Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Skript

Martingale

Prof. Dr. Zakhar Kabluchko

Universität Münster
Institut für Mathematische Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript deckt den ersten Teil der Vorlesung "Wahrscheinlichkeitstheorie II" ab, die an der WWU Münster im WS 2017/18 gehalten wurde. Für die Erstellung der ersten LaTeX-Version des Skripts bedanke ich mich bei Frau Anita Kollwitz. Danach wurde das Skript von mir überarbeitet, korrigiert und ergänzt. In Zukunft soll das Skript weiter ergänzt werden.

Bei Fragen, Wünschen und Verbesserungsvorschlägen können Sie gerne eine E-Mail an

`zakhar DOT kabluchko AT uni-muenster DOT de`

schreiben.

16. Februar 2018 Zakhar Kabluchko

Literatur

- D. Williams. *Probability with Martingales.*
- R. Durrett. *Probability: Theory and Examples.*
- C. Dellacherie, P.–A. Meyer. *Probabilities and Potential.*

1. Stochastische Prozesse

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Das heißt, Ω ist eine Menge, $\mathcal{F}$ ist eine σ-Algebra auf Ω, und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, F). Zuerst erinnern wir an die Definition einer Zufallsvariable.

Definition 1.1. Eine *Zufallsvariable* ist eine messbare Funktion $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. Die Messbarkeit heißt, dass $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ für jede Borel–Menge $B \subset \mathbb{R}$.

Interpretation: Jedem Ausgang $\omega \in \Omega$ des Zufallsexperiments entspricht die Zahl $\xi(\omega)$, die als Realisierung der Zufallsvariable bezeichnet wird.

Stochastischer Prozess ist eine andere Bezeichnung für eine zufällige Funktion.

Definition 1.2. Sei T eine beliebige nichtleere Menge (die als *Indexmenge* oder *Zeitbereich* des stochastischen Prozesses bezeichnet wird). Ein *stochastischer Prozess* ist eine Familie $(X_t)_{t\in T}$ von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Interpretation: Es sei $\omega \in \Omega$ ein Ausgang unseres Zufallsexperiments. Diesem Ausgang entspricht die folgende reellwertige Funktion auf T:

$$t \mapsto X_t(\omega), \quad t \in T.$$

Diese Funtion heißt *Realisierung* oder *Pfad* des stochastischen Prozesses zum Ausgang ω.

Die Variable $t \in T$ kann man z.B. als "Zeit" auffassen. So könnte X_t für den Preis einer Aktie zum Zeitpunkt $t \geq 0$ stehen. Manchmal ist aber eine Interpretation von t als "Raum" sinnvoll. So könnte X_t z.B. die Lufttemperatur am Ort t bezeichnen. Ist $T = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}_0$, so sprechen wir von einem Prozess mit *diskreter Zeit*. Ist $T = \mathbb{R}, [a, b], \mathbb{R}^d$, so hat der Prozess kontinuierliche Zeit. Im Rest dieses Kapitels betrachten wir Prozesse mit diskreter Zeit.

2. Filtrationen

Definition 2.1. Eine aufsteigende Folge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ von σ-Algebren heißt *Filtration*.

Interpretation: Liegt ein Ereignis A in der σ-Algebra $\mathcal{F}_n$, so heißt es, dass wir zum Zeitpunkt n bereits wissen, ob dieses Ereignis eingetreten ist oder nicht. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_n$ beschreibt somit die "Information" über den Ausgang des Zufallsexperiments, die zum Zeitpunkt n vorliegt.

Beispiel 2.2. 09.10.2017 = 282. Tag des Jahres 2017.

- Ereignis "der mittlere Ölpreis im August 2017 lag unter 40\$" liegt in $\mathcal{F}_{282}$.
- Ereignis "der mittlere Ölpreis in 2017 lag unter 40\$" liegt nicht in $\mathcal{F}_{282}$ (man weiß es am 09.10 noch nicht!)

Der Quadrupel $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ heißt ein *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum*.

Definition 2.3. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *adaptiert* bezüglich Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Zufallsvariable X_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist.

Interpretation: Der Wert von X_n kann anhand der Information, die zum Zeitpunkt n vorliegt, bestimmt werden.

Definition 2.4. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess. Die *natürliche* oder *kanonische* Filtration von X ist $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, \ldots, X_n),\ n \in \mathbb{N}_0$.

Interpretation: Zum Zeitpunkt besteht unsere Information aus den Werten $X_0(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Jeder stochastische Prozess X ist adaptiert bezüglich seiner natürlichen Filtration $(\mathcal{F}_n^X)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

3. Martingale

Im Folgenden betrachten wir einen stochastischen Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in diskreter Zeit und stellen uns X_n als den kumulativen Gewinn zum Zeitpunkt n in einem Glücksspiel vor. So ist z.B. X_0 das Startkapital, mit dem das Spiel begonnen wird. In der folgenden Definition wird beschrieben, was es heißt, dass ein Glücksspiel "*fair*" ist.

Definition 3.1. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, \mathbb{P})$ heißt ein *Martingal*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) X_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(2) $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
(3) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ f.s. für alle $n = 0, 1, \ldots$.

Interpretation: Die erste Bedingung verlangt, dass der Gewinn zum Zeitpunkt n nur durch die Information bestimmt wird, die zum Zeitpunkt n vorliegt. Um die dritte Bedingung zu interpretieren, stellen wir uns vor, dass wir uns zum Zeitpunkt n entscheiden sollen, ob wir den aktuellen Gewinn X_n beibehalten, oder weiterspielen. Da uns bereits alle Informationen über den Spielverlauf bis zum Zeitpunkt n vorliegen, ist der erwartete Gewinn zum Zeitpunkt $n+1$ (falls wir nicht aufhören) durch den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]$ gegeben. Bei einem "fairen" Spiel sollte es im Mittelwert keinen Unterschied machen, ob wir aussteigen oder weiterspielen, d.h. es sollte $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ gelten. Dies ist genau die dritte Bedingung aus der obigen Definition.

Martingale sind also Modelle für faire Spiele oder Prozesse, die im Mittelwert weder steigen noch fallen. Bald werden wir zeigen, dass der Erwartungswert eines Martingals konstant ist, d.h. $\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_1 = \ldots$. Man sollte aber nicht glauben, dass jeder Prozess mit einem konstanten Mittelwert ein Martingal ist. Die Martingalbedingung (3) ist viel stärker als die Konstanz des Erwartungswerts.

Wir betrachten nun zwei Beispiele von Martingalen.

Beispiel 3.2 (Irrfahrt mit Erwartungswert 0)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ und die Folge der Partialsummen

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad S_0 = 0.$$

Dann ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal. Wir überprüfen Bedingung (3):

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + \xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + 0 = S_n.$$

Dabei haben wir benutzt, dass S_n $\mathcal{F}_n$-messbar ist, weshalb $\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$, und dass ξ_{n+1} von $\mathcal{F}_n$ unabhängig ist, weshalb $\mathbb{E}[\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}\xi_{n+1} = 0$.

Beispiel 3.3 (Geometrische Irrfahrt mit Erwartungswert 1)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ und die geometrische Irrfahrt

$$T_n = \xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_n, \quad T_0 = 1.$$

Dann ist $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal (Übung).

Aufgabe 3.4. Zeigen Sie, dass Eigenschaft (3) aus der Definition des Martingals zur folgenden Bedingung äquivalent ist: $\mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n] = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 3.5. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $\sigma_i^2 := \operatorname{Var} X_i < \infty$ und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die natürliche Filtration. Zeigen Sie, dass mit $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ die Folge

$$M_n := S_n^2 - \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad M_0 := 0,$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

Aufgabe 3.6. Sei ξ eine integrierbare Zufallsvariable und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Zeigen Sie, dass die Folge der $Z_n := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n]$, $n \in \mathbb{N}_0$, ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bildet.

Ein Martingal ist ein faires Spiel. Analog können wir "nachteilige" und "vorteilhafte" Spiele definieren.

Definition 3.7. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt ein *Supermartingal* (nachteiliges Spiel), wenn die obigen Bedingungen (1), (2) gelten, sowie

(3$-$) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n$ f.s. für alle $n = 0, 1, \ldots$.

Definition 3.8. Ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt ein *Submartingal* (vorteilhaftes Spiel), falls die obigen Bedingungen (1), (2) gelten, sowie

(3+) $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n$ f.s. für alle $n = 0, 1, \ldots$.

Bemerkung 3.9. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Supermartingal genau dann, wenn $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal ist. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ is ein Martingal genau dann, wenn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichzeitig ein Submartingal und Supermartingal ist.

Lemma 3.10. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal. Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \le n$, dass

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = X_m \text{ f.s.}$$

Interpretation: Der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m]$ ist die beste Vorhersage (im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers) für X_n ("die Zukunft") gegeben die in der σ-Algebra $\mathcal{F}_m$ enthaltene Information. Lemma 3.10 behauptet: Die beste Vorhersage für die Zukunft ist bei einem Martingal die Gegenwart.

Beweis. Für $m = n$ ist die Aussage klar, nämlich $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_n] = X_n$ wegen der $\mathcal{F}_n$-Messbarkeit von X_n. Sei also $m < n$ und somit $m \le n-1$ sowie $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{n-1}$. Indem wir zuerst die Turmeigenschaft und dann die Martingaleigenschaft benutzen, erhalten wir

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_m].$$

Nun können wir induktiv weitermachen, bis wir irgendwann erhalten, dass

$$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_m] = \ldots = \mathbb{E}[X_{m+1}|\mathcal{F}_m].$$

Der Erwartungswert auf der rechten Seite ist gleich X_m wegen der Martingaleigenschaft. □

Korollar 3.11. Ein Martingal hat stets einen konstanten Erwartungswert, nämlich

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0 \text{ für allen} \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Aus Lemma 3.10 folgt, dass $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_0] = X_0$. Nun benutzen wir die Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswertes:

$$\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}X_0. \quad \square$$

Aufgabe 3.12. Für ein Submartingal gilt $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_m] \ge X_m$ für alle $m \le n$, sowie $\mathbb{E}X_n \ge \mathbb{E}X_0$.

Aufgabe 3.13. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Martingale bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Außerdem sei $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Wenn $\psi(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ integrierbar ist, ist $(\psi(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.
(b) $(X_n \wedge Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Supermartingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

4. Vorhersagbare Prozesse

Sei $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ eine Filtration auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definition 4.1. Ein stochastischer Prozess $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ohne C_0) heißt *vorhersagbar* (englisch: previsible), wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable C_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist.

Interpretation: Stellen wir uns wieder ein Glücksspiel vor, in dem der kumulative Gewinn zum Zeitpunkt n durch einen stochastischen Prozess $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ modelliert wird. Somit ist der Gewinn zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n gegeben durch $X_n - X_{n-1}$. Den Prozess C_n denken wir uns als eine "Strategie", nämlich wir stellen uns vor, dass wir zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n einen Einsatz von C_n machen. Unser Gewinn in diesem Intervall berechnet sich dann zu $C_n \cdot (X_n - X_{n-1})$. Der Einsatz C_n muss aber bereits zum Zeitpunkt $n-1$ bekannt sein (wir können nicht sagen, dass wir einen großen Einsatz machen, wenn wir im nächsten Augenblick gewinnen), daher muss mann fordern, dass C_n eine $\mathcal{F}_{n-1}$-messbare Zufallsvariable sein soll.

Definition 4.2. Der Gesamtgewinn zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ ist

$$Y_n \stackrel{\text{def}}{=} (C \circ X)_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot (X_k - X_{k-1}), \quad Y_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0.$$

Der nächste Satz behauptet, dass der Gesamtgewinn in einem fairen Spiel ein Martingal ist.

Satz 4.3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine vorhersagbare Strategie. Sei außerdem C_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt.[1] Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal.

Bemerkung 4.4. Insbesondere gilt $\mathbb{E}Y_n = 0$. Das heißt, eine noch so ausgeklügelte Strategie erlaubt es uns nicht, einen Gewinn in einem fairen Spiel zu einem festgelegten Zeitpunkt n zu erzielen! Unten werden wir sehen, dass sich die Situation ändert, wenn wir uns die Ausstiegszeit selber aussuchen können.

Beweis. Es folgt direkt aus der Definition von Y_n, dass es $\mathcal{F}_n$-messbar ist. Außerdem ist die Zufallsvariable $C_k(X_k - X_{k-1})$ integrierbar, denn $X_k - X_{k-1}$ ist integrierbar und $|C_k| \le K_k$ ist beschränkt, somit

$$\mathbb{E}|C_k(X_k - X_{k-1})| \le \mathbb{E}[K_k|X_k - X_{k-1}|] \le K_k\mathbb{E}|X_k - X_{k-1}| < \infty.$$

Also ist Y_n integrierbar. Es bleibt, Bedingung (3) aus der Definition eines Martingals nachzurechnen:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] - Y_{n-1} = \mathbb{E}[Y_n - Y_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[C_n \cdot (X_n - X_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] \\ &= C_n\,\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = C_n \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

wobei wir die $\mathcal{F}_{n-1}$-Messbarkeit von C_n benutzt haben, sowie die Identität $\mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} = 0$, die aus der Martingaleigenschaft von (X_n) folgt. □

Bemerkung 4.5. Die Bedingung der Beschränkheit von C_n braucht man, um Integrierbarkeit von Y_n zu zeigen. Diese Bedingung kann durch andere Bedingungen ersetzt werden. So gilt z.B. nach der Hölder–Ungleichung, dass

$$\mathbb{E}|C_k(X_k - X_{k-1})| \le (\mathbb{E}|C|^p)^{1/p} \cdot (\mathbb{E}|X_k - X_{k-1}|^q)^{1/q}$$

[1] d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gebe es ein K_n mit $|C_n(\omega)| \le K_n$ für alle $\omega \in \Omega$.

für alle $p, q \geq 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Es reicht also zu fordern, dass $C_n \in L^p$ und $X_n \in L^q$. Zum Beispiel bleibt die Aussage des obigen Satzes gültig, wenn C_n und X_n quadratisch integrierbar sind ($p = q = 2$).

Aufgabe 4.6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Sub/Supermartingal und $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar und beschränkt. Es gelte zusätzlich $C_n \geq 0$. Dann ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls ein Sub/Supermartingal.

5. Stoppzeiten

Definition 5.1. Eine Zufallsvariable $T : \Omega \to \{0, 1, 2, \ldots, +\infty\}$ heißt eine *Stoppzeit* bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Interpretation: T ist der Zeitpunkt, zu dem wir aus dem Spiel aussteigen. Das Ereignis $\{T \leq n\}$ bedeutet: wir hören spätestens zum Zeitpunkt n auf. Ob dieses Ereignis eintritt oder nicht, müssen wir zum Zeitpunkt n bereits wissen. (Wir können nicht sagen: wir hören jetzt auf, wenn wir in der nächsten Runde verlieren).

Aufgabe 5.2. Zeigen Sie: T ist eine Stoppzeit dann und genau dann, wenn

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beispiel 5.3. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_n = \pm 1] = 1/2$. Betrachte die natürliche Filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Folgende Zufallsvariablen sind Stoppzeiten:

(a) "Stoppe nach der ersten +1": $T = \min\{n \in \mathbb{N} : \xi_n = +1\}$.
(b) "Stoppe nach der zweiten +1": $T = \min\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\xi_k = +1} = 2\}$.
(c) "Stoppe nach dem ersten Auftreten von zwei aufeinanderfolgenden Einsen": $T = \min\{n \geq 2 : \xi_n = \xi_{n-1} = +1\}$.

Keine Stoppzeit hingegen sind:

(d) "Stoppe vor der ersten +1": $T = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : \xi_{n+1} = +1\}$.
(e) "Stoppe nach der letzten +1 im Intervall $\{1, \ldots, 100\}$:" $T = \max\{1 \leq n \leq 100 : \xi_n = 1\}$.

Aufgabe 5.4. Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess und $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Borel-Menge. Die *Ersteintrittszeit* in A ist definiert als

$$\tau := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : Z_n \in A\}.$$

Zeigen Sie, dass τ eine Stoppzeit bezüglich der natürlichen Filtration von $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.
(Das Minimum der leeren Menge ist als $+\infty$ definiert.)

Entscheiden wir uns, zum Zeitpunkt T aufzuhören, so bleibt unser Gewinn nach diesem Zeitpunkt konstant gleich X_T. Dies führt zu folgender

Definition 5.5. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess und $T:\Omega\to\{0,1,\ldots,+\infty\}$ eine Stoppzeit. Der *gestoppte Prozess* $(X_n^T)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist definiert durch

$$X_n^T = \begin{cases} X_n, & \text{falls } T \geq n, \\ X_T, & \text{falls } T \leq n \end{cases} = X_{T\wedge n}.$$

Dabei bezeichnet $T\wedge n = \min(T,n)$ das Minimum von T und n.

