Skript

Stochastische Analysis

Steffen Schwarz

9. Juni 2020

Dozent: PD Dr. Volkert Paulsen

Fakultät für Mathematik

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

20.10.15

Inhalt der Vorlesung

I Stochastische Integration

1. zeitstetige Martingaltheorie
2. Definition des stochastischen Integralprozesses
3. Definition der quadratischen Variation
4. Lokalisation

II Itō-Kalkül

1. Itō-Formel
2. lineare stochastische Differentialgleichungen
3. Hauptsätze der stochastischen Analysis

III Stochastische Differentialgleichungen

1. starke Lösbarkeit

I Stochastische Integration

1 Zeitstetige Martingaltheorie

Ziel: Bereitstellung der Hilfsmittel für die stochastische Integration

Setup 1.1.
Wir haben einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definition 1.1.1. *Eine Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *ist eine aufsteigende Familie von* σ*-Algebren mit* $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$.
$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$

Definition 1.1.2. *Ein stochastischer Prozess* X *ist eine Familie* $(X_t)_{t\geq 0}$ *von Zufallsvariablen mit Werten in* $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

Definition 1.1.3. X *ist adaptiert bzgl. der Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, *wenn* X_t *messbar ist bzgl.* $\mathcal{F}_t$ *für alle* $t \geq 0$.

Definition 1.1.4. *Durch* $\mathcal{F}_t^X := \sigma(X_s : s \le t)$ *für alle* $t \ge 0$ *wird die zu* X *gehörige kanonische Filtration definiert.* X *ist bzgl.* $(\mathcal{F}_t^X)_{t\ge 0}$ *adaptiert.*
Genauer: $\mathcal{F}_t^X = \sigma\left(\bigcup_{s\le t} \sigma(X_s)\right) = \sigma\left(\bigcup_{s\le t} X_s^{-1}(\mathcal{B})\right)$

Pfadeigenschaften

Definition 1.1.5. X *hat stetige Pfade, wenn*

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

stetig ist für alle $t \ge 0$ *und* $\omega \in \Omega$

Definition 1.1.6. X *hat rechtsseitig stetige Pfade, wenn*

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

rechtsseitig stetig ist für alle $t \ge 0$ *und* $\omega \in \Omega$

Definition 1.1.7. X *ist linksseitig limitierbar, wenn für jedes* $t > 0$ *der Limes* $\lim_{s\uparrow t} X_s(\omega)$ *existiert für alle* $\omega \in \Omega$

Definition 1.1.8. X *hat cadlag-Pfade, wenn* X *rechtsseitig stetig und linksseitig limitierbar ist.*

Äquivalenzklassen

Definition 1.1.9. *Ein* $A \subseteq \Omega$ *heißt vernachlässigbar, falls es ein* $N \subseteq \mathcal{F}$ *gibt, mit* $\mathbb{P}(N) = 0$ *und* $A \subseteq N$.

Definition 1.1.10. *Wir sagen, dass eine Eigenschaft* E $\mathbb{P}$*-fast sicher erfüllt ist, wenn*

$$\{\omega : \omega \text{ erfüllt nicht } E\}$$

vernachlässigbar ist.

Zwei unterschiedliche Äquivalenzbegriffe

Definition 1.1.11. *X heißt Modifikation von Y, falls*

$$\{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

vernachlässigbar ist für alle $t \geq 0$.

Definition 1.1.12. *X heißt nicht unterscheidbar von Y, falls*

$$\{\omega : \exists t \geq 0 : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\} = \bigcup_{t \geq 0} \{\omega : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

vernachlässigbar ist.

Bemerkung. *(i) Ist X nicht unterscheidbar von Y, so sind X und Y Modifikationen.*

(ii) Haben X und Y $\mathbb{P}$-f.s. rechtsseitig stetige Pfade und sind X und Y Modifikationen, so sind X und Y auch nicht unterscheidbar.

Definition 1.2. *Ein $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptierter stochastischer Prozess X heißt Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, falls gilt:*

(i) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ *für alle* $t \geq 0$

(ii) $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ *für alle* $0 \leq s \leq t$

Entsprechend Submartingal, falls

(i) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ *für alle* $t \geq 0$

(ii) $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ *für alle* $0 \leq s \leq t$

und Supermartingal, falls

(i) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ *für alle* $t \geq 0$

(ii) $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ *für alle* $0 \leq s \leq t$

Hauptbeispiele sind die zum Wiener-Prozess gehörenden Martingale.

Definition 1.3. *Ein bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptierter Prozess W heißt Wiener-Prozess, falls gilt:*

(i) $W_0 = 0$ *$\mathbb{P}$-f.s.*

(ii) $W_t - W_s$ *ist stochastisch unabhängig von* $\mathcal{F}_s$ *für alle* $0 \leq s \leq t$

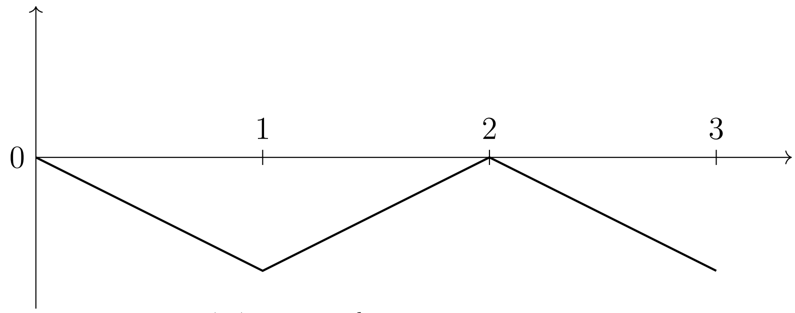
(iii) $W_t - W_s$ *ist verteilt wie* W_{t-s} *für alle* $0 \leq s \leq t$

(iv) $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ *für alle* $t \geq 0$

(v) W hat $\mathbb{P}$-f.s. stetige Pfade

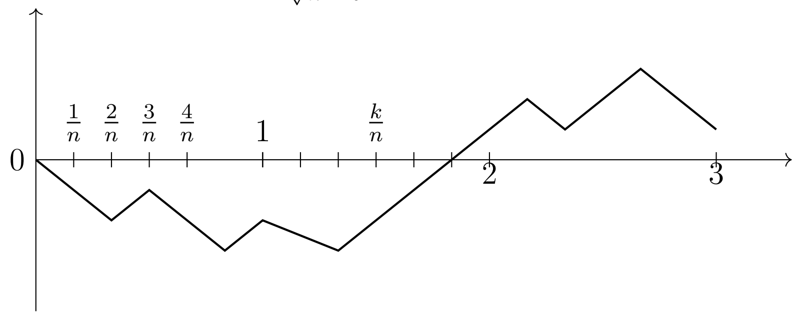
Der Wiener-Prozess startet aus der Null (i), hat unabhängige (ii) und stationäre (iii) Zuwächse, die normalverteilt (iv) sind und hat stetige Pfade (v).
Der Wiener-Prozess ist ein Beispiel für einen Lévy-Prozess (da er (ii) und (iii) erfüllt).
Konstruiert werden kann ein Wiener-Prozess als Grenzwert einer Folge von skalierten zentrierten Irrfahrten. 23.10.15
Idee: Sei $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von identisch verteilten, unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(Y_k = -1)$$



Setze $W^{(1)}(t) := \sum_{k=1}^{t} Y_k$. Durch lineare Interpolation erhält man $(W^{(1)}(t))_{t\geq 0}$. Erhöhe dann die Frequenz um den Faktor n und stauche die Höhe um $\sqrt{n}$ (da die Varianz auf n steigt).

Definiere $W^{(n)}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{k} Y_j$.



Durch lineare Interpolation erhält man $(W^{(n)}(t))_{t\geq 0}$. Durch $W^{(n)}$ wird eine Folge von stochastischen Prozessen mit stetigen Pfaden konstruiert, die gegen einen Grenzprozess $(W(t))_{t\geq 0}$ konvergiert.
W hat die definierenden Eigenschaften eines Wiener-Prozesses. (Präzisiert wird dies durch das Donskersche Invarianztheorem, vgl. WT II).

Bemerkung 1.4. *Sei W ein Wiener-Prozess bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann gilt:*

(i) $(W_t)_{t\geq 0}$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal,

(ii) $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal,

(iii) $\left(\exp(\vartheta W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)\right)_{t\geq 0}$ ist ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal für $\vartheta \in \mathbb{R}$

Beweis. (i) W_t ist $\mathcal{N}(0,t)$ verteilt $\Rightarrow \mathbb{E}|W_t| < \infty$.

$$\mathbb{E}(W_t|F_s) = \mathbb{E}(W_s + W_t - W_s|\mathcal{F}_s)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) \\
&= W_s + \mathbb{E}(W_t - W_s) \\
&= W_s + \mathbb{E}(W_{t-s}) \\
&= W_s
\end{aligned}
$$

$(ii) + (iii)$ analog. □

Bei Martingalen interessiert man sich für das Verhalten im Unendlichen.
Eine erste Antwort liefert der Martingalkonvergenzsatz

Satz 1.5 (Martingalkonvergenzsatz)**.** *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsseitig stetiges Submartingal mit $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}X_t^+ < \infty$. Dann existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Abbildung X_∞ mit*

$$X_t \longrightarrow X_\infty \qquad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

und

$$\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$$

Beweis. Rückführung auf den zeitdiskreten Fall. Wichtig ist, dass man auf die rechtsseitige Stetigkeit der Pfade nicht verzichten kann.
Vgl. Revuz, Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion □

Bemerkung. *-Jedes rechtsseitig stetige positive Martingal konvergiert $\mathbb{P}$-f.s.*
$\Rightarrow \exp(\vartheta W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)$ *konvergiert $\mathbb{P}$-f.s.:*
Da $\frac{W_t}{t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *gilt:*

$$\vartheta W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t = t\left(\vartheta \frac{W_t}{t} - \frac{1}{2}\vartheta^2\right) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \qquad \textit{falls } \vartheta \neq 0$$

- Die Prozesse

- $(W_{s+t} - W_s)_{t\geq 0}$ *für alle $s \geq 0$,*
- $(-W_t)_{t\geq 0}$ *und*
- $\left(cW_{\frac{t}{c^2}}\right)_{t\geq 0}$ *für alle $c > 0$*

sind Wiener-Prozesse.
-Der Wiener-Prozess selber ist nicht konvergent, d.h.

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} W_t = +\infty) = 1 = \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} W_t = -\infty)$$

Beweis. Zeige zuerst, dass $M := \sup_{t\geq 0} W_t$ die gleiche Verteilung hat wie cM, für alle $c > 0$.
Da sowohl $(W_t)_{t\geq 0}$ also auch $\left(cW_{\frac{t}{c^2}}\right)_{t\geq 0}$ Wiener-Prozesse sind, gilt

$$M = \sup_{t\geq 0} W_t = \sup_{t\geq 0} W_{\frac{t}{c^2}} = \frac{1}{c}\sup_{t\geq 0} cW_{\frac{t}{c^2}}$$

Also

$$cM = \sup_{t\geq 0} cW_{\frac{t}{c^2}} \sim M$$

Sei nun $a := \mathbb{P}(M = 0)$ und sei F die Verteilungsfunktion von M, d.h.

$$F(t) = \mathbb{P}(M \leq t)$$

Zeige, dass F konstant ist.
Betrachte dazu

$$a = \mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(M \leq 0) = F(0)$$

und

$$\begin{aligned} F(t) - F(0) = \mathbb{P}(0 < M \leq t) &= \mathbb{P}(0 < cM \leq ct) \\ &= \mathbb{P}(0 < M \leq ct) \\ &= F(ct) - F(0) \end{aligned}$$

wobei wir hier die gleiche Verteilung von M und cM genutzt haben. Also ist

$$F(t) = F(ct) \quad \text{für alle } 0 < c \in \mathbb{R}.$$

Da auch $t > 0$, ist F konstant auf ganz $(0, \infty)$. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Verteilungsfunktion gilt

$$F(t) = F(t+) = F(0) = a \quad \text{für alle } t > 0.$$

Hieraus folgt:

$$\mathbb{P}(M < \infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(M \leq t) = \lim_{t\uparrow\infty} F(t) = a = \mathbb{P}(M = 0)$$

und

$$\mathbb{P}(M = \infty) = 1 - a.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $a = 0$. Denn dann ist $\mathbb{P}(M = \infty) = 1$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = 0) &\leq \mathbb{P}(W_1 \leq 0, W_t - W_1 \leq -W_1 \quad \text{für alle } t \geq 0) \\ &= \mathbb{P}(W_1 \leq 0, \sup_{t\geq 0}(W_{1+t} - W_1) \leq -W_1) \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(W_1 \leq 0, \sup_{t\geq 0}(W_{1+t} - W_1) \leq -W_1 | W_1)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_1\leq 0}\ \mathbb{P}(\underbrace{\sup_{t\geq 0}(W_{1+t} - W_1)}_{\sim M} \leq -W_1 | W_1)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{\mathbb{P}(M \leq -x)}_{=\mathbb{P}(M=0)} d\mathbb{P}^{W_1}(x) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}(M=0)\underbrace{\mathbb{P}(W_1 \leq 0)}_{=\frac{1}{2}}$$

Da $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss $0 = \mathbb{P}(M=0) = a$ sein.
Das bedeutet, dass $\mathbb{P}(M=\infty) = 1$ ist. Da $(-W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess ist, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} W_t = -\infty) &= \mathbb{P}(-\sup_{t\geq 0} -W_t = -\infty)\\ &= \mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} -W_t = \infty) = 1\end{aligned}$$

□

Statt $\mathbb{P}$-f.s.-Konvergenz, kann man sich fragen , wann L_1-Konvergenz vorliegt.
Wann gilt $\mathbb{E}|X_t - X_\infty| \xrightarrow{t\to\infty} 0$?
Dafür ist es sinnvoll, den Begriff der gleichgradig Integrierbarkeit einzuführen:

Definition 1.6. *Sei I eine Indexmenge, etwa $I = [0,\infty)$. Eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in I}$ heißt gleichgradig integrierbar, wenn gilt*

$$\sup_{t\in I} \mathbb{E}|X_t|\mathbb{1}_{\{|X_t|>a\}} \xrightarrow{a\to\infty} 0$$

Häufig nützlich ist die folgende Charakterisierung:

Satz 1.7. *Sei $(X_t)_{t\in I}$ eine Familie reeller Zufallsvariablen. Dann sind äquivalent:*

(i) $(X_t)_{t\in I}$ *ist gleichgradig integrierbar.*

(ii) *a)* $\sup_{t\in I} \mathbb{E}|X_t| < \infty$ *(L_1-Beschränktheit)*

b) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{F} : \mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \sup_{t\in I} \mathbb{E}|X_t|\mathbb{1}_A < \epsilon$

(iii) Es existiert eine nicht negative, monoton wachsende konvexe Funktion $G : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ *mit*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty \ \textit{und} \ \sup_{t\in I} \mathbb{E}G(|X_t|) < \infty$$

(iv) Es existiert eine nicht negative, messbare Funktion $G : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ *mit*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty \ \textit{und} \ \sup_{t\in I} \mathbb{E}G(|X_t|) < \infty$$

Beweis. vgl. Skript Alsmeyer □

Bemerkung. *a) Jede endliche Familie von integrierbaren Zufallsvariablen ist gleichgradig integrierbar.*

b) Sind $(X_t)_{t\in I}$ und $(X_t)_{t\in J}$ gleichgradig integrierbar, so auch $(X_t)_{t\in I\cup J}$.

c) Existiert eine integrierbare Zufallsvariable Y mit $|X_t| \le Y$ für alle $t \in I$, so ist $(X_t)_{t\in I}$ gleichgradig integrierbar.

d) Aus $\sup_{t\in I} \mathbb{E}|X_t| < \infty$ folgt im Allgemeinen nicht gleichgradige Integrierbarkeit.

e) Ist $\sup_{t\in I} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty$ für ein $p > 1$, ist ist $(X_t)_{t\in I}$ gleichgradig integrierbar.

Wichtiges Beispiel:

Beispiel 1.8. *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine Menge von Unter-σ-Algebren von $\mathcal{F}$. Dann ist die Familie $(\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}))_{\mathcal{G}\in I}$ gleichgradig integrierbar, sofern Y integrierbar ist.*

Beweis. Ein einfacher Beweis nutzt die Jensensche Ungleichung für bedingte Erwartungswerte, die besagt:
Ist $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konvex, so gilt $\mathbb{E}(G(X)|\mathcal{F}) \ge G(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))$.
Y ist gleichgradig integrierbar. Es existiert also eine monoton wachsende konvexe Funktion G mit $\frac{G(x)}{x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\mathbb{E}G(|Y|) < \infty$.
Jensen liefert:

$$G(|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})|) \le \mathbb{E}(G(|Y|)|\mathcal{G})$$

Also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}G(|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})|) &\le \mathbb{E}\mathbb{E}(G(|Y|)|\mathcal{G})\\ &= \mathbb{E}G(|Y|) < \infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sup_{\mathcal{G}\in I} \mathbb{E}G(|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})|) < \infty$ □

Das Beispiel liefert, dass für $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ durch $(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t))_{t\ge 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal definiert wird.

Beweis. Die gleichgradige Integrierbarkeit folgt aus dem Beispiel. Für die Martingaleigenschaft gilt für alle $0 \le s \le t$:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s)$$

mit Hilfe der Turmeigenschaft des bedingten Erwartungswertes. □

Mittels gleichgradiger Integrierbarkeit kann auf L_1-Konvergenz geschlossen werden. 26.10.15

Satz 1.9. *Sei $(X_t)_{t\ge 0}$ ein stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ für alle $t \ge 0$ und sei X_∞ eine weitere Zufallsvariable.*
Es gelte:

a) $(X_t)_{t\ge 0}$ ist gleichgradig integrierbar,

b) $X_t \longrightarrow X_\infty$ in Wahrscheinlichkeit, das heißt,

$$\mathbb{P}(|X_t - X_\infty| > \epsilon) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Dann ist X_t auch konvergent in L_1 gegen X_∞, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}|X_t - X_\infty| = 0$$

Beweis. Beh: $X_\infty \in L_1$, d.h. $\mathbb{E}|X_\infty| < \infty$
Wegen (b) existiert eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \to \infty$ und $X_{t_n} \to X_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s.
Lemma von Fatou liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_\infty| = \mathbb{E}\liminf_{n\to\infty}|X_{t_n}| &\leq \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_{t_n}|\\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}|X_{t_n}|\\ &\leq \sup_{t\geq 0}\mathbb{E}|X_t| \underset{a)}{<} \infty\end{aligned}$$

Zeige jetzt die L_1-Konvergenz.
Sei $\epsilon > 0$.
Wegen der gleichgradigen Integrierbarkeit existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}|X_t|\mathbb{1}_A < \frac{\epsilon}{3} \text{ für alle } t \geq 0$$

und

$$\mathbb{P}(A) < \delta \Rightarrow \mathbb{E}|X_\infty|\mathbb{1}_A < \frac{\epsilon}{3}.$$

Weiter existiert ein $T \geq 0$ mit

$$\mathbb{P}(|X_t - X_\infty| > \frac{\epsilon}{3}) < \delta \text{ für alle } t \geq T.$$

Für alle $t \geq T$ gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t - X_\infty| &= \mathbb{E}|X_t - X_\infty|\mathbb{1}_{\{|X_t - X_\infty|\leq\frac{\epsilon}{3}\}} + \mathbb{E}|X_t - X_\infty|\mathbb{1}_{\{|X_t - X_\infty|>\frac{\epsilon}{3}\}}\\ &\leq \frac{\epsilon}{3}\mathbb{P}(|X_t - X_\infty| \leq \frac{\epsilon}{3}) + \mathbb{E}|X_t|\mathbb{1}_{\{|X_t - X_\infty|>\frac{\epsilon}{3}\}} + \mathbb{E}|X_\infty|\mathbb{1}_{\{|X_t - X_\infty|>\frac{\epsilon}{3}\}}\\ &\leq 3\frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

□

Eine L_p Formulierung von Satz 1.9 liefert:

Satz 1.10. *Sei $p > 1$ und $(X_t)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty$ für alle $t \geq 0$. Sei ferner X_∞ eine weitere Zufallsvariable.*
Es gelte:

a) $(|X_t|^p)_{t\geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar,

b) $X_t \longrightarrow X_\infty$ in Wahrscheinlichkeit

Dann ist X_t auch konvergent in L_p gegen X_∞, d.h.

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}|X_t - X_\infty|^p = 0$$

Beweis.

$$\mathbb{E}|X_t - X_\infty|^p \longrightarrow 0 \Leftrightarrow |X_t - X_\infty|^p \longrightarrow 0 \text{ in } L_p.$$

Weiter ist $|X_t - X_\infty|^p \longrightarrow 0$ in Wahrscheinlichkeit.
Verbleibt zu zeigen: $(|X_t - X_\infty|^p)_{t\geq 0}$ ist gleichgradig integrierbar.
Wie in Satz 1.9 folgt mit Fatou

$$\mathbb{E}|X_\infty|^p < \infty.$$

Wegen $|X_t - X_\infty|^p \leq 2^{p-1}(|X_t|^p + |X_\infty|^p)$ folgt die behauptete gleichgradige Integrierbarkeit, da $(|X_t|^p)_{t\geq 0} \cup \{|X_\infty|^p\}$ gleichgradig integrierbar ist. □

Die gleichgradig integrierbaren Martingale kann man mit $L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ identifizieren.

