit den Seitenlängen 50 mm und 80 mm (gemessen von Drahtmitte zu Drahtmitte) bildet. An einer rein zufällig ausgewählten Stelle wird mit einem Bohrer ein Loch mit 10 mm Durchmesser in die Wand gebohrt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei das Drahtgeflecht getroffen?

Aufgabe 28

Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(y) = cy^{-5}\mathbb{1}_{y>1}$. Bestimmen Sie c, $\mathbb{P}[2 < X < 3]$, $\mathbb{E}X$, $\operatorname{Var} X$.

Aufgabe 29

Es sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f_X(y) = cy(1-y)\mathbb{1}_{y\in[0,1]}$. Bestimmen Sie c, $\mathbb{P}[X < 1/2]$, $\mathbb{E}X$ und $\operatorname{Var} X$.

Aufgabe 30

Die Zufallsvariable X sei uniform verteilt auf dem Intervall $[0, a]$. Die Zufallsvariable Y sei uniform verteilt auf dem Intervall $[0, b]$. Dabei seien a und b Parameter mit $0 < a < b$. Außerdem seien X und Y unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X + Y$.

Hinweis: Man kann geometrisch argumentieren oder die Faltungsformel benutzen.

Aufgabe 31

Seien X und Y unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[XY < 1/2]$ und $\mathbb{P}[Y < X^2]$.

Aufgabe 32

(a) Sei U uniform verteilt auf $[0, \pi]$. Bestimmen Sie die Dichte von $\cot U$, dem Kotangens von U.

(b) Sei V uniform verteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Dichte von $-\log V$.

Hinweis: Manchmal ist es einfacher, zuerst die Verteilungsfunktion zu bestimmen.

Aufgabe 33

(a) Sei X uniform verteilt auf $[-1, 1]$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X^{2n}]$ und $\mathbb{E}[X^{2n+1}]$, für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei X standardnormalverteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X^{2n}]$ und $\mathbb{E}[X^{2n+1}]$, für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 34

Sei X eine auf dem Intervall $[a, b]$ uniform verteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}X = (a+b)/2$ und $\operatorname{Var} X = (b - a)^2/12$.

Aufgabe 35

Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[n \min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq x]$$

für $x > 0$.

Aufgabe 36

Eine Glühbirne in einer Notbeleuchtung ist ununterbrochen in Betrieb bis sie ausfällt. Die Zufallsvariable X, durch die die Lebensdauer (in Stunden) von Glühbirnen modelliert wird, sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1/6000$.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne mindestens 6000 Stunden funktioniert?

(b) Eine Glühbirne sei bereits 3000 Stunden in Betrieb. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass sie noch weitere 3000 Stunden nicht ausfällt?

Aufgabe 37

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$.

Bestimmen Sie die Dichte von $X + Y$ und die Dichte von $X - Y$.

Aufgabe 38

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$. Zeigen Sie, dass $X/(X + Y)$ uniform verteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ ist.

Hinweis: Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $X/(X + Y)$ mit Hilfe der Dichte von (X, Y).

Aufgabe 39

Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable

$$Z = \begin{cases} X + Y, & \text{falls } X + Y \leq 1, \\ X + Y - 1, & \text{falls } 1 < X + Y \leq 2. \end{cases}$$

Aufgabe 40

Der Zufallspunkt (X, Y) sei auf dem Dreieck $\{(x, y) : 0 < x < y < 1\}$ uniform verteilt. Bestimmen Sie jeweils die Verteilungsfunktion und die Dichte von X und Y. Sind X und Y unabhängig?

Normalverteilung und zentraler Grenzwertsatz

Aufgabe 41

Sei X normalverteilt mit Parametern μ und σ^2. Bestimmen Sie $\mathbb{P}[X > \mu]$.

Aufgabe 42

Es seien X und Y standardnormalverteilt und unabhängig. Bestimmen Sie $\mathrm{Cov}(aX+bY, cX+dY)$.

Aufgabe 43

Die Zufallsvariablen $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ seien unabhängig. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $X_1 + X_2$ ebenfalls normalverteilt ist.

Aufgabe 44

Die Zufallsvariablen X und Y seien standardnormalverteilt und unabhängig.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von X^2.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariable $X^2 + Y^2$.

Aufgabe 45

Man würfelt mit einem fairen Würfel 100 Mal. Es sei S die Augensumme der 100 Würfe. Bestimmen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass $S > 400$.

Aufgabe 46

(a) Man wirft eine faire Münze so oft, bis man n Mal "Kopf" gesehen hat. Es sei S die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie $\mathbb{E}S$ und $\mathrm{Var}\, S$.

(b) Man wirft eine faire Münze so oft, bis man 100 Mal "Kopf" gesehen hat. Es sei S die Anzahl der Würfe. Bestimmen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit, dass $S > 250$.

Aufgabe 47

An einer Wahl zwischen zwei Kandidaten A und B nehmen 1000000 Wähler teil. Davon kennen 2000 Wähler den Kandidaten A aus Wahlkampfveranstaltungen und stimmen geschlossen für ihn. Die übrigen 998000 Wähler sind unentschlossen und treffen ihre Entscheidung unabhängig voneinander durch Werfen einer fairen Münze. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sieg des Kandidaten A? Approximative Lösung reicht.

Hinweis: Sei S die Anzahl der unentschlossenen Wähler, die für A stimmen. Wie groß muss S sein, damit A gewinnt? Die Standardnormalverteilungsfunktion muss im Ergebnis nicht unbedingt numerisch berechnet werden.