Aufgabe 5.6. Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration, $T\colon\Omega\to\mathbb{N}_0\cup\{\infty\}$ bezüglich dieser eine Stoppzeit und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein an dieser Filtration adaptierter stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass der gestoppte Prozess $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ an $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ adaptiert ist.

6. Optional stopping und optional sampling

Kann man mit einer ausgeklügelten Ausstiegsstrategie in einem fairen Spiel einen positiven Gewinn erzielen? Auf den ersten Blick scheint es, dass die Antwort "nein" lauten sollte, es gibt aber ein triviales Gegenbeispiel. Wir betrachten nämlich ein Spiel, in dem wir in jeder Runde einen Gewinn von ± 1 mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $1/2$ machen. Das Startkapital sei 0. Wir können warten, bis der kumulative Gewinn $+1$ wird, und dann aufhören. Auf diese Weise machen wir in einem fairen Spiel einen sicheren Gewinn von $+1$! In diesem Beispiel ist der Ausstiegszeitpunkt durch keine Konstante beschränkt (d.h., beliebig lange Wartezeiten können mit positiver Wahrscheinlichkeit vorkommen). Die Situation ändert sich, wenn wir uns fragen, ob ein positiver Gewinn zu einem *festen Zeitpunkt n* erzielt werden kann.

Satz 6.1 (Optional stopping theorem von Doob)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit. Dann ist der gestoppte Prozess $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls ein Martingal. Insbesondere gilt $\mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[X_{T\wedge 0}] = \mathbb{E}[X_0]$.

Beweis. Betrachte die folgende Strategie: bis zum Zeitpunkt T machen wir jeweils einen Einsatz von 1, nach T steigen wir aus dem Spiel aus. Das heißt,

$$C_n = \mathbb{1}_{n\leq T} = \begin{cases} 1, & \text{falls } T \geq n, \\ 0, & \text{falls } T \leq n-1. \end{cases}$$

Diese Strategie ist vorhersagbar, denn $\{C_n = 0\} = \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ und $\{C_n = 1\} = \{C_n = 0\}^c$. Gemäß Satz 4.3 ist

$$(C\circ X)_n = X_{T\wedge n} - X_0$$

ein Martingal. Die Martingaleigenschaft dieses Prozesses kann wie folgt geschrieben werden:

$$\mathbb{E}[(X_{T\wedge n} - X_0) - (X_{T\wedge(n-1)} - X_0)|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

Indem wir X_0 kürzen, erhalten wir

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge n} - X_{T\wedge(n-1)}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0,$$

was die Martingaleigenschaft des gestoppten Prozesses $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ beweist. □

Bemerkung 6.2. Genauso lässt sich zeigen, dass ein gestopptes Submartingal/Supermartingal ein Submartingal/Supermartingal ist.

Satz 6.3 (Optional sampling theorem von Doob)**.** Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit. Dann gilt:

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$$

vorausgesetzt, dass eine der folgenden Bedingungen gilt:

(a) T ist beschränkt[2]*oder*
(b) X ist gleichmäßig beschränkt[3]und $T < \infty$ f.s. *oder*
(c) X hat gleichmäßig beschränkte Zuwächse[4]und $\mathbb{E}T < \infty$

Beweis. Gemäß Satz 6.1 gilt $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir interessieren uns aber für $\mathbb{E}X_T$.

Beweis unter (a). Sei $T \leq N$. Indem wir $n = N$ setzen, erhalten wir, dass

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_{T\wedge N} = \mathbb{E}X_0.$$

Beweis unter (b). Aus $T < \infty$ f.s. folgt, dass

$$X_{T\wedge n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_T \text{ f.s.}$$

Außerdem gilt wegen der gleichmäßigen Beschränktheit von X, dass $|X_{T(\omega)\wedge n}(\omega)| < K$ für alle $\omega \in \Omega$. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz erhalten wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_T.$$

Wegen $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0$ folgt die Behauptung.

Beweis unter (c). Es gilt nach wie vor

$$X_{T\wedge n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X_T \text{ f.s.}$$

Wir zeigen, dass die Folge $(|X_{T\wedge n}|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch eine integrierbare Zufallsvariable dominiert wird. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Zuwächse gilt

$$|X_{T\wedge n} - X_0| = \left|\sum_{n=1}^{T\wedge n}(X_n - X_{n-1})\right| \leq \sum_{n=1}^{T\wedge n}|X_n - X_{n-1}| \leq K(T\wedge n) \leq KT.$$

Also folgt, dass $|X_{T\wedge n}| \leq |X_0| + KT$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei die obere Schranke integrierbar ist, denn $\mathbb{E}[|X_0| + KT] < \infty$ wegen $\mathbb{E}T < \infty$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz ergibt sich, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_T.$$

Wegen $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0$ folgt die Behauptung. □

[4]d. h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $T(\omega) < N$ für alle $\omega \in \Omega$.
[4]d. h. es gibt ein $K > 0$ mit $|X_n(\omega)| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $\omega \in \Omega$.
[4]d. h. es gibt ein $\exists K > 0$ mit $|X_n(\omega) - X_{n-1}(\omega)| < K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$.

Aufgabe 6.4. Für Submartingale gilt unter einer der obigen Bedingungen (a), (b) oder (c), dass $\mathbb{E}X_T \geq \mathbb{E}X_0$.

Aufgabe 6.5. Sei $(X)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und $T \leq N$ eine beschränkte Stoppzeit. Dann gilt $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_N$.

In den folgenden Beispielen zeigen wir, dass es nicht möglich ist, auf Bedingungen (a), (b), (c) komplett zu verzichten. Es ist also möglich, in einem fairen Spiel durch die richtige Wahl einer unbeschränkten Ausstiegszeit einen Gewinn zu erzielen!

Beispiel 6.6. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_1 = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Die einfache Irrfahrt $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ mit Startpunkt $S_0 = 0$ ist ein Martingal. Betrachte die Stoppzeit $T = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$. Es gilt offenbar, dass $S_T = 1$. Somit ist $\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}1 = 1 \neq \mathbb{E}S_0 = 0$. Als Korollar können wir folgern, dass $\mathbb{E}T = \infty$ sein muss. In der Tat, wäre $\mathbb{E}T$ endlich, so könnten wir Satz 6.3, Teil (c), anwenden, was zu einem Widerspruch führen würde.

Historisch stand das Wort "Martingal" für eine waghalsige Strategie, z.B. für die Strategie, bei der man den Einsatz immer verdoppelt, bis man zum ersten Mal gewonnen hat.

Beispiel 6.7. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_i = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Unser Einsatz zwischen den Zeitpunkten $n-1$ und n sei 2^{n-1}. Gesamtgewinn zum Zeitpunkt n ist somit gegeben durch

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\xi_k.$$

Das ist ein Martingal. Sei nun $T = \min\{k \in \mathbb{N} : \xi_k = +1\}$ die erste Zeit, zu der man gewinnt. Dann gilt

$$X_T = -(1 + 2 + \ldots + 2^{T-2}) + 2^{T-1} = 1.$$

Der Gesamtgewinn bei dieser Ausstiegsstrategie ist also immer gleich 1.

Zum Schluss betrachten wir eine Anwendung von Martingalen auf die Berechnung der Austrittswahrscheinlichkeit einer einfachen Irrfahrt.

Beispiel 6.8. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_n = \pm 1] = \frac{1}{2}$. Wir betrachten die einfache Irrfahrt

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n, \quad S_0 = 0.$$

Seien $-a < 0 < b$ und sei $T = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = -a \text{ oder } S_n = +b\}$ die erste Austrittszeit der Irrfahrt aus dem Intervall $(-a, b)$. Wir werden zeigen, dass

$$\mathbb{P}[S_T = -a] = \frac{b}{a+b}, \quad \mathbb{P}[S_T = b] = \frac{a}{a+b}.$$

Der gestoppte Prozess $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal. Dieses Martingal ist gleichmäßig beschränkt, denn $-a \leq S_{T\wedge n} \leq b$. Satz 6.3 (a) ergibt $\mathbb{E}S_{T\wedge T} = 0$, also $\mathbb{E}S_T = 0$. Da aber S_T nur die Werte $-a$ und b annehmen kann, ergibt sich

$$0 = \mathbb{E}S_T = -a\mathbb{P}[S_T = -a] + b(1 - \mathbb{P}[S_T = -a]) = 0.$$

Daraus folgt $\mathbb{P}[S_T = -a] = \frac{b}{a+b}$. Die zweite Formel ergibt sich aus $\mathbb{P}[S_T = b] = 1 - \mathbb{P}[S_T = -a]$.

Aufgabe 6.9. Die asymmetrische Irrfahrt $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $S_0 = 0$, wobei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_1 = 1] = p$, $\mathbb{P}[X_1 = -1] = q$, $p + q = 1$ für $p, q \in (0, 1)$ ist. Für $x \in \mathbb{Z}$ ist die Stoppzeit $T_x := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n = x\}$ die Ersteintrittszeit in $\{x\}$.

(1) Zeigen Sie, dass mit $\varphi(z) := (q/p)^z$ die Folge $(\varphi(S_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich der von $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ erzeugten natürlichen Filtration ist.

(2) Zeigen Sie: Für $a < 0 < b$ gilt

$$\mathbb{P}[T_a < T_b] = \frac{\varphi(b) - \varphi(0)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

Hinweis: Definieren Sie die Stoppzeit $T := T_a \wedge T_b$ und betrachten Sie $\mathbb{E}\varphi(S_T)$.

(3) Zeigen Sie, dass wenn $p > \frac{1}{2}$ ist, für alle $a < 0$ folgendes gilt:

$$\mathbb{P}\left[\min_{n\in\mathbb{N}} S_n \leq a\right] = \mathbb{P}[T_a < \infty] = \left(\frac{q}{p}\right)^{-a}.$$

(4) *Bonus:* Für $p > \frac{1}{2}$ und jedes $b > 0$ ist bekannt, dass fast sicher $T_b < \infty$ ist. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}T_b = \frac{b}{2p - 1}.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Martingal $(S_n - (p - q)n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe 6.10. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei die einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ und die Stoppzeit T sei gegeben durch $T = \inf\{n : S_n \in \{-a, a\}\}$. Finden Sie zwei Konstanten $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$M_n := S_n^4 - 6nS_n^2 + \kappa n^2 + \lambda n$$

ein Martingal ist. Berechnen Sie damit $\mathbb{E}T^2$.

7. Doob–Zerlegung

Der folgende Satz behauptet, dass jeder stochastische Prozess in eine Summe aus einem Martingalanteil und einem vorhersagbaren Anteil zerlegt werden kann.

Satz 7.1. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit kanonischer Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$.

(a) Es gibt eine sogenannte *Doob–Zerlegung*

$$S_n = S_0 + M_n + A_n, \tag{7.1}$$

wobei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar ist, und $M_0 = A_0 = 0$.

(b) Die Zerlegung ist eindeutig modulo Nullmengen. D.h. ist

$$S_n = S_0 + M'_n + A'_n$$

eine andere Zerlegung mit den obigen Eigenschaften, dann ist $M_n = M'_n$ und $A_n = A'_n$ f.s.

(c) Der Prozess $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist Submartingal genau dann, wenn A_n f.s. nichtfallend ist, d.h. $\mathbb{P}[A_0 \leq A_2 \leq \dots] = 1$.

Beweis. (a): Wir geben die Zerlegung explizit an. Definiere

$$A_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_k - S_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}], \quad A_0 = 0.$$

Dann ist A_n $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar, also ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar. Den Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ müssen wir dann wie folgt definieren:

$$M_n := S_n - S_0 - A_n.$$

Es gilt offenbar $M_0 = 0$. Die Martingaleigenschaft von $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lässt sich wie folgt nachrechnen:

$$\mathbb{E}[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[S_n - S_{n-1} - (A_n - A_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[S_n - S_{n-1} - \mathbb{E}[S_n - S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

(b): Es sei eine Zerlegung (7.1) gegeben. Aus (7.1) folgt, dass

$$\mathbb{E}[S_n - S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[A_n - A_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = A_n - A_{n-1},$$

also gilt $A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_k - S_{k-1}|\mathcal{F}_{k-1}]$ und $M_n = S_n - S_0 - A_n$. Da die gleiche Überlegung auf A'_n und M'_n anwendbar ist, folgt $A_n = A'_n$ und $M_n = M'_n$ f.s.

(c): Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal, dann gilt $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}[S_n - S_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] \geq 0$ f.s. $\square$

8. Fast sichere Konvergenz von Martingalen

Das Beispiel der einfachen Irrfahrt zeigt, dass ein Martingal nicht notwendigerweise fast sicher konvergieren muss. Wenn man allerdings fordert, dass das Martingal in L^1 beschränkt sein soll, dann kann man auf die fast sichere Konvergenz schließen. In diesem Abschnitt beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 8.1 (Martingalkonvergenzsatz von Doob)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Sub-/Supermartingal, das beschränkt in L^1 ist, d.h. es gelte

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Dann konvergiert X_n fast sicher. Das heißt, der Grenzwert $X_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ existiert und ist endlich für fast alle $\omega \in \Omega$. Außerdem ist $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.

Für den Beweis benötigen wir einige vorbereitende Überlegungen. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess. Wir bezeichnen mit $U_N[a,b]$ die Anzahl der "upcrossings" des Intervalls (a,b) durch die Folge $X_0, \ldots, X_N$. D. h. $U_N[a,b]$ ist der größte Wert von $p \in \mathbb{N}_0$, für den sich Indizes

$$0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \ldots < s_p < t_p \leq N$$

finden lassen mit der Eigenschaft, dass $X_{s_i} < a$ und $X_{t_i} > b$ für alle $i = 1, \ldots, p$. Wir nennen dann den Pfadabschnitt $X_{s_i}, X_{s_i+1}, \ldots, X_{t_i}$ ein "Upcrossing".

Lemma 8.2 (Upcrossing-Lemma von Doob)**.** Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal, so gilt:

$$(b-a)\mathbb{E}\,U_N[a,b] \le \mathbb{E}[(X_N-a)^-].$$

Dabei sei $C^- = \max(-c,0)$.

Beweis. Wir stellen uns vor, dass X_n der Gesamtgewinn zum Zeitpunkt n in einem nachteiligen Spiel sei. Betrachte die folgende Strategie: Warte bis X_n kleiner als a wird. Danach spiele einen Einsatz von 1 bis X_n größer als b wird. Danach: wiederhole. D. h. unser Einsatz ist gegeben durch

$$\begin{aligned} C_1 &= \mathbb{1}_{X_0<a} \quad (\mathcal{F}_0\text{-messbar}) \\ C_n &= \mathbb{1}_{C_{n-1}=1}\mathbb{1}_{X_{n-1}\le b} + \mathbb{1}_{C_{n-1}=0}\mathbb{1}_{X_{n-1}<a} \quad (\mathcal{F}_{n-1}\text{-messbar}) \end{aligned}$$

Sei $Y_n = (C\circ X)_n$ der Gesamtgewinn bei dieser Strategie. Der Prozess $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist vorhersagbar, beschränkt und nichtnegativ: $C_n \in \{0,1\}$. Somit ist $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal (s. Satz 4.3, wo das für Martingale bewiesen wird, sowie Aufgabe 4.6). Also gilt

$$\mathbb{E}\,Y_N \le 0.$$

Auf der anderen Seite führt jedes Upcrossing dazu, dass wir einen Gewinn von mindestens $(b-a)$ einstreichen. In der Tat, während des upcrossings

$$X_{s_i}, X_{s_i+1}, \ldots, X_{t_i}, \text{ mit } X_{s_i} < a < b < X_{t_i}$$

ist unser Einsatz gleich 1, so dass der Gesamtgewinn im entsprechenden Zeitabschnitt gleich $X_{t_i} - X_{s_i} > b-a$ ist. Das letzte, unvollendete Upcrossing

$$X_{s_{p+1}}, \ldots, X_n \text{ mit } X_{s_{p+1}} < a$$

(falls es existiert) führt zu einem Gewinn von

$$X_N - X_{s_{p+1}} \ge X_N - a \ge -(X_N-a)^-.$$

Wenn es kein unvollendetes Upcrossing am Ende gibt, so ist der entsprechende Gewinn gleich 0, was ebenfalls größer als $-(X_N-a)^-$ ist. Somit gilt:

$$Y_N \ge (b-a)U_N[a,b] - (X_N-a)^-.$$

Indem wir uns an die Ungleichung $\mathbb{E}Y_N \le 0$ erinnern, erhalten wir

$$0 \ge \mathbb{E}Y_N \ge (b-a)\mathbb{E}U_N[a,b] - \mathbb{E}(X_N-a)^-. \quad \square$$

Korollar 8.3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein in L^1 beschränktes Supermartingal, d. h. es gelte

$$C := \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Dann existiert für alle $a<b$ der Grenzwert $U_\infty[a,b] := \lim_{N\to\infty} U_N[a,b]$ und es gilt

$$\mathbb{P}[U_\infty[a,b] = +\infty] = 0.$$

Das heißt, es gibt f.s. nur endlich viele Upcrossings des Intervalls $[a,b]$.