Satz 1.11 (Isometrie I)**.** *Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration und $\mathfrak{M}$ die Menge der gleichgradig integrierbaren $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingale.*
Dann ist

$$\begin{aligned} J: \quad \mathfrak{M} &\longrightarrow L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}) \\ X &\mapsto X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t \end{aligned}$$

ein Vektorraumisomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} I: \quad L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}) &\longrightarrow \mathfrak{M} \\ Y &\mapsto (\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t))_{t\geq 0} \end{aligned}$$

Beweis. 1. Schritt: $(I \circ J)(X) = X$
Die Wohldefiniertheit von I und J folgen aus dem Martingalkonvergenzsatz und Beispiel 1.8.
Sei $X \in \mathfrak{M}$.
Dann existiert genau ein $X_\infty \in L_1$ mit $X_t \longrightarrow X_\infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher wegen des Martingalkonvergenzsatzes.
Da $(X_t)_{t\geq 0}$ gleichgradig integrierbar ist, gilt $X_t \longrightarrow X_\infty$ in L_1.
Dies impliziert $X_t = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $t \geq 0$, denn:
Für beliebiges $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_t - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)| > \delta) &= \mathbb{P}(|\mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)| > \delta) \\ &= \mathbb{P}(|\mathbb{E}(X_T - X_\infty|\mathcal{F}_t)| > \delta) \\ &\overset{\text{Markov-}}{\underset{\text{Ungl.}}{\leq}} \frac{1}{\delta}\mathbb{E}|\mathbb{E}(|X_T - X_\infty||\mathcal{F}_t)| \\ &\leq \frac{1}{\delta}\mathbb{E}\mathbb{E}(|X_T - X_\infty||\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\delta}\mathbb{E}|X_T - X_\infty| \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

<u>2. Schritt:</u> Zur Surjektivität von J.
Für $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ ist $(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t))_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal.
Nach dem Martingalkonvergenzsatz existiert ein $X_\infty \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ mit

$$X_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t) \longrightarrow X_\infty \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Mit dem 1. Schritt folgt

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t) = X_t = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

zu zeigen: $Y = X_\infty$ $\mathbb{P}$-f.s., denn dann ist $J(X) = Y$.
Zeige hierzu: $\mathbb{E}Y\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_\infty\mathbb{1}_A$ für alle $A \in \mathcal{F}_\infty$, denn dann ist $Y = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty) = X_\infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher.
Für $A \in \mathcal{F}_t$ gilt:

$$\mathbb{E}Y\mathbb{1}_A = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_t\mathbb{1}_A = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_\infty\mathbb{1}_A$$

$\bigcup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$ bildet ein $\cap$-stabiles Erzeugendensystem für $\mathcal{F}_\infty$.
Da $\{A \in \mathcal{F}_\infty : \mathbb{E}Y\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_\infty\mathbb{1}_A\}$ ein Dynkinsystem ist, folgt die Behauptung. □

Zu bemerken ist, dass die Aussage und der Beweis an einer kleinen Stelle etwas ungenau ist. Die Frage ist, was genau der Vektorraum der gleichgradig integrierbaren Martingale ist, denn diese sind ja nicht eindeutig bestimmt. Wichtig ist, wie später noch bemerkt wird, dass es zu einem Martingal X eine Modifikation mit cadlag Pfaden gibt, die bis auf Nichtunterscheidbarkeit eindeutig bestimmt ist. Aus der Äquivalenzklasse der Modifikationen von X wird deshalb als Repräsentant die bis auf Nichtunterscheidbarkeit eindeutige Version mit cadlag Pfaden gewählt. Deshalb kann man annehmen, dass jedes Martingal X cadlag Pfade hat.
<u>Ziel:</u> Zusammenhang zu Glücksspielen.

Stoppzeiten

Definition 1.12. *Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Eine Stoppzeit τ ist eine Abbildung*

$$\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty) \cup \{+\infty\}$$

mit

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \textit{für alle } t \geq 0$$

Die Entscheidung vor t zu stoppen, hängt nur von der Information bis t ab.
Durch

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

wird die σ-Algebra der durch τ-beobachtbaren Ereignisse definiert. Eine Definition der Form

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

liefert das Gleiche.

Bemerkung. *Für σ, τ Stoppzeiten gilt:*

(i) $\sigma \wedge \tau (= \min(\sigma, \tau)), \sigma \vee \tau (= \max(\sigma, \tau)), \sigma + \tau$ *sind Stoppzeiten*

(ii) *Gilt* $\sigma \leq \tau$, *so ist* $\mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

(iii) *Ist X ein cadlag-Prozess, so ist* $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < \infty\}}$ $\mathcal{F}_\tau$*−messbar.*

(iv) *Es gilt:* $\mathcal{F}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$.

(v) *Ist* $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Folge von Stoppzeiten, so ist*

$$\sup_n \tau_n$$

eine $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *Stoppzeit und*

$$\inf_n \tau_n$$

eine $(\mathcal{F}_{t+})_{t \geq 0}$ *Stoppzeit.*

(vi) *Eine Zufallsvariable X ist* $\mathcal{F}_\tau$ *messbar genau dann, wenn* $X \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$ *messbar ist bezüglich* $\mathcal{F}_t$ *für alle* $t \geq 0$.

Dies wird später noch im Zusammenhang mit progressiv messbaren Prozessen genauer beleuchtet.

Optional Sampling

Satz 1.13 (Optional Sampling I)**.** *Sei X ein* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$*-Martingal mit cadlag Pfaden und τ eine beschränkte Stoppzeit, d.h. es existiert ein $T > 0$ mit $\tau \leq T$ $\mathbb{P}$-f.s.*
Dann gilt:

(i) $\mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$ $\mathbb{P}$*-f.s.*

(ii) $\mathbb{E} X_\tau = \mathbb{E} X_0$

Bemerkung. *Dieser Satz gilt auch für Submartingale:*
Ist $(X_t)_{t \geq 0}$ *ein cadlag Submartingal bezüglich einer Filtration* $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ *und ist τ eine, durch $T > 0$ beschränkte, Stoppzeit, so gilt:*

(i) $\mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) \geq X_\tau$

(ii) $\mathbb{E} X_T \geq \mathbb{E} X_\tau$

Beweis von Satz 1.13. (i) 1. Schritt:
τ habe nur endlich viele Werte

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_N \leq T$$

Für $A \in \mathcal{F}_\tau$ und $k \in \{1, ..., N\}$

$$A \cap \{\tau = t_k\} = (\underbrace{A \cap \{\tau \leq t_k\}}_{\in \mathcal{F}_{t_k}}) \backslash (\underbrace{A \cap \{\tau \leq t_{k-1}\}}_{\in \mathcal{F}_{t_{k-1}}}) \in \mathcal{F}_{t_k}$$

Dann ist

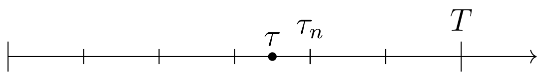
$$\int\limits_{A \cap \{\tau = t_k\}} X_\tau d\mathbb{P} = \int\limits_{\substack{A \cap \{\tau = t_k\} \\ \in \mathcal{F}_{t_k}}} X_{t_k} d\mathbb{P} = \int\limits_{A \cap \{\tau = t_k\}} X_T d\mathbb{P}$$

Also für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$:

$$\int_A X_\tau d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A \cap \{\tau = t_k\}} X_\tau d\mathbb{P} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{A \cap \{\tau = t_k\}} X_T d\mathbb{P} = \int\limits_A X_T d\mathbb{P}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) = X_\tau$

2. Schritt: Approximiere τ durch $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\tau_1 \geq \tau_2 \geq ... \downarrow \tau$ und τ_n habe endlich viele Werte. Das geschieht durch:

$\tau \leq T$ 

Wähle hierzu eine geschachtelte Folge von Zerlegungen

$$0 \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{l(n)}^{(n)} = T$$

mit $l(n)$ die maximale Anzahl der Zerlegungspunkte und mit $\max_i t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)} \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Definiere

$$\tau_n(\omega) = \inf\{t_i^{(n)} : t_i^{(n)} \geq \tau(\omega)\}$$

Dann ist $\tau_1 \geq \tau_2 \geq ... \lim_{n \to \infty} \tau_n(\omega) = \tau(\omega)$.

Wegen Schritt 1 gilt dann

$$X_{\tau_n} = \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_{\tau_n}) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (X_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar.

Zusätzlich ist

$$X_{\tau_n} \xrightarrow{n \to \infty} X_\tau \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher (cadlag-Pfade)}$$

Also $X_{\tau_n} \xrightarrow{n \to \infty} X_\tau$ in L_1.

Für $A \in \mathcal{F}_\tau$ gilt deshalb:

$$\mathbb{E} X_T \mathbb{1}_A = \mathbb{E} X_{\tau_n} \mathbb{1}_A \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E} X_\tau \mathbb{1}_A$$

Also ist $\mathbb{E} X_T \mathbb{1}_A = \mathbb{E} X_\tau \mathbb{1}_A$ für alle $A \in \mathcal{F}_\tau$.

$\Rightarrow X_\tau = \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau)$.

(ii) folgt aus (i) durch

$$\mathbb{E} X_0 = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E} X_T = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E} X_\tau$$

$\square$

Beschränkte Stoppzeiten kann man als Strategien interpretieren, die ein Spieler für einen Auszahlungsprozess X realisieren kann. Liegt ein Martingal vor, kann ein Spieler sich im Mittel nicht durch eine Strategie verbessern. Insofern ist das Martingal ein faires Glücksspiel. Umgekehrt ist in diesem Sinne auch der Auszahlungsprozess eines fairen Glücksspieles ein Martingal.

Charakterisierung eines Martingals

28.10.15

Satz 1.14. *Sei X ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter Prozess mit cadlag Pfaden und $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ für alle $t \geq 0$.*
Dann sind äquivalent:

(i) X ist ein Martingal

(ii) Für jede beschränkte Stoppzeit τ gilt

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$$

Beweis. "⇒" siehe Satz 1.13
"⇐" Zeige $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ für alle $0 \leq s \leq t$.
zu zeigen: $\mathbb{E}X_t\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_s\mathbb{1}_A$ für alle $A \in \mathcal{F}_s$.
Zu $A \in \mathcal{F}_s$ definiere eine Stoppzeit τ durch

$$\tau(\omega) := \begin{cases} s & \text{falls } \omega \in A \\ t & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t\mathbb{1}_A &= \mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_t\mathbb{1}_{A^C} \\ &= \mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_\tau\mathbb{1}_{A^C} \\ &= \mathbb{E}X_t - (\mathbb{E}X_\tau - \mathbb{E}_\tau\mathbb{1}_A) \\ &\overset{(ii)}{=} \underbrace{\mathbb{E}X_t - \mathbb{E}X_0}_{=0} + \mathbb{E}X_\tau\mathbb{1}_A \\ &= \mathbb{E}X_s\mathbb{1}_A \end{aligned}$$

Beachte: (ii) liefert für $\tau \equiv t$:

$$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$$

□

Die Aussage kann verbessert werden, wenn man gleichgradig integrierbare Martingale betrachtet, denn dann kann auf die Beschränktheit der Stoppzeit verzichtet werden.

Satz 1.15 (Optional Sampling II). *Sei X ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiertes gleichgradig integrierbares Martingal mit cadlag Pfaden.*
Dann gilt:

(i) Es existiert eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Abbildung X_∞ mit

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau) = X_\tau \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

für jede Stoppzeit τ.

(ii) $\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$ für jede Stoppzeit τ.

Bemerkung. *Auch dieser Satz gilt für Submartingale:*
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Submartingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit cadlag Pfaden, so gilt:

(i) Es existiert eine $\mathcal{F}_\infty$−messbare Abbildung X_∞ mit

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau) \geq X_\tau \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

für jede Stoppzeit τ.

(ii) $\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_\infty$ für jede Stoppzeit τ.

Beweis von Satz 1.15. (i) Wegen Satz 1.11 existiert ein $X_\infty \in L_1$ mit

$$X_t = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t) \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Sei τ eine beliebige Stoppzeit.
Für $A \in \mathcal{F}_\tau$ gilt:

$$A \cap \{\tau \leq T\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{\tau\wedge T}$$

$\tau \wedge T$ ist eine beschränkte Stoppzeit. Also gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\{\tau\leq T\}} X_\tau d\mathbb{P} &= \int_{\underbrace{A\cap\{\tau\leq T\}}_{\in\mathcal{F}_{\tau\wedge T}}} X_{\tau\wedge T} d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap\{\tau\leq T\}} \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_{\tau\wedge T}) d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap\{\tau\leq T\}} X_T d\mathbb{P} \\
&= \int_{A\cap\{\tau\leq T\}} X_\infty d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{\tau\wedge T}) = X_{\tau\wedge T} \qquad \text{für alle } T \geq 0$$

denn

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_{\tau\wedge T}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_T)|\mathcal{F}_{\tau\wedge T})\\ &= \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_{\tau\wedge T})\\ &= X_{\tau\wedge T}\end{aligned}$$

Dies liefert die gleichgradige Integrierbarkeit von $(X_{\tau\wedge T})_{T\geq 0}$.
Zusammen mit der punktweisen Konvergenz gegen X_τ folgt die Integrierbarkeit von X_τ und die L_1-Konvergenz von

$$X_{\tau\wedge T} \xrightarrow{T\to\infty} X_\tau$$

Somit folgt mit der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}\int\limits_{A\cap\{\tau<\infty\}} X_\tau d\mathbb{P} &= \lim_{T\to\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau\leq T\}} X_\tau d\mathbb{P}\\ &= \lim_{T\to\infty} \int\limits_{A\cap\{\tau\leq T\}} X_\infty d\mathbb{P}\\ &= \int\limits_{A\cap\{\tau<\infty\}} X_\infty d\mathbb{P}\end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\int\limits_{A\cap\{\tau=\infty\}} X_\tau d\mathbb{P} = \int\limits_{A\cap\{\tau=\infty\}} X_\infty d\mathbb{P}$$

folgt

$$\int\limits_A X_\tau d\mathbb{P} = \int\limits_A X_\infty d\mathbb{P} \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_\tau$$

(ii)

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}X_0$$

□

Man erhält folgende Charakterisierung:

Satz 1.16. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierter Prozess mit cadlag Pfaden und sei X_∞ eine $\mathcal{F}_\infty$-messbare Zufallsvariable.*
Genau dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal mit

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty,$$

wenn für jede Stoppzeit τ X_τ integrierbar ist und

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$$

erfüllt.

Beweis. "⇒" siehe Satz 1.14
"⇐" Zeige: $X_t = \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)$ für alle $t \geq 0$.
Für $\tau \equiv t$ ist $X_t = X_\tau$ integrierbar und

$$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$$

Für $\tau \equiv \infty$ ist $X_\infty = X_\tau$ integrierbar und

$$\mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0$$

Definiere für $A \in \mathcal{F}_t$ eine Stoppzeit τ durch

$$\tau(\omega) := \begin{cases} t & \text{falls } \omega \in A \\ \infty & \text{falls } \omega \notin A \end{cases}$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}X_\infty = \mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_t \mathbb{1}_A + \mathbb{E}X_\infty \mathbb{1}_{A^C}$$

Also folgt

$$\mathbb{E}X_\infty \mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_t \mathbb{1}_A$$

□

Man kann dies auf gestoppte Prozesse anwenden.

Satz 1.17. *Sei X ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal mit cadlag Pfaden und τ eine Stoppzeit. Dann ist der durch τ gestoppte Prozess X^τ, definiert durch*

$$X_t^\tau := X_{t\wedge\tau} = X_t \mathbb{1}_{\{t\leq\tau\}} + X_\tau \mathbb{1}_{\{t>\tau\}}$$

ein $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal.

Beweis. X^τ ist ein Prozess mit cadlag Pfaden und adaptiert bzgl $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, da $\mathcal{F}_{\tau\wedge t} \subseteq \mathcal{F}_t$.
Für jede beschränkte Stoppzeit σ gilt:

$$\mathbb{E}X_\sigma^\tau = \mathbb{E}X_{\tau\wedge\sigma} = \mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_0^\tau$$

□

Wichtige Beispiele von Stoppzeiten sind Ersteintrittszeiten.

Beispiel 1.18. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein adaptierter Prozess bzgl einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Für eine Borelmenge B ist*

$$\tau_B := \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$$

die Ersteintrittszeit in B.
Behauptung: Hat X stetige Pfade und ist B abgeschlossen, so ist τ_B eine Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Beweis. Definiere offene Mengen

$$B_n := \{x \in \mathbb{R} : d(x, B) < \frac{1}{n}\} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Erreicht X die Menge B vor t, so erreicht X auch jedes B_n vor t. Wegen der Stetigkeit der Pfade tritt X vor t in B_n auch zu einem rationalen Zeitpunkt ein.
Genauer:

$$\{\tau_B \le t\} = \{X_t \in B\} \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} \{X_q \in B_n\} \in \mathcal{F}_t$$

So haben wir nur noch abzählbare Vereinigungen und Durchschnitte, können damit also die Messbarkeit folgern.
"$\subseteq$" klar, wegen Offenheit der B_n und Stetigkeit der Pfade
"$\supseteq$" $\{X_t \in B\} \subseteq \{\tau_B \le t\}$
Ist $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} \{X_q \in B_n\} \Rightarrow \exists (q_n)_n \in \mathbb{Q} \cap [0, t)$ mit $X_{q_n} \in B_n$. □

Ist B offen, so ist τ_B im Allgemeinen keine Stoppzeit.
Die Information muss infinitesimal vergrößert werden. Setze dazu

$$\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$$

Behauptung: Hat X rechtsseitig stetige Pfade, so ist τ_B eine $(\mathcal{F}_{t+})_{t\ge0}$-Stoppzeit für jedes offene B.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \tau_B \text{ ist eine } (\mathcal{F}_{t+})_{t\ge0}\text{-Stoppzeit} \\ \Leftrightarrow\ & \{\tau_B \le t\} \in \mathcal{F}_{t+} \qquad \text{für alle } t \ge 0 \\ \Leftrightarrow\ & \{\tau_B < t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \text{für alle } t \ge 0 \end{aligned}$$

Es gilt

$$\{\tau_B < t\} = \bigcup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<t}} \{X_q \in B\} \in \mathcal{F}_t$$

□

Anwendungen von Optional Sampling

Beispiel 1.19. *Sei $(W_t)_{t\ge0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$. Dann erreicht der Wiener-Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 jedes $a \in \mathbb{R}$.* 2.11.15
Genauer: Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$\tau_a = \inf\{t \ge 0 : W_t = a\} \qquad \inf \varnothing = \infty.$$

Dann ist

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$$

Beweis. OEdA ist $a > 0$, da $(-W_t)_{t\geq 0}$ auch ein Wiener-Prozess ist.
Für $\lambda > 0$ betrachte das Martingal

$$M_\lambda(t) = \exp(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t) \qquad t \geq 0.$$

Dann gilt:

$$0 \leq M_\lambda(t \wedge \tau_a) \leq e^{\lambda a} \qquad t \geq 0$$

$\Rightarrow \left(M_\lambda^{\tau_a}(t)\right)_{t\geq 0}$ ist ein beschränktes Martingal und damit gleichgradig integrierbar.
Also konvergiert $M_\lambda^{\tau_a}(t)$ für $t \to \infty$ gegen

$$\exp(\lambda a - \frac{1}{2}\lambda^2 \tau_a)\mathbb{1}_{\{\tau_a < \infty\}},$$

da auf $\{\tau_a = \infty\}$

$$M_\lambda^{\tau_a}(t) = M_\lambda(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Es gilt mit Optional Sampling

$$1 = \mathbb{E}M_\lambda^{\tau_a}(0) = \mathbb{E}M_\lambda^{\tau_a}(\infty) = \mathbb{E}\exp(\lambda a - \frac{1}{2}\lambda^2\tau_a)\mathbb{1}_{\{\tau_a<\infty\}} = e^{\lambda a}\mathbb{E}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_a}\mathbb{1}_{\{\tau_a<\infty\}}$$

Also folgt

$$\mathbb{E}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_a}\mathbb{1}_{\{\tau_a<\infty\}} = e^{-\lambda a} \qquad \text{für alle } \lambda > 0$$

Monotone Konvergenz liefert

$$\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = \lim_{\lambda\to 0}\mathbb{E}e^{-\frac{1}{2}\lambda^2\tau_a}\mathbb{1}_{\{\tau_a<\infty\}} = \lim_{\lambda\to 0} e^{-\lambda a} = 1$$

Eigentlich ist die Laplacetransformierte von τ_a bestimmt worden:

$$L_{\tau_a}: \quad [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$$
$$\nu \mapsto \mathbb{E}e^{-\nu\tau_a}$$

Es gilt:

$$L_{\tau_a}(\nu) = \mathbb{E}e^{-\nu\tau_a} \underset{\substack{\nu=\frac{1}{2}\lambda^2 \\ \Leftrightarrow\sqrt{2\nu}=\lambda}}{=} e^{-\sqrt{2\nu}a}$$

Die Laplacetransformierte bestimmt die Verteilung von τ_a. Man erhält, dass τ_a die Dichte

$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{1}{2}\frac{a^2}{t})\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

hat, denn

$$\mathbb{E}e^{-\nu\tau_a} = \int_0^\infty e^{-\nu t}g_a(t)dt = e^{-\sqrt{2\nu}a} \qquad \text{für alle } \nu > 0$$

Es gilt:

$$\mathbb{E}\tau_a = \int_0^\infty t g_a(t)dt = \infty$$

Das bedeutet, dass man im Mittel unendlich lange braucht, um ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ zu erreichen. Und doch erreicht man jedes $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Weitere Anwendungen von Optional Sampling

Beispiel 1.20. *Sei W ein Wiener-Prozess bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und definiere τ durch*

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : W_t = -a \text{ oder } W_t = b\}$$

für $a, b > 0$.
Dann ist $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ und W^τ ein beschränktes Martingal, was die gleichgradige Integrierbarkeit impliziert. Deshalb gilt:

$$0 = \mathbb{E}W_0^\tau = \mathbb{E}W_\infty^\tau = \mathbb{E}W_\tau = -a\mathbb{P}(W_\tau = -a) + b\mathbb{P}(W_\tau = b)$$

Zusammen mit

$$\mathbb{P}(W_\tau = -a) + \mathbb{P}(W_\tau = b) = 1$$

folgt

$$\mathbb{P}(W_\tau = -a) = \frac{b}{a+b} \text{ und } \mathbb{P}(W_\tau = b) = \frac{a}{a+b}$$

Weiter ist $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ ein Martingal. Mit Optional Sampling folgt

$$\mathbb{E}(W_{\tau\wedge T}^2 - \tau \wedge T) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}W_{\tau\wedge T}^2 = \mathbb{E}\tau \wedge T$$

Wegen monotoner Konvergenz gilt

$$\mathbb{E}(\tau \wedge T) \uparrow \mathbb{E}(\tau)$$

$(W_{\tau\wedge T}^2)_{t\geq 0}$ ist ein beschränkter Prozess, also folgt mit majorisierter Konvergenz:

$$\mathbb{E}W_\tau^2 = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(W_{\tau\wedge T}^2) = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(\tau \wedge T) = \mathbb{E}\tau$$

Andererseits gilt aber auch

$$\mathbb{E}W_\tau^2 = a^2 \underbrace{\mathbb{P}(W_\tau = -a)}_{\frac{b}{a+b}} + b^2 \underbrace{\mathbb{P}(W_\tau = b)}_{\frac{a}{a+b}} = ab$$

Also gilt

$$\mathbb{E}\tau = ab$$

Beispiel. *Definiere für den Wiener-Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ die Stoppzeit τ durch*

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : W_t = -b \text{ oder } W_t = b\}.$$

Definiere

$$M_t := W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2 \quad \text{für alle } (t \geq 0)_{t\geq 0}.$$

Dann ist $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal (überprüfen durch Nachrechnen) und es gilt

$$0 = \mathbb{E}M_{\tau\wedge t} = \mathbb{E}(W_{\tau\wedge t}^4 - 6(\tau \wedge t)W_{\tau\wedge t}^2 + 3(\tau \wedge t)^2).$$

Wegen monotoner Konvergenz konvergiert

$$\mathbb{E}(\tau \wedge t)^2 \uparrow \mathbb{E}\tau^2$$

und es gilt

$$(\tau \wedge t)W_{\tau\wedge t}^2 \leq \tau b^2.$$

Da τ integrierbar ist, liefert die majorisierte Konvergenz:

$$\mathbb{E}((\tau \wedge t)W_{\tau\wedge t}^2) \longrightarrow \mathbb{E}(\tau W_\tau^2) = b^2\mathbb{E}(\tau) = b^4.$$

$(W_{\tau\wedge t}^4)_{t\geq 0}$ *ist beschränkt, also liefert majorisierte Konvergenz:*

$$b^4 = \mathbb{E}W_\tau^4 = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}W_{\tau\wedge t}^4.$$

Insgesamt ergibt dies

$$3\mathbb{E}(\tau^2) = 6b^4 - b^4 = 5b^4.$$

Wegen $\mathbb{E}(\tau) = b^2$ ist also

$$\mathbb{V}ar(\tau) = \frac{2}{3}b^4.$$

Ziel: Einführung der $\mathcal{H}_p$-Räume.
Hierzu dienen die Doob'schen Maximalungleichungen:

Satz 1.21. *Sei E eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}$*

(i) Ist X ein Martingal mit Werten in E und ist

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvex, so dass $\mathbb{E}|f(X_t)| < \infty$ für alle $t \geq 0$, so ist $(f(X_t))_{t\geq 0}$ ein Submartingal.