Beweis. Die Folge $U_1[a,b], U_2[a,b], \dots$ ist nichtfallend, also existiert der Grenzwert $U_\infty[a,b] \geq 0$. Dieser kann aber a priori $+\infty$ sein. Wir zeigen, dass $\mathbb{E}U_\infty[a,b] < \infty$. Gemäß Lemma 8.2 gilt für jedes endliche N

$$(b-a)\mathbb{E}U_N[a,b] \leq \mathbb{E}[(X_N - a)^-] \leq \mathbb{E}[|X_n| + |a|] \leq |a| + C.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ergibt sich

$$\mathbb{E}U_\infty[a,b] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}U_N[a,b] \leq \frac{|a|+C}{b-a}.$$

Also gilt $\mathbb{E}U_\infty[a,b] < \infty$ und somit $U_\infty[a,b] < \infty$ f.s. □

Nun können wir Satz 8.1 beweisen.

Satz 8.4 (Martingalkonvergenzsatz von Doob)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Sub-/Supermartingal, das beschränkt in L^1 ist, d.h. es gelte

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Dann konvergiert X_n fast sicher. Das heißt, der Grenzwert $X_\infty(\omega) := \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ existiert und ist endlich für fast alle $\omega \in \Omega$. Außerdem ist $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.

Bemerkung 8.5. Beschränktheit in L^1 kann leicht abgeschwächt werden: bei Submartingalen reicht die Annahme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}X_n^+ < \infty$.

Beweis. OEdA sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal (im Fall eines Submartingals können wir $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ betrachten). Betrachte die Menge

$$\begin{aligned} F :&= \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existiert nicht in } \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \\ &= \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b\in\mathbb{Q}}} \{\omega \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n(\omega)\} \\ &\overset{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{a<b \\ a,b\in\mathbb{Q}}} S_{a,b}. \end{aligned}$$

Definitionsgemäß gilt $S_{a,b} \subseteq \{\omega \in \Omega : U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}$. Nach Korollar 8.3 gilt dann $\mathbb{P}[S_{a,b}] = 0$ für alle $a < b$. Da S eine abzählbare Vereinigung von $S_{a,b}$'s ist, gilt $\mathbb{P}[S] = 0$. Es folgt, dass

$$X_\infty(\omega) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \text{ f.s.}$$

Mit dem Lemma von Fatou ergibt sich

$$\mathbb{E}|X_\infty| = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} |X_n|\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \infty.$$

Somit ist $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$ und dann auch $|X_\infty| \neq \infty$ f.s. □

Korollar 8.6. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Supermartingal ("nachteiliges Spiel") mit $X_n \geq 0$. Dann existiert der Grenzwert $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ f.s. und es gilt $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$.

Beweis. Wegen der Supermartingaleigenschaft gilt $\mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_0$. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist beschränkt in L^1, denn

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}\,X_0 < \infty.$$

Mit Satz 8.4 ergibt sich die Behauptung. □

Beispiel 8.7 (Pólya-Urne)**.** Wir betrachten eine Urne mit Bällen, die zwei mögliche Farben haben können: schwarz und weiß. Zum Zeitpunkt 0 befinden sich 1 weißer Ball und 1 schwarzer Ball in der Urne. In jeder Runde wird ein Ball zufällig aus der Urne gezogen. Diesen Ball legt man in die Urne zurück zusammen mit einem weiteren Ball der gleichen Farbe. In jeder Runde vergrößert sich die Anzahl der Bälle in der Urne um 1.

Mögliche Interpretationen dieses Modells: Schwarze bzw. weiße Bälle entsprechen den Nutzern von zwei Betriebssystemen (Windows und Mac OS). Jeder Kunde, der sich einen Rechner kaufen möchte, fragt einen zufälligen Freund, der ein Betriebssystem bereits besitzt (zieht also einen Ball aus der Urne), und entscheidet sich für das gleiche System. In einer anderen Interpretation (die in den Originalarbeiten von Pólya und Eggenberger vorgeschlagen wurde) wird die Ausbreitung einer Infektion mit zwei Typen von Erregern modelliert.

Sei W_n bzw. S_n die Anzahl der weißen bzw. schwarzen Bälle zum Zeitpunkt n. Es gilt offenbar $W_n + S_n = n + 2$. Außerdem ist (W_n, S_n) eine Markov-Kette auf dem Zustandsraum $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Aus dem Zustand (w, s) können wir in den Zustand $(w + 1, s)$ (mit Wahrscheinlichkeit von $w/(w + s)$) oder in den Zustand $(w, s + 1)$ (mit Wahrscheinlichkeit $s/(w + s)$) springen.

Behauptung 8.8. Sei X_n der Anteil der weißen Bälle zur Zeit n, d.h.

$$X_n = \frac{W_n}{W_n + S_n} = \frac{W_n}{n+2} \in [0, 1].$$

Dann bildet $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(W_1, S_1, \ldots, W_n, S_n)$.

Beweis. Wegen der Markov-Eigenschaft gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{n+1}|W_0, S_0, \ldots, W_n, S_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1}|W_n, S_n] \\ &= \frac{W_n+1}{n+3}\cdot\frac{W_n}{n+2} + \frac{W_n}{n+3}\cdot\frac{S_n}{n+2} = \frac{W_n}{n+2} = X_n.\end{aligned}$$

□

Satz 8.4 oder Korollar 8.6 besagen nun, dass der Grenzwert $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n \in [0, 1]$ fast sicher existiert. Allerdings stimmt es nicht, dass $X_\infty \neq 1/2$ f.s.!!! Man kann zeigen, dass X_∞ eine auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariable ist. Allgemeiner, wenn die Urne am Anfang a weiße und b schwarze Bälle enthält, kann man zeigen, dass $X_\infty \sim \mathrm{Beta}(a, b)$.

Aufgabe 8.9 (Diskreter Satz von Liouville)**.** Eine Funktion $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ heißt harmonisch, wenn für jedes $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\left(f(x, y+1) + f(x, y-1) + f(x-1, y) + f(x+1, y)\right).$$

(1) Zeigen Sie, dass jede beschränkte harmonische Funktion konstant ist.
(2) Zeigen Sie, dass jede nicht-negative harmonische Funktion konstant ist.

Hinweis: Betrachten Sie die einfache symmetrische Irrfahrt $X_0, X_1, X_2, \ldots$ auf $\mathbb{Z}^2$. Zeigen Sie, dass wenn f harmonisch ist, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal ist.

9. L^2-Konvergenz von Martingalen

Eine Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *quadratisch integrierbar*, falls $\mathbb{E}X^2 < \infty$. Die Menge aller quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen[5] auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bildet einen Hilbertraum $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle X, Y\rangle = \mathbb{E}[XY], \quad X, Y \in L^2.$$

Der L^2-Abstand zwischen zwei Zufallsvariablen $X, Y \in L^2$ ist definiert durch

$$\|X - Y\|_2 := \sqrt{\mathbb{E}[(X-Y)^2]}.$$

Eine Folge von Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ konvergiert gegen X in L^2 (oder im *quadratischen Mittel*), wenn der L^2-Abstand zwischen X_n und X gegen 0 geht, d.h. wenn

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0.$$

Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass alle beteiligten Zufallsvariablen quadratisch integrierbar sind.

Nun sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein L^2-Martingal auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. es gelte $X_n \in L^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir überlassen es dem Leser als Übung zu zeigen, dass die Martingalzuwächse

$$X_0, X_1 - X_0, X_2 - X_1, X_3 - X_2, \ldots$$

paarweise unkorreliert sind.

Wir können uns ein Martingal als einen Polygonzug im Hilbertraum $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vorstellen, der die Punkte $X_1, X_2, \ldots$ miteinander verbindet. Dabei besitzt die Unkorreliertheit der Zuwächse eine erstaunliche geometrische Interpretation: alle Strecken des Polygonzugs stehen senkrecht aufeinander! Ein solcher Polygonzug kann nur in einem unendlich dimensionalen Hilbertraum existieren. Wir fragen uns nun, ob X_n in L^2 gegen einen Grenzwert X_∞ konvergiert. Der Satz von Pythagoras im Hilbertraum legt die Vermutung nahe, dass das genau dann der Fall ist, wenn die Summe der quadrierten Längen der Strecken endlich ist. Der nächste Satz bestätigt diese Vermutung.

Satz 9.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $X_n \in L^2$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) Das Martingal ist beschränkt in L^2, d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}X_n^2 < \infty$.

[5] Zwei Zufallsvariablen werden identifiziert, wenn sie f.s. gleich sind.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] < \infty$.
(3) X_n konvergiert f.s. und in L^2.

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Aus der Unkorreliertheit von $X_0, X_1 - X_0, X_2 - X_1, \ldots$ folgt, dass

$$\operatorname{Var} X_n = \operatorname{Var}(X_n - X_{n-1}) + \ldots + \operatorname{Var}(X_1 - X_0) + \operatorname{Var} X_0.$$

Die Behauptung folgt dann aus der Identität

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_n^2 = \operatorname{Var} X_n + (\mathbb{E}X_n)^2 &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(X_k - X_{k-1}) + \operatorname{Var} X_0 + (\mathbb{E}X_0)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] + \mathbb{E}[X_0^2].\end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1): Es gelte $X_n \to X_\infty$ in L^2. Eine konvergente Folge in einem metrischen Raum ist immer beschränkt. Somit ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ beschränkt in L^2.

(1) und (2) $\Rightarrow$ (3): Es sei $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}X_n^2 < \infty$. Dann ist auch $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$, denn $(\mathbb{E}|X_n|)^2 \leq \mathbb{E}X_n^2$. Das Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist also beschränkt in L^1. Nach dem Martingalkonvergenzsatz konvergiert es f.s. gegen einen Grenzwert X_∞.

Wir müssen allerdings noch die L^2-Konvergenz von X_n gegen X_∞ zeigen. Zu zeigen ist also $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X_\infty)^2] = 0$. Das Lemma von Fatou, angewendet auf die f.s. Konvergenz $(X_m - X_n)^2 \to (X_\infty - X_n)^2$ (für $m \to \infty$) liefert

$$\mathbb{E}[(X_\infty - X_n)^2] \leq \liminf_{m\to\infty} \mathbb{E}[(X_m - X_n)^2] = \liminf_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2] = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2],$$

wobei wir die Unkorreliertheit der Zuwächse benutzt haben. Für $n \to \infty$ geht die rechte Seite gegen 0 nach Voraussetzung von (2). Somit gilt $X_n \to X_\infty$ in L^2. □

Beispiel 9.2. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_i = 0$ und $\operatorname{Var} \xi_i = 1$. Der Prozess $X_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k$ ist ein Martingal für jede Wahl von deterministischen Gewichten $a_k \in \mathbb{R}$. Satz 9.1 behauptet: X_n konvergiert in L^2 und f.s. genau dann, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. So konvergiert die Reihe $\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \ldots$ (wobei jedes Vorzeichen unabhängig von allen anderen mit gleicher Wahrscheinlichkeit 1/2 ein + oder ein − sein kann) f.s. und in L^2, denn $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots < \infty$.

Aufgabe 9.3. Beweisen Sie mit Hilfe der Unkorreliertheit der Zuwächse ein schwaches Gesetz der großen Zahlen für Martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter der Annahme $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[(X_n - X_{n-1})^2] < \infty$, d.h. zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

10. Gleichgradige Integrierbarkeit und Konvergenz in L^1

Erinnerung:

- Fast sichere Konvergenz: $X_n \xrightarrow{f.s.} X_\infty$ falls $\mathbb{P}[\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X_\infty\}] = 1$.
- L^p-Konvergenz: $X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty$ falls $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X_\infty|^p = 0$.

Im Allgemeinen gilt:

$$X_n \xrightarrow{f.s.} X_\infty \not\Rightarrow X_n \xrightarrow{L^p} X_\infty; \qquad X_n \xrightarrow{f.s.} X_\infty \not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_\infty.$$

Für ein in L^1 beschränktes Sub/Supermartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ haben wir gezeigt, dass

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X_\infty.$$

Gilt dann auch $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$? Außerdem wissen wir, dass für ein Martingal der Erwartungswert $\mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$ konstant bleibt. Gilt dann auch $\mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_0$? Die Antwort auf beide Fragen ist im Allgemeinen "nein", wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 10.1 (Multiplikative Irrfahrt)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen und betrachte die Partialsummen $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Sei

$$\varphi(t) := \log \mathbb{E}\, \mathrm{e}^{t\xi_1} < \infty \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Falls ξ_1 nicht konstant ist (was wir stets voraussetzen), ist die Funktion φ strikt konvex. (Um das zu zeigen, berechnet man die zweite Ableitung von φ). Die multiplikative Irrfahrt

$$X_n := \mathrm{e}^{tS_n - n\varphi(t)} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tX_k - \varphi(t)}, \quad X_0 = 1,$$

bildet ein Martingal, denn $\mathbb{E}\mathrm{e}^{t\xi_1 - \varphi(t)} = 1$. Der Erwartungswert von X_n bleibt konstant: $\mathbb{E}X_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Nun schauen wir uns das Verhalten für $n \to \infty$ an. Nach Korollar 8.6 existiert der fast sichere Grenzwert $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$. Wir bestimmen X_∞. Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{E}\xi_1 = \varphi'(0).$$

Wegen der Konvexität von φ folgt, dass

$$\frac{tS_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} t\varphi'(0) < \varphi(t).$$

Es gilt $tS_n - \varphi(t) \cdot n \to -\infty$ und somit $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$ f.s. Für unser Martingal gilt also erstaunlicherweise

$$\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_1 = \ldots = 1, \quad \text{allerdings} \quad \mathbb{E}X_\infty = 0.$$

Außerdem konvergiert die Folge X_n fast sicher aber nicht in L^1, denn eine L^1-Konvergenz würde die Konvergenz der Erwartungswerte implizieren, die ja nicht gilt.

Aus der fast sicheren Konvergenz eines Martingals folgt im Allgemeinen keine L^1-Konvergenz. Man braucht eine zusätzliche Bedingung, damit man auf die L^1-Konvergenz schließen kann. Diese Bedingung formulieren wir in der folgenden Definition.

Definition 10.2 (Gleichgradige Integrierbarkeit)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Familie $\mathcal{C} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ von integrierbaren Zufallsvariablen heißt *gleichgradig* *integrierbar*, falls wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $K > 0$ finden können mit

$$\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left[|X| \mathbb{1}_{|X|>K}\right] \leq \varepsilon.$$

Eine äquivalente Formulierung: $\mathcal{C}$ ist gleichgradig integrierbar, wenn

$$\lim_{K \to +\infty} \sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}\left[|X| \mathbb{1}_{|X|>K}\right] = 0.$$

Proposition 10.3. Jede gleichgradig integrierbare Familie ist beschränkt in L^1.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}|X| < \infty$. Aus der Definition der gleichgradigen Integrierbarkeit mit $\varepsilon = 1$ folgt die Existenz eines $K_1 > 0$ mit $\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{|X|>K_1}] \leq 1$. Für den Erwartungswert von $X \in \mathcal{C}$ gilt somit

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}\left[|X| \mathbb{1}_{|X|>K_1}\right] + \mathbb{E}\left[|X| \mathbb{1}_{|X| \leq K_1}\right] \leq 1 + K_1.$$

$\square$

Das nächste Beispiel zeigt, dass die Umkehrung der obigen Aussage im Allgemeinen falsch ist.

Beispiel 10.4 (Eine in L^1 beschränkte, aber nicht gleichgradig integrierbare Familie)**.** Sei $\Omega = [0, 1]$ versehen mit der Borel-σ-Algebra und dem Lebesgue-Maß. Betrachte die Zufallsvariablen

$$X_n := n \cdot \mathbb{1}_{[0,1/n]} \text{ für } n = 1, 2, \ldots.$$

Es gilt offenbar $\mathbb{E}X_n = 1$, also ist die Familie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in L^1. Allerdings ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichgradig integrierbar. Um das zu zeigen, sei $K > 0$ vorgegeben. Für alle $n > K$ gilt dann

$$\mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n|>K}\right] = \mathbb{E}\left[n \mathbb{1}_{[0,1/n]}\right] = 1.$$

Somit ist $\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n|>K}\right] = 1$ für alle $K > 0$ und die Bedingung der gleichgradigen Integrierbarkeit ist verletzt z.B. für $\varepsilon = 1/2$. $\square$

Proposition 10.5. Für jede Zufallsvariable $X \in L^1$ (d.h. $\mathbb{E}|X| < \infty$) gilt

$$\lim_{K \to \infty} \mathbb{E}\left[|X| \mathbb{1}_{|X|>K}\right] = 0.$$

Mit anderen Worten: Eine aus einer einzigen Zufallsvariable bestehende Familie ist gleichgradig integrierbar.

Beweis. Die Folge $Y_K := |X| \mathbb{1}_{|X|>K}$ ist monoton fallend und konvergiert fast sicher gegen 0 für $K \to \infty$. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ergibt sich die Behauptung. $\square$

Aufgabe 10.6. Zeigen Sie: Sind $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ endlich viele gleichgradig integrierbare Familien, so ist auch deren Vereinigung $\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n$ gleichgradig integrierbar. Insbesondere ist jede endliche Familie von integrierbaren Zufallsvariablen gleichgradig integrierbar.

Proposition 10.7 (Hinreichende Bedingungen für gleichgradige Integrierbarkeit)**.**

(a) Dominierte Familien sind gleichgradig integrierbar. D.h.: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Zufallsvariablen und $Y \geq 0$ eine weitere Zufallsvariable mit $\mathbb{E}Y < \infty$ und $|X| \leq Y$ für alle $X \in \mathcal{C}$. Dann ist $\mathcal{C}$ gleichgradig integrierbar.

(b) L^p-beschränkte Familien, wobei $p > 1$, sind gleichgradig integrierbar. D.h.: Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Zufallsvariablen mit $\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}|X|^p < \infty$ für ein $p > 1$. Dann ist $\mathcal{C}$ gleichgradig integrierbar. (Für $p = 1$ stimmt das nicht, s. oben).

Beweis. (a) Für jedes $X \in \mathcal{C}$ gilt $|X| \leq Y$ und somit

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|>K}] \leq \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{Y>K}] \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

wobei wir Proposition 10.5 benutzt haben. Somit ist $\mathcal{C}$ gleichgradig integrierbar.

(b) Für jedes $X \in \mathcal{C}$ gilt

$$\mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_{|X|>K}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{|X|^p}{|X|^{p-1}}\mathbb{1}_{|X|>K}\right] \leq K^{1-p}\mathbb{E}\left[|X|^p\mathbb{1}_{|X|>K}\right] \leq K^{1-p}\mathbb{E}|X|^p.$$

Es folgt, dass $\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_{|X|>K}\right] \leq K^{1-p}\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}|X|^p$, was für $K \to +\infty$ gegen 0 konvergiert, da $p > 1$ und das Supremum auf der rechten Seite endlich ist. Also ist $\mathcal{C}$ gleichgradig integrierbar. □

Der nächste Satz gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für gleichgradige Integrierbarkeit.

Satz 10.8 (Kriterium für gleichgradige Integrierbarkeit)**.** Eine Familie $\mathcal{C} \subset L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist gleichgradig integrierbar genau dann, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $\mathcal{C}$ ist beschränkt in L^1, d.h. $\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}|X| < \infty$.

(2) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\mathbb{E}\left[|X|\mathbb{1}_A\right] < \varepsilon \text{ für alle } X \in \mathcal{C} \text{ und alle } A \in \mathcal{F} \text{ mit } \mathbb{P}[A] < \delta.$$

Beweis. "$\Longleftarrow$". Es seien Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Wir zeigen, dass $\mathcal{C}$ gleichgradig integrierbar ist. Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ müssen wir ein K konstruieren, für das

$$\sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|>K}] \leq \varepsilon$$

gilt. Sei zunächst $K > 0$ beliebig. Die Markov-Ungleichung liefert die Abschätzung

$$\mathbb{P}[|X| > K] \leq \frac{1}{K}\mathbb{E}|X| \leq \frac{B}{K},$$

wobei $B := \sup_{X\in\mathcal{C}} \mathbb{E}|X| < \infty$. Sei nun $\delta > 0$ wie in Bedingung (2) und K so groß, dass $B/K < \delta$. Dann gilt $\mathbb{P}[|X| > K] \le B/K < \delta$ für alle $X \in \mathcal{C}$. Somit gilt nach Bedingung (2), dass $\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|>K}] < \varepsilon$, und die Behauptung ist bewiesen.

"$\Longrightarrow$". Sei $\mathcal{C}$ eine gleichgradig integrierbare Familie. Bedingung (1) wurde bereits in Proposition 10.3 gezeigt. Wir zeigen, dass (2) gilt. Sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir haben die Abschätzung

$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|<K}\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|\ge K}\mathbb{1}_A] \le K\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X|\ge K}] \le K\mathbb{P}[A] + \frac{\varepsilon}{2},$$

falls K hinreichend groß ist. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$, dann gilt $\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_A] \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Wir wissen, dass Konvergenz in Wahrscheinlichkeit schwächer als die L^1-Konvergenz ist. Im folgenden Satz zeigen wir, dass

> Konvergenz in Wahrscheinlichkeit + gleichgradige Integrierbarkeit = Konvergenz in L^1.

Satz 10.9. Sei $X, X_1, X_2, \dots$ integrierbare Zufallsvariablen. Die Konvergenz $X_n \xrightarrow{L^1} X$ gilt genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit (d.h. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[|X_n - X| > \varepsilon] = 0$ für alle $\varepsilon > 0$).
(b) Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

Beweis. "$\Longleftarrow$": Es gelte $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit und die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gleichgradig integrierbar. Zu zeigen ist, dass $X_n \to X$ in L^1. Zu diesem Zweck betrachten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_n - X| &= \mathbb{E}|X_n - X|\mathbb{1}_{|X_n-X|\le\frac{\varepsilon}{2}} + \mathbb{E}|X_n - X|\mathbb{1}_{|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}}] + \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}}].\end{aligned}$$

Da die Familie $\{X, X_1, X_2, \dots\}$ gleichgradig integrierbar ist, gibt es gemäß Satz 10.8 ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{E}|X_n|\mathbb{1}_F < \varepsilon/4$ und $\mathbb{E}|X|\mathbb{1}_F < \varepsilon/4$ für alle Ereignisse F mit $\mathbb{P}[F] < \delta$. Da X_n gegen X in Wahrscheinlichkeit konvergiert, gilt $\mathbb{P}[|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}] < \delta$ für n hinreichend groß. Mit $F = \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\}$ erhalten wir

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}}] < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}}] < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Indem wir alles zusammenfassen, erhalten wir die Ungleichung $\mathbb{E}|X_n - X| < \varepsilon$ wenn n hinreichend groß ist.

"$\Longrightarrow$": Es sei $X_n \to X$ in L^1. Aus der Markov–Ungleichung folgt $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit. Wir müssen also die gleichgradige Integrierbarkeit der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nachweisen. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wir müssen ein K angeben, für das

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>K}] \le \varepsilon$$

gilt. Wegen der L^1-Konvergenz gibt es ein N so dass

$$\mathbb{E}|X_n - X| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n \ge N.$$

Da die endliche Familie $\{X, X_1, \dots, X_N\}$ gleichgradig integrierbar ist, können wir ein $\delta > 0$ finden, so dass

$$\mathbb{E}|X_n|\mathbb{1}_F < \varepsilon, \quad \mathbb{E}|X|\mathbb{1}_F < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } n = 1, \dots, N \text{ und alle } F \in \mathcal{F} \text{ mit } \mathbb{P}[F] < \delta.$$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in L^1 ist, gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}|X_n| < \delta K$ für ein hinreichend großes K. Mit der Markov–Ungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\mathbb{P}[|X_n| > K] \leq \frac{\mathbb{E}|X_n|}{K} < \delta \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \geq N$ gilt die Abschätzung

$$\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>K}] \leq \mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{|X_n|>K}] + \mathbb{E}|X - X_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Für $n \leq N$ erhalten wir mit $F = \{|X_n| > K\}$ die Abschätzung $\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>K}] < \varepsilon$. Somit ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar. □

Bemerkung 10.10 (Dominierte Konvergenz)**.** Als Spezialfall erhalten wir eine Verstärkung des Satzes von der dominierten Konvergenz. Sei nämlich $X_1, X_2, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

(1) $X_n \to X$ in Wahrscheinlichkeit und
(2) $|X_n| \leq Y$, wobei $Y \geq 0$ eine integriebare Zufallsvariable ist.

Dann ist die Familie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar nach Proposition 10.7(a). Mit Satz 10.9 erhalten wir, dass $X_n \to X$ in L^1 und somit auch $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X$. Diese Aussage ist stärker als der Satz von der dominierten Konvergenz, in dem man fast sichere Konvergenz anstelle der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit fordert.

Aufgabe 10.11. $(X_t)_{t\in T}$ sei eine Familie von Zufallsvariablen.

(1) Zeigen Sie, dass $(X_t)_{t\in T}$ gleichgradig integrierbar ist, wenn es eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gibt, die $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$ und $\sup_{t\in T} \mathbb{E}\varphi(|X_t|) < \infty$ erfüllt.
(2) $(X_t)_{t\in T}$ sei gleichgradig integrierbar. Zeigen Sie, dass es eine reellwertige Folge $a_n \to \infty$ gibt, sodass

$$\varphi\colon \mathbb{R} \to [0, \infty), x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (x - a_n)^+$$

die beiden Bedingungen aus (a) erfüllt.
Bemerkung: Dieses φ is offensichtlich konvex und monoton wachsend.

Aufgabe 10.12. Sei $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine integrierbare Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] : \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \text{ ist Unter-}\sigma\text{-Algebra}\}$$

gleichgradig integrierbar ist.

11. Gleichgradig integrierbare Martingale

Ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt gleichgradig integrierbar, wenn die Familie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig integrierbar ist.

Satz 11.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal. Dann existiert der Grenzwert $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ f.s. und in L^1. Außerdem gilt: $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ f.s.

Beweis. Da das Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig integrierbar ist, ist es laut Proposition 10.3 beschränkt in L^1. Gemäß Satz 8.4 konvergiert X_n fast sicher gegen einen Grenzwert X_∞ mit $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$. Die gleichgradige Integrierbarkeit und die fast sichere Konvergenz implizieren nach Satz 10.9, dass $X_n \to X_\infty$ in L^1.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ f.s. Die Zufallsvariable X_n ist $\mathcal{F}_n$-messbar. Zu zeigen ist noch, dass

$$\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_F]$$

für jedes Ereignis $F \in \mathcal{F}_n$. Für $r \geq n$ gilt $\mathbb{E}[X_r \mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_F]$, denn $\mathbb{E}[X_r|\mathcal{F}_n] = X_n$ wegen der Martingaleigenschaft. Es reicht also zu zeigen, dass $\lim_{r\to\infty} \mathbb{E}[X_r \mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_F]$. Dies wird wie folgt gemacht:

$$|\mathbb{E}[X_r \mathbb{1}_F] - \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_F]| \leq \mathbb{E}[|X_r - X_\infty| \mathbb{1}_F] \leq \mathbb{E}|X_r - X_\infty| \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

da $X_r \to X_\infty$ in L^1. Also gilt $\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_F]$ und somit $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$. □

Bemerkung 11.2. Für das L^1-beschränkte Martingal aus Beispiel 10.1 gilt $X_\infty = 0$ und somit $X_n \neq \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$. Also ist dieses Martingal nicht gleichgradig integrierbar.

Bemerkung 11.3. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty$ (L^1-Beschränktheit) oder $X_n \geq 0$. Wir wissen aus dem Martingalkonvergenzsatz von Doob, dass $X_n \to X_\infty$ f.s. Um zu zeigen, dass $X_n \to X_\infty$ in L^1 (und somit $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X_\infty$), reicht es zu zeigen, dass X_n für ein $p > 1$ in L^p beschränkt ist.

Der nächste Satz ist im gewissen eine Umkehrung von Satz 11.1.

Satz 11.4 (Paul Lévy)**.** Sei $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ eine Zufallsvariable und $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots$ eine Filtration. Dann ist $X_n := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n]$ ein gleichgradig integrierbares Martingal und

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{f.s. und in } L^1,$$

wobei $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots)$.

Beweis. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar, denn sogar die größere Familie $\{\mathbb{E}[\xi|\mathcal{H}] \colon \mathcal{G} \subset \mathcal{F}, \mathcal{G} \text{ ist } \sigma - \text{Algebra}\}$ ist gleichgradig integrierbar (Übung).

Satz 11.1 besagt, dass $X_n \to X_\infty$ f.s. und in L^1 für eine Zufallsvariable X_∞. Außerdem gilt $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$. Es bleibt zu zeigen, dass $X_\infty = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\infty]$ f.s. Sei $\xi \geq 0$ (andernfalls können wir die Zerlegung $\xi = \xi^+ - \xi^-$ betrachten). Betrachte die folgenden zwei Maße auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$:

$$Q_1(A) = \mathbb{E}[\bar{\xi}\mathbb{1}_A],\ A \in \mathcal{F}_\infty, \quad \text{mit Dichte } \bar{\xi} := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\infty]$$
$$Q_2(A) = \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_A],\ A \in \mathcal{F}_\infty, \quad \text{mit Dichte } X_\infty.$$

Für $A \in \mathcal{F}_n$ gilt $\mathbb{E}[\bar{\xi}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_A]$, denn $\mathbb{E}[\bar{\xi}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\infty]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_n] = X_n$. Auf der anderen Seite gilt $\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_A]$, denn $X_n = \mathbb{E}[X_\infty|\mathcal{F}_n]$ gemäß Satz 11.1. Somit gilt

$$\underbrace{\mathbb{E}[\bar{\xi}\mathbb{1}_A]}_{Q_1(A)} = \underbrace{\mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_A]}_{Q_2(A)} \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_n.$$

Die Maße Q_1 und Q_2 stimmen also auf dem Mengensstem $\bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n$ überein. Da dieses System schnittstabil ist (Übung), müssen Q_1 und Q_2 auf $\mathcal{F}$ übereinstimmen (Eindeutigkeit der Fortsetzung). Also gilt für die entsprechenden Dichten $\bar{\xi} = X_\infty$ f.s. □

Als Anwendung von Satz 11.4 geben wir einen neuen Beweis des 0-1-Gesetzes von Kolmogorov.

Satz 11.5 (0-1-Gesetz von Kolmogorov)**.** Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsvariablen. Definiere die σ-Algebren

$$\mathcal{T}_n := \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \text{ und } \mathcal{T} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{T}_n \text{ (die Terminale } \sigma\text{-Algebra).}$$

Dann gilt für jedes Ereignis $A \in \mathcal{T}$, dass $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

Beweis. Sei $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ und $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. Dann ist $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots$ eine Filtration. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_n$ ist unabhängig von $\mathcal{T}_n$, also ist $\mathcal{F}_n$ unabhängig von der noch kleineren σ-Algebra $\mathcal{T}$. Somit ist jedes terminale Ereignis $A \in \mathcal{T}$ unabhängig von $\mathcal{F}_n$. Das heißt,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}[A] \quad \text{f.s.}$$

Auf der anderen Seite folgt aus Satz 11.4, dass

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_n] \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{F}_\infty] = \mathbb{1}_A \quad \text{f.s.,}$$

denn $A \in \mathcal{F}_\infty$.

Zusammenfassend, erhalten wir, dass $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A] = \mathbb{1}_A$ f.s. Das geht nur dann, wenn $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$! □

12. Optional sampling für gleichgradig integrierbare Martingale

Satz 12.1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal und $T < \infty$ eine Stoppzeit. Dann ist das gestoppte Martingal $(X_{n\wedge T})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls gleichgradig integrierbar.