(ii) Ist X ein Submartingal in E und

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}$$

konvex und monoton wachsend mit $\mathbb{E}|f(X_t)| < \infty$ für alle $t \geq 0$, so ist $(f(X_t))_{t\geq 0}$ ein Submartingal.

Beweis. Dies folgt aus der Jensenschen Ungleichung für bedingte Erwartungswerte:

(i) $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) \geq f(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) = f(X_s)$ für $0 \leq s \leq t$

(ii) $\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_s) \geq f(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)) \geq f(X_s)$ für $0 \leq s \leq t$

$\square$

Anwendung findet dies in

(i) X Martingal $\Rightarrow |X|$ Submartingal

(ii) X Martingal und $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty$ für alle $t \geq 0 \Rightarrow (|X_t|^p)_{t\geq 0}$ Submartingal

(iii) X Martingal $\Rightarrow X^+$ Submartingal

Die Martingaleigenschaft kann von $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auf $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ ausgeweitet werden.
(Erinnerung: $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$)

Satz 1.22. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann ist X auch ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$.*

Beweis. Sei $t \geq 0$ fest gewählt und $T > t$, sowie $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $t_n \downarrow t$. Wegen der rechtsseitigen Stetigkeit konvergiert $X_{t_n} \longrightarrow X_t$. Da $X_{t_n} = \mathbb{E}(X_T|\mathcal{F}_{t_n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.
Aus der punktweisen Konvergenz und der gleichgradigen Integrierbarkeit folgt die Konvergenz von $X_{t_n} \longrightarrow X_t$ in L_1.
Damit folgt für alle $A \in \mathcal{F}_{t+}$

$$\mathbb{E}X_t\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_T\mathbb{1}_A,$$

denn

$$\mathbb{E}X_T\mathbb{1}_A = \mathbb{E}X_{t_n}\mathbb{1}_A \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}X_t\mathbb{1}_A.$$

Beachte

$$|\mathbb{E}X_{t_n}\mathbb{1}_A - \mathbb{E}X_t\mathbb{1}_A| \leq \mathbb{E}|X_{t_n} - X_t|\mathbb{1}_A \leq \mathbb{E}|X_{t_n} - X_t| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Satz 1.23 (Doob'sche Maximalungleichungen). *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein rechtsseitig stetiges Martingal* ***oder*** *ein positives Submartingal bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann gilt für $X_T^\star := \sup_{0\leq t\leq T}|X_t|$:*

(i) $\lambda^p\mathbb{P}(X_T^\star \geq \lambda) \leq \mathbb{E}|X_T|^p\mathbb{1}_{\{X_t^\star\geq\lambda\}} \leq \mathbb{E}|X_T|^p$ *für alle* $p \geq 1$

(ii) $\lambda^p\mathbb{P}(X_\infty^\star > \lambda) \leq \sup_{t\geq 0}\mathbb{E}|X_t|^p$ *für alle* $p \geq 1$

(iii) $\|X_T^\star\|_p \leq \frac{p}{p-1}\sup_{0\leq t\leq T}\|X_t\|_p$ *für alle* $p > 1$

(iv) $\|X_\infty^\star\|_p \leq \frac{p}{p-1}\sup_{t\geq 0}\|X_t\|_p$ *für alle* $p > 1$

Bemerkung. *Die Aussagen (iii) und (iv) bezeichnet man auch als Doob'sche L_p–Ungleichung. Diese sind äquivalent mit*

$$\mathbb{E}|X_T^\star|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{0\leq t\leq T}\mathbb{E}|X_t|^p \qquad \text{für alle } p > 1, 0 < T \leq \infty$$

Beweis. (i) Sei $p \geq 1, T > 0$. O.E.d.A. ist $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $(|X_t|^p)_{t \geq 0}$ ein Submartingal und wegen der Version für Submartingale des Optional Sampling Satzes 1.13 gilt

$$\mathbb{E}|X_\tau|^p \leq \mathbb{E}|X_T|^p$$

für jede durch T beschränkte Stoppzeit τ.
Betrachte für $\lambda > 0$ die Stoppzeit

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq \lambda\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_T|^p \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} &= \mathbb{E}|X_T|^p - \mathbb{E}|X_T|^p \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \\
&\geq \mathbb{E}|X_{\tau \wedge T}|^p - \mathbb{E}|X_T|^p \mathbb{1}_{\{\tau > T\}} \\
&= \mathbb{E}|X_\tau|^p \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \\
&\geq \lambda^p \mathbb{P}(\tau \leq T) \\
&= \lambda^p \mathbb{P}(X_T^\star \geq \lambda)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_\infty^\star > \lambda) &= \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |X_t| > \lambda) \\
&\leq \mathbb{P}(\tau < \infty) \\
&= \lim_{T \to \infty} \mathbb{P}(\tau \leq T) \\
&\overset{(i)}{\leq} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}|X_T|^p \\
&= \frac{1}{\lambda^p} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}|X_t|^p
\end{aligned}$$

(iii) erhält man aus (i) und der Hölderungleichung: $\boxed{4.11.15}$

$$X \in L_p, X \in L_q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \mathbb{E}|XY| \leq \|X\|_p \|Y\|_q$$

Für jedes $K > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_T^\star \wedge K)^p &= \mathbb{E} \int_0^{X_T^\star \wedge K} p y^{p-1} dy \\
&= \mathbb{E} \int_0^K p y^{p-1} \mathbb{1}_{\{X_T^\star \geq y\}} dy \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^K p y^{p-1} \mathbb{P}(X_T^\star \geq y) dy
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(i)\text{ mit}}{\underset{p=1}{=}} \int_0^K p y^{p-2} \mathbb{E}|X_T| \mathbb{1}_{\{X_T^\star \geq y\}} dy \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \mathbb{E} \int_0^K p y^{p-1} |X_T| \mathbb{1}_{\{X_T^\star \geq y\}} dy \\
&= \mathbb{E}|X_T| p \int_0^K y^{p-2} \mathbb{1}_{\{X_T^\star \geq y\}} dy \\
&= p\mathbb{E}|X_T| \int_0^{X_T^\star \wedge K} y^{p-2} dy \\
&= \frac{p}{p-1} \mathbb{E}|X_T| (X_T^\star \wedge K)^{p-1} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}|X_T|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(X_T^\star \wedge K)^{(p-1)q})^{\frac{1}{q}} \\
&\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Leftrightarrow q = \frac{p}{p-1} \\
&= \frac{p}{p-1} (\mathbb{E}|X_T|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(X_T^\star \wedge K)^p)^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}
$$

Also

$$
(\mathbb{E}(X_T^\star \wedge K)^p)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_T|^p (\mathbb{E}(X_T^\star \wedge K)^p)^{p-1}
$$

Und somit

$$
\mathbb{E}(X_T^\star \wedge K)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_T|^p
$$

Damit folgt:

$$
\mathbb{E}(X_T^\star)^p = \lim_{T\to\infty} E(X_T^\star \wedge K) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_T|^p
$$

(iv) $X_T^\star$ konvergiert monoton gegen $X_\infty^\star$. Also gilt:

$$
\mathbb{E}(X_\infty^\star)^p \overset{\text{mon.}}{\underset{\text{Konv.}}{=}} \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}(X_T^\star)^p \leq \frac{p}{p-1} \lim_{T\to\infty} E(X_T)^p = \frac{p}{p-1} \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_t|^p
$$

□

Usual conditions

Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration.

Definition 1.24. *$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ erfüllt die usual conditions, falls gilt:*

(i) $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist rechtsseitig stetig, d.h. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ für alle $t \geq 0$,

(ii) $\mathcal{F}_0$ enthält alle vernachlässigbaren Mengen.

Vorteile:

1. Modifikationen von adaptierten Prozessen sind wieder adaptiert,
2. Eintrittszeiten in Borelsche Mengen sind Stoppzeiten,
3. Martingale lassen eine Pfadregulierung zu.

Genauer: Erfüllt $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die usual conditions, so gibt es zu jedem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Martingal X eine Modifikation mit cadlag Pfaden. Diese cadlag Version ist bis aus Nichtunterscheidbarkeit eindeutig bestimmt.
Deshalb kann bei Vorhandensein der usual conditions o.E.d.A. angenommen werden, dass X cadlag Pfaden hat $\mathbb{P}$-fast sicher.
Konstruktion einer Filtration, die die usual conditions erfüllt: Sei $\left(\mathcal{F}_t^{(0)}\right)_{t\geq 0}$ eine Filtration. Sei $\mathcal{N}$ die Menge der vernachlässigbaren Mengen.
Definiere:

$$\mathcal{F}_t^{(1)} := \sigma(\mathcal{F}_t^{(0)} \cup \mathcal{N}) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

$\mathcal{F}_0^{(1)}$ enthält alle vernachlässigbaren Mengen.
Setze

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_{t+}^{(1)} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^{(1)} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Dann erfüllt $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die usual conditions per Konstruktion. Die so definierte Filtration nennt man die Vervollständigung von $\left(\mathcal{F}_t^{(0)}\right)_{t\geq 0}$.

Bemerkung. *Ist X ein Martingal bzgl $\left(\mathcal{F}_t^{(0)}\right)_{t\geq 0}$, so ist X auch ein Martingal bezüglich der vervollständigten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ und es gibt eine Modifikation mit rechtsseitig stetigen Pfaden.*

Bemerkung. *Ist W ein Wiener-Prozess bzgl $\left(\mathcal{F}_t^{(0)}\right)_{t\geq 0}$, so ist W auch ein Wiener-Prozess bezüglich der vervollständigten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.*

Die Annahme, dass eine Filtration die usual conditions erfüllt, ist also keine wirklich einschränkende Annahme.

$\mathcal{H}_p$-Räume

Definition 1.25. *Für $p > 1$ kann der Raum $\mathcal{H}_p$ definiert werden durch*

$$\mathcal{H}_p := \{X : X \text{ ist ein cadlag Martingal bzgl } (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \text{ mit } \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty\}$$

($\triangleq$ Menge der L_p-beschränkten Martingale)
Dabei ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, die die usual conditions erfüllt.
Jedes $X \in \mathcal{H}_p$ ist in L_p beschränkt und damit gleichgradig integrierbar. Also ist

$$\mathcal{H}_p \subseteq \mathfrak{M} = \{X : X \text{ gleichgradig integrierbares cadlag Martingal}\}$$

Auf $\mathcal{H}_p$ kann man eine Norm definieren durch

$$\|X\|_{\mathcal{H}_p} := \sup_{t\geq 0}(\mathbb{E}|X_t|^p)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t\geq 0}\|X_t\|_p = \left(\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}|X_t|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Satz (Isometrie II)**.** *Durch*

$$\begin{aligned} J: \quad \mathcal{H}_p &\longrightarrow L_p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}) \\ X &\mapsto \quad X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t \end{aligned}$$

wird eine Isometrie zwischen Banach-Räumen definiert mit der Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} I: \quad L_p(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}) &\longrightarrow \quad \mathcal{H}_p \\ X \quad &\mapsto (\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} \end{aligned}$$

Dabei bedeutet Isometrie, dass gilt:

$$\|J(X)\|_p = \|X_\infty\|_p = \|X\|_{\mathcal{H}_p} \qquad \text{für alle } X \in \mathcal{H}_p$$

Beweis. Gezeigt worden ist in Satz 1.11, dass J und I zueinander inverse Isomorphismen zwischen $\mathfrak{M}$ und L_1 sind.
Zu zeigen verbleibt, dass die Teilräume entsprechend abgebildet werden und die Isometrieeigenschaft erfüllt ist:
Behauptung: Ist $X \in \mathcal{H}_p$, so ist $J(X) = X_\infty \in L_p$ und

$$\|X\|_{\mathcal{H}_p} = \|J(X)\|_p = \|X_\infty\|_p$$

Beweis. Nutze die Doob'sche Maximalungleichung:

$$\|X_\infty\|_p \leq \|X_\infty^\star\|_p \leq \frac{p}{p-1}\sup_{t\geq 0}\|X_t\|_p = \frac{p}{p-1}\|X\|_{\mathcal{H}_p} < \infty$$

Weiter ist

$$X^{\star p}_\infty = (\sup_{t\geq 0}|X_t|^p)^{\frac{1}{p}}$$

eine integrierbare Majorante von $(|X_t|^p)_{t\geq 0}$.
Also liefert die majorisierte Konvergenz:

$$\mathbb{E}|X_\infty|^p = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}|X_t|^p = \sup_{t\geq 0}\mathbb{E}|X_t|^p = \|X\|^p_{\mathcal{H}_p}$$

$\Rightarrow \|X_\infty\|_p = \|X\|_{\mathcal{H}_p}$ □

Behauptung: Ist $X_\infty \in L_p$, so ist $I(X_\infty) \in \mathcal{H}_p$.

Beweis. $I(X_\infty) = (\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t))_{t\geq 0}$ Weiter ist

$$\mathbb{E}(|\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_t)|^p) \leq \mathbb{E}\mathbb{E}(|X_\infty|^p|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}|X_\infty|^p < \infty$$

$\Rightarrow I(X_\infty) \in \mathcal{H}_p$ □

□

Insbesondere ist für $p = 2$ der $\mathcal{H}_2$ Raum ein Hilbert-Raum, isometrisch isomorph zu $L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$.
Definiere

$$\mathcal{H}_{2,c} := \{X \in \mathcal{H}_2 : X \text{ hat stetige Pfade}\}$$

Satz 1.26. *Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, die die usual conditions erfüllt. Dann ist $\mathcal{H}_{2,c}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_2$.*

Beweis. Klar ist, dass $\mathcal{H}_{2,c}$ ein Teilraum von $\mathcal{H}_2$ ist.
zur Abgeschlossenheit:
Sei $(X^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_{2,c}$ mit Grenzwert $X \in \mathcal{H}_2$(, da $\mathcal{H}_2$ Hilbert-Raum).
Das heißt: $\|X^{(n)} - X\|_{\mathcal{H}_2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ also $\sup\limits_{t\geq 0} \mathbb{E}(X_t^{(n)} - X)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Doob'sche L_2-Ungleichung liefert:

$$\mathbb{E}(\sup_{t\geq 0} |X_t^{(n)} - X_t|)^2 \leq 4 \sup_{t\geq 0} \mathbb{E}|X_t^{(n)} - X_t|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Also $\sup\limits_{t\geq 0} |X_t^{(n)} - X_t|^2 \longrightarrow 0$ in L_1.
Also existiert eine Teilfolge $(n_k)_{k\in N}$ mit

$$\sup_{t\geq 0} |X_t^{(n_k)} - X_t|^2 \longrightarrow 0 \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Also auch

$$\sup_{t\geq 0} |X_t^{(n_k)} - X_t| \longrightarrow 0 \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Da $X_t^{(n_k)}$ $\mathbb{P}$-fast sicher stetige Pfade hat, hat X als gleichmäßiger Limes auch stetige Pfade. □

2 Das stochastische Integral

9.11.15

Ziel: Wir wollen eine sinnvolle Definition für

$$\int_0^T H(t) dS(t) = \int_{[0,T]} H(t) dS(t)$$

geben, wobei H und S stochastische Prozesse sind.
Interpretation in der Finanzmathematik:

$(H(t))_{0 \le t \le T} \triangleq$ Handelsstrategie eines Händlers. Dabei entspricht $H(t)$ der Anzahl an Aktien, die zum Zeitpunkt t gehalten werden.

$(S(t))_{0 \le t \le T} \triangleq$ Preisentwicklung der Aktie, $S(t)$ entspricht dem Preis der Aktie zum Zeitpunkt t.

$\int\limits_{[0,T]} H(t) dS(t) \triangleq$ Gewinn, den ein Händler durch die Strategie H über den Zeitraum $[0, T]$ erzielt.

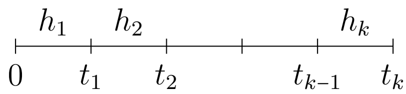
Präzisieren kann man dies für elementare Strategieren.

Elementare Strategien

Definition 2.1. *Eine elementare Strategie liegt dann vor, wenn nur zu endlich vielen Zeitpunkten $0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine Umschichtung in der Portfoliozusammensetzung vorgenommen werden kann.*

Das bedeutet, in t_{k-1} wird das Portfolio zufällig gemäß einer $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-messbaren Zufallsvariable h_k gebildet und bis t_k gehalten. Formal bedeutet das:

$$H(t, \omega) = \sum_{k=1}^{T} h_k(\omega) \mathbb{1}_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$$



Der Händler erzielt in $[0, T]$ einen Gewinn von

$$\int\limits_{[0,T]} H(t) dS(t) = \sum_{k=1}^{T} h_k \underbrace{(S(t_k) - S(t_{k-1}))}_{=:\Delta S(t_k)} = \sum_{k=1}^{T} h_k \Delta S(t_k)$$

Fragen:

- Wie kann man die elementaren Strategieren verallgemeinern?
- Welche Prozesse kann man integrieren?

1. Antwort: Hat S Pfade mit beschränkter Variation, so können progressiv messbare Prozesse H integriert werden, deren Pfade Lebesgue–Stieltjes-integrierbar sind. Zum Beispiel können adaptierte Prozesse mit stetigen Pfaden integriert werden.

2. Antwort: Die wichtigsten Preisprozesse in der Finanzmathematik haben keine Pfade von beschränkter Variation. Deshalb ist eine Ausdehnung notwendig.

Progressiv messbare Prozesse

Definition 2.2. *Bezeichne mit $\mathcal{B}_{[0,t]}$ die Borelsche-σ-Algebra auf $[0, t]$ für alle $t \ge 0$. Sei weiter eine Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ gegeben. Eine Abbildung*

$$X : [0, \infty] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt progressiv messbar, falls für jedes $t > 0$

$$X : [0,t] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbar ist bezüglich $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$. Das heißt, dass für alle $B \in \mathcal{B}_{[0,t]}$ gilt:

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X_s(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t.$$

Bemerkung 2.3. *Jeder adaptierte Prozess mit rechtsseitig stetigen Pfaden ist progressiv messbar.*

Beweis. Sei $t > 0$. Zerlege $[0,t]$ in $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{l(n)}^{(n)} = t$ und setze

$$X^{(n)} := \sum_{k=0}^{l(n)-1} X_{t_k^{(n)}} \mathbb{1}_{[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})}$$

auf $[0,t] \times \Omega$ und

$$X_t^{(n)} := X_t$$

Wegen der Adaptiertheit ist $X^{(n)}$ messbar bezüglich $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$ und wegen der rechtsseitigen Stetigkeit konvergiert $X^{(n)}$ gegen X auf $[0,t] \times \Omega$, was die Messbarkeit von $X|_{[0,t]\times\Omega}$ bezüglich $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$ impliziert. □

Bemerkung 2.4. *Ist X ein progressiv messbarer Prozess und τ eine Stoppzeit, so ist $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ eine $\mathcal{F}_\tau$-messbare Abbildung.*

Beweis. Es gilt:
$X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ ist $\mathcal{F}_\tau$-messbar genau dann, wenn $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}} \mathcal{F}_t$-messbar ist, für alle $t \geq 0$:
Für $B \in \mathcal{B}$ gilt:

- Ist $0 \notin B$, so ist $\left(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\right)^{-1}(B) = X_\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\}$
- Ist $0 \in B$, so ist $\left(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\right)^{-1}(B) = (X_\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\}) \cup \{\tau > t\}$

Sei $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ $\mathcal{F}_\tau$–messbar. Dann ist in beiden obigen Fällen $\left(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\right)^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$. Also ist $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$ $\mathcal{F}_t$–messbar für alle $t \geq 0$.
Sei nun $X_t \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$ $\mathcal{F}_t$–messbar für alle $t \geq 0$. Dann ist

$$X_\tau^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\} = \begin{Bmatrix} \left(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\right)^{-1}(B) & 0 \notin B \\ \left(X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\right)^{-1}(B) \cap \{\tau \leq t\} & 0 \in B \end{Bmatrix} \in \mathcal{F}_t.$$

Also ist $X_\tau 1_{\tau<\infty}$ messbar bezüglich $\mathcal{F}_\tau$.
Sei nun $t > 0$. Dann ist $\tau_t := \tau \wedge t$ eine messbare Abbildung von $(\Omega, \mathcal{F}_t) \longrightarrow ([0,t] \times \mathcal{B}_{[0,t]})$, denn

$$\{\tau_t \leq s\} = \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \qquad \text{für alle } s < t$$

und

$$\{\tau_t = t\} = \{\tau \wedge t = t\} = \{\tau \geq t\} = \{\tau < t\}^C \in \mathcal{F}_t$$

Weiter ist $\omega \mapsto (\tau_t(\omega), \omega)$ eine messbare Abbildung von $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ nach $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t)$. Also ist

$$X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \le t\}}(\omega) = X(\tau_t(\omega), \omega) \mathbb{1}_{\{\tau \le t\}}(\omega)$$

als Hintereinanderausführung von messbaren Abbildungen wieder eine $\mathcal{F}_t$-messbare Abbildung. $\square$

Bemerkung 2.5. *Es seien alle Nullmengen schon in $\mathcal{F}_0$ enthalten, d. h. $N \subseteq \mathcal{F}_0$. Ist X dann ein progressiv messbarer Prozess mit*

$$\int_0^t |X_s(\omega)| ds < \infty \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher für alle } t \ge 0$$

so wird durch

$$Y_t = \int_0^t X_s ds \qquad t \ge 0$$

ein adaptierter Prozess mit $\mathbb{P}$-fast sicheren stetigen Pfaden definiert.