Beweis. Sei $K > 0$ beliebig. Indem wir die disjunkte Zerlegung des Wahrscheinlichkeitsraumes in die Ereignisse $\{T \le n\}$ und $\{T > n\}$ betrachten, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X_{T\wedge n}|\mathbb{1}_{|X_{T\wedge n}|>K}] &= \mathbb{E}[|X_{T\wedge n}|\mathbb{1}_{|X_{T\wedge n}|>K}\mathbb{1}_{T\le n}] + \mathbb{E}[|X_{T\wedge n}|\mathbb{1}_{|X_{T\wedge n}|>K}\mathbb{1}_{T<n}] \\
&= \mathbb{E}[|X_T|\mathbb{1}_{|X_T|>K}\mathbb{1}_{T\le n}] + \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>K}\mathbb{1}_{T<n}] \\
&\le \mathbb{E}[|X_T|\mathbb{1}_{|X_T|>K}] + \mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{|X_n|>K}].
\end{aligned}$$

Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ werden wir im Folgenden ein hinreichend großes K angeben, für das beide Summanden auf der rechten Seite $< \frac{\varepsilon}{2}$ werden. Für den *zweiten Summanden* ist die Behauptung klar, denn $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar.

Der erste Summand. Es reicht zu zeigen, dass $\mathbb{E}|X_T| < \infty$. Die Folge $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Submartingal, denn die Funktion $x \to |x|$ ist konvex. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $T \wedge n$ ist Stoppzeit mit $T \wedge n \leq n$. In Aufgabe 6.5 wurde gezeigt, dass $\mathbb{E}|X_{T\wedge n}| \leq \mathbb{E}X_n$. Es folgt also, dass

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_{T\wedge n}| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n| < \infty,$$

da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig integrierbar und somit beschränkt in L^1 ist. Also ist $(|X_{T\wedge n}|)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein in L^1 beschränktes Submartingal. Es ist klar, dass

$$|X_{T\wedge n}| \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} |X_T|.$$

Satz 8.4 liefert nun die Integrierbarkeit des Limes: $\mathbb{E}|X_T| < \infty$. □

Satz 12.2 (Optional sampling für gleichgradig integrierbare Martingale)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal und $T < \infty$ eine Stoppzeit. Dann gilt

$$\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0.$$

Beweis. In Satz 12.1 haben wir gezeigt, dass die Folge $(X_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig integrierbar ist. Außerdem gilt wegen der Endlichkeit von T, dass

$$X_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} X_T.$$

Satz 11.1 ergibt, dass $X_{T\wedge n} \to X_T$ auch in L^1 und somit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_T.$$

Nach dem Optional Stopping Theorem von Doob, Satz 6.1, gilt aber $\mathbb{E}X_{T\wedge n} = \mathbb{E}X_0$. Es folgt, dass $\mathbb{E}X_T = \mathbb{E}X_0$. □

Bemerkung 12.3. Für gleichgradig integrierbare Submartingale kann man zeigen, dass $\mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_\infty$.

13. Wald'sche Gleichungen

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Formel für den Erwartungswert einer gestoppten Irrfahrt.

Satz 13.1 (Erste Wald'sche Gleichung)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_n = \mu$ und Partialsummen

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,\ S_0 = 0.$$

Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Filtration mit $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n) \subset \mathcal{F}_n$ und so, dass $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots$ unabhängig von $\mathcal{F}_n$ sind. Dann gilt für jede Stoppzeit τ mit $\mathbb{E}\tau < \infty$ die Formel

$$\mathbb{E}S_\tau = \mu\mathbb{E}\tau.$$

Oft wird die Wald'sche Gleichung nur im Speziallfall einer von der Irrfahrt unabhängigen Stoppzeit formuliert.

Beispiel 13.2. Sei N eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{E}N < \infty$, die unabhängig von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist. Dann gilt $\mathbb{E}S_N = \mu\mathbb{E}N$.

Beweis. Wir betrachten die Stoppzeit $\tau = N$ und die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n, N)$. Die σ-Algebra $\sigma(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots)$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n, N)$. Wir können also Satz 13.1 anwenden. □

Beweis von Satz 13.1. Die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := (S_n - n\mu)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bildet ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, denn

$$\mathbb{E}[S_{n+1} - (n+1)\mu|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(S_n - n\mu) + \xi_{n+1} - \mu|\mathcal{F}_n] = S_n - n\mu + \mathbb{E}[\xi_{n+1} - \mu] = S_n - n\mu.$$

Der gestoppte Prozess $(M_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist somit ebenfalls ein Martingal. Wir behaupten, dass dieses Martingal gleichgradig integrierbar ist.[6] Wir bezeichnen die Martingaldifferenzen mit $\Delta_n := M_n - M_{n-1} = \xi_n - \mu$ und stellen fest, dass

$$\mathbb{E}[|\Delta_n||\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[|\xi_n - \mu||\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}|\xi_n - \mu| =: C < \infty. \tag{13.1}$$

Wir werden zeigen, dass die Familie $(M_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch eine integrierbare Zufallsvariable dominiert wird. Es gilt

$$M_{\tau\wedge n} - M_0 = \sum_{j=1}^{\tau\wedge n} \Delta_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\tau\geq j\}}\Delta_j.$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$|M_{\tau\wedge n}| \leq |M_0| + \sum_{j=1}^{\infty} |\Delta_j|\mathbb{1}_{\tau\geq j}.$$

Die Zufallsvariable auf der rechten Seite hängt nicht von n ab. Es bleibt zu zeigen, dass sie integrierbar ist (dann kann man auf Proposition 10.7(a) verweisen). Aus der Definition eines Martingals folgt, dass $\mathbb{E}|M_0| < \infty$. Wir zeigen nun, dass die Summe auf der rechten Seite integrierbar ist. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[|\Delta_j|\mathbb{1}_{\tau\geq j}\right] = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\{\tau\geq j\}} \mathbb{E}[|\Delta_j||\mathcal{F}_{j-1}]d\mathbb{P} = \sum_{j=1}^{\infty} C\mathbb{P}[\tau \geq j] = C\mathbb{E}\tau < \infty,$$

wobei wir (13.1) benutzt haben. Also wird die Familie $(M_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch eine integrierte Zufallsvariable dominiert und ist somit gleichgradig integrierbar.

Wegen der Endlichkeit von τ gilt $M_{n\wedge\tau} \to M_\tau$ f.s. und somit auch in L^1 (Satz 10.9). Es folgt, dass $\mathbb{E}M_\tau = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}M_{\tau\wedge n} = 0$ und somit $\mathbb{E}S_\tau = \mu\mathbb{E}\tau$. □

Nun beweisen wir eine Formel für die Varianz von S_τ.

[6] Die Hauptschwierigkeit bei diesem Beweis besteht darin, dass das nichtgestoppte Martingal $S_n - n\mu$ nicht gleichgradig integrierbar ist. Sonst könnten wir auf dieses Martingal direkt Satz 12.2 anwenden.

Satz 13.3 (Zweite Wald'sche Gleichung)**.** Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 13.1 gelte $\sigma^2 := \operatorname{Var}\xi_i < \infty$ und $\mu = \mathbb{E}\xi_1 = 0$. Dann gilt

$$\operatorname{Var} S_\tau = \mathbb{E}S_\tau^2 = \sigma^2 \mathbb{E}\tau.$$

Beweis. Es ist klar, dass $\operatorname{Var} S_\tau = \mathbb{E}S_\tau^2$, denn $\mathbb{E}S_\tau = 0$ nach Satz 13.1. Wir zeigen, dass $\mathbb{E}S_\tau^2 = \sigma^2\mathbb{E}\tau$.

SCHRITT 1. Zuerst zeigen wir, dass $\mathbb{E}S^2_{\tau\wedge n} = \sigma^2\mathbb{E}(\tau \wedge n)$. Zu diesem Zweck stellen wir fest, dass

$$S^2_{\tau\wedge n} = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau\geq j\}}(S_j^2 - S_{j-1}^2) = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\tau\geq j}\xi_j^2 + 2\sum_{j=1}^2 \mathbb{1}_{\tau\geq j}\xi_j S_{j-1}.$$

Die Zufallsvariable ξ_j^2 ist unabhängig von $(S_{j-1}, \mathbb{1}_{\tau\geq j})$, denn sowohl S_{j-1} als auch $\mathbb{1}_{\tau\leq j} = 1 - \mathbb{1}_{\tau\leq j-1}$ sind $\mathcal{F}_{j-1}$-messbar. Somit berechnet sich der Erwartungswert zu

$$\mathbb{E}S^2_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}\xi_1^2 \sum_{j=1}^n \mathbb{P}[\tau \geq j] + 0 = \sigma^2\mathbb{E}[\tau\wedge n].$$

SCHRITT 2. Wegen der Endlichkeit von τ gilt $S^2_{\tau\wedge n} \to S^2_\tau$ f.s. Wir zeigen, dass die Familie $(S^2_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig integrierbar ist. Daraus würde folgen, dass

$$\mathbb{E}S^2_\tau = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}S^2_{\tau\wedge n} = \lim_{n\to\infty} \sigma^2\mathbb{E}[\tau\wedge n] = (\mathbb{E}\tau)\sigma^2,$$

wobei wir Schritt 1 und danach die monotone Konvergenz benutzt haben. Der Satz wäre somit bewiesen.

Wir zeigen also die gleichgradige Integrierbarkeit von $(S^2_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$. Das Lemma von Fatou ergibt

$$\mathbb{E}S^2_\tau \leq \liminf \mathbb{E}S^2_{\tau\wedge n} = \sigma^2\mathbb{E}\tau < \infty,$$

also ist $S^2_\tau \in L^1$. Somit ist $(\mathbb{E}[S^2_\tau|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}])_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.[7] Es reicht zu zeigen, dass $S^2_{\tau\wedge n} \leq \mathbb{E}[S^2_\tau|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}]$. Zu diesem Zweck betrachten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2_\tau|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] - S^2_{\tau\wedge n} &= \mathbb{E}[S^2_\tau - S^2_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] \\
&= \mathbb{E}[(S_\tau - S_{\tau\wedge n})(S_\tau + S_{\tau\wedge n})|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] \\
&= 2S_{\tau\wedge n}\mathbb{E}[(S_\tau - S_{\tau\wedge n})|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] + \mathbb{E}[(S_\tau - S_{\tau\wedge n})^2|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}].
\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist ≥ 0. Für den ersten Summanden gilt

$$\mathbb{E}[(S_\tau - S_{\tau\wedge n})|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] = \mathbb{E}[S_\tau|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] - \mathbb{E}[S_{\tau\wedge n}|\mathcal{F}_{\tau\wedge n}] = S_{\tau\wedge n} - S_{\tau\wedge n} = 0,$$

wobei wir hier eine etwas allgemeinere Form des Optional Stopping benutzt haben, nämlich $\mathbb{E}[S_{T_2}|\mathcal{F}_{T_1}] = S_{T_1}$, falls $T_1 \leq T_2 \leq n$ zwei beschränkte Stoppzeiten sind. □

[7] Für eine Stoppzeit T definieren wir $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq k\} \in \mathcal{F}_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}$. Wir überlassen es dem Leser als Übung zu zeigen, dass $\mathcal{F}_T$ eine σ-Algebra ist und dass für zwei Stoppzeiten $T_1 \leq T_2$ die Inklusion $\mathcal{F}_{T_1} \subseteq \mathcal{F}_{T_2}$ gilt.

14. Rückwärtsmartingale und Gesetz der großen Zahlen

Das starke Gesetz der großen Zahlen behauptet, dass für Partialsummen $S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$ der unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$ die fast sichere Konvergenz

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{E}\xi_1$$

gilt. Man kann sich fragen, ob man diese Aussage nicht als Korollar des Martingalkonvergenzsatzes herleiten kann. Leider ist die Folge $(S_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Allgemeinen kein Martingal. Stattdessen bildet diese Folge ein sogenanntes Rückwärtsmartingal (auch inverses Martingal genannt).

Betrachte einen für *nichtpositive Zeiten* definierten stochastischen Prozess $(X_{-n})_{n\geq 0}$ (vollständig ausgeschrieben: $\ldots, X_{-2}, X_{-1}, X_0$), und eine Rückwärtsfiltration

$$\ldots \subseteq \mathcal{F}_{-n} \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}.$$

Definition 14.1. Der Prozess $(X_{-n})_{n\geq 0}$ heißt ein *Rückwärtsmartingal* bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_{-n})_{n\geq 0}$, falls

(1) $\mathbb{E}|X_{-n}| < \infty$ für alle $n \geq 0$;
(2) X_{-n} ist $\mathcal{F}_{-n}$-messbar für alle $n \geq 0$;
(3) $\mathbb{E}[X_{-n+1}|\mathcal{F}_{-n}] = X_{-n}$ für alle $n \geq 1$.

Beispiel 14.2. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$. Betrachte die Partialsummen $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ und die Filtration $\mathcal{F}_{-n} = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$, $n = 0, 1, \ldots$.

Behauptung 14.3. Der Prozess $\ldots, \frac{S_3}{3}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_1}{1}, 0$ ist ein Rückwärtsmartingal.

Beweis. Wir rechnen die dritte Bedingung nach:

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_{n-1}}{n-1}\middle|\mathcal{F}_{-n}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{S_n - \xi_n}{n-1}\middle|S_n, S_{n+1}, \ldots\right] = \frac{S_n}{n} - \frac{1}{n-1}\mathbb{E}\left[\xi_n\middle|S_n, S_{n+1}, \ldots\right].$$

Wir überlassen es dem Leser als eine Übung zu zeigen, dass $\mathbb{E}[\xi_n | S_n, S_{n+1}, \ldots] = S_n/n$. Es folgt

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_{n-1}}{n-1}\middle|\mathcal{F}_{-n}\right] = \frac{S_n}{n-1} - \frac{S_n}{n(n-1)} = \frac{S_n}{n}.$$

□

Aufgabe 14.4. Für ein Rückwärtsmartingal $(X_{-n})_{n\geq 0}$ gilt die Formel $X_{-n} = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-n}]$, $n \geq 0$.

Aufgabe 14.5. Sei $\ldots \subseteq \mathcal{F}_{-1} \subseteq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ eine Rückwärtsfiltration und $\xi \in L^1$ eine integrierbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $X_{-n} := \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_{-n}]$ ein Rückwärtsmartingal ist.

Für Rückwärtsmartingale gilt ein Analogon des Martingalkonvergenzsatzes von Doob. Ein wesentlicher Unterschied ist, dass die gleichgradige Integrierbarkeit im Fall der Rückwärtsmartingale automatisch erfüllt ist.

Satz 14.6. Jedes Rückwärtsmartingal $(X_{-n})_{n\geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar es gilt

$$X_{-n} \to \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-\infty}] \text{ f.s. und in } L^1, \text{ für } n \to +\infty,$$

wobei $\mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{-n}$.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass der Grenzwert von X_{-n} für $n \to +\infty$ f.s. existiert. Sei U_n, $n \in \mathbb{N}$, die Anzahl der Upcrossings eines Intervalls $[a, b]$ durch die endliche Folge

$$Y_0 := X_{-n}, \;\; Y_1 := X_{-n+1}, \;\; \ldots, \;\; Y_n := X_0.$$

Diese Folge bildet ein Martingal auf dem Zeitintervall $\{0, \ldots, n\}$. Mit der Upcrossing-Ungleichung von Doob (Lemma 8.2) ergibt sich

$$\mathbb{E}U_n \leq \frac{\mathbb{E}[(X_0 - a)^+]}{b - a}.$$

Die Folge $U_1, U_2, \ldots$ ist monoton nichtfallend. Somit konvergiert sie gegen einen Grenzwert $U_\infty \geq 0$, der a priori $+\infty$ sein kann. Aus der gleichmäßigen Abschätzung von $\mathbb{E}U_n$ ergibt sich mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, dass $\mathbb{E}U_\infty < \infty$. Also ist U_∞ doch fast sicher endlich. Genauso wie im Beweis des Martingalkonvergenzsatzes von Doob (Satz 8.1), zeigt man, dass der Grenzwert $X_{-\infty} := \lim_{n\to+\infty} X_{-n}$ f.s. existiert und endlich ist.

Nun zeigen wir, dass die Folge $(X_{-n})_{n\geq 0}$ gleichgradig integrierbar ist (woraus sich mit Satz 10.9 ergibt, dass die Konvergenz von X_{-n} gegen $X_{-\infty}$ auch in L^1 gilt). Aus der Martingaleigenschaft von $X_{-n}, X_{-n+1}, \ldots, X_0$ folgt, dass $X_{-n} = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-n}]$ für alle $n \geq 0$. Also ist die Familie $(X_{-n})_{n\geq 0}$ gleichgradig integrierbar nach Satz 11.4.

Es bleibt zu zeigen, dass $X_{-\infty} = \mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-\infty}]$. Für jedes $n \geq 0$ ist $X_{-\infty}$ (als Grenzwert der Folge $X_{-n}, X_{-n-1}, \ldots$) $\mathcal{F}_{-n}$-messbar. Somit ist $X_{-\infty}$ sogar $\mathcal{F}_{-\infty}$-messbar. Es bleibt zu zeigen, dass für jedes Ereignis $A \in \mathcal{F}_{-\infty}$ die Formel $\mathbb{E}[X_{-\infty}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_0\mathbb{1}_A]$ gilt. Für jedes $n \geq 0$ gilt $\mathbb{E}[X_{-n}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_0\mathbb{1}_A]$, denn $A \in \mathcal{F}_{-n}$ und $\mathbb{E}[X_0|\mathcal{F}_{-n}] = X_{-n}$. Nun lassen wir $n \to +\infty$ gehen und benutzen die L^1-Konvergenz von $X_{-n}\mathbb{1}_A$ gegen $X_{-\infty}\mathbb{1}_A$. □

Beispiel 14.7 (Starkes Gesetz der großen Zahlen)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}|\xi_1| < \infty$. Dann gilt:

$$\frac{S_k}{k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\xi_1 \quad \text{f.s. und in } L^1.$$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\ldots, \frac{S_3}{3}, \frac{S_2}{2}, \frac{S_1}{1}, 0$ ein Rückwärtsmartingal ist. Nach Satz 14.6 konvergiert S_k/k gegen eine Zufallsvariable M_∞ f.s. und in L^1. Wir müssen aber noch zeigen, dass $M_\infty = \mathbb{E}\xi_1$ f.s.

Die Zufallsvariable M_∞ ist messbar bezüglich der σ-Algebra $\mathcal{T}_i = \sigma(\xi_{i+1}, \xi_{i+2}, \ldots)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, denn

$$M_\infty = \lim_{k \to +\infty} \frac{S_k}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{X_1 + \ldots + X_k}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{X_{i+1} + \ldots + X_k}{k}.$$

Also ist M_∞ messbar bezüglich der terminalen σ-Algebra $\mathcal{T} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_i$. Nach dem Kolmogorovschen 0-1-Gesetz (Satz 11.5) muss das Ereignis $\{M_\infty \leq a\} \in \mathcal{T}$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 haben. Daraus folgt, dass M_∞ f.s. konstant sein muss. Nun gilt aber wegen der L^1-Konvergenz, dass $\mathbb{E}M_\infty = \mathbb{E}S_k/k = \mathbb{E}\xi_1$, also folgt $M_\infty = \mathbb{E}\xi_1$ f.s. □

15. Doob–Ungleichungen und Konvergenz in L^p

In diesem Abschnitt beweisen wir zwei Ungleichungen von Doob, die das Maximum eines (Sub)martingals abschätzen. Als Anwendung werden wir ein Kriterium für die L^p-Konvergenz von Martingalen herleiten.

Satz 15.1 (Maximalungleichung von Doob)**.** Sei $(X_k)_{k=0,\ldots,n}$ ein nicht-negatives Submartingal. Dann gilt für alle $c > 0$, dass

$$c\,\mathbb{P}\left[\max_{k=0,\ldots,n} X_k \geq c\right] \leq \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{\{\max_{k=0,\ldots,n} X_n \geq c\}}\right] \leq \mathbb{E}X_n.$$

Beweis. Die zweite Ungleichung ist offensichtlich, denn $X_n \geq 0$. Wir beweisen die erste Ungleichung. Betrachte das Ereignis $A = \{\max_{k=0,\ldots,n} X_k \geq c\}$. Es gilt $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$ (disjunkte Vereinigung!) mit

$$A_0 = \{X_0 \geq c\}, \quad A_1 = \{X_0 < c, X_1 \geq c\}, \quad A_2 = \{X_0 < c, X_1 < c, X_2 \geq c\}$$

und allgemein

$$A_k = \{X_0 < c, X_1 < c, \ldots, X_{k-1} < c, X_k \geq c\}.$$

Da die Zufallsvariablen $X_0, \ldots, X_k$ allesamt $\mathcal{F}_k$-messbar sind, gilt $A_k \in \mathcal{F}_k$. Außerdem gilt $X_k(\omega) \geq c$ für alle $\omega \in A_k$. Indem wir die Submartingaleigenschaft ausnutzen, erhalten wir

$$\mathbb{P}[X_n \mathbb{1}_{A_k}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{A_k} | \mathcal{F}_k]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_k] \mathbb{1}_{A_k}] \geq \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{A_k}] \geq \mathbb{E}[c \mathbb{1}_{A_k}] = c\mathbb{P}[A_k].$$

Nun summieren wir über $k = 0, \ldots, n$:

$$\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_A] \geq c\mathbb{P}[A],$$

was genau der behaupteten Ungleichung entspricht. □

Bemerkung 15.2. Die Markov-Ungleichung liefert $c\,\mathbb{P}[X_n \geq c] \leq \mathbb{E}X_n$, was viel schwächer als die Doob-Ungleichung ist, denn $X_n \leq \max_{k=0,1,\ldots,n} X_k$.

Korollar 15.3. Sei $(M_k)_{k=0,\dots,n}$ ein Martingal mit $\mathbb{E}M_n^2 < \infty$. Dann gilt für alle $c > 0$, dass

$$\mathbb{P}\left[\max_{k=0,\dots,n} |M_k| \geq c\right] \leq \frac{\mathbb{E}M_n^2}{c^2}.$$

Beweis. Die Funktion $x \mapsto x^2$ ist konvex, also ist $(M_k^2)_{k=0,\dots,n}$ ein nichtnegatives Submartingal. Die Doob-Ungleichung liefert die Abschätzung

$$\mathbb{P}\left[\max_{k=0,1,\dots,n} |M_k| \geq c\right] = \mathbb{P}\left[\max_{k=0,1,\dots,n} M_k^2 \geq c^2\right] \leq \frac{\mathbb{E}M_n^2}{c^2}.$$

□

Als Spezialfall erhalten wir die Kolmogorov-Ungleichung.

Beispiel 15.4 (Kolmogorov-Ungleichung)**.** Seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\xi_k = 0$ und $\mathbb{E}\xi_k^2 < \infty$ für alle $k = 1, \dots, n$. Definiere die Partialsummen $S_k = \xi_1 + \dots + \xi_k$. Dann gilt für alle $c > 0$, dass

$$\mathbb{P}\left[\max_{k=0,\dots,n} |S_k| \geq c\right] \leq \frac{\operatorname{Var} S_n}{c^2}.$$

Aufgabe 15.5. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei ein Martingal mit $X_0 = 0$ und $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left[\max_{k=0,\dots,n} X_k \geq \lambda\right] \leq \frac{\operatorname{Var} X_n}{\operatorname{Var} X_n + \lambda^2}$$

gilt, indem Sie zeigen und ausnutzen, dass $\left((X_n + c)^2\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für $c \in \mathbb{R}$ ein Submartingal ist, und Ihre Abschätzung in c optimieren.

Wir haben bereits Bedingungen für die fast sichere Konvergenz von Martingalen sowie für Konvergenz in L^1 und L^2 angegeben. Nun werden wir eine Bedingung für die L^p-Konvergenz mit einem beliebigen $p > 1$ angeben. Zuerst brauchen wir eine Abschätzung für das p-te Moment des Maximums eines Martingals.

Satz 15.6 (L^p-Ungleichung von Doob)**.** Sei $p > 1$ und $(X_k)_{k=0,\dots,n}$ ein Martingal mit $X_k \in L^p$, $k = 0, \dots, n$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}\left[\max_{k=0,\dots,n} |X_k|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_n|^p.$$

Beweis. Sei $M_k = \max_{0\le j\le k}|X_j|$ das laufende Maximum des Martingals. Es sei bemerkt, dass $M_n \in L^p$, denn $0 \le M_n \le |X_1| + \ldots + |X_n|$ und alle X_k sind in L^p. Sei im Folgenden $\mathbb{P}[M_n > 0] \neq 0$, denn andernfalls ist die Behauptung trivial.

Da die Funktion $x \mapsto |x|^p$ konvex ist, ist $(|X_k|^p)_{k=0,\ldots,n}$ ein Submartingal. Nun benutzen wir die Maximalungleichung von Doob (Satz 15.1) und den Satz von Fubini:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|M_n|^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}[M_n \ge t]\mathrm{d}t && \rightsquigarrow \text{Satz 15.1}\\
&\le \int_0^\infty pt^{p-1}\frac{1}{t}\mathbb{E}[|X_n|\mathbb{1}_{M_n\ge t}]\mathrm{d}t && \rightsquigarrow \text{Satz von Fubini}\\
&= \mathbb{E}\int_0^\infty pt^{p-2}|X_n|\mathbb{1}_{M_n\ge t}\mathrm{d}t\\
&= \mathbb{E}\left[|X_n|\int_0^{M_n} pt^{p-2}\mathrm{d}t\right]\\
&= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}\left[|X_n|\cdot M_n^{p-1}\right].
\end{aligned}$$

Es sei q die zu p konjugierte Zahl im Sinne von Young, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Hölder–Ungleichung unter Berücksichtigung von $(p-1)q = p$ liefert

$$\mathbb{E}|M_n|^p \le \frac{p}{p-1}(\mathbb{E}|X_n|^p)^{1/p} \cdot (\mathbb{E}|M_n|^p)^{1/q}.$$

Umstellen führt zu $(\mathbb{E}|M_n|^p)^{1-1/q} \le \frac{p}{p-1}(\mathbb{E}|X_n|^p)^{1/p}$, was wegen $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ der behaupteten Ungleichung entspricht. □

Beispiel 15.7 (L^p-Ungleichung gilt für $p = 1$ nicht)**.** In diesem Beispiel zeigen wir, dass es keine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $\mathbb{E}[\max_{k=0,\ldots,n}|X_k|] \le C\mathbb{E}|X_n|$ für alle Martingale erfüllt ist.

Sei $S_n = 1 + \xi_1 + \ldots + \xi_n$ eine an der Stelle 1 startende einfache symmetrische Irrfahrt, d.h. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ seien u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[\xi_i = \pm 1] = 1/2$. Es sei $\tau = \min\{n \in \mathbb{N} : S_n = 0\}$ die Ersteintrittszeit in den Zustand 0. Der gestoppte Prozess $(S_{\tau\wedge n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal und insbesondere gilt $\mathbb{E}S_{\tau\wedge n} = \mathbb{E}S_0 = 1$. Nun schauen wir uns das Maximum an. Für alle $u \in \{2, 3, \ldots\}$ gilt

$$\mathbb{P}\left[\max_{k\in\mathbb{N}_0} S_{\tau\wedge k} \ge u\right] = \frac{1}{u-1},$$

denn das entsprechende Ereignis tritt dann ein, wenn die Irrfahrt den Punkt u vor 0 erreicht. Also ist $\mathbb{E}[\max_{k\in\mathbb{N}_0} S_{\tau\wedge k}] = +\infty$. Mit der monotonen Konvergenz ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\max_{k=0,\ldots,n} S_{\tau\wedge k}\right] = +\infty.$$

Der Erwartungswert des Maximums auf dem Intervall $\{0, \ldots, n\}$ kann also beliebig groß werden. Auf der anderen Seite ist $\mathbb{E}|S_{\tau\wedge n}| = \mathbb{E}S_{\tau\wedge n} = 1$ konstant.

Bemerkung 15.8. Man kann die folgende modifizierte Form der L^p-Ungleichung für $p = 1$ beweisen:

$$\mathbb{E}\left|\max_{k=0,\dots,n} X_k\right| \leq \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 + \mathbb{E}[X_n \log_+ X_n]\right).$$

Satz 15.9 (L^p-Konvergenz für Martingale)**.** Sei $p > 1$. Für ein Martingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $X_n \in L^p$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind folgende Bedingungen äquivalent:

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty$ (Beschränktheit in L^p).
(2) $\mathbb{E}\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|^p < \infty$ (Maximum des Martingals ist in L^p).
(3) Die Familie $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar.
(4) X_n konvergiert gegen einen Grenzwert X_∞ f.s. und in L^p.

Bemerkung 15.10. Es sei bemerkt, dass der Satz im Fall $p = 1$ nicht gilt. Wir haben bereits gesehen, dass Beschränktheit in L^1 notwendig aber nicht hinreichend für die gleichgradige Integrierbarkeit eines Martingals (oder für dessen Konvergenz in L^1) ist. Den Spezialfall $p = 2$ haben wir bereits in Satz 9.1 betrachtet.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz können wir schreiben

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|^p\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{k=0,\dots,n} |X_k|^p\right].$$

Nach der L^p-Ungleichung von Doob (Satz 15.6) gilt aber $\mathbb{E}[\sup_{k=0,\dots,n} |X_k|^p] \leq C_p\mathbb{E}|X_n|^p <$ const für alle $n \in \mathbb{N}_0$, da $\mathbb{E}|X_n|^p$ nach (1) beschränkt ist. Somit ist auch $\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|^p] <$ const.

(2) $\Rightarrow$ (3): Trivialerweise gilt $|X_n|^p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |X_n|^p$. Die obere Schranke ist nach (2) integrierbar. Die Familie $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird also durch eine integrierbare Zufallsvariable dominiert und ist somit gleichgradig integrierbar.

(2), (3) $\Rightarrow$ (4): Nach (3) ist $|X_n|^p$ beschränkt in L^1. Wegen der Ljapunov–Ungleichung $\mathbb{E}|X_n| \leq (\mathbb{E}|X_n|^p)^{1/p}$ ist X_n ist beschränkt in L^1. Aus dem Martingalkonvergenzsatz (Satz 8.1) folgt die fast sichere Konvergenz $X_n \to X_\infty$.

Zu zeigen bleibt noch die L^p-Konvergenz, also $\mathbb{E}|X_n - X_\infty|^p \to 0$. Aus der fast sicheren Konvergenz von X_n gegen X_∞ folgt, dass $|X_n - X_\infty|^p \to 0$ f.s. Es reicht also zu zeigen, dass die Familie $(|X_n - X_\infty|^p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gleichgradig integrierbar ist. Aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem p-ten Mittel ergibt sich

$$|X_n - X_\infty|^p \leq 2^{p-1}(|X_n|^p + |X_\infty|^p).$$

Die Familie $(|X_n|^p)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist gleichgradig integrierbar nach (3). Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{E}|X_\infty|^p < \infty$. Wir erinnern $|X_n|^p \to |X_\infty|^p$ f.s. Die Behauptung folgt dann aus dem Lemma von Fatou und der Beschränktheit von $\mathbb{E}|X_n|^p$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Aus der Konvergenz in einem metrischen Raum folgt Beschränktheit. Aus $X_n \to X_\infty$ in L^p folgt also, dass X_n in L^p beschränkt ist. $\square$

16. Gesetz vom iterierten Logarithmus

Sei $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ die einfache symmetrische Irrfahrt, d.h. die Zuwächse $X_1, X_2, \ldots$ seien u.i.v. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}[X_k = \pm 1] = 1/2$. Wie schnell wächst die Folge S_n? Das starke Gesetz der großen Zahlen von Borel (1909) besagt, dass

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0.$$

Also wächst S_n wesentlich langsamer als n. Das ist aber nur der Anfang der Geschichte. Hausdorff hat 1913 gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\frac{S_n}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} 0.$$

Ein Jahr später haben Hardy und Littlewood dieses Resultat verbessert indem sie gezeigt haben, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log n}} < \infty \text{ f.s.}$$

Schließlich hat Chintschin 1924[8] das sogenannte "Gesetz vom iterierten Logarithmus" bewiesen:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log(\log n)}} = +1 \text{ f.s.}; \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log(\log n)}} = -1 \text{ f.s.} \tag{16.1}$$

Nachdem Kolmogorov 1929 dieses Ergebnis auf eine größere Klasse von Zufallsvariablen erweitert hatte, konnten Hartman und Wintner 1941 beweisen, dass (16.1) für beliebige u.i.v. Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 gültig bleibt.

In diesem Skript werden wir das Gesetz vom iterierten Logarithmus nur im Spezialfall der standardnormalverteilten Zufallsvariablen beweisen.

Satz 16.1. Seien $X_1, X_2, \ldots$ standardnormalverteilte und unabhängige Zufallsvariablen. Sei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log(\log n)}} = 1; \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n \log(\log n)}} = -1 \text{ f.s.}$$

Beweis. Wir zeigen, dass $\limsup = 1$, die Aussage mit $\liminf$ folgt dann aus Symmetriegründen.