Beweis. Sei (T_n) Folge mit $T_1 < T_2 < ..., T_n \uparrow \infty$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$X : [0, T_n] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $\mathcal{B}_{[0,T_n]} \otimes \mathcal{F}_{T_n}$ messbare Abbildung.
Es gibt eine Nullmenge N_{T_n} mit

$$\int_0^{T_n} |X_s(\omega)| ds < \infty \qquad \text{für alle } \omega \notin N_{T_n}.$$

Für $\omega \notin N_{T_n}$ ist $t \mapsto \int_0^t X_s(\omega) ds$ wohldefiniert, stetig und $\mathcal{F}_{T_n}$-messbar in ω.
Setze $N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_{T_n}$. Dann ist N vernachlässigbar und für alle $\omega \notin N$ ist

$$Y_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega) ds$$

wohldefiniert für alle $t \ge 0$.
Weiter ist $t \mapsto Y_t(\omega)$ stetig und adaptiert, da X progressiv messbar ist. $\square$

Previsible σ-Algebra

Auf $[0, \infty) \times \Omega$ soll die σ-Algebra der previsiblen Mengen eingeführt werden.
Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ eine Filtration, die die usual conditions erfüllt.
1. Schritt:
Das System der previsiblen Rechtecke ist definiert durch

$$\mathcal{R} := \{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\} \cup \{(s,t] \times F_s : s,t \ge 0, F_s \in \mathcal{F}_s\}$$

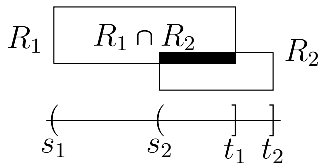
$\mathcal{R}$ ist ein Halbring denn

(i) $\varnothing \in \mathcal{R}$

(ii) $R_1, R_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow R_1 \cap R_2 \in \mathcal{R}$ ($\cap$-stabil)

(iii) Zu $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ gibt es disjunkte Mengen $H_1, ..., H_m \in \mathcal{R}$ mit

$$R_1 \backslash R_2 = \bigcup_{i=1}^{m} H_i$$



2. Schritt:
Aus dem Halbring $\mathcal{R}$ gewinnt man einen Mengenring $\mathfrak{A}$, in dem man das System der endlichen Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{R}$ bildet:
$A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow$ Es gibt endlich viele $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ mit $A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$

Bemerkung. *Zu $A \in \mathfrak{A}$ existieren paarweise disjunkte $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ mit $A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$.*

Beweis.

$$A = R_1 \cup ... \cup R_n = R \cup \underbrace{(R_2 \backslash R_1)}_{\in \mathcal{R}} \cup (R_3 \backslash (R_1 \cup R_2)) \cup ... \cup (R_n \backslash (R_1 \cup ... \cup R_{n-1}))$$

□

3. Schritt: 11.11.15

Definition. *Die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{P} := \sigma(\mathfrak{A}) = \sigma(\mathcal{R})$ wird als σ-Algebra der previsiblen Mengen bezeichnet.*

$([0, \infty) \times \Omega, \mathcal{P})$ ist ein messbarer Raum.

Definition 2.7. *Ein stochastischer Prozess X wird als previsibel bezeichnet, wenn*

$$X : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbar ist bezüglich $\mathcal{P}$.

Bemerkung. *Jeder previsible Prozess ist progressiv messbar.*

Beweis. 1. Schritt: Zu zeigen:Jeder linksseitig stetiger, adaptierter Prozess ist progressiv messbar.
Der Beweis geht analog zum Beweis von Bemerkung 2.3. Ersetze einfach das Intervall $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$ durch $(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$.
2. Schritt: Sei $\mathfrak{A}$ die σ-Algebra der progressiv messbaren Mengen. Das bedeutet, jeder linkssetig stetiger, adaptierter Prozess ist messbar bezüglich $\mathfrak{A}$.

3. Schritt: Es ist bekannt, dass $\mathcal{P}$ die kleinste σ−Algebra ist, bezüglich welcher alle linksseitig stetigen, adaptierten Prozess messbar sind.
Also ist $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{A}$
4. Schritt: Also ist jeder previsible Prozess progressiv messbar. □

Beispiele für previsible Prozesse

Beispiel 2.8. *a) Ist Y eine $\mathcal{F}_s$-messbare Abbildung, so ist $Y\mathbb{1}_{(s,t]}$ ein previsibler Prozess*

Beweis. 1. $Y \geq 0$: Dann existiert eine Folge $(Y^{(n)})$ von Zufallsvariablen der Form

$$Y^{(n)} = \sum_{k=1}^{N(n)} \alpha_{n,k} \mathbb{1}_{F_{n,k}}$$

mit $F_{n,k} \in \mathcal{F}_s$ und $Y^{(n)} \uparrow Y$.
Dann ist

$$X^{(n)} = Y^{(n)} \mathbb{1}_{(s,t]} = \sum_{k=1}^{N(n)} \alpha_{n,k} \mathbb{1}_{(s,t] \times F_{n,k}}$$

messbar bezüglich $\mathcal{P}$.

$$Y\mathbb{1}_{(s,t]} = \lim_{n\to\infty} Y^{(n)} \mathbb{1}_{(s,t]}$$

ist messbar bezüglich $\mathcal{P}$.
2. $Y = Y^+ - Y^-$:

$$Y\mathbb{1}_{(s,t]} = Y^+\mathbb{1}_{(s,t]} - Y^-\mathbb{1}_{(s,t]}$$

ist messbar bezüglich $\mathcal{P}$. □

b) Ist $((s_n, t_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge von Intervallen und (Y_n) eine Folge von Zufallsvariablen, sodass Y_n messbar ist bezüglich $\mathcal{F}_{s_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} Y_n \mathbb{1}_{(s_n,t_n]}$$

messbar bezüglich $\mathcal{P}$.
Dies erhält man aus

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} Y_n \mathbb{1}_{(s_n,t_n]} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Y_k \mathbb{1}_{(s_k,t_k]}$$

.
c) Ist X ein stochastischer Prozess mit linksseitig stetigen Pfaden, so ist X previsibel.

Beweis. Durch linksseitige Approximation:
Betrachte eine geschachtelte Folge von Gittern

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots$$

mit

$$\max_i t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Definiere dann

$$X^{(n)}(t) := X_0 \mathbb{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{k\in\mathbb{N}} X_{t_k^{(n)}} \mathbb{1}_{(t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Das ist eine Folge von previsiblen Prozessen, die punktweise gegen X konvergiert. Also ist X previsibel. □

Bemerkung 2.9. *Die previsible σ-Algebra ist die kleinste σ-Algebra bezüglich der alle linksseitig stetigen adaptierten Prozesse messbar sind.*

Beweis. Definiere $\mathbb{L} :=$ Menge der linksseitig stetigen, adaptierten Prozesse.
Dann ist $\sigma(\mathbb{L})$ per Definitionem die kleinste $\sigma-$Algebra, bezüglich der alle $X \in \mathbb{L}$ messbar sind, wenn

(i) $\sigma(\mathbb{L})$ eine $\sigma-$Algebra ist und

(ii) Ist $\mathcal{G}$ eine weitere $\sigma-$Algebra, so dass jedes $X \in \mathbb{L}$ messbar ist bezüglich $\mathcal{G}$, so gilt $\sigma(\mathbb{L}) \subseteq \mathcal{G}$.

Zu zeigen: $\mathcal{P} = \sigma(\mathbb{L})$.
'$\supseteq$': Jedes $X \in \mathbb{L}$ ist previsibel, also messbar bezüglich $\mathcal{P}$. Also gilt mit (ii): $\sigma(\mathbb{L}) \subseteq \mathcal{P}$.
'$\subseteq$': Es genügt zu zeigen: $\mathcal{R} \subseteq \sigma(\mathbb{L})$.
Jede Indikatorfunktion $\mathbb{1}_R$ mit $R \in \mathcal{R}$ ist linksseitig stetig und adaptiert, also messbar bezüglich $\sigma(\mathbb{L})$.
$\Rightarrow \mathcal{R} \subseteq \sigma(\mathbb{L}) \Rightarrow \mathcal{P} \subseteq \sigma(\mathbb{L})$ □

Die previsible σ-Algebra kann auch durch Stoppzeiten beschrieben werden:
Für Stoppzeiten $\sigma \leq \tau$ ist das stochastische Intervall

$$(\sigma, \tau] := \{(t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega : \sigma(\omega) < t \leq \tau(\omega)\}$$

Bemerkung 2.10. *Sei*

$$\mathcal{E} := \{(\sigma, \tau] : \sigma, \tau \textit{ Stoppzeiten mit } \sigma \leq \tau\} \cup \{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{E})$$

Beweis. '$\supseteq$': $\{0\} \times F_0$ ist in $\mathcal{P}$. Für Stoppzeiten σ, τ ist $\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}$ adaptiert und linksseitig stetig, also previsibel, d.h. $(\sigma, \tau] \in \mathcal{P}$.
'$\subseteq$': Wir zeigen $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{E}$, woraus $\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ folgt.
Trivial: $\{0\} \times F_0$. Also betrachte $(s, t] \times F_s$ mit $0 \leq s \leq t, F_s \in \mathcal{F}_s$
Idee: Finde σ, τ mit $(s, t] \times F_s = (\sigma, \tau]$.
Definiere $\tau \equiv t$ und $\sigma(s) := \begin{cases} s & \omega \in F_s \\ t & \omega \notin F_s \end{cases}$.
Dann sind σ, τ Stoppzeiten und es gilt:

$$(\sigma, \tau] = \{(u, \omega) : \sigma(\omega) < u \leq \tau(\omega)\} = (s, t] \times F_s$$

Also ist $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{E}$. □

Anwendungsbeispiel:
$(S(t))_{t\geq 0}$ Preisprozess einer Aktie und $a < S_0 < b$ mit a Einstiegskurs, b Verkaufskurs und S_0 Aktienanfangspreis.
Definiere die Stoppzeiten
$$\sigma := \inf\{t \geq 0 : S_t \leq a\}$$
und
$$\tau := \inf\{t \geq 0 : S_t \geq b\}$$
Dann entspricht $\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}$ der Strategie, eine Aktie zu kaufen, wenn sie a wert ist und solange zu halten, bis sie b wert ist.
Entwickelt sich das einsetzbare Kapital zufällig mit der Zeit, so kann man auch
$$H = Y_\sigma \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}$$
betrachten.
Y_σ ist dann durch das in σ verfügbare Kapital bestimmt und damit zufällig.

Folgerung 2.11. *Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Stoppzeiten und sei $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathcal{F}_{\tau_n}$-messbaren Zufallsvariablen. Dann ist*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} Y_n \mathbb{1}_{(\tau_n,\tau_{n+1}]}$$
ein previsibler Prozess.

Das Doléans-Maß

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtration, die die usual conditions erfüllt.
Zu einem L_2-Martingal M, d.h. einem Martingal, das quadratintegrierbar ist, mit cadlag-Pfaden, soll ein Maß μ_M auf der σ-Algebra $\mathcal{P}$ der previsiblen Mengen konstruiert werden:
1. Schritt:
Auf dem Halbring der previsiblen Rechtecke definiere
$$\mu_M((s,t] \times F_s) := \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(M_t^2 - M_s^2) = \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(M_t - M_s)^2 \qquad \text{für alle } 0 \leq s \leq t, F_s \in \mathcal{F}_s$$
sowie
$$\mu_M(\{0\} \times F_0) = 0 \qquad \text{für alle } F_0 \in \mathcal{F}_0$$
$\mu_M : \mathcal{R} \longrightarrow [0,\infty)$ ist ein Inhalt, das heißt, es gilt

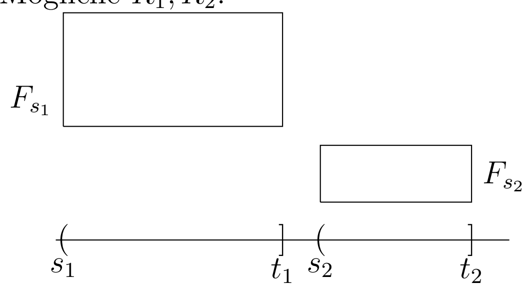
(i) $\mu_M(\varnothing) = 0$

(ii) Sind $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ paarweise disjunkt und $\bigcup_{i=1}^n R_i \in \mathcal{R}$, so gilt
$$\mu_M\left(\bigcup_{i=1}^n R_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu_M(R_i)$$

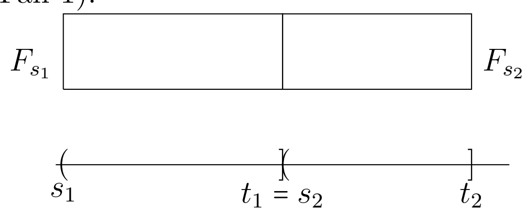
Beweis. (i) gilt nach Definition
(ii) Es reicht die Behauptung für $n = 2$ zu zeigen:

$$R_1 = (s_1, t_1] \times F_{s_1}, \quad R_2 = (s_2, t_2] \times F_{s_2}, \quad R_1 \cup R_2 \in \mathcal{R}, \quad R_1 \cap R_2 = \varnothing$$

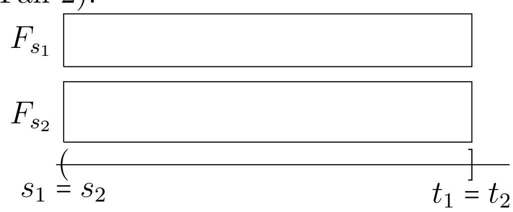
Mögliche R_1, R_2:



ABER: Vereinigung liegt nicht in $\mathcal{R}$.
Einzige Möglichkeiten:
Fall 1):



Fall 2):



<u>Fall 1)</u>: $(s_1, t_1] \cap (s_2, t_2] = \varnothing$
O.E.d.A: $t_1 \leq t_2$.
Da $R_1 \cup R_2 \in \mathcal{R} \Rightarrow s_2 = t_1$ und $F_{s_1} = F_{s_2}$
Somit gilt für $R := R_1 \cup R_2 = (s_1, t_2] \times F_{s_1}$:

$$\begin{aligned}
\mu_M(R) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_{s_1}}(M_{t_2}^2 - M_{s_1}^2) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{F_{s_1}}(M_{t_2}^2 - M_{s_2}^2) + (M_{s_2}^2 - M_{s_1}^2)\right] \\
&\overset{F_{s_1}=F_{s_2}}{\underset{s_2=t_1}{=}} \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_{s_2}}(M_{t_2}^2 - M_{s_2}^2) + \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_{s_1}}(M_{t_1}^2 - M_{s_1}^2) \\
&= \mu_M(R_2) + \mu_M(R_1)
\end{aligned}$$

<u>Fall 2)</u>: $(s_1, t_1] \cap (s_2, t_2] \neq \varnothing \Rightarrow F_{s_1} \cap F_{s_2} = \varnothing \Rightarrow s_1 = s_2, t_1 = t_2$
$R = R_1 \cup R_2 = (s_1, t_2] \times (F_{s_1} \cup F_{s_2})$

$$\begin{aligned}
\mu_M(R) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_{s_1} \cup F_{s_2}}(M_{t_1}^2) - M_{s_1}^2 \\
&\overset{s_1=s_2}{\underset{t_1=t_2}{=}} \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_{s_1}}(M_{t_1}^2 - M_{s_1}^2) + \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_{s_2}}(M_{t_2}^2 - M_{s_2}^2) \\
&= \mu_M(R_1) + \mu_M(R_2)
\end{aligned}$$

□

<u>2. Schritt:</u>

Ein Inhalt auf einem Halbring kann immer zu einem Inhalt auf dem vom Halbring erzeugten Mengenring fortgesetzt werden durch

$$\begin{aligned} \mu_M : \quad & \mathfrak{A} \longrightarrow [0,\infty) \\ A \mapsto \quad & \sum_{i=1}^{n} \mu_M(R_i) \end{aligned}$$

mit $A = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, $R_i \in \mathcal{R}$.
Dann erfüllt μ_M:

(i) $\mu_M(\varnothing) = 0$

(ii) $\mu_M(A_1 \dot\cup A_2) = \mu_M(A_1) + \mu_M(A_2)$ für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ mit $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

<u>3. Schritt:</u>
Man kann zeigen, dass auf Grund der Martingaleigenschaft von M der Inhalt μ_M ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$ ist, das heißt:
Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}$, so ist μ_M σ-additiv, das heißt, es gilt

$$\mu_M\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_M(A_n)$$

Nach dem Fortsetzungssatz von Carathéodory existiert eine eindeutige Fortsetzung zu einem Maß μ_M auf $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{P}$.

Definition 2.12. *Das Doléans-Maß des L_2-Martingals M ist genau diese eindeutige Fortsetzung und wird mit μ_M bezeichnet.*

Beispiel. *Ist W ein Wiener-Prozess, so ist $\mu_W = \lambda \otimes \mathbb{P}$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} \mu_W((s,t] \times F_s) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(W_t - W_s)^2 \\ &\overset{W_t - W_s \text{ unab.}}{\underset{\text{von } \mathcal{F}_s}{=}} \mathbb{P}(F_s)\mathbb{E}(W_t - W_s)^2 \\ &= \mathbb{P}(F_s)(t-s) \\ &= (\lambda \otimes \mathbb{P})((s,t] \times F_s) \end{aligned}$$

□

<u>Ziel:</u> Konstruktion des stochastischen Integrals als Isometrie zwischen 16.11.15
$L_2(\mu_M) := L_2([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{P}, \mu_M)$ und $L_2(\mathbb{P}) := L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}) := \{X : \mathbb{E}|X|^2 < \infty\}$.

Das stochastsische Integral für elementar previsible Prozesse

Definition 2.13. *Ein stochastischer Prozess H heißt elementar previsibel, wenn es $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ gibt mit*

$$H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i}$$

Bemerkung. *Bezeichne mit $\mathcal{E}$ die Menge aller elementar previsiblen Prozessen. Dann gilt:*

(i) $\mathcal{E}$ ist eine Algebra, d.h.

- $H_1, H_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow H_1 + H_2 \in \mathcal{E}$
- $H \in \mathcal{E}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda H \in \mathcal{E}$
- $H_1, H_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow H_1 H_2 \in \mathcal{E}$

(ii) Zu $H \in \mathcal{E}$ existieren paarweise disjunkte $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i}$$

(iii) $\mathcal{E} \subseteq L_2(\mu_M)$, denn $\mu_M(R) < \infty$ für alle $R \in \mathcal{R}$.

Definition. *Für $H \in \mathcal{E}$ wird das stochastische Integral I als lineare Abbildung erklärt:*

$$\begin{aligned} I: \quad \mathcal{E} &\longrightarrow L_2(\mathbb{P}) \\ H &\mapsto \int H dM \end{aligned}$$

Für $H = \mathbb{1}_R$ mit $R = (s,t] \times F_s \in \mathcal{R}$ definiere

$$I(H) = \int H dM := \mathbb{1}_{F_s}(M_t - M_s)$$

Für $H = \mathbb{1}_R$ mit $R = \{0\} \times F_0 \in \mathcal{R}$ definiere

$$I(H) = \int H dM := 0$$

Setze dies linear nach $\mathcal{E}$ fort:

Definition. *Für $H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i}$ mit paarweise disjunkten $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ definiere*

$$I(H) = \int H dM := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int \mathbb{1}_{R_i} dM$$

Eine wichtige Eigenschaft ist die Isometrieeigenschaft, das heißt, die Abbildung I verändert keine Abstände.

Satz 2.14 (Isometrieeigenschaft für $H \in \mathcal{E}$)**.** *Die Abbildung*

$$I : \mathcal{E} \subseteq L_2(\mu_M) \longrightarrow L_2(\mathbb{P})$$

ist eine Isometrie, das heißt

$$\|H\|_{L_2(\mu_M)} = \|I(H)\|_{L_2(\mathbb{P})}$$

bzw.

$$\int H^2 d\mu_M = \mathbb{E} I(H)^2$$

für alle $H \in \mathcal{E}$.