Schritt 1: Tailfunktion der Normalverteilung. Sei X standardnormalverteilt. Wir behaupten, dass

$$\mathbb{P}[X > u] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi} u} \mathrm{e}^{-u^2/2} \text{ für } u \to +\infty,$$

[8] Diese Resultate wurden noch vor der Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie durch Kolmogorov (1933) erzielt. Sie wurden als Aussagen über die Anzahl der Einsen in der dyadischen Darstellung Lebesgue-fast aller Zahlen aus dem Einheitsintervall formuliert.

wobei die Schreibweise $f(u) \sim g(u)$ bedeutet, dass $\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{g(u)} = 1$.

Beweis: Die Dichte der Standardnormalverteilung ist $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-u^2/2}$. Mit der Regel von L'Hospital für den Fall „0/0" ergibt sich

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\mathbb{P}[X > u]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}u}\mathrm{e}^{-u^2/2}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\int_u^\infty \mathrm{e}^{-s^2/2} ds}{\frac{1}{u}\mathrm{e}^{-u^2/2}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{-\mathrm{e}^{-u^2/2}}{-\frac{1}{u^2}\mathrm{e}^{-u^2/2} - u\frac{1}{u}\mathrm{e}^{-u^2/2}} = \lim_{u\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{u^2}+1} = 1.$$

Schritt 2: Exponentialungleichung. Wir behaupten, dass

$$\mathbb{P}\left[\max_{k\le n} S_k \ge c\right] \le \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2n}} \quad \text{für alle } c > 0.$$

Beweis. Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist ein Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto \mathrm{e}^{\theta x}$ konvex, also ist die Folge $(\mathrm{e}^{\theta S_n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Submartingal. Für dessen Erwartungswert gilt

$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{\theta S_n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\theta^2 n},$$

da $S_n \sim \mathrm{N}(0, n)$. Nun können wir für jedes $\theta > 0$ die Doob-Ungleichung anwenden:

$$\mathbb{P}\left[\max_{k=0,\ldots,n} S_k \ge c\right] = \mathbb{P}\left[\max_{k=0,\ldots,n} \mathrm{e}^{\theta S_k} \ge \mathrm{e}^{\theta c}\right] \le \mathrm{e}^{-\theta c} \cdot \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\theta S_n}\right] = \mathrm{e}^{-\theta c + \frac{1}{2}\theta^2 n}.$$

Wir minimieren die rechte Seite durch die richtige Wahl von θ. Durch Ableiten sieht man, dass das Minimum für $\theta = c/n$ erreicht wird, was zur Abschätzung

$$\mathbb{P}\left[\max_{k=0,\ldots,n} S_k \ge c\right] \le \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{n} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{n^2}\cdot u} = \mathrm{e}^{-\frac{c^2}{2n}}$$

führt. □

Schritt 3: Die obere Schranke. Wir benutzen die Abkürzung $h(n) := \sqrt{2n \log\log n}$, was für $n \ge e$ wohldefiniert ist. In diesem Schritt zeigen wir, dass

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{S_k}{h(k)} \le 1 \text{ f.s.} \tag{16.2}$$

Naiver Versuch. Nach dem Lemma von Borel–Cantelli reicht zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}\left[\frac{S_k}{h(k)} \ge 1 + \varepsilon\right] < \infty. \tag{16.3}$$

Das können wir wie folgt umstellen:

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}\left[\frac{S_k}{\sqrt{k}} \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2\log\log k}\right] < \infty.$$

Die Zufallsvariable $S_k/\sqrt{k}$ ist standardnormalverteilt, also gilt nach Schritt 1

$$\mathbb{P}\left[\frac{S_k}{\sqrt{k}} \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2\log\log k}\right] \sim \frac{\mathrm{e}^{-(1+\varepsilon)^2(\log\log k)}}{\sqrt{2\pi}(1+\varepsilon)\sqrt{2\log\log k}} = \frac{C}{\sqrt{\log\log k}\,(\log k)^{(1+\varepsilon)^2}}.$$

Diese Reihe ist aber divergent, so dass (16.3) falsch ist! Warum ist nun unser Versuch misslungen? Weil wir das Lemma von Borel–Cantelli auf "stark abhängige" Ereignisse angewendet haben. Die Zufallsvariablen $S_k/h(k)$ und $S_{k+1}/h(k+1)$ sind nämlich für großes k approximativ gleich und die entsprechenden Ereignisse somit fast identisch. Im Folgenden werden wir den obigen Versuch verbessern, indem wir das Lemma von Borel–Cantelli im Wesentlichen auf eine geometrische Teilfolge von k's anwenden werden.

Beweis von (16.2). Sei $a > 1$ fest (am Ende des Beweises werden wir a gegen 1 gehen lassen). Mit der Exponentialungleichung aus Schritt 2 ergibt sich[9]

$$\mathbb{P}\left[\max_{k\leq a^n} S_k \geq ah(a^{n-1})\right] \leq \mathrm{e}^{-\frac{a^2h^2(a^{n-1})}{2a^n}} = \mathrm{e}^{-a^2\cdot a^{n-1}\cdot \log\log a^{n-1}/a^n} = (n-1)^{-a}(\log a)^{-a}.$$

Nun gilt $\sum_{n\geq 3}\frac{1}{(n-1)^a} < \infty$ wegen $a > 1$, also erhalten wir mit dem Lemma von Borel–Cantelli, dass es ein (zufälliges und f.s. endliches) $n_0(\omega)$ gibt mit der Eigenschaft, dass

$$\max_{k\leq a^n} S_k < ah(a^{n-1}) \text{ für alle } n > n_0(\omega).$$

Für alle $a^{n-1} \leq k \leq a^n$ gilt dann

$$S_k \leq \max_{j\leq a^n} S_j < ah(a^{n-1}) \leq ah(k).$$

Somit haben wir gezeigt, dass $\limsup_{k\to\infty}\frac{S_k}{h(k)} \leq a$. Da das für jedes $a > 1$ gilt, ist (16.2) bewiesen.

Schritt 4: Die untere Schranke. Wir zeigen, dass

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{S_k}{h(k)} \geq 1. \tag{16.4}$$

Es reicht zu zeigen, dass mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Ereignisse $S_k \geq (1-\varepsilon)h(k)$ eintreten. Selbst wenn wir die Ereignisse durch Betrachtung einer geometrischen Teilfolge "schwach abhängig" machen, bleiben die Ereignisse abhängig, so dass wir den zweiten Teil des Lemmas von Borel–Cantelli nicht anwenden können. Wir werden diese Schwierigkeit umgehen, indem wir die Zuwächse der Irrfahrt betrachten.

Seien $N \in \{2,3,\ldots\}$ und $\varepsilon > 0$ fest (am Ende des Beweises werden wir $N \to \infty$ und $\varepsilon \downarrow 0$ gehen lassen). Betrachte die *unabhängigen* Ereignisse

$$F_n := \{S_{N^{n+1}} - S_{N^n} > (1-\varepsilon)h(N^{n+1}-N^n)\}.$$

Für die Wahrscheinlichkeit von F_n erhalten wir mit dem Ergebnis aus Schritt 1 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[F_n] &= \mathbb{P}\left[X_1 > (1-\varepsilon)\sqrt{2\log\log(N^{n+1}-N^n)}\right]\\ &\geq \frac{c}{\sqrt{\log\log(N^{n+1}-N^n)}}\cdot \mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)^2\log\log(N^{n+1}-N^n)}\\ &\geq \frac{c}{\sqrt{\log((n+1)\log N)}}\mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)^2\log\log(N^{n+1})}\\ &= \frac{C}{\sqrt{\log(n+1)+\log\log N}}\big((n+1)\log N\big)^{-(1-\varepsilon)^2}.\end{aligned}$$

[9] Da a nicht ganzzahlg sein muss, sind Größen wie S_{a^n} nicht definiert. Strikt genommen, hätten wir überall die Gauß–Klammer benutzen müssen. Wir verzichten darauf, um die Notation zu vereinfachen.

Es folgt, dass $\sum_{n\geq 3}\mathbb{P}[F_n]=\infty$, denn $\sum_{n\geq 3}(n+1)^{-(1-\varepsilon)^2}=\infty$. Da die Ereignisse F_n unabhängig sind, können wir den zweiten Teil des Lemmas von Borel–Cantelli anwenden. Es treten also mit Wahrscheinlichkeit 1 unendlich viele Ereignisse F_n ein. Es gilt also

$$S_{N^{n+1}} > (1-\varepsilon)h(N^{n+1}-N^n)+S_{N^n} \text{ für unendlich viele } n.$$

Aus Schritt 3 folgt, dass $S(N^n)>-2h(N^n)$ für n hinreichend groß. Somit gilt für unendlich viele n:

$$S_{N^{n+1}} > (1-\varepsilon)h(N^{n+1}-N^n)-2h(N^n).$$

Es folgt, dass

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{S_k}{h(k)} \geq \limsup_{n\to\infty}\frac{(1-\varepsilon)h(N^{n+1}-N^n)-2h(N^n)}{h(N^{n+1})}=(1-\varepsilon)\left(1-\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\sqrt{N}},$$

wobei wir benutzt haben, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{h(an)}{h(n)}=\sqrt{a}$. Die obige Abschätzung gilt für alle $N\in\{2,3,\ldots\}$ und $\varepsilon>0$. Lassen wir $N\to\infty$ und $\varepsilon\downarrow 0$, so ergibt sich (16.4). □

Aufgabe 16.2. Seien $X_1,X_2,\ldots$ standardnormalverteilt und unabhängig. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{\sqrt{2\log n}}=1 \text{ f.s.}$$

17. Austauschbarkeit und das 0-1-Gesetz von Hewitt und Savage

Seien $X_1,X_2,\ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. In diesem Abschnitt werden wir diese Zufallsvariablen auf dem "kanonischen" Wahrscheinlichkeitsraum betrachten, der wie folgt definiert ist. Als Grundmenge nehmen wir die Menge aller Zahlenfolgen

$$\Omega:=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots=\{\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots):\omega_n\in\mathbb{R} \text{ für alle } n\in\mathbb{N}\}.$$

Auf Ω betrachten wir die Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F}=\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\ldots$, die von den "Zylindermengen" der Form

$$\begin{aligned}Z(A_1,\ldots,A_n)&:=A_1\times\ldots\times A_n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\\&=\{\omega\in\Omega:\omega_1\in A_1,\ldots,\omega_n\in A_n\},\quad n\in\mathbb{N},\ \ A_1,\ldots,A_n\subset\mathbb{R}\text{ Borel},\end{aligned}$$

erzeugt wird. Wir definieren nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\Omega,\mathcal{F})$ durch

$$\mathbb{P}[(-\infty,a_1]\times\ldots(-\infty,a_n]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots]=F(a_1)\cdot\ldots\cdot F(a_n)$$

für alle $n\in\mathbb{N}$ und $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$. Die Existenz eines solchen Wahrscheinlichkeitsmaßes folgt aus dem Existenzsatz von Kolmogorov und wird hier nicht bewiesen. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Maßfortsetzung, da die Mengen, für die das Maß definiert wurde, ein schnittstabiles System bilden.

Schließlich definieren wir auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ die Zufallsvariablen $X_1,X_2,\ldots:\Omega\to\mathbb{R}$ als Koordinatenabbildungen:

$$X_n(\omega_1,\omega_2,\ldots)=\omega_n.$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Zufallsvariablen unabhängig sind und die geforderte Verteilungsfunktion F besitzen.

Nun werden wir austauschbare Ereignisse einführen. Grob gesagt ist ein Ereignis austauschbar, wenn es sich unter beliebigen endlichen Permutationen der Zufallsvariablen $X_1,X_2,\ldots$

nicht ändert. So ist z.B. das Ereignis $\{2X_1 + X_2 > 0\}$ nicht austauschbar, denn permutiert man X_1 und X_2, so wird daraus $\{2X_2 + X_1 > 0\}$, also ein anderes Ereignis.

Sei $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ eine Permutation. Ein Ereignis $A \in \mathcal{F}$ heißt *invariant* bezüglich π, falls

$$(\omega_1, \dots, \omega_n, \omega_{n+1}, \dots) \in A \iff (\omega_{\pi(1)}, \dots, \omega_{\pi(n)}, \omega_{n+1}, \dots) \in A.$$

Sei $\mathcal{E}_n$ die σ-Algebra aller Ereignisse, die bezüglich aller Permutationen der ersten n Koordinaten invariant bleiben. Es gilt offenbar $\mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2 \supset \dots$.

Beispiel 17.1. $\{X_1 + \ldots + X_n \in [a, b]\} \in \mathcal{E}_n$, aber $\{2X_1 + X_2 > 0\} \notin \mathcal{E}_2$.

Definition 17.2. Die σ-Algebra der *austauschbaren* Ereignisse ist definiert durch

$$\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n.$$

Beispiel 17.3 (Austauschbare Ereignisse)**.**

- $\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert}\} \in \mathcal{E}$.
- $\{\lim_{n\to\infty} \frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \text{ existiert}\} \in \mathcal{E}$.
- $\{X_n > 0 \text{ für unendlich viele } n\} \in \mathcal{E}$.
- $\{X_n > 0 \text{ für alle } n\} \in \mathcal{E}$.

Das Ereignis $\{X_1 + X_2 > 0\}$ ist nicht austauschbar. Man kann nämlich auch X_1 und X_3 permutieren, dann wird daraus $\{X_3 + X_2 > 0\}$.

Beispiel 17.4 (Terminale Ereignisse sind austauschbar)**.** Die terminale σ-Algebra ist definiert als $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$, wobei $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{E}_n$ und somit $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$. Ein Ereignis A liegt in $\mathcal{T}_n$, wenn das Eintreten oder Nichteintreten dieses Ereignisses von den ersten n Koordinaten $\omega_1, \dots, \omega_n$ nicht beeinflusst wird. Insbesondere kann man die ersten n Koordinaten beliebig permutieren ohne das Eintreten/Nichteintreten zu beeinflussen. Also ist $A \in \mathcal{E}_n$.

Satz 17.5 (0-1-Gesetz von Hewitt und Savage)**.** Für jedes austauschbare Ereignis A gilt $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$.

Angesichts von Beispiel 17.4 erhalten wir als Korollar das 0-1-Gesetz von Kolmogorov: Jedes terminale Ereignis hat Wahrscheinlichkeit 0 oder 1.

Der Beweis des 0-1-Gesetzes von Hewitt und Savage bedarf einiger Vorbereitungen.

Definition 17.6. Seien $X_1, X_2, \ldots$ u.i.v. Zufallsvariablen und $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine Borel–Funktion. Eine *U–Statistik* ist eine Zufallsvariable der Form

$$A_n(\varphi) = \frac{1}{(n)_k} \sum_i \varphi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}),$$

wobei die Summe über alle $i = (i_1, \ldots, i_k)$ mit paarweise verschiedenen $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ gebildet wird, und $(n)_k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ die Anzahl der Summanden ist.

Beispiel 17.7 (U–Statistiken)**.**

- Der Mittelwert $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist eine U–Statistik mit $\varphi(x) = x$, $k = 1$.
- Die Stichprobenvarianz lässt die Darstellung

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \frac{(X_i - X_j)^2}{2}$$

  zu und ist somit ist eine U–Statistik mit $k = 2$ und $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2/2$.
- $\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} |X_i - X_j|$ ist ebenfalls eine U–Statistik mit $k = 2$.
- Die empirische Verteilungsfunktion $\hat{F}_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i \leq t\}}$ (bei festem $t \in \mathbb{R}$) ist eine U–Statistik mit $k = 1$, $\varphi(x_1) = \mathbb{1}_{\{x_1 \leq t\}}$.

Aufgabe 17.8. Zeigen Sie, dass $A_n(\varphi)$ ein erwartungstreuer Schätzer von $\mathbb{E}\varphi(X_1, \ldots, X_k)$ ist, nämlich

$$\mathbb{E}A_n(\varphi) = \mathbb{E}\varphi(X_1, \ldots, X_k)$$

(falls der Erwartungswert existiert). Das "U" in der Bezeichnung der U–Statistik steht für "unbiased".

Satz 17.9 (Gesetz der großen Zahlen für U-Statistiken)**.** Sei $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Borel–Funktion. Dann gilt

$$A_n(\varphi) \xrightarrow[n \to \infty]{f.s.} \mathbb{E}\varphi(X_1, \ldots, X_k).$$

Beweis. Die Zufallsvariable $A_n(\varphi)$ ändert sich nicht unter beliebigen Permutationen von $X_1, \ldots, X_n$ und ist somit $\mathcal{E}_n$-messbar. Wir haben also die Darstellung

$$A_n(\varphi) = \mathbb{E}[A_n(\varphi)|\mathcal{E}_n] = \frac{1}{(n)_k} \sum_i \mathbb{E}[\varphi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k})|\mathcal{E}_n] = \mathbb{E}[\varphi(X_1, \ldots, X_k)|\mathcal{E}_n],$$

wobei die letzte Gleichheit aus Symmetriegründen folgt. Hier ist ein Erklärungsversuch: Wenn wir einen bedingten Erwartungswert gegeben $\mathcal{E}_n$ betrachten, so heißt es, dass uns die Menge der Werte $\{X_1, \ldots, X_n\}$ gegeben ist, nicht aber die Reihenfolge. Gegeben diese

Information erwarten wir von $\varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ genau das gleiche wie von $\varphi(X_1, \dots, X_k)$. Also sind alle bedingten Erwartungswerte gleich, weshalb die letzte Gleichheit gilt.