Beweis. Für $H \in \mathcal{E}$ gibt es eine Darstellung

$$H = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i}$$

mit $\alpha_1, .., \alpha_n \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkten $R_1, ..., R_n \in \mathcal{R}$ mit $R_0 = \{0\} \times F_0, R_i = (s_i, t_i] \times F_{s_i}$ für $i = 1, ..., n$.
Also ist

$$\begin{aligned} I(H)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha \mathbb{1}_{F_{s_i}} (M_{t_i} - M_{s_i}) \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathbb{1}_{F_{s_i}} (M_{t_i} - M_{s_i})^2 + \sum_{i \neq k} \alpha_i \alpha_k \mathbb{1}_{F_{s_i}} \mathbb{1}_{F_{s_k}} (M_{t_i} - M_{s_i})(M_{t_k} - M_{s_k}) \end{aligned}$$

Die gemischten Terme verschwinden im Erwartungswert, denn aus

$$R_i \cap R_k = \emptyset$$

folgt entweder

$$F_{s_i} \cap F_{s_k} = \emptyset \text{ oder } (s_i, t_i] \cap (s_k, t_k] = \emptyset$$

Ist $F_{s_i} \cap F_{s_k} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{1}_{F_{s_i}} \mathbb{1}_{F_{s_k}} = \mathbb{1}_{F_{s_i} \cap F_{s_k}} = 0$.
Ist $(s_i, t_i] \cap (s_k, t_k] = \emptyset$, so sei oEdA $t_i \leq s_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \mathbb{1}_{F_{s_i}} \mathbb{1}_{F_{s_k}} (M_{t_i} - M_{s_i})(M_{t_k} - M_{s_k}) &= \mathbb{E}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{F_{s_i}} \mathbb{1}_{F_{s_k}} (M_{t_i} - M_{s_i})(M_{t_k} - M_{s_k}) \middle| \mathcal{F}_{s_k} \right] \\ &= \mathbb{E} \mathbb{1}_{F_{s_i}} \mathbb{1}_{F_{s_k}} (M_{t_i} - M_{s_i}) \underbrace{\mathbb{E}\left[(M_{t_k} - M_{s_k}) \middle| \mathcal{F}_{s_k} \right]}_{=0, \text{ da } M \text{ Martingal}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} \|I(H)\|_{L_2(\mathbb{P})} &= \mathbb{E} I(H)^2 \\ &= \mathbb{E} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mathbb{1}_{F_{s_i}} (M_{t_i} - M_{s_i})^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mu_M(\mathbb{1}_{(s_i,t_i]\times F_{s_i}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \mu_M(R_i) \\
&= \int \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{R_i} \right)^2 d\mu_M \\
&= \int H^2 d\mu_M \\
&= \|H\|_{L_2(\mu_M)}
\end{aligned}
$$

□

Beispiel. *Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag Pfaden und $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Dann gilt:*

(i) Für jede beschränkte Stoppzeit τ gilt

$$\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2$$

(ii) Für jede Stoppzeit τ mit $\mu_M((0,\tau]) < \infty$ ist der gestoppte Prozess M^τ ein $\mathcal{H}_2$–Martingal und damit gilt

$$\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2$$

Beweis. zu (i): Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\mu_M((0,\tau]) &= \int \mathbb{1}_{(0,\tau]}^2 d\mu_M \\
&\overset{\text{Isometrie}}{=} \mathbb{E}\left(\int \mathbb{1}_{(0,\tau]} dM \right)^2 \\
&= \mathbb{E}(M_\tau - M_0)^2 \\
&= \mathbb{E}M_\tau^2
\end{aligned}
$$

zu (ii): Es gilt:

$$\mathbb{E}(M_t^\tau)^2 = \mathbb{E}M_{\tau\wedge t}^2 = \mu_M((0,\tau\wedge t]) \le \mu_M((0,\tau]) < \infty$$

Also ist auch

$$\sup_{t\ge 0} \mathbb{E}(M_t^\tau)^2 < \infty$$

was $M^\tau \in \mathcal{H}_2$ bedeutet.
Es bleibt zu zeigen: $\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2$
Da $\mathfrak{M}^\tau \subseteq \mathcal{H}_2$ ist, gilt mit dem Martingalkonvergenzsatz (Satz 1.5):

$$\mathbb{E}M_\tau^2 = \mathbb{E}(M_\infty^\tau)^2 = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(M_t^\tau)^2 = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}M_{\tau\wedge t}^2$$

Für $t > 0$ ist $\mu_M((0,\tau \wedge t]) < \infty$, also

$$\mu((0,\tau \wedge t]) \overset{(i)}{=} \mathbb{E}(M^2_{\tau \wedge t})$$

Da

$$\mu_M((0,\tau \wedge t]) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \mu_M((0,\tau])$$

folgt die Behauptung. □

Beispiel. *Sei M ein L_2–Martingal mit cadlag Pfaden und sei τ eine beliebige Stoppzeit. Dann ist das Doléans-Maß des gestoppten Martingals M^τ gegeben durch*

$$\mu_{M^\tau}(A) = \int_A \mathbb{1}_{(0,\tau]d\mu_M} = \mu_M(A \cap (0,\tau])$$

für alle $A \in \mathcal{P}$

Beweis. $\mu_{M^\tau}(\cdot)$ und $\mu_M(\cdot \cap (0,\tau])$ definieren σ-endliche Maße auf $\mathcal{P}$. Da $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{P}$ ist, reicht es, die Behauptung für $R = \mathbb{1}_{(s,t]\times F_s}$ zu zeigen:
Es gilt

$$\begin{aligned}\mu_{M^\tau}(R) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(M^\tau_t - M^\tau_s)^2\\ &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{\{\tau > s\}}(M_{\tau\wedge t} - M_{\tau \wedge s})^2\\ &\underset{\text{Beispiel 2.16}}{\overset{\text{siehe}}{=}} \mathbb{E}\left(\int \mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{\{\tau>s\}}\mathbb{1}_{(s\wedge\tau, t\wedge\tau]}dM\right)^2\end{aligned}$$

und

$$(s,t] \times F_s \cap (0,\tau] = (s,t] \times F_s \cap (0,\tau \wedge t]$$

Das heißt

$$\mathbb{1}_{(s,t]\times F_s}\mathbb{1}_{(0,\tau\wedge t]} = \mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{(s\wedge\tau,t\wedge\tau]} = \mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{\{\tau>s\}}\mathbb{1}_{(s\wedge\tau,t\wedge\tau]}$$

Zusammengesetzt ergibt das

$$\begin{aligned}\mu_M((s,t]\times F_s \cap (0,\tau]) &= \int \mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{\{\tau>s\}}\mathbb{1}_{(s\wedge\tau,t\wedge\tau]}d\mu_M\\ &= \int \mathbb{1}^2_{F_s}\mathbb{1}^2_{\{\tau>s\}}\mathbb{1}^2_{(s\wedge\tau,t\wedge\tau]}d\mu_M\\ &\overset{\text{Isometrie}}{=} \mathbb{E}\left(\int \mathbb{1}_{F_s}\mathbb{1}_{\{\tau>s\}}\mathbb{1}_{(s\wedge\tau,t\wedge\tau]}dM\right)^2\\ &= \mu_{M^\tau}(R)\end{aligned}$$

□

Das stochastische Integral für $\mathbf{H} \in \mathbf{L_2}(\mu_\mathbf{M})$

Durch ein Approximationsargument kann das stochastische Integral von den elementar previsiblen Prozessen auf die quadratisch integrierbaren previsiblen Prozesse fortgesetzt werden. Wichtig ist dabei der folgende Approximationssatz:

Satz 2.15. *Zu $H \in L_2(\mu_M)$ existiert eine Folge von elementaren pevisiblen Prozessen $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, so dass*

$$\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

Dies bedeutet, dass $\mathcal{E}$ dicht liegt in $L_2(\mu_M)$.

Beweis. Der Beweis folgt durch Standardargumente der Integrationstheorie. □

Dies ist der Grund, weshalb eine Isometrie von $\mathcal{E}$ zu einer Isometrie auf dem Abschluss $\overline{\mathcal{E}} = L_2(\mu_M)$ fortgesetzt werden kann, denn:
Zu $H \in \overline{\mathcal{E}}$ betrachte $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit

$$\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

Dann ist $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\overline{\mathcal{E}}$ und da I eine Isometrie ist, ist auch $(I(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathbb{P})$. Denn Cauchy-Folge heißt

$$\|I(H^{(n)}) - I(H^{(m)})\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|I(H^{(n)} - H^{(m)})\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|H^{(n)} - H^{(m)}\|_{L_2(\mu_M)} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Da $L_2(\mathbb{P})$ vollständig ist, existiert ein $U \in L_2(\mathbb{P})$ mit

$$\|U - I(H^{(n)})\|_{L_2(\mathbb{P})} \longrightarrow 0$$

also $U = L_2 - \lim I(H^{(n)})$.

Definition. *Das eben definierte U wird als Bild von H unter I definiert, d.h.:*

$$I(H) := U = L_2 - \lim_{n\to\infty} I(H^{(n)})$$

Damit ist das stochastische Integral I für quadratisch integrierbare Prozesse $H \in L_2(\mu_M)$ definiert.

Satz (Isometrieeigenschaft für $H \in L_2(\mu_M)$)**.** *Man erhält so eine lineare Isometrie*

$$\begin{aligned} I: \quad L_2(\mu_M) &\longrightarrow L_2(\mathbb{P}) \\ H &\mapsto I(H) \end{aligned}$$

Das heißt, es gilt:

(i) (Linearität)
- $H_1, H_2 \in L_2(\mu_M) \Rightarrow I(H_1 + H_2) = I(H_1) + I(H_2)$
- $H \in L_2(\mu_M), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow I(\lambda H) = \lambda I(H)$

(ii) (Isometrie) $\|I(H)\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|H\|_{L_2(\mu_M)}$

Beweis. (*i*) Sei $H_1^{(n)} \longrightarrow H_1, H_2^{(n)} \longrightarrow H_2$. Dann ist auch $H_1^{(n)} + H_2^{(n)} \longrightarrow H_1 + H_2$. Damit gilt

$$\begin{aligned} I(H_1 + H_2) &= L_2 - \lim I(H_1^{(n)} + H_2^{(n)}) \\ &= L_2 - \lim(I(H_1^{(n)}) + I(H_2^{(n)})) \\ &= L_2 - \lim I(H_1^{(n)}) + L_2 - \lim I(H_2^{(n)}) \\ &= I(H_1) + I(H_2) \end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda H^{(n)} \longrightarrow \lambda H$ in $L_2(\mu_M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} I(\lambda H) &= L_2 - \lim I(\lambda H^{(n)}) \\ &= L_2 - \lim \lambda I(H^{(n)}) \\ &= \lambda L_2 - \lim I(H^{(n)}) \\ &= \lambda I(H) \end{aligned}$$

(*ii*) Aus $\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$ folgt, dass $\|H^{(n)}\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow \|H\|_{L_2(\mu_M)}$.
Also folgt einerseits

$$\|I(H^{(n)})\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|H^{(n)}\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow \|H\|_{L_2(\mu_M)}$$

Andererseits gilt wegen

$$\|I(H^{(n)}) - I(H)\|_{L_2(\mathbb{P})} \longrightarrow 0$$

auch

$$\|I(H^{(n)})\|_{L_2(\mathbb{P})} \longrightarrow \|I(H)\|_{L_2(\mathbb{P})}$$

Zusammen gilt damit

$$\|I(H)\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|H\|_{L_2(\mu_M)}$$

□

Beispiel 2.16. *Sukzessive soll das stochastische Integral für elementare Handelsstrategien berechnet werden.*
Ziel: Es soll gelten:

$$\int Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma) = Y \int \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM$$

falls Y eine beschränkte $\mathcal{F}_\sigma$-messbare Abbildung ist.

1. Schritt: Seien σ, τ Stoppzeiten mit endlich vielen Werten und $\sigma \leq \tau$.
Behauptung: Für alle $F \in \mathcal{F}_\sigma$ gilt:

$$\int \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM = \mathbb{1}_F (M_\tau - M_\sigma)$$

Beweis. Das stochastische Intervall $(\sigma,\tau]$ ist eine disjunkte Vereinigung von previsiblen Rechtecken:

$$(\sigma,\tau] = \bigcup_{i=1}^{n}(t_{i-1},t_i] \times \{\sigma \le t_{i-1}, \tau \ge t_i\}$$

wobei σ,τ nur Werte in

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n$$

annehmen kann, denn:
Sei $F_i = \{\omega|\sigma(\omega) \le t_{i-1}, t_i \le \tau(\omega)\} \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$
Dann ist

$$\begin{aligned}
(\sigma,\tau] &:= \{(t,\omega) : \sigma(\omega) < t \le \tau(\omega)\} \\
&\overset{(\star)}{=} \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\overbrace{\{(t,\omega) : t \in (t_{i-1},t], \sigma(\omega) \le t_{i-1}, \tau(\omega) \ge t_i\}}^{=:N_i}}_{=(t_{i-1},t_i]\times F_i \text{ prev. Rechtecke}} \\
&= \bigcup_{i=1}^{n}(t_{i-1},t_i] \times F_i
\end{aligned}$$

zu $(\star)$:
<u>'$\supseteq$'</u>: $(t,\omega) \in N_i \Rightarrow \sigma(\omega) \le t_{i-1} < t \le t_i \le \tau(\omega)$
Also $\sigma(\omega) < t \le \tau(\omega) \Rightarrow (t,\omega) \in (\sigma,\tau]$
<u>'$\subseteq$'</u>: $(t,\omega) \in (\sigma,\tau] \Rightarrow \exists i \in \{1,...,n\} : t \in (t_{i-1},t_i)$ und $\sigma < t \le \tau$.
$\Rightarrow \exists i \in \{1,...,n\} : t \in (t_{i-1},t_i)$ und $\sigma(\omega) \le t_{i-1}, \tau(\omega) \ge t_{i-1} \Rightarrow (t,\omega) \in N_i$

Damit gilt dann weiter:

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}\mathbb{1}_F dM &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{\{\sigma\le t_{i-1}, t_i \le \tau\}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=0}^{i-n} \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{\{\sigma=t_k,\tau=t_j\}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{i=k+1}^{j} \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{\{\sigma=t_k,\tau=t_j\}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) \\
&\overset{\text{Teleskop-}}{\underset{\text{summe}}{=}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{\{\sigma=t_k,\tau=t_j\}}(M_{t_j} - M_{t_k}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_F \mathbb{1}_{\{\tau=t_j\}}(M_{t_j} - M_\sigma) \\
&= \mathbb{1}_F(M_\tau - M_\sigma)
\end{aligned}$$

□

2. Schritt: Seien $\sigma \leq \tau$ Stoppzeiten mit endlich vielen Werten und Y eine $\mathcal{F}_\sigma$-messbare Abbildung mit endlich vielen Werten, d.h. $\boxed{18.11.15}$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbb{1}_{F_k}$$

Behauptung: Es gilt:

$$\int Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

Beweis. Dies folgt durch Linearität:

$$\begin{aligned}
\int Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM &= I(Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}) \\
&= I\left((\sum_{k=1}^{n} y_k \mathbb{1}_{F_k}) \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} \right) \\
&= I\left(\sum_{k=1}^{n} y_k \mathbb{1}_{F_k} \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} y_k I(\mathbb{1}_{F_k} \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}) \\
&\overset{\text{1. Schritt}}{=} \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbb{1}_{F_k} (M_\tau - M_\sigma) \\
&= Y(M_\tau - M_\sigma)
\end{aligned}$$

□

3. Schritt: Seien $\sigma \leq \tau$ beschränkte Stoppzeiten, d.h. $\exists T > 0 : \sigma \leq \tau \leq T$. Sei Y eine $\mathcal{F}_\sigma$-messbare Abbildung mit endlich vielen Werten.
Behauptung: Es gilt:

$$\int Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

Beweis. Approximiere σ und τ durch Stoppzeiten mit endlich vielen Werten:

$$\sigma_n(\omega) := \inf_k \left\{ \frac{k}{2^n} : \frac{k}{2^n} \geq \sigma(\omega) \right\}$$

$$\tau_n(\omega) := \inf_k \left\{ \frac{k}{2^n} : \frac{k}{2^n} \geq \tau(\omega) \right\}$$

Dann ist $(Y \mathbb{1}_{(\sigma_n,\tau_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L_2(\mu_M)$, die $Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}$ in $L_2(\mu_M)$ approximiert, d.h.

$$||Y \mathbb{1}_{(\sigma_n,\tau_n]} - Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}||_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

Denn der Unterschied zwischen $(\sigma_n, \tau_n]$ und $(\sigma, \tau]$ ist gerade $(\sigma, \sigma_n]$ und $(\tau, \tau_n]$:

$$\int (Y \mathbb{1}_{(\sigma_n,\tau_n]} - Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]})^2 d\mu_M = \int Y^2 |\left(\mathbb{1}_{(\sigma_n,\tau_n]} - \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} \right)| d\mu_M$$

$$\underset{\text{schränkt}}{\overset{Y\text{ be-}}{\leq}} C^2\big(\underbrace{\mu_M((\sigma,\sigma_n])}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\mu_M((\tau,\tau_n])}_{\longrightarrow 0}\big) \longrightarrow 0$$

Die Stetigkeit des Integrals liefert

$$Y(M_{\tau_n} - M_{\sigma_n}) = \int Y\mathbb{1}_{(\sigma_n,\tau_n]}dM \longrightarrow \int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}dM \qquad \text{in } L_2(\mathbb{P})$$

Wegen der cadlag-Pfade konvergiert $Y(M_{\tau_n} - M_{\sigma_n})$ aber auch gegen $Y(M_\tau - M_\sigma)$ $\mathbb{P}$-fast sicher.
Das bedeutet:

$$\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

□

4. Schritt: Sei Y eine beschränkte $\mathcal{F}_\sigma$-messbare Abbildung und seien $\sigma \leq \tau$ beschränkte Stoppzeiten.
Behauptung: Es gilt:

$$\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

Beweis. Es existiert eine Folge von $\mathcal{F}_\sigma$-messbaren Treppenfunktionen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $Y_n \longrightarrow Y$ $\mathbb{P}$-fast sicher und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt, d.h. $\exists C > 0$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{\omega\in\Omega} |Y_n(\omega)| < C$$

Der Satz von der majorisierten Konvergenz liefert

$$\int (Y_n\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} - Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]})^2 d\mu_M = \int (Y_n - Y)^2\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}d\mu_M \longrightarrow 0$$

Denn die Majorante $(Y_n - Y)^2\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} \leq C^2\mathbb{1}_{(0,T]}$ ist integrierbar.
Die Stetigkeit des Integrals liefert

$$Y_n(M_\tau - M_\sigma) = \int Y_n\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}dM \longrightarrow \int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}dM \qquad \text{in } L_2(\mathbb{P})$$

Da $Y_n(M_\tau - M_\sigma)$ auch gegen $Y(M_\tau - M_\sigma)$ konvergiert, folgt

$$\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

□

Bemerkung. *Ist M sogar ein $\mathcal{H}_2$–Martingal, so gilt für beliebige Stoppzeiten $\sigma \leq \tau$*

$$\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

für jede beschränkte $\mathcal{F}_\sigma$–messbare Zufallsvariable Y.

Beweis. Da $M \in \mathcal{H}_2$, ist $\int Y^2 \mathbb{1}_{(\sigma,\tau])} d\mu_M < \infty$, also $Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])} \in L_2(\mu_M)$. Dort wird $Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])}$ durch $(Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])}\mathbb{1}_{(0,T_n]})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $T_n \to \infty$ approximiert, denn

$$\begin{aligned}\int (Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])} - Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])}\mathbb{1}_{(0,T_n]})^2 d\mu_M &= \int Y^2 \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}\mathbb{1}_{(T_n,\infty)} d\mu_M \\ &\leq C^2 \mu_M((\sigma,\tau] \cap (T_n,\infty)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

in $L_2(\mu_M)$.
Weiter ist

$$Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])}\mathbb{1}_{(0,T_n]} = Y\mathbb{1}_{(\sigma\wedge T_n,\tau\wedge T_n])} = Y\mathbb{1}_{\{\sigma\leq T_n\}}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge T_n,\tau\wedge T_n]}$$

denn

$$(\sigma,\tau] \cap (0,T_n] = (\sigma \wedge T_n, \tau \wedge T_n] = [0,\infty) \times \{\sigma \leq T_n\} \cap (\sigma \wedge T_n, \tau \wedge T_n]$$

Da Y $\mathcal{F}_\sigma$–messbar ist, ist $Y\mathbb{1}_{\{\sigma\leq T_n\}}$ sowohl $\mathcal{F}_{T_n}$–messbar, als auch $\mathcal{F}_\sigma$–messbar. Das heißt, $Y\mathbb{1}_{\{\sigma\leq T_n\}}$ ist $\mathcal{F}_{\sigma\wedge T_n}$–messbar und damit gilt

$$\begin{aligned}\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])}\mathbb{1}_{(0,T_n]} dM &= \int Y\mathbb{1}_{\{\sigma\leq T_n\}}\mathbb{1}_{(\sigma\wedge T_n,\tau\wedge T_n]} dM \\ &= Y\mathbb{1}_{\{\sigma\leq T_n\}}(M_{\tau\wedge T_n} - M_{\sigma\wedge T_n}) \\ &= Y(M_{\tau\wedge T_n} - M_{\sigma\wedge T_n}) \longrightarrow Y(M_\tau - M_\sigma) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}\end{aligned}$$

wobei die letzte Konvergenz mit dem Martingalkonvergenzsatz folgt, da $M \in \mathcal{H}_2$.
Andererseits ist

$$\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau])}\mathbb{1}_{(0,T_n]} dM \longrightarrow \int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM$$

in $L_2(\mathbb{P})$, da die Konvergenz in $L_2(\mu_M)$ gezeigt wurde.
Somit ist

$$\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dM = Y(M_\tau - M_\sigma)$$

□

Frage: Was ist $\int_0^T W_s dW_s = ?$

Bemerkung. *Betrachte dazu zuvor folgende Aussage:*
Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. Für beschränkte Stoppzeiten $\sigma \leq \tau$ und Y eine $\mathcal{F}_\sigma$–messbare, quadratintegrierbare Zufallsvariable gilt:

$$\int Y\mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dW = Y(W_\tau - W_\sigma)$$

Beweis. Approximiere Y durch beschränkte Zufallsvariablen:

$$Y_{K_n} = Y\mathbb{1}_{\{|Y|\leq K_n\}} \quad K_n \to \infty$$

Für Y_{K_n} ist

$$\lim_{n\to\infty} Y_{K_n} = Y \quad \text{in } L_2 \text{ und } \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

denn es gilt

$$\mathbb{E}(Y - Y_{K_n})^2 = \mathbb{E}|Y|^2 \mathbb{1}_{\{|Y| > K_n\}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dann ist für $n \to \infty$

$$H^{(n)} = Y_{K_n} \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]}$$

eine approximierende Folge für

$$H = Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} \quad \text{in } L_2(\mu_M),$$

denn

$$\begin{aligned}
\int (H^{(n)} - H)^2 d\mu_W &= \int (Y_{K_n} - Y)^2 \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} d\mu_W \\
&\leq \int (Y_{K_n} - Y)^2 \mathbb{1}_{(0,T]} d\mu_W \\
&= \int_0^T \mathbb{E}(Y_{K_n} - Y)^2 dt \\
&= T\mathbb{E}(Y_{K_n} - Y)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Also liefert die Stetigkeit des Integrals

$$Y_{K_n}(W_\tau - W_\sigma) = \int Y_{K_n} \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dW = \int H^{(n)} dW \underset{\text{in } L_2(\mathbb{P})}{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}} \int H dW = \int Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dW$$

Andererseits gilt

$$Y_{K_n}(W_\tau - W_\sigma) \longrightarrow Y(W_\tau - W_\sigma) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Also

$$Y(W_\tau - W_\sigma) = \int Y \mathbb{1}_{(\sigma,\tau]} dW \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

□

Beispiel 2.17. *Sei W ein Wiener-Prozess.*
Behauptung: Es gilt:

$$\int \mathbb{1}_{(0,T]} W dW = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$$

Beweis. Der Integrant $H := \mathbb{1}_{(0,T]} W$ ist previsibel, da er linksseitig stetig ist, da er stetige Pfade hat. Nutze das Wissen aus dem Beispiel nach Definition 2.12. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int H^2 d\mu_W &= \int \mathbb{1}_{(0,T]} W^2 d(\lambda \otimes \mathbb{P}) \\
&= \int_{[0,\infty)\times\Omega} \mathbb{1}_{(0,T]}(t) W_t^2(\omega)(\lambda \otimes \mathbb{P})(dt, d\omega) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{[0,\infty)} \mathbb{1}_{(0,T]}(t) \int_\Omega W_t^2(\omega)\mathbb{P}(d\omega)\lambda(dt)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^T \mathbb{E} W_t^2 dt$$
$$= \int_0^T t dt$$
$$= \frac{1}{2} T^2 < \infty$$

Also ist $H \in L_2(\mu_W)$.
Approximiere H in $L_2(\mu_W)$ durch

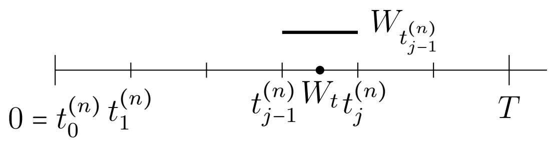
$$H^{(n)} := \sum_{j=1}^{l(n)} W_{t_{j-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{\left(t_{j-1}^{(n)}, t_j^{(n)}\right]}$$

wobei

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{l(n)}^{(n)} = T$$

mit

$$\max_j t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}$$



Dann ist

$$\int (H^{(n)} - H)^2 d\mu_W = \mathbb{E} \int_0^T (H_t^{(n)} - H_t)^2 dt$$
$$= \mathbb{E} \sum_{j=1}^{l(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} (W_{t_{j-1}^{(n)}} - W_t)^2 dt$$
$$= \sum_{j=1}^{l(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \mathbb{E}(W_{t_{j-1}^{(n)}} - W_t)^2 dt$$
$$= \sum_{j=1}^{l(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} t_{j-1}^{(n)} - t dt$$
$$\leq (\max_j t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) T \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Also liefert die Stetigkeit des Integrals

$$\int H^{(n)} dW \longrightarrow \int H dW \qquad \text{in } L_2(\mathbb{P})$$

Weiter gilt, nach obiger Bemerkung, dass

$$\int H^n dW = \sum_{j=1}^{l(n)} W_{t_{j-1}^{(n)}} (W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})$$

und

$$\begin{aligned} W_T^2 = \sum_{j=1}^{l(n)} (W_{t_j^{(n)}}^2 - W_{t_{j-1}^{(n)}}^2) &= \sum_{j=1}^{l(n)} \left[(W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})^2 + 2W_{t_{j-1}^{(n)}} (W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}}) \right] \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^{l(n)} (W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})^2}_{\longrightarrow T \text{ in } L_2(\mathbb{P})} + 2 \underbrace{\sum_{j=1}^{l(n)} W_{t_{j-1}^{(n)}} (W_{t_j^{(n)}} - W_{t_{j-1}^{(n)}})}_{\longrightarrow \int HdW \text{ in } L_2(\mathbb{P})} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$W_T^2 = T + 2\int HdW = T + 2\int \mathbb{1}_{(0,T]} W dW \Leftrightarrow \int \mathbb{1}_{(0,T]} W dW = \frac{1}{2}(W_T^2 - T)$$

□

Wir haben also

$$\begin{aligned} \text{Stochastisches Integral} \quad &\hat{=} \quad \text{Gesamtgewinn am Ende} \\ \text{Stochastischer Integralprozess} \quad &\hat{=} \quad \text{Gewinnentwicklung über die Zeit} \\ \int_0^\infty H_s dM_s \quad &\hat{=} \quad \text{Gesamtgewinn} \\ \left(\int_0^t H_s dM_s\right)_{t\geq 0} \quad &\hat{=} \quad \text{Gewinnentwicklung} \end{aligned}$$

Der stochastische Integralprozess

Für ein L_2-Martingal M mit cadlag-Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$ ist das stochastische Integral

$$I(H) = \int HdM \in L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$$

Frage: Wie kommt man von $I(H)$ zu einem Integralprozess?
Antwort: Benutze die Isometrie zwischen $L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P})$ und $\mathcal{H}_2$:

$$\begin{aligned} J: \quad L_2(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}) &\longrightarrow \quad \mathcal{H}_2 \\ X_\infty &\mapsto (E(X_\infty | \mathcal{F}_t))_{t\geq 0} \end{aligned}$$

)
Dann ist J eine Isometrie, das heißt, es gilt

$$\|X_\infty\|_{L_2(\mathbb{P})} = \|J(X)\|_{\mathcal{H}_2}$$

Definition 2.18. *Für ein L_2-Martingal M mit cadlag-Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$ definiere den stochastischen Integralprozess $H \cdot M$ durch die Abbildung*

$$\begin{aligned} H \cdot M : \quad L_2(\mu_M) &\longrightarrow L_2(\mathbb{P}) \longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ H &\mapsto J(I(H)) \end{aligned}$$

Für $t \geq 0$ gilt also

$$(H \cdot M)_t = \mathbb{E}(I(H)|\mathcal{F}_t)$$

$H \cdot M$ (sprich "H gegen M integriert") ist also ein Martingal.