Sei $Y := \varphi(X_1, \dots, X_k)$. Zu zeigen ist also, dass $\mathbb{E}[Y|\mathcal{E}_n] \to \mathbb{E}[Y]$ f.s. Die σ-Algebren $\ldots \subset \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}$ bilden eine Rückwärtsfiltration. Der Schnitt dieser σ-Algebren ist $\mathcal{E}$ und die Folge $\ldots, \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}_2], \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}_1], Y$ bildet ein Rückwärtsmartingal. Also gilt gemäß Satz 14.6

$$A_n(\varphi) = \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}_n] \xrightarrow[n\to\infty]{f.s.} \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}].$$

Zu zeigen bleibt also, dass $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]$. Wir zeigen zuerst, dass $\mathbb{E}[Y|\varepsilon]$ $\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots)$-messbar ist. In der Definition von $A_n(\varphi)$ gibt es $k(n-1)_{k-1}$ Terme, die X_1 enthalten. Somit gibt es in $A_n(\varphi)$ höchstens $k^2(n-1)_{k-1}$ Terme, die eine der Variablen $X_1, \dots, X_k$ enthalten. Für die Summe dieser Terme gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{(n)_k}\Bigg| \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \in \{1,\dots,n\} \\ \{i_1,\dots,i_k\}\cap\{1,\dots,k\}\neq\varnothing \\ i_j \text{ paarw. verschieden}}} \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})\Bigg| \le \frac{k^2(n-1)_{k-1}}{(n)_k} \sup|\varphi| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also kann die Summe dieser Terme vernachlässigt werden und wir erhalten

$$\mathbb{E}[Y|\varepsilon] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n)_k} \sum_i \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n)_k} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_k \in \{k+1,\dots,n\} \\ i_j \text{ paarw. verschieden}}} \varphi(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}).$$

Somit ist $\mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]$ $\sigma(X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots)$-messbar. Also sind $\mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]$ und $Y = \varphi(X_1, \dots, X_k)$ unabhängige Zufallsvariablen!

Wir zeigen schließlich, dass $\mathbb{E}[Y|\varepsilon] = \mathbb{E}Y$. Wegen der Unabhängigkeit von $Z := \mathbb{E}[Y|\mathcal{E}]$ und Y gilt

$$\mathbb{E}[YZ] = (\mathbb{E}Y)(\mathbb{E}Z) = (\mathbb{E}Z)^2.$$

Auf der anderen Seite liefert die geometrische Interpretation des bedingten Erwartungswertes, dass $\mathbb{E}[(Y-Z)Z] = 0$, also $\mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[Z^2]$. Es folgt, dass $(\mathbb{E}Z)^2 = \mathbb{E}[Z^2]$. Somit verschwindet die Varianz von Z und Z ist konstant. Aus $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}Y$ folgt schließlich, dass $Z = \mathbb{E}Y$. Wir haben somit gezeigt, dass $\mathbb{E}[Y|\mathcal{E}] = \mathbb{E}Y$ f.s. □

Beweis von Satz 17.5. Wir haben im Beweis von Satz 17.9 gezeigt, dass

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1, \dots, X_k)|\mathcal{E}] = \mathbb{E}[\varphi(X_1, \dots, X_k)] \text{ f.s.}$$

für jede beschränkte Borel–Funktion $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. So erhalten wir z.B. für $\varphi = \mathbb{1}_B$, wobei $B \subset \mathbb{R}^k$ eine Borel–Menge ist,

$$\mathbb{P}[\varphi(X_1, \dots, X_k) \in B|\mathcal{E}] = \mathbb{P}[\varphi(X_1, \dots, X_k) \in B] \text{ f.s.}$$

Also ist die σ-Algebra $\sigma(X_1, \dots, X_k)$ unabhängig von $\mathcal{E}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass das System $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(X_1, \dots, X_k)$ unabhängig von $\mathcal{E}$ ist. Da dieses System schnittstabil ist, folgt, dass die von diesem System erzeugte σ-Algebra unabhängig von $\mathcal{E}$ ist. Insbesondere ist $\mathcal{E}$ von sich selbst unabhängig. Aber das ist nur dann möglich, wenn alle Ereignisse aus $\mathcal{E}$ Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 haben. □ □

18. Austauschbarkeit und der Satz von de Finetti

Definition 18.1. Eine Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ von Zufallsvariablen heißt *austauschbar*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \stackrel{d}{=} (\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)}) \quad \text{(in Verteilung)}$$

gilt. So soll z.B. (ξ_1, ξ_2, ξ_3) die gleiche Verteilung wie (ξ_3, ξ_1, ξ_2) haben.

Wir gehen davon aus, dass die Zufallsvariablen als Koordinatenabbildungen $\xi_i(\omega_1, \omega_2, \ldots) = \omega_i$ auf der kanonischen Grundmenge $\mathbb{R}^\infty$ mit der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{F}$ definiert sind.

Beispiel 18.2. U.i.v. Zufallsvariablen sind austauschbar.

Beispiel 18.3 (Mischungen von u.i.v. Folgen)**.** Um eine allgemeinere Klasse von austauschbaren Folgen zu konstruieren, betrachten wir ein zweistufiges Zufallsexperiment.

Schritt 1. Erzeuge ein WMaß μ auf $\mathbb{R}$ zufällig. Im einfachsten Fall geschieht das wie folgt. Aus einer vorgegebenen endlichen oder abzählbaren Folge $\mu_1, \mu_2, \ldots$ von WMaßen wird eins zufällig ausgewählt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Wahl auf μ_i fällt, sei mit p_i bezeichnet: $\mathbb{P}[\mu = \mu_i] = p_i$. Im Allgemeinen betrachten wir die Menge $\mathcal{M}_1$ aller WMaße auf $\mathbb{R}$. Diese sei mit der Topologie der schwachen Konvergenz und der entsprechenden Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{M}_1)$ versehen. Nun wählen wir zufällig ein WMaß $\mu \in \mathcal{M}_1$ gemäß einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbb{Q}$ auf $(\mathcal{M}_1, \mathcal{B}(\mathcal{M}_1))$ aus. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein WMaß aus einer Borel–Menge $A \subset \mathcal{M}_1$ ausgewählt wird, sei also $\mathbb{Q}(A)$:

$$\mathbb{P}[\mu \in A] = \mathbb{Q}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_1).$$

Schritt 2: Gegeben das WMaß μ erzeuge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *bedingt* u.i.v. mit Wahrscheinlichkeitsverteilung μ. Es sei bemerkt, dass $\xi_1, \xi_2, \ldots$ alle von der zufälligen Wahl von μ abhängen, so dass die Unabhängigkeit dieser Zufallsvariablen lediglich eine *bedingte* ist.

Beispiel: Zuerst erzeugt man zufällig eine positive Zahl λ, danach erzeugt man unendlich viele exponentialverteilte Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mit Parameter λ (der für alle Zufallsvariablen der gleiche bleibt).

Wir behaupten, dass die so erzeugte Folge austauschbar ist. Für die gemeinsame Verteilung von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gilt mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n] = \int_{\mathcal{M}_1} \mu(A_1) \ldots \mu(A_n) \mathbb{Q}(\mathrm{d}\mu).$$

Im einfachsten Spezialfall, der oben erwähnt wurde, gilt z.B.

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_n \in A_n | \mu = \mu_i] = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \mu_i(A_1) \ldots \mu_i(A_n).$$

Für den permutierten Zufallsvektor $(\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\xi_{\pi(1)} \in A_1, \ldots, \xi_{\pi(n)} \in A_n] &= \mathbb{P}[\xi_1 \in A_{\pi^{-1}(1)}, \ldots, \xi_n \in A_{\pi^{-1}(n)}] \\ &= \int_{\mathcal{M}_1} \mu(A_{\pi^{-1}(1)}) \ldots \mu(A_{\pi^{-1}(n)}) \mathbb{Q}(\mathrm{d}\mu) = \int_{\mathcal{M}_1} \mu(A_1) \ldots \mu(A_n) \mathbb{Q}(\mathrm{d}\mu). \end{aligned}$$

Also ist die Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ist austauschbar.

Der Satz von de Finetti behauptet, dass jede unendliche austauschbare Folge wie im obigen Beispiel entsteht, d.h. sie ist eine Mischung von u.i.v. Folgen. Wir werden den Satz in der folgenden Form beweisen: Bedingt man auf die austauschbare σ-Algebra $\mathcal{E}$, so werden die Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ u.i.v. Wir erinnern, dass $\mathcal{E}_n$ die σ-Algebra aller Ereignisse $A \in \mathcal{F}$ im kanonischen WRaum mit der Eigenschaft, dass

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n, \omega_{n+1}, \ldots) \in A \iff (\omega_{\pi(1)}, \ldots, \omega_{\pi(n)}, \omega_{n+1}, \ldots) \in A$$

für alle Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, bezeichnet. Die σ-Algebra der austauschbaren Ereignisse ist definiert durch $\mathcal{E} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{E}_n$.

Satz 18.4 (de Finetti)**.** Sei $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ eine austauschbare Folge. Dann sind $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ bedingt u.i.v. gegeben $\mathcal{E}$, d.h.

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A | \mathcal{E}_n] = \mathbb{P}[\xi_2 \in A | \mathcal{E}] = \ldots \quad \text{f.s.,} \tag{18.1}$$

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_m \in A_m | \mathcal{E}] = \prod_{k=1}^{m} \mathbb{P}[\xi_k \in A_k | \mathcal{E}] \quad \text{f.s.} \tag{18.2}$$

für alle Borel-Mengen $A, A_1, \ldots, A_k \subset \mathbb{R}$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis von (18.1)**.** Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ und gilt aus Symmetriegründen

$$\mathbb{P}[\xi_i \in A | \mathcal{E}_n] = \mathbb{P}[\xi_j \in A | \mathcal{E}_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\xi_k \in A} \quad \text{f.s.}$$

sobald $n \geq \max(i, j)$ ist. Nun bilden die σ-Algebren $\ldots \subset \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{F}$ eine Rückwärtsfiltration und der Schnitt dieser σ-Algebren ist $\mathcal{E}$. Mit dem Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale (Satz 14.6) erhalten wir

$$\mathbb{P}[\xi_i \in A | \mathcal{E}] = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}[\xi_i \in A | \mathcal{E}_n] = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\xi_k \in A} \quad \text{f.s.} \tag{18.3}$$

Analoge Aussage gilt auch für $\mathbb{P}[\xi_j \in A | \mathcal{E}]$ und die Behauptung folgt, da der Limes auf der rechten Seite unabhängig von i und j ist. □

Beweis von (18.2)**.** Aus Symmetriegründen gilt für alle $n \geq m$

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_m \in A_m | \mathcal{E}_n] = \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, n\} \\ k_i \text{ paarw. verschieden}}} \mathbb{1}_{\xi_{k_1} \in A_1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{\xi_{k_m} \in A_m} \quad \text{f.s.}$$

Mit dem Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale erhalten wir

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_m \in A_m | \mathcal{E}] = \lim_{n \to \infty} \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, n\} \\ k_i \text{ paarw. verschieden}}} \mathbb{1}_{\xi_{k_1} \in A_1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{\xi_{k_m} \in A_m} \quad \text{f.s.} \tag{18.4}$$

Wir behaupten nun, dass die Bedingung, dass die Indizes $k_1, \ldots, k_m$ verschieden sein sollen, weggelassen werden kann, nämlich

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_m \in A_m | \mathcal{E}] = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-m)!}{n!} \sum_{k_1,\ldots,k_m \in \{1,\ldots,n\}} \mathbb{1}_{\xi_{k_1} \in A_1} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{\xi_{k_m} \in A_m} \quad \text{f.s.} \tag{18.5}$$

Um zu zeigen, dass beide Grenzwerte gleich sind, bemerken wir, dass es n^m Summanden mit beliebigen Indizes $k_1, \ldots, k_m$, und $n!/(n-m)!$ Summanden mit verschiedenen Indizes gibt. Die Summe aller Terme mit nicht paarweise verschiedenen Indizes $k_1, \ldots, k_m$ kann nach oben durch $n^m - \frac{n!}{(n-m)!}$ abgeschätzt werden, da alle Summanden ≤ 1 ist. Nun gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m - \frac{n!}{(n-m)!}}{\frac{n!}{(n-m)!}} = 0,$$

weshalb alle Terme mit nicht paarweise verschiedenen Indizes für $n \to \infty$ vernachlässigt werden können und die beiden Grenzwerte in (18.4) und (18.5) gleich sind. Wir schreiben schließlich (18.5) wie folgt um:

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_m \in A_m | \mathcal{E}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^m} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\xi_k \in A_1} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\xi_k \in A_m} \right) \quad \text{f.s.} \tag{18.6}$$

Nun haben wir aber in (18.3) gezeigt, dass

$$\mathbb{P}[\xi_i \in A_i | \mathcal{E}] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\xi_k \in A_i} \quad \text{f.s.}$$

Durch Vergleich der beiden Formeln ergibt sich

$$\mathbb{P}[\xi_1 \in A_1, \ldots, \xi_m \in A_m | \mathcal{E}] = \mathbb{P}[\xi_1 \in A_1 | \mathcal{E}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}[\xi_m \in A_m | \mathcal{E}] \quad \text{f.s.},$$

was die Behauptung beweist. □

Gegeben die austauschbare σ-Algebra $\mathcal{E}$ sind die Zufallsvariablen $\xi_1, \xi_2, \ldots$ also bedingt u.i.v. mit einer Verteilung μ. Wenn wir nun wieder über die in $\mathcal{E}$ gegebene Information integrieren, wird μ zufällig und wir erhalten eine Darstellung der Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ als eine Mischung aus u.i.v. Folgen.

Beispiel 18.5. Seien $\xi_1, \xi_2, \ldots$ austauschbar mit Werten in $\{0, 1\}$. Gegeben $\mathcal{E}$ ist die Folge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ u.i.v. mit Werten in $\{0, 1\}$, also eine Bernoulli-Folge. Eine solche Folge wird durch eine Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ beschrieben. Integrieren wir nun über die Information, die in $\mathcal{E}$ enthalten ist, so wird $p \in [0, 1]$ zufällig mit einer gewissen Verteilung Θ. Dabei ist Θ ein WMaß auf dem Intervall $[0, 1]$.

Die Verteilung von $\xi_1, \xi_2, \ldots$ kann man also mit einem zweistufigen Zufallsexperiment beschreiben. Zuerst erzeugt man ein zufälliges $p \in [0, 1]$ mit Wahrscheinlichkeitsverteilung Θ. Danach führt man Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit p durch und bezeichnet die Ergebnisse mit $\xi_1, \xi_2, \ldots$. Für die Verteilung von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gilt dann mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n] &= \int_0^1 \mathbb{P}[\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n | p] \, \Theta(\mathrm{d}p) \\ &= \int_0^1 p^{x_1 + \dots + x_n} (1-p)^{n-(x_1+\dots+x_n)} \, \Theta(\mathrm{d}p)\end{aligned}$$

für alle $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$.

Beispiel 18.6. Wir betrachten eine Pólya–Urne, in der am Anfang a weiße und b schwarze Bälle enthalten sind. Es sei $\xi_k = 1$, falls der k-te gezogene Ball weiß ist, und $\xi_k = 0$ sonst. Es sei dem Leser als Übung überlassen, zu zeigen, dass $\xi_1, \xi_2, \dots$ eine austauschbare Folge ist. Nach dem Satz von de Finetti muss diese Folge eine Bernoulli-Folge mit einer zufälligen Erfolgswahrscheinlichkeit p sein. Dabei kann man p mit dem Gesetz der großen Zahlen identifizieren:

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \quad \text{f.s.}$$

Dabei sei aber hervorgehoben, dass p zufällig ist! Somit ist p nichts anderes als der Grenzwert X_∞ des in Beispiel 8.7 konstruierten Martingals $X_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + \dots + \xi_n + a + b)$. Man kann zeigen, dass $p \sim \mathrm{Beta}(a, b)$.

***