Der stochastische Integralprozess für elementar previsible H

Für $H \in \mathcal{E}$ kann der Integralprozess $H \cdot M$ explizit berechnet werden:

Satz 2.19. *Sei $H \in \mathcal{E}$. Dann hat H eine Darstellung der Form*

$$H = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{R_j}$$

mit $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ und $R_0 = \{0\} \times F_0, R_j = (s_j, t_j] \times F_{s_j} \in \mathcal{R}$.
Dann gilt

$$H \cdot M = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{F_{s_j}} (M^{t_j} - M^{s_j}).$$

Dies bedeutet, dass bis auf Nichtentscheidbarkeit $H \cdot M$ mit

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{F_{s_j}} (M_{t_j \wedge t} - M_{s_j \wedge t}) \right)_{t \geq 0}$$

übereinstimmt.
Insbesondere ist $(H \cdot M)_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Beweis. Es reicht die Behauptung für $H = \mathbb{1}_{R_j}$ mit $R_j = (s_j, t_j] \times F_{s_j} \in \mathcal{R}$ zu zeigen.
Es gilt nach Definition:

$$I(\mathbb{1}_{R_j}) = \mathbb{1}_{F_{s_j}} (M_{t_j} - M_{s_j})$$

Es können 3 Fälle auftreten

Fall 1: $t \leq s_j$

Fall 2: $s_j < t \leq t_j$

Fall 3: $t_j < t$

Also:
Fall 1, sei $t \leq s_j$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(I(\mathbb{1}_{R_j})|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j} - M_{s_j})|\mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j} - M_{s_j})|\mathcal{F}_{s_j})|\mathcal{F}_t)\big] \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{F_{s_j}} \underbrace{\mathbb{E}(M_{t_j} - M_{s_j}|\mathcal{F}_{s_j})}_{=M_{s_j}-M_{s_j}=0} |\mathcal{F}_t)\big] \\
&= 0 \\
&= \mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_t - M_t) \\
&= \mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j \wedge t} - M_{s_j \wedge t})
\end{aligned}$$

Fall 2, sei $s_j < t \leq t_j$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j} - M_{s_j})|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{1}_{F_{s_j}}\mathbb{E}(M_{t_j}|\mathcal{F}_t) - \mathbb{1}_{F_{s_j}} M_{s_j} \\
&= \mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_t - M_{s_j}) \\
&= \mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j \wedge t} - M_{s_j \wedge t})
\end{aligned}$$

Fall 3, sei $t_j < t$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j} - M_{s_j})|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j} - M_{s_j}) \\
&= \mathbb{1}_{F_{s_j}}(M_{t_j \wedge t} - M_{s_j \wedge t})
\end{aligned}$$

□

Weitere Eigenschaften des Integralprozesses

Satz 2.20. *Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag-Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$. Dann gilt:* 23.11.15

(i) $(H \cdot M)_0 = 0$ *$\mathbb{P}$-fast sicher*

(ii) $\mathbb{E}(H \cdot M)_t = 0$ *für alle $t \geq 0$*

(iii) $\mathbb{E}(H \cdot M)_\tau = 0$ *für alle Stoppzeiten τ*

(iv) Hat M stetige Pfade, so hat auch $H \cdot M$ stetige Pfade und es gilt $H \cdot M \in \mathcal{H}_{2,c}$.

Beweis. Für $H \in \mathcal{E}$ rechnet man die Eigenschaften (i) und (iv) nach und nutzt dann ein Stetigkeitsargument, d.h. man nutzt die Fortsetzbarkeit von $\mathcal{E}$ nach $\overline{\mathcal{E}} = L_2(\mu_M)$:
(i): $(H \cdot M)_0 = 0$ gilt für alle $H \in \mathcal{E}$ wegen Satz 2.19.
Weiter ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
B: \quad \mathcal{H}_2 &\longrightarrow L_2(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \\
X &\mapsto \quad \mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_0)
\end{aligned}$$

ein stetiger linearer Operator, denn

$$\begin{aligned}
\|B(X)\|^2_{L_2(\Omega,\mathcal{F}_0,\mathbb{P})} &= \mathbb{E}\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_0)^2 \\
&\overset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}\mathbb{E}(X^2_\infty|\mathcal{F}_0) \\
&= \mathbb{E}X^2_\infty \\
&= \|X\|^2_{\mathcal{H}_2}
\end{aligned}$$

Also ist die Operatornorm von B durch 1 beschränkt.
Weiter gilt:

$$B(H \cdot M) = 0 \qquad \text{für alle } H \in \mathcal{E}$$

denn:
Für $H \in L_2(\mu_M)$ existiert eine Folge $H^{(n)} \in \mathcal{E}$ mit

$$\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

Die Stetigkeit des Integrals liefert

$$H^{(n)} \cdot M \longrightarrow H \cdot M \qquad \text{in } \mathcal{H}_2$$

Stetigkeit von B impliziert

$$B(H^{(n)} \cdot M) \longrightarrow B(H \cdot M) = (H \cdot M)_0$$

Da $B(H^{(n)} \cdot M) = (H^{(n)} \cdot M)_0 = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung.
(ii) und (iii) folgen sofort mit Optional Sampling, da $(H \cdot M) \in \mathcal{H}_2$ ist. Also gilt

$$\mathbb{E}(H \cdot M)_\tau = (H \cdot M)_0 = 0$$

für alle Stoppzeiten τ.
(iv) Für alle $H \in \mathcal{E}$ ist $H \cdot M \in \mathcal{H}_{2,c}$ wegen der Darstellung in Satz 2.19.
$\mathcal{H}_{2,c}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}_2$. Zu $H \in L_2(\mu_M)$ existiert eine Folge $H^{(n)} \in L_2(\mu_M)$ mit

$$\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

Daraus folgt

$$H^{(n)} \cdot M \longrightarrow H \cdot M$$

$(H^{(n)} \cdot M)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in $\mathcal{H}_{2,c}$ und wegen der Abgeschlossenheit ist auch deren Grenzwert $H \cdot M$ in $\mathcal{H}_{2,c}$. □

Satz 2.21. *Seien $M, N L_2$-Martingale mit cadlag-Pfaden. Dann gilt:*

(i) $\mu_{M+N} \leq 2(\mu_M + \mu_N)$

(ii) $L_2(\mu_M + \mu_N) = L_2(\mu_M) \cap L_2(\mu_N) \subseteq L_2(\mu_{M+N})$

(iii) $H \cdot (M + N) = (H \cdot M) + (H \cdot N)$ *für alle* $H \in L_2(\mu_M) \cap L_2(\mu_N)$

Beweis. (i) Es reicht die Behauptung für den $\cap$-stabilen Erzeuger $\mathcal{R}$ zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_{M+N}((s,t]\times F_s) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}((M+N)_t-(M+N)_s)^2 \\
&= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}((M_t-M_s)+(N_t-N_s))^2 \\
{\scriptstyle (a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\to} &\le 2\left[\mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(M_t-M_s)^2+\mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(N_t-N_s)^2\right] \\
&= 2(\mu_M((s,t]\times F_s)+\mu_N((s,t]\times F_s))
\end{aligned}$$

(ii) Wegen

$$\int H^2 d(\mu_M+\mu_N) = \int H^2 d\mu_M + \int H^2 d\mu_N$$

folgt

$$L_2(\mu_M+\mu_N) = L_2(\mu_M)\cap L_2(\mu_N)$$

Ist $H\in L_2(\mu_M+\mu_N)$, so gilt wegen (i)

$$\int H^2 d\mu_{M+N} \le 2\int H^2 d(\mu_M+\mu_N)$$

Also folgt

$$L_2(\mu_M+\mu_N)\subseteq L_2(\mu_{M+N})$$

(iii) Für $H\in\mathcal{E}$ rechnet man nach, dass

$$H\cdot(H+N) = H\cdot M + H\cdot N$$

gilt. Beachte:

$$\mathcal{E}\subseteq \bigcap_{M\,L_2\text{-Martingal}} L_2(\mu_M)$$

Der Rest folgt wieder über ein Stetigkeitsargument:
Zu $H\in L_2(\mu_M+\mu_N)=L_2(\mu_M)\cap L_2(\mu_N)$ existiert eine Folge $H^{(n)}$ in $\mathcal{E}$ mit

$$||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_M+\mu_N)}\longrightarrow 0$$

Wegen (i) gilt:

$$||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_{M+N})}\le 2||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_M+\mu_N)} \tag{1}$$

was zusammengenommen bedeutet, dass

$$||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_M)}\le ||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_M+\mu_N)}\le 2||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_M+\mu_N)}\longrightarrow 0 \tag{2}$$

sowie

$$||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_N)}\le ||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_M+\mu_N)}\le 2||H^{(n)}-H||_{L_2(\mu_M+\mu_N)}\longrightarrow 0 \tag{3}$$

Hieraus folgt:

$$H^{(n)}\cdot(M+N)\xrightarrow{(1)} H\cdot(M+N),\quad H^{(n)}\cdot M\xrightarrow{(2)} H\cdot M,\quad H^{(n)}\cdot N\xrightarrow{(3)} H\cdot N$$

Für $H^{(n)} \in \mathcal{E}$ wurde folgende Aussage schon bewiesen:

$$H^{(n)} \cdot (M + N) = H^{(n)} \cdot M + H^{(n)} \cdot N$$

Daraus folgt aber

$$H \cdot (M + N) = H \cdot M + H \cdot N$$

□

Bemerkung. *Im Allgemeinen gilt, dass*

$$L_2(\mu_M + \mu_N) \subsetneq L_2(\mu_{M+N})$$

denn man kann $M = -N$ setzen. Dann ist $M + N = 0$, Also

$$\mu_{M+N} = \mu_0 \Rightarrow L_2(\mu_{M+N}) = L_2(\mu_0) = \mathcal{P}$$

Auf der anderen Seite ist aber

$$L_2(\mu_M + \mu_N) = L_2(\mu_M + \mu_{-M}) = L_2(\mu_M) \cap L_2(\mu_M) = L_2(\mu_M)$$

Ziel: Ausdehnung des stochastischen Integrals durch Lokalisation.

$$I(H) = \int_0^\infty H dM$$

Aufteilung in Intervalle der Form $(0, \tau_n]$ mit τ_n Stoppzeit:

$$\int_0^{\tau_n} H_s dM_s = \int H \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} dM \overset{\tau_n \uparrow \infty}{=} (H \cdot M)_\infty^{\tau_n}$$

Stoppen und Abschneiden

Definition 2.22. *Für einen stochastischen Prozess $(X)_{t \geq 0}$ und eine Stoppzeit τ definiere den gestoppten Prozess X^τ durch*

$$X^\tau := \begin{cases} X_t & t < \tau \\ X_\tau & t \geq \tau \end{cases}$$

Der durch τ abgeschnittene Prozess $X\mathbb{1}_{(0,\tau]}$ ist definiert durch

$$X\mathbb{1}_{(0,\tau]} := \begin{cases} X_t & 0 < t \leq \tau \\ 0 & t > \tau \end{cases}$$

Es ergeben sich folgende Eigenschaften, die für eine spätere Lokalisation wichtig sind:

Satz. *Für jede Stoppzeit τ gilt:*

(i) Ist $X \in \mathfrak{M}$, so ist auch $X^\tau \in \mathfrak{M}$, d.h. ist X gleichgradig integrierbar, so auch X^τ.

(ii) Ist $X \in \mathcal{H}_2$, so ist auch $X^\tau \in \mathcal{H}_2$.

(iii) Hat X stetige Pfade, so auch X^τ.

(iv) Ist M ein L_2-Martingal mit cadlag-Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$, so gilt

$$H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \in L_2(\mu_M) \cap L_2(\mu_{M^\tau})$$

und

$$(H \cdot M)^\tau = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M^\tau = H \cdot M^\tau$$

Beweis. (i) folgt aus der Charakterisierung der gleichgradig integrierbaren Martingale. Für jede Stoppzeit σ gilt:

$$\mathbb{E}M^\tau_\sigma = \mathbb{E}M_{\tau\wedge\sigma} \overset{M\in\mathfrak{M}}{=} \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M^\tau_0.$$

Also ist $M^\tau \in \mathfrak{M}$.
(ii) Ist $X \in \mathcal{H}_2$, so ist $X \in \mathfrak{M}$ und nach (i) ist auch $X^\tau \in \mathfrak{M}$. Also

$$X^\tau_t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} X^\tau_\infty \qquad \text{in } L_1 \text{ und } \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und es gilt

$$X^\tau_t = X_{\tau\wedge t} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} X_\tau \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Damit ist

$$X^\tau_\infty = X_\tau \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Also gilt:

$$\mathbb{E}(X^\tau_\infty)^2 = \mathbb{E}X^2_\tau = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\infty|\mathcal{F}_\tau)^2) \overset{\text{Jensen}}{\leq} \mathbb{E}\mathbb{E}(X^2_\infty|\mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}X^2_\infty \overset{X\in\mathcal{H}_2}{<} \infty$$

Somit ist $X^\tau \in \mathcal{H}_2$. Damit ist

$$\|X^\tau\|^2_{\mathcal{H}_2} = \mathbb{E}(X^\tau_\infty)^2 \leq \mathbb{E}X^2_\infty = \|X\|^2_{\mathcal{H}_2}$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} S: \quad &\mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ &X \mapsto X^\tau \end{aligned}$$

ist ein linearer stetiger Operator mit Operatorennorm ≤ 1.
(iii) ist klar

(iv) Für elementar previsible Prozesse $H \in \mathcal{E}$ rechnet man nach

$$(H \cdot M)^\tau = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M^\tau = H \cdot M^\tau$$

Das Stoppen S ist stetig. Das Abschneiden

$$\begin{aligned} C: \quad L_2(\mu_M) &\longrightarrow L_2(\mu_M) \\ H &\mapsto H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \end{aligned}$$

ist linear und stetig, denn

$$\|C(H)\|^2_{L_2(\mu_M)} = \int H^2 \mathbb{1}_{(0,\tau]} d\mu_M \leq \int H^2 d\mu_M = \|H\|^2_{L_2(\mu_M)}$$

Auf $\mathcal{E}$ gilt:

$$(H \cdot M)^\tau = S(H \cdot M) = C(H) \cdot M = C(H) \cdot M^\tau = H \cdot S(M)$$

Durch ein Stetigkeitsargument erhält man die Aussage für $H \in L_2(\mu_M)$:
Sei $H^{(n)} \in \mathcal{E}$ mit

$$\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} (H \cdot M)^\tau &= S(H \cdot M) = S((\lim_{n\to\infty} H^{(n)}) \cdot M) \\ &\overset{\text{Stetigkeit des Integrals}}{=} S(\lim_{n\to\infty} (H^{(n)} \cdot M)) = \lim_{n\to\infty} S(H^{(n)} \cdot M) \\ &= \lim_{n\to\infty} C(H^{(n)}) \cdot M = (\lim_{n\to\infty} C(H^{(n)})) \cdot M \\ &= C(H) \cdot M = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M \end{aligned}$$

Beachte:

$$\|C(H^{(n)}) - C(H)\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

□

Folgerung 2.23. *Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag-Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$. Dann gilt für jede Stoppzeit (insbesondere auch für jede deterministische Zeit) τ:*

$$(H \cdot M)_\tau = (H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M)_\infty = I(H\mathbb{1}_{(0,\tau]}) = \int H\mathbb{1}_{(0,\tau]} dM \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

25.11.15

Beweis.

$$\begin{aligned} (H \cdot M)_\tau &= (H \cdot M)^\tau_\infty \\ &\overset{\text{Definition 2.22}}{=} (H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M)_\infty \\ &\overset{\text{Definition 2.18}}{=} \mathbb{E}(I(H\mathbb{1}_{(0,\tau]}) | \mathcal{F}_\infty) \\ &= I(H\mathbb{1}_{(0,\tau]}) \\ &= \int H\mathbb{1}_{(0,\tau]} dM \end{aligned}$$

□

Damit hat man gezeigt:

$$\mathbb{E}(I(H)|\mathcal{F}_\tau) = (H \cdot M)_\tau = I(H\mathbb{1}_{(0,\tau]})$$

Insbesondere gilt:

$$(H \cdot M)_t = \int H\mathbb{1}_{(0,t]} dM = \int_0^t H_s dM_s$$

für alle $t \geq 0$.

Bemerkung. *Für ein L_2–Martingal M und eine beliebige Stoppzeit τ gilt:*

(i) $\mu_{M^\tau} \leq \mu_M$

(ii) $L_2(\mu_M) \subseteq L_2(\mu_{M^\tau})$

(iii) Ist H previsibel, so auch H^τ.

(iv) Ist $H \in L_2(\mu_M)$, so gilt $(H \cdot M)^\tau = H^\tau \cdot M^\tau$

(v) Ist H ein beschränkter, previsibler Prozess und $M \in \mathcal{H}_2$, so gilt:

$$H^\tau \cdot M = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M + H_\tau(M - M^\tau)$$

Beweis. zu (i): $\mu_{M^\tau}(A) = \mu_M(A \cap (0,\tau]) \leq \mu_M(A)$
zu (ii): Ist $H \in L_2(\mu_M)$, so gilt:

$$\int H^2 d\mu_{M^\tau} \leq \int H^2 d\mu_M < \infty$$

Also

$$L_2(\mu_M) \subseteq L_2(\mu_{M^\tau})$$

zu (iii): $H_t^\tau = H_t\mathbb{1}_{\{t\leq\tau\}} + H_\tau\mathbb{1}_{\{t>\tau\}} \Rightarrow H^\tau$ previsibel
zu (iv):

$$(H \cdot M)^\tau = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M^\tau = H^\tau\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M^\tau = (H^\tau \cdot M)^\tau = H^\tau \cdot M^\tau$$

zu (v): Es gilt: $H^\tau = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} + H_\tau\mathbb{1}_{(\tau,\infty)}$
Also gilt:

$$\begin{aligned} H^\tau \cdot M &= H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M) + (H_\tau\mathbb{1}_{(\tau,\infty)} \cdot M) \\ &= (H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M) + H_\tau(M^\infty - M^\tau) \\ &= (H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M) + H_\tau(M - M^\tau) \end{aligned}$$

□

Eine weitere nützliche Formel ist

Satz 2.24. *Seien M ein L_2-Martingal mit cadlag-Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$. Sei τ eine Stoppzeit und Y eine beschränkte $\mathcal{F}_\tau$-messbare Abbildung.*
Dann gilt:

$$\int Y \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} H dM = Y \int \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} H dM$$

bzw.

$$(Y\mathbb{1}_{(\tau,\infty)}H) \cdot M) = Y((\mathbb{1}_{(\tau,\infty)}H) \cdot M)$$

bzw.

$$((Y\mathbb{1}_{(\tau,\infty)}H) \cdot M)_t = Y((\mathbb{1}_{(\tau,\infty)}H) \cdot M)_t \quad \textit{für alle } t \geq 0$$

bzw.

$$\int_0^t Y \mathbb{1}_{(\tau,\infty)}(s) H_s dM_s = Y \int_0^t \mathbb{1}_{(\tau,\infty)}(s) H_s dM_s \quad \textit{für alle } t \geq 0$$

Beweis. Für

$$H = \mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(s,t]}$$

eine Indikatorfunktion eines previsiblen Rechtecks gilt:

$$\begin{aligned}
\int Y \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} \mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(s,t]} dM &= \int Y \mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(\tau \vee s, \tau \vee t]} dM \\
&\overset{Y\mathbb{1}_{F_s} \text{ ist } \mathcal{F}_{\tau\vee s}\text{-messbar}}{=} Y \mathbb{1}_{F_s} (M_{\tau \vee t} - M_{\tau \vee s}) \\
&\overset{\mathbb{1}_{F_s} \text{ ist } \mathcal{F}_{\tau\vee s}\text{-messbar}}{=} Y \int \mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(\tau \vee s, \tau \vee t]} dM \\
&= Y \int \mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} \mathbb{1}_{(s,t]} dM \\
&= Y \int \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} H dM
\end{aligned}$$

Durch Linearität erhält man die Formel für $H \in \mathcal{E}$. Ist $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{E}$ mit

$$\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

so konvergiert

$$\|YH^{(n)}\mathbb{1}_{(\tau,\infty)} - YH\mathbb{1}_{(\tau,\infty)}\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

denn

$$\|YH^{(n)}\mathbb{1}_{(\tau,\infty)} - YH\mathbb{1}_{(\tau,\infty)}\|_{L_2(\mu_M)} \underset{\text{beschränkt}}{\overset{Y\mathbb{1}_{(\tau,\infty]} \text{ ist}}{\leq}} C^2 \|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0$$

Die Stetigkeit des Integrals liefert:

$$\begin{aligned}
\int YH\mathbb{1}_{(\tau,\infty)} dM &= \lim_{n\to\infty} \int YH^{(n)} \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} dM \\
&= \lim_{n\to\infty} Y \int H^{(n)} \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} dM \\
&= Y \lim_{n\to\infty} \int H^{(n)} \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} dM
\end{aligned}$$

$$= Y \int H \mathbb{1}_{(\tau,\infty)} dM$$

Beachte:
Für Y beschränkt und messbar ist

$$X \mapsto YX$$

ein stetiger, linearer Operator von $L_2(\mathbb{P})$ nach $L_2(\mathbb{P})$, denn

$$\mathbb{E}(YX)^2 \leq C^2 \mathbb{E} X^2, \qquad C := \sup_{\omega \in \Omega} |Y(\omega)|$$

□

<u>Ziel:</u> Assoziativität des Integralprozesses, d.h.

$$H \cdot (K \cdot M) = (HK) \cdot M$$

Satz 2.25. *Sei M ein L_2-Martingal mit cadlag-Pfaden und H, K previsible Prozesse mit $K \in L_2(\mu_M)$ und $H \in L_2(\mu_{K \cdot M})$.*
Dann gilt:

$$HK \in L_2(\mu_M)$$

und

$$(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$$

Beweis. <u>Behauptung:</u> Es gilt für alle $A \in \mathcal{P}$:

$$\mu_{K \cdot M}(A) = \int_A K^2 d\mu_M$$

Es reicht die Behauptung für $A \in \mathcal{R}$ zu zeigen:
Für $R = \mathbb{1}_{(s,t]} \times F_s$, $F_s \in \mathcal{F}_s$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_{K \cdot M}(R) &= \mathbb{E} \mathbb{1}_{F_s} ((K \cdot M)_t - (K \cdot M)_s)^2 \\
&= \mathbb{E} \mathbb{1}_{F_s} (I(\mathbb{1}_{(s,t]} K))^2 \\
&= \mathbb{E} I(\mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(s,t]} K)^2 \\
&\overset{\text{Isometrie}}{=} \int \mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(s,t]} K^2 d\mu_M \\
&= \int_R K^2 d\mu_M
\end{aligned}$$

Beachte, dass wegen Satz 2.24 gilt:

$$\mathbb{1}_{F_s} I(\mathbb{1}_{(s,t]} K) = I(\mathbb{1}_{F_s} \mathbb{1}_{(s,t]} K)$$

Wegen

$$d\mu_{K \cdot M} = K^2 d\mu_M$$

folgt für $H \in L_2(\mu_{K\cdot M})$

$$\int (HK)^2 d\mu_M = \int H^2 d\mu_{K\cdot M} < \infty$$

Also ist $HK \in L_2(\mu_M)$.
Weiter rechne man für $H \in \mathcal{E}$ nach, dass

$$H \cdot (K \cdot M) = (HK) \cdot M$$

Für $H \in L_2(\mu_{K\cdot M})$ existiert eine Folge $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ mit

$$\|H^{(n)} - H\|_{L_2(\mu_{K\cdot M})} \longrightarrow 0$$

Dies impliziert, dass

$$\|H^{(n)}K - HK\|_{L_2(\mu_M)} = \int (H^{(n)} - H)^2 K^2 d\mu_M = \int (H^{(n)} - H)^2 d\mu_{K\cdot M} \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

Somit liefert die Stetigkeit des Integrals

$$H \cdot (K \cdot M) = \lim_{n\to\infty} (H^{(n)} \cdot (K \cdot M)) \overset{H^{(n)}\in\mathcal{E}}{=} \lim_{n\to\infty} ((H^{(n)}K) \cdot M) = (HK) \cdot M$$

wegen Gleichung 1. □

3 Der quadratische Variationsprozess

Ziel:

- Beschreibung der Fluktuation der Pfade eines stetigen Martingals
- alternative Beschreibung des Doléans-Maßes
- Doob-Meyer Zerlegung des Submartingals (M_t^2) in ein Martingal N und einen monoton wachsenden, previsiblen Prozess Λ:

$$M_t^2 = M_0^2 + N_t + \Lambda_t$$

Die Variation

Für eine Funktion $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ soll die Fluktuation gemessen werden.

Definition 3.1. *Sei $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und π eine Zerlegung*

$$\pi : 0 = t_0 < \ldots < t_n = T$$

des Intervalls $[0,T]$.
Die Variation $FV_T(f,\pi)$ von f bezüglich π ist definiert durch

$$FV_T(f,\pi) := \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

f heißt von beschränkter Variation auf $[0,T]$, falls

$$FV_T(f) := \sup_{\substack{\pi \text{ Zerlegung} \\ \text{von } [0,T]}} FV_T(f,\pi) < \infty$$

$FV_T(f)$ ist dann ein Maß für die Fluktuation von f über $[0,T]$.

Beispiel. (i) *Ist $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachend, so ist f von beschränkter Variation auf $[0,T]$, denn*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) - f(t_{i-1}) = f(T) - f(0)$$

(ii) *Sind f, g von beschränkter Varaiation auf $[0,T]$, so auch fg und cf für alle $c \in \mathbb{R}$, denn*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |(f+g)(t_i) - (f+g)(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1} + g(t_i) - g(t_{i-1})| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1}| + \sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|\end{aligned}$$

Also

$$FV_T(f+g) \leq FV_T(f) + FV_T(g)$$

(iii) *Ist $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Konstante $c > 0$, so ist f von beschränkter Variation auf $[0,T]$, denn*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1}| \leq c \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = cT$$

(iv) *Sei $u \in L_1([0,T])$ und $f(t) := \int_0^t u(s)ds$ mit $t \in [0,T]$. Dann hat f eine beschränkte Variation auf $[0,T]$, denn*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i} u(s)ds\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |u(s)|ds \\ &= \int_0^T |u(s)|ds\end{aligned}$$

Also

$$FV_T(f) \leq \int_0^T |u(s)|ds$$

(*v*) *Die Funktion*

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ t \sin \frac{1}{t} & t > 0 \end{cases}$$

ist stetig auf $[0,T]$*, hat aber keine beschränkte Variation.*

Bemerkung 3.2. *Hat* f *eine beschränkte Variation auf* $[0,T]$ *und ist* f *stetig, so gilt*

$$FV_T(f) = \lim_{|\pi|\to 0} FV_T(f,\pi)$$

wobei $|\pi| := \max |t_i - t_{i-1}|$

Satz 3.3. *Sei* $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$*.* f *hat eine beschränkte Variation auf* $[0,T]$ *genau dann, wenn es monoton wachsende Funktionen* g_1 *und* g_2 *gibt, mit*

$$f = g_1 - g_2$$

Beweis. " $\Leftarrow$ " klar 30.11.15

" $\Rightarrow$ " Definiere für alle $t \in [0,T]$

$$f^+(t) := \frac{1}{2}(FV_t(f) + f(t))$$
$$f^-(t) := \frac{1}{2}(FV_t(f) - f(t))$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} &f = f^+ - f^- \\ &FV_t(f) = f^+(t) + f^-(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,T] \end{aligned}$$

f^+ und f^- sind monoton wachsende Funktionen, denn für $h > 0$ gilt:

$$FV_{t+h}(f) \geq FV_t(f) + |f(t+h) - f(t)|$$

1. Fall: $f(t+h) \geq f(t)$:
Dann gilt:

$$\begin{aligned} 2f^+(t+h) &= FV_{t+h}(f) + f(t+h) \\ &\geq FV_t(f) + f(t) \\ &= 2f^+(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 2f^-(t+h) &= FV_{t+h}(f) - f(t+h) \\ &\geq FV_t(f) + f(t+h) - f(t) - f(t+h) \\ &= FV_t(f) - f(t) \\ &= 2f^-(t) \end{aligned}$$

2. Fall: $f(t+h) < f(t)$:
Analog $\square$

Ist f von beschränkter Variation und rechtsseitig stetig, so sind auch f^+ und f^- rechtsseitig stetig und die Zerlegung in f^+ und f^- ist durch die Eigenschaften

$$\begin{aligned} &f = f^+ - f^- \\ &FV_t(f) = f^+(t) + f^-(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,T] \end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.
f^+ und f^- sind Verteilungsfunktionen von Maßen μ^+ bzw. μ^- auf $[0,T]$:

$$\mu_f^{\pm}((a,b]) := f^{\pm}(b) - f^{\pm}(a) \qquad \text{für alle } 0 \le a < b \le T$$

Durch

$$\mu_f(A) := \mu^+(A) - \mu^-(A)$$

für alle Borelschen Mengen $A \subseteq [0,T]$, wird ein signiertes Maß auf $[0,T]$ definiert. Dies ist eine σ-additive Mengenfunktion, die auch negative Werte annehmen kann. Zusammenhang:

$$\mu_f((a,b]) = f(b) - f(a) \qquad \text{für alle } 0 \le a < b \le T$$

Die rechtsseitig stetige Funktion

$$t \mapsto FV_t(f)$$

ist monoton wachsend und definiert das sogenannte Variationsmaß $\|\mu_f\|$ auf $[0,T]$ durch

$$\|\mu_f\|((a,b]) := FV_b(f) - FV_a(f) \qquad \text{für alle } 0 \le a < b \le T$$

Es gilt:

$$\|\mu_f\| = \mu_f^+ + \mu_f^-$$

μ^+ und μ^- sind eindeutig bestimmt durch

$$\begin{aligned} \mu_f &= \mu_f^+ - \mu_f^- \\ \|\mu_f\| &= \mu_f^+ + \mu_f^- \end{aligned}$$

Lebesgue-Stieltjes Integration

Definition 3.4. *Sei $f : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine rechtsseitig stetige Funktion von beschränkter Variation mit eindeutiger Zerlegung:*

$$\begin{aligned} &f = f^+ - f^- \\ &FV_t(f) = f^+(t) + f^-(t) \qquad \textit{für alle } t \in [0,T] \end{aligned}$$

Eine messbare Funktion $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Lebesgue-Stieltjes integrierbar bezüglich f, wenn g gegen f^+ und f^- integrierbar ist.
Es wird dann definiert:

$$\int_0^T g df := \int_0^T g df^+ - \int_0^T g df^-$$

wobei

$$\int_0^T g\,df^+ := \int_0^T g\,d\mu_f^+$$

und

$$\int_0^T g\,df^- := \int_0^T g\,d\mu_f^-$$

mit

$$\mu_f^\pm((a,b]) = f^\pm(b) - f^\pm(a) \qquad \text{für alle } 0 \le a < b \le T$$

Satz. *g ist integrierbar gegen f genau dann, wenn g gegen das Variationsmaß $\|\mu_f\|$ integriert werden kann und es gilt:*

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T g\,df\right| &\le \int_0^T |g|d\|\mu_f\| \\ &= \int_0^T |g(t)|dFV_t(f)\end{aligned}$$

Beweis. “ $\Rightarrow$ “ Sei g integrierbar gegen f. Dann ist g integrierbar gegen f^+ und f^-. Also

$$\int_0^T |g|df^+ < \infty, \qquad \int_0^T |g|df^- < \infty$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^T |g|d\|\mu_f\| &= \int_0^T |g|df^+ + \int_0^T |g|df^- \qquad (< \infty, \text{ also integrierbar}) \\ &\ge \left|\int_0^T g\,df^+\right| + \left|\int_0^T g\,df^-\right| \\ &\ge \left|\int_0^T g\,df^+ - \int_0^T g\,df^-\right| \\ &= \left|\int_0^T g\,df\right|\end{aligned}$$

“ $\Leftarrow$ “ Ist $\int_0^T |g|d\|\mu_f\| < \infty$ so ist

$$\int_0^T |g|df^+ + \int_0^T |g|df^- = \int_0^T |g|d\|\mu_f\| < \infty$$

$\Rightarrow \int_0^T |g| df^+ < \infty, \qquad \int_0^T |g| df^- < \infty$
$\Rightarrow g$ ist gegen f integrierbar. □

Definition 3.5. *Eine Funktion $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal von beschränkter Variation, wenn*

$$FV_T(f) < \infty \qquad \text{für alle } T > 0$$

gilt.

Bemerkung. *Ist f lokal von beschränkter Variation und rechtsseitig stetig, so existieren eindeutige rechtsseitig stetige Funktionen f^+ und f^- mit*

$$\begin{aligned} &f = f^+ - f^- \\ &FV_t(f) = f^+(t) + f^-(t) \qquad \text{für alle } t \in [0, \infty) \end{aligned}$$

f^+ und f^- definieren Maße auf dem Raum $([0, \infty), \mathcal{B})$ durch

$$\mu_f^{\pm}((a, b]) = f^{\pm}(b) - f^{\pm}(a) \qquad \text{für alle } 0 \leq a < b < \infty$$

Dann ist

$$\mu_f = \mu_f^+ - \mu_f^-$$

das zu f gehörende Maß.

Martingale mit stetigen Pfaden haben keine Pfade von beschränkter Variation. Deshalb wird zur Messung der Fluktuation die quadratische Variation eingeführt:

Die quadratische Variation

Definition 3.6. *Sei $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\pi : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$.*
Die quadratische Variation bezüglich π ist definiert durch

$$V_T^{(2)}(f, \pi) := \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^2$$

und

$$V_T^{(2)}(f) := \lim_{|\pi| \to 0} V_T^{(2)}(f, \pi)$$

wobei $|\pi| := \max |t_i - t_{i-1}|$.

Bemerkung. *Ist $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und von beschränkter Variation unter $[0, T]$, so ist*

$$V_T^{(2)}(f) = 0.$$

Die Fluktuation ist also zu klein um sie mit der quadratischen Variation messen zu können.

Beweis. f ist gleichmäßig stetig auf $[0,T]$ und deshalb gilt:

$$\begin{aligned} V_T^{(2)}(f,\pi) &= \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^2 \\ &\le \underbrace{\max |f(t_i) - f(t_{i-1})|}_{\xrightarrow[f \text{ glm stetig}]{|\pi|\to 0} 0} \underbrace{\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|}_{\xrightarrow{|\pi|\to 0} FV_t(f)<\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Weiteres Vorgehen:

- schrittweise abstrakte Definition des quadratischen Variationsprozesses mit Hilfe des stochastischen Integrals
- Nachweis, dass der quadratische Variationsprozess tatsächlich die quadratische Variation der Pfade misst.

Der quadratische Variationsprozess für beschränkte, stetige Martingale

Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ der die usual conditions erfüllt.
Mit $b\mathfrak{M}_c$ bezeichnen wir den Raum der beschränkten Martingale mit stetigen Pfaden.
$M \in b\mathfrak{M}_c$ genau dann, wenn M ein Martingal mit stetigen Pfaden ist und es ein $C > 0$ gibt mit

$$\sup_{t\ge 0} |M_t| < C \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Es gilt

$$b\mathfrak{M}_c \subseteq \mathcal{H}_{2,c}.$$

Ist $M \in b\mathfrak{M}_c$, so ist wegen der Stetigkeit der Pfade M auch previsibel und wegen der Beschränktheit gilt für alle $N \in \mathcal{H}_{2,c}$

$$M \in L_2(\mu_N),$$

denn

$$\int M^2 d\mu_N \overset{M\in b\mathfrak{M}_c}{\le} C^2 \mu_N([0,\infty)\times\Omega) = C^2 \mathbb{E}(N_\infty - N_0)^2 \overset{N\in\mathcal{H}_{2,c}}{<} \infty.$$

Insbesondere ist

$$M \in L_2(\mu_M).$$

Definition 3.7. *Für $M \in b\mathfrak{M}_c$ mit $M_0 = 0$ definiere den quadratischen Variationsprozess durch*

$$\langle M\rangle_t := M_t^2 - 2(M\cdot M)_t \qquad \text{für alle } t \ge 0$$

bzw.

$$\langle M\rangle_t = M_t^2 - 2\int\limits_0^t M_s dM_s \qquad \textit{für alle } t \geq 0$$

Eigenschaften

Satz 3.8. *Sei $M \in b\mathfrak{M}_c$ mit $M_0 = 0$. Dann gilt:*

(i) $\langle M\rangle_0 = 0$

(ii) $t \mapsto \langle M\rangle_t$ *ist adaptiert mit $\mathbb{P}$-fast sicher stetigen Pfaden.*

(iii) $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)_{t\geq 0} \in \mathcal{H}_{2,c}$

(iv) $t \mapsto \langle M\rangle_t$ *ist $\mathbb{P}$-fast sicher monoton wachsend.*

Mit Hilfe der quadratischen Variation kann die Doob-Meyer Zerlegung des Submartingals $(M_t^2)_{t\geq 0}$ durch

$$M_t^2 = \underbrace{M_0^2}_{\text{Start}} + \underbrace{M_t^2 - \langle M\rangle_t}_{\text{Martingalanteil}} + \underbrace{\langle M\rangle_t}_{\substack{\text{previsibler,}\\ \text{wachsender}\\ \text{Anteil}}}$$

angegeben werden. 2.12.15

Beweis des Satzes. (i), (ii) klar

(iii) folgt aus $M_t^2 - \langle M\rangle_t = 2\int\limits_0^t M_s dM_s \in \mathcal{H}_{2,c}$

(iv) Definiere für $n \in \mathbb{N}$ rekursiv Stoppzeiten $\left(\tau_i^{(n)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ durch

$$\begin{aligned}
&\tau_0^{(n)} := 0,\\
&\tau_{i+1}^{(n)} := \inf\{t \geq 0 : |M_t - M_{\tau_i^{(n)}}| \geq 2^{-n}\},\\
&\inf \varnothing := +\infty
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass im Raumbereich ein dyadisches Gitter mit Gitterbreite 2^{-n} gewählt wird und der Prozess immer dann stoppt, wenn ein Gitterpunkt erreicht wird. Dadurch wird eine zufallsabhängige Zerlegung des Zeitbereiches definiert.
Definiere den stochastischen Prozess

$$A_t^{(n)} := \sum_{i=0}^{\infty}\left(M_{\tau_{i+1}^{(n)}\wedge t} - M_{\tau_i^{(n)}\wedge t}\right)^2 \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Mit einem Teleskopsummenargument und mit $M_0 = 0$ folgt

$$M_t^2 - A_t^{(n)} = M_t^2 - \sum_{i=0}^{\infty}\left(M_{\tau_{i+1}^{(n)}\wedge t} - M_{\tau_i^{(n)}\wedge t}\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} M^2_{\tau_{i+1}^{(n)} \wedge t} - M^2_{\tau_i^{(n)} \wedge t} - \left(M_{\tau_{i+1}^{(n)} \wedge t} - M_{\tau_i^{(n)} \wedge t} \right)^2$$
$$= 2 \sum_{i=0}^{\infty} M_{\tau_i^{(n)} \wedge t} \left(M_{\tau_{i+1}^{(n)} \wedge t} - M_{\tau_i^{(n)} \wedge t} \right)$$

Die rechte Seite ist ein stochastischer Integralprozess, denn man definiere $H^{(n)} \in b\mathcal{P}$ (also $H^{(n)}$ aus den beschränkten previsiblen Prozessen) durch

$$H^{(n)} := 2 \sum_{i=0}^{\infty} M_{\tau_i^{(n)}} \mathbb{1}_{(\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)}]},$$

also

$$H_t^{(n)} = 2 \sum_{i=0}^{\infty} M_{\tau_i^{(n)} \wedge t} \mathbb{1}_{(\tau_i^{(n)} \wedge t, \tau_{i+1}^{(n)} \wedge t]} \qquad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dann ist

$$(H^{(n)} \cdot M)_\infty = I(H^{(n)}) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} M_{\tau_i^{(n)}} \left(M_{\tau_{i+1}^{(n)}} - M_{\tau_i^{(n)}} \right)$$

und damit

$$(H^{(n)} \cdot M)_t = 2 \sum_{i=0}^{\infty} M_{\tau_i^{(n)} \wedge t} \left(M_{\tau_{i+1}^{(n)} \wedge t} - M_{\tau_i^{(n)} \wedge t} \right)$$
$$= M_t^2 - A_t^{(n)} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Für $n \to \infty$ strebt $H^{(n)}$ gegen $2M$ in $L_2(\mu_M)$, denn

$$\int (H^{(n)} - 2M)^2 d\mu_M = \sum_{i=0}^{\infty} \int (H^{(n)} - 2M)^2 \mathbb{1}_{(\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)}]} d\mu_M$$
$$\leq 4(2^{-n})^2 \underbrace{\mu_M([0, \infty) \times \Omega)}_{\mathbb{E} M_\infty^2 < \infty}$$
$$\longrightarrow 0$$

da auf $(\tau_i^{(n)}, \tau_{i+1}^{(n)}]$ $|H^{(n)} - 2M|$ durch $2 \; 2^{-n}$ beschränkt ist.
Die Stetigkeit des Integrals liefert

$$M^2 - A^{(n)} = H^{(n)} \cdot M \longrightarrow 2M \cdot M \qquad \text{in } \mathcal{H}_{2,c}$$

Die Doobsche L_2-Ungleichung (vgl. Satz 1.23) liefert eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$M_t^2 - A_t^{(n_k)} \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} 2(M \cdot M)_t$$

gleichmäßig in t $\mathbb{P}$-fast sicher.
Da für $s \leq t$

$$A_s^{(n_k)} \leq A_t^{(n_k)} + 2^{-n_k}$$

gilt, ist

$$\langle M \rangle_s = \lim_{k \to \infty} A_s^{(n_k)} \leq \lim_{k \to \infty} A_t^{(n_k)} + 2^{-n_k} = \langle M \rangle_t$$

Hieraus folgt die Monotonie von $\langle M \rangle$. □

Definition 3.9. *Für $M \in b\mathfrak{M}_c$ mit $M_0 \neq 0$ definieren wir den quadratischen Variationsprozess durch*

$$\langle M \rangle := \langle M - M_0 \rangle$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_t = \langle M - M_0 \rangle_t &= (M_t - M_0)^2 - 2\int_0^t (M_s - M_0) d(M_s - M_0) \\
&= (M_t - M_0)^2 - 2\int_0^t (M_s - M_0) dM_s - 2\underbrace{\int_0^t (M_s - M_0) dM_0}_{=0,\text{ da } M_0 \text{ konstant}} \\
&= M_t^2 - 2M_0M_t + M_0^2 - 2\int_0^t M_s dM_s + 2\underbrace{\int_0^t M_0 dM_s}_{\substack{=M_0(M_t - M_0),\text{ da}\\ M_0\ \mathcal{F}_0\text{-messbar}}} \\
&= M_t^2 - M_0^2 - 2\int_0^t M_s dM_s
\end{aligned}$$

und somit

$$M_t^2 = M_0^2 + 2\int_0^t M_s dM_s + \langle M \rangle_t \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Dies entspricht der Doob-Meyer Zerlegung für das Submartingal $(M_t^2)_{t \geq 0}$.
Durch Lokalisation soll die quadratische Variation auf stetige L_2-Martingale ausgedehnt werden.
Wichtig hierfür ist die Verträglichkeit mit Stoppen:

Satz 3.10. *Sei $M \in b\mathfrak{M}_c$ mit $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Dann gilt für jede Stoppzeit τ:*

$$\langle M \rangle^\tau = \langle M^\tau \rangle$$

Beweis. Dies folgt aus der Definition von $\langle M \rangle$ und der Verträglichkeit des Stoppens mit der Integration:

$$\begin{aligned}
\langle M^\tau \rangle &= (M^\tau)^2 - 2(M^\tau \cdot M^\tau) \\
&= (M^2)^\tau - 2(M^\tau \mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M^\tau) \\
&= (M^2)^\tau - 2(M \mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M) \\
&= (M^2)^\tau - 2(M \cdot M)^\tau \\
&= (M^2 - 2M \cdot M)^\tau \\
&= \langle M \rangle^\tau
\end{aligned}$$

□

Der quadratische Variationsprozess für stetige L_2-Martingale

Satz 3.11. *Sei M ein stetiges L_2-Martingal mit $M_0 = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Dann existiert bis auf Nichtunterscheidbarkeit genau ein stochastischer Prozess $\langle M\rangle$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $\langle M\rangle_0 = 0$ *$\mathbb{P}$-fast sicher*

(ii) $(\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ *ist adaptiert und hat $\mathbb{P}$-fast sicher stetige und monoton wachsende Pfade*

(iii) $(M_t^2 - \langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$ *ist ein Martingal*

Definition. *Der Prozess $\langle M\rangle$ aus Satz 3.11 wird quadratischer Variationsprozess von M genannt.*

Satz 3.12. *Sei M ein L_2-Martingal mit stetigen Pfaden, die lokal von beschränkter Variation sind. Dann ist M $\mathbb{P}$-fast sicher konstant, d.h.*

$$M_t = M_0 \qquad \text{für alle } t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Beweis. O.E.d.A.: $M_0 = 0$, denn setze sonst $M_{\text{neu}} := M - M_0$.
Lokalisiere M in $b\mathfrak{M}_c$ durch

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq k\}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.
Es gilt weiter:

$$\begin{aligned}
\langle M^{\tau_k}\rangle_t &\overset{\text{Satz 3.8}}{=} L_2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left| M^{\tau_k}_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - M^{\tau_k}_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t} \right|^2 \\
&= L_2 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left| M_{\tau_i^{(n)}\wedge\tau_k\wedge t} - M_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge\tau_k\wedge t} \right|^2 \\
&\leq L_2 - \lim_{n\to\infty} 2^{-n} \sum_{i=1}^{\infty} \left| M_{\tau_i^{(n)}\wedge\tau_k\wedge t} - M_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge\tau_k\wedge t} \right| \\
&\leq L_2 - \lim_{n\to\infty} 2^{-n} FV_t(M) = 0
\end{aligned}$$

da $FV_t(M) < \infty$.
Also ist

$$\langle M^{\tau_k}\rangle_t = 0 \qquad \text{für alle } t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und damit ist $\left((M_t^{\tau_k})^2\right)_{t\geq 0}$ ein Martingal.
Aus

$$\mathbb{E}(M_t^{\tau_k})^2 = \mathbb{E}\langle M^{\tau_k}\rangle_t = 0$$

folgt

$$M_t^{\tau_k} = 0 \qquad \text{für alle } t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt und

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \uparrow +\infty$$

folgt

$$M_t = 0 \qquad \text{für alle } t \geq 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

□

Beweis von Satz 3.11. Die Existenz folgt aus Definition 3.9 und Satz 3.10 durch Lokalisation (vgl. Kapitel 4), denn
definiere eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$\tau_k := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq k\}, \qquad \inf \varnothing := +\infty$$

Dann ist $M^{\tau_k} \in b\mathfrak{M}_c$ und

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

Benutze den zu M^{τ_k} gehörenden quadratischen Variationsprozess $\langle M^{\tau_k} \rangle$ zur Definition von $\langle M \rangle$, indem wir

$$\langle M \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \langle M^{\tau_k} \rangle \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]}, \qquad \tau_0 = 0$$

setzen.
Wegen der Verträglichkeit mit Stoppen folgt

$$\langle M \rangle^{\tau_n} = \langle M^{\tau_n} \rangle \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

denn

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle^{\tau_n} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle M^{\tau_k} \rangle \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]} \right)^{\tau_n} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle M^{\tau_k} \rangle^{\tau_n} \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (M^{\tau_k})^{\tau_n} \rangle \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle M^{\tau_k \wedge \tau_n} \rangle \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle (M^{\tau_n})^{\tau_k} \rangle \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle M^{\tau_n} \rangle^{\tau_k} \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle M^{\tau_n} \rangle \mathbb{1}_{(\tau_{k-1}, \tau_k]}
\end{aligned}$$

$$= \langle M^{\tau_n} \rangle$$

Da $\langle M^{\tau_n} \rangle$ die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$, gelten (i) und (ii) auch für $\langle M \rangle$.

Zu (iii): Zum Nachweis der Martingaleigenschaft wird die Charakterisierung mittels beschränkter Stoppzeiten benutzt. 7.12.15

Zu zeigen ist also:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_\tau^2 - \langle M \rangle_\tau) = 0 = \mathbb{E}(M_0 - \langle M \rangle_0) \\ \Leftrightarrow \qquad \mathbb{E}M_\tau^2 = \mathbb{E}\langle M \rangle_\tau \end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathbb{E}M^2_{\tau\wedge\tau_n} = \mathbb{E}(M^{\tau_n}_\tau)^2 = \mathbb{E}\langle M^{\tau_n} \rangle_\tau = \mathbb{E}\langle M \rangle^{\tau_n}_\tau = \mathbb{E}\langle M \rangle_{\tau\wedge\tau_n}$$

da $M^{\tau_n} \in b\mathfrak{M}_c$ und damit $(M^{\tau_n})^2 - \langle M^{\tau_n} \rangle \in \mathcal{H}_{2,c}$.

Für $n \to \infty$ strebt

$$\langle M \rangle_{\tau_n \wedge \tau} \uparrow \langle M \rangle_\tau,$$

also gilt

$$\mathbb{E}\langle M \rangle_{\tau_n \wedge \tau} \uparrow \mathbb{E}\langle M \rangle_\tau.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_\tau - M_{\tau\wedge\tau_n})^2 &= \mathbb{E}\left(\int \mathbb{1}_{(\tau\wedge\tau_n,\tau]} dM\right)^2 \\ &\overset{\text{Isometrie}}{=} \int \mathbb{1}_{(\tau\wedge\tau_n,\tau]} d\mu_M \\ &= \mu_M((\tau\wedge\tau_n,\tau]) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Man beachte hier, dass die Beschränktheit von τ eingeht, was $\mu_M((0,\tau]) = \mathbb{E}M_\tau^2 < \infty$ impliziert.

Somit folgt:

$$\mathbb{E}M_\tau^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}M^2_{\tau\wedge\tau_n} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\langle M \rangle_{\tau\wedge\tau_n} = \mathbb{E}\langle M \rangle_\tau < \infty$$

Die Eindeutigkeit des quadratischen Variationsprozesses folgt aus der Tatsache, dass stetige Martingale mit Pfaden von beschränkter Variation konstant sind, siehe Satz 3.12.

Mit diesem Satz gilt dann:

Seien A, B Prozesse mit den Eigenschaften $(i) - (iii)$. Dann ist

$$A - B = \underbrace{(M^2 - B)}_{\text{Martingal}} - \underbrace{(M^2 - A)}_{\text{Martingal}}$$

ein Martingal mit Pfaden von lokal beschränkter Variation. Daraus folgt:

$$A - B = A_0 - B_0 = 0 \Leftrightarrow A = B$$

$\square$

Definition 3.13. *Für ein stetiges L_2-Martingal M mit $M_0 \neq 0$ definieren wir den quadratischen Variationsprozess durch*

$$\langle M \rangle := \langle M - M_0 \rangle$$

Dann ist $\langle M \rangle$ der eindeutig bestimmte Prozess mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\langle M \rangle_0 = 0$

(ii) $(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ ist adaptiert und hat $\mathbb{P}$-fast sicher wachsende und stetige Pfaden

(iii) $(M_t^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal.

Man beachte:

$$\begin{aligned}(M_t - M_0)^2 &= M_t^2 - 2M_0 M_t + M_0^2 \\ &= M_t^2 - M_0^2 - 2M_0(M_t - M_0)\end{aligned}$$

Also ist

$$M_t^2 - M_0^2 - \langle M \rangle_t = \underbrace{(\underbrace{M_t - M_0}_{\text{Martingal}})^2 - \langle M \rangle_t}_{\text{Martingal}} + \underbrace{2M_0(M_t - M_0)}_{\text{Martingal}}$$

ein Martingal.
Daraus folgt die Doob-Meyer Zerlegung:

$$M_t^2 = M_0^2 + \underbrace{(M_t - M_0)^2 - \langle M \rangle_t + 2M_0(M_t - M_0)}_{\text{Martingal}} + \langle M \rangle_t$$

Weitere Eigenschaften des quadratischen Variationsprozesses:

Satz 3.14. *Für ein stetiges L_2-Martingal M und jede Stoppzeit τ gilt:*

$$\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$$

Beweis. O.E.d.A. können wir $M_0 = 0$ voraussetzen. Wir verifizieren die charakterisierenden Eigenschaften des quadratischen Variationsprozesses:
$\langle M \rangle^\tau$ ist adaptiert, wachsend und stetig und startet aus der Null.
Zu zeigen verbleibt, dass $(M^\tau)^2 - \langle M \rangle^\tau$ ein Martingal ist.
Für jede beschränkte Stoppzeit σ gilt:

$$\mathbb{E}(M^\tau)_\sigma^2 = \mathbb{E}M_{\tau\wedge\sigma}^2 = \mathbb{E}\langle M \rangle_{\tau\wedge\sigma} = \mathbb{E}\langle M \rangle_\sigma^\tau$$

Dies impliziert die Martingaleigenschaft von $(M^\tau)^2 - \langle M \rangle^\tau$. $\square$

Satz 3.15. *Sei M ein stetiges L_2-Martingal. Dann gilt für das Doléans-Maß μ_M*

$$\mu_M(A) = \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_A(t,\omega)d\langle M\rangle_t(\omega)$$

für jede previsible Menge $A \in \mathcal{P}$. Insbesondere gilt für $H \in L_2(\mu_M)$

$$\int H^2 d\mu_M = \mathbb{E}\int_0^\infty H_t^2(\omega)d\langle M\rangle_t(\omega)$$

Beweis. Es reicht die Behauptung für previsible Rechtecke zu zeigen.
Für $A = (s,t] \times F_s \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_M(A) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(M_t^2 - M_s^2) \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(M_t^2 - \langle M\rangle_t - (M_s^2 - \langle M\rangle_s))}_{=0,\text{ da } \left(M_t^2 - \langle M\rangle_t\right)_{t\geq 0}\text{Martingal}} + \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s) \\
&= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s) \\
&= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(\omega)\int_0^\infty \mathbb{1}_{(s,t]}(u)d\langle M\rangle_u(\omega) \\
&= \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_{F_s}(\omega)\mathbb{1}_{(s,t]}(u)d\langle M\rangle_u(\omega) \\
&= \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_A(u,\omega)d\langle M\rangle_u(\omega)
\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.16. *- Sei W ein Wiener-Prozess. Dann ist $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ ein Martingal. Also ist $\langle W\rangle_t = t$ für alle $t \geq 0$.*
- Sei $M_t = \exp(\vartheta W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$.
M ist ein L_2-Martingal mit Doléans-Maß

$$\mu_M(A) = \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_A(t,\omega)\vartheta^2 M_t^2(\omega)dt \tag{2}$$

für alle $A \in \mathcal{P}$.
Vergleicht man das mit

$$\mu_M(A) = \mathbb{E}\int_0^\infty \mathbb{1}_A(t,\omega)d\langle M\rangle_t(\omega),$$

so erkennt man, dass

$$d\langle M\rangle_t(\omega) = \vartheta^2 M_t^2(\omega)dt$$

Also ist

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t 1 \; d\langle M\rangle_s(\omega) = \int_0^t \vartheta^2 M_s^2(\omega) ds.$$

Beweis von Gleichung 2. Es genügt, die Gleichheit für $A = (s,t] \times F_s$ zu zeigen. Man überlege sich vorher, dass folgende Punkte gelten:

(i) $\frac{M_t}{M_s} = \exp(\vartheta(W_t - W_s) - \frac{1}{2}\vartheta^2(t-s)) \sim M_{t-s}$ und unabhgängig von $\mathcal{F}_s$

(ii) $\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_0 = 1$

(iii) $\mathbb{E}M_t^2 = \mathbb{E}\exp(2\vartheta W_t - \vartheta^2 t) = e^{\vartheta^2 t} \underbrace{\mathbb{E}\exp(2\vartheta W_t - \overbrace{2\vartheta^2}^{=\frac{1}{2}4\vartheta^2} t)}_{=1} = e^{\vartheta^2 t}$

(iv) $\mathbb{V}\mathrm{ar} M_t = \mathbb{E}M_t^2 - (\mathbb{E}M_t)^2 = e^{\vartheta^2 t} - 1 = \int_0^t \vartheta^2 e^{\vartheta^2 u} du$

Berechne zuerst die linke Seite der Gleichung 2:

$$\begin{aligned}
\mu_M(A) &= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(M_t - M_s)^2 \\
&= \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s} M_s^2 \left(\frac{M_t}{M_s} - 1\right)^2 \\
&\overset{(i)}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_s} M_s^2)\mathbb{E}\left(\frac{M_t}{M_s} - 1\right)^2 \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_s} M_s^2)\mathbb{E}\Bigg(\underbrace{\left(\frac{M_t}{M_s}\right)^2}_{\overset{(iii)}{=} e^{\vartheta^2(t-s)}} -2 \underbrace{\mathbb{E}\frac{M_t}{M_s}}_{\overset{(ii)}{=} 1} +1 \Bigg) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_s} M_s^2)(e^{\vartheta^2(t-s)} - 1)
\end{aligned}$$

Berechne nun die rechte Seite der Gleichung 2:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\int \mathbb{1}_A(\omega,u)\vartheta^2 M_u^2 du &= \mathbb{E}\int_s^t \mathbb{1}_{F_s}(\omega)\vartheta^2 M_u^2 du \\
&= \int_s^t \mathbb{E}\mathbb{1}_{F_s}(\omega)\vartheta^2 M_s^2 \frac{M_u^2}{M_s^2} du \\
&\overset{(i)}{=} \int_s^t \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_s}(\omega) M_s^2)\vartheta^2 \mathbb{E}\left(\frac{M_u^2}{M_s^2}\right) du \\
&\overset{(iii)}{=} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_s}(\omega) M_s^2) \int_s^t \vartheta^2 e^{\vartheta^2(u-s)} du \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{F_s}(\omega) M_s^2)(e^{\vartheta^2(t-s)} - 1)
\end{aligned}$$

□

Der quadratische Variationsprozess für stochastische Integralprozesse

Satz 3.17. *Sei M ein L_2-Martingal mit stetigen Pfaden und $H \in L_2(\mu_M)$. Dann gilt*

(i) $\langle H \cdot M \rangle_t = \int\limits_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s$ *für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.*

(ii) $\langle H \cdot M \rangle^\tau = \langle H \mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M \rangle$ *für jede Stoppzeit τ.*

Beweis. $\left(\int\limits_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \right)_{t \geq 0}$ ist adaptiert, wachsend und hat stetige Pfade mit $\int_0^0 H_s^2 d\langle M \rangle_s = 0$.
Zu zeigen:

$$N_t := (H \cdot M)_t^2 - \int\limits_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \qquad t \geq 0$$

ist ein Martingal, denn dann folgt die Behauptung mit der Eindeutigkeit des quadratischen Variationsprozesses.
Für jede Stoppzeit τ gilt:

$$(H \cdot M)_\tau = (H \cdot M)_\infty^\tau = (H \mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M)_\infty$$

Also ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(H \cdot M)_\tau^2 &= \mathbb{E}(H \mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M)_\infty^2 \\ &= \mathbb{E}(I(H \mathbb{1}_{(0,\tau]})^2) \\ &\overset{\text{Isometrie}}{=} \int H^2 \mathbb{1}_{(0,\tau]} d\mu_M \\ &= \mathbb{E} \int H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau]}(s) d\langle M \rangle_s \\ &= \mathbb{E} \int\limits_0^\tau H_s^2 d\langle M \rangle_s \end{aligned}$$

Also ist $\mathbb{E} N_\tau = 0$ für jede Stoppzeit τ.
(ii) folgt sofort aus

$$\langle H \cdot M \rangle^\tau = \langle (H \cdot M)^\tau \rangle = \langle H \mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M \rangle$$

□

Bemerkung. *Ist $M_t = \exp(\vartheta W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t)$ so ist $d\langle M \rangle_t = \vartheta^2 M_t^2 dt$.*
Vermutung: $M = H \cdot W$ mit $H_t = \vartheta M_t$

$$M_t = 1 + \int \vartheta M_s dW_s$$

$$dM_t = \vartheta M_t dW_t$$

Die quadratische Kovariation

9.12.15

Satz. *Der quadratische Variationsoperator ist eine quadratische Abbildung, d.h. es gilt:*

(i) $\langle cM \rangle = c^2 \langle M \rangle$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$ *und jedes stetige* L_2*–Martingal* M

(ii) $\langle M + N \rangle + \langle M - N \rangle = 2(\langle M \rangle + \langle N \rangle)$ *für alle stetigen* L_2*–Martingale* M, N

Beweis. Idee: Verwende Satz 3.11 (Eindeutigkeit). $i)$ zu zeigen: $\langle cM \rangle = c^2 \langle M \rangle$
Es gilt

$$(cM)_t^2 - c^2 \langle M \rangle = c^2 \underbrace{(M_t^2 - \langle M \rangle)}_{\text{Martingal}}$$

$$\Rightarrow \langle cM \rangle = c^2 M$$

$ii)$ zu zeigen: $\langle M + N \rangle + \langle M - N \rangle = 2(\langle M \rangle + \langle N \rangle)$
Bemerke:

$$2(M^2 + N^2) = (M + N)^2 + (M - N)^2$$

Also:

$$2(M^2 + N^2) - \langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle = (M + N)^2 - \langle M + N \rangle + (M - N)^2 - \langle M - N \rangle \qquad (I)$$

ist ein Martingal.
Andererseits sind

$$M^2 - \langle M \rangle \quad \text{und} \quad N^2 - \langle N \rangle$$

Martingale.
$\Rightarrow M^2 + N^2 - \langle M \rangle - \langle N \rangle$ ist ein Martingal
$\Rightarrow 2(M^2 + N^2) - 2(\langle M \rangle + \langle N \rangle)$ ist ein Martingal. $\quad (II)$
Vergleiche (I) und (II) und nutze die Eindeutigkeit aus Satz 3.11.
$\Rightarrow \langle M + N \rangle + \langle M - N \rangle = 2(\langle M \rangle + \langle N \rangle)$ □

Definition 3.18. *Wegen dieser Eigenschaften kann man durch eine Polarisation den quadratischen Kovariationsprozess definieren mittels*

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$$

für alle stetigen L_2*–Martingale* M, N.

Eigenschaften der quadratische Kovariation

Satz 3.19. *Die quadratische Kovariation hat folgende Eigenschaften:*

(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ist bilinear, d.h.*

$$\langle M_1 + M_2, N \rangle = \langle M_1, N \rangle + \langle M_2, N \rangle$$

$$\langle cM, N\rangle = c\langle M, N\rangle$$
$$\langle M, N_1 + N_2\rangle = \langle M, N_1\rangle + \langle M, N_2\rangle$$
$$\langle M, cN\rangle = c\langle M, N\rangle$$

(ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist symmetrisch, d.h.*

$$\langle M, N\rangle = \langle N, M\rangle$$

(iii) $\langle M, N\rangle$ *wird, bis auf Nichtunterscheidbarkeit, eindeutig durch folgende Eigenschaften beschrieben:*

a) $\langle M, N\rangle_0 = 0$

b) $(\langle M, N\rangle_t)_{t\geq 0}$ *ist adaptiert und hat stetige Pfade von lokal beschränkter Variation*

c) $MN - \langle M, N\rangle$ *ist ein Martingal*

Beweis. zu (i) und (ii): Wir zeigen:

a) Verträglichkeit mit Addition (in einer Komponente, dann nutze die Symmetrieeigenschaft)

b) Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation (in einer Komponente, dann nutze die Symmetrieeigenschaft)

zu a): Um $\langle X+Y, Z\rangle = \langle X, Z\rangle + \langle Y, Z\rangle$ zu zeigen genügt es zu (nach Definition) zu zeigen

$$\langle X+Y+Z\rangle - \langle X+Y+Z\rangle \overset{!}{=} \underbrace{\langle X+Z\rangle + \langle Y\rangle}_{1)} \underbrace{-\langle X-Z\rangle - \langle Y\rangle}_{2)} \underbrace{+\langle Y+Z\rangle + \langle X\rangle}_{3)} \underbrace{-\langle Y-Z\rangle - \langle X\rangle}_{4)} \qquad (\star)$$

$1) = \frac{1}{2}(\langle X+Y+Z\rangle + \langle X-Y+Z\rangle)$
$2) = -\frac{1}{2}(\langle X+Y-Z\rangle + \langle X-Y-Z\rangle)$
$3) = \frac{1}{2}(\langle X+Y+Z\rangle + \langle X-Y-Z\rangle)$
$4) = -\frac{1}{2}(\langle X+Y-Z\rangle + \langle X-Y+Z\rangle)$
Addiert man 1) – 4) zusammen, so ergibt sich die linke Seite.
Das $\frac{1}{4}$ könnte man überall davor schreiben, doch dann kürzt es sich weg.
Alternativ kann man einfacher auch mit der in (iii) angegebenen Charakterisierung des quadratischen Kovariationsprozesses argumentieren, denn

$$(X+Y)Z - (\langle X, Z\rangle + \langle Y, Z\rangle) \quad = \quad XZ - (\langle X, Z\rangle + YZ - (\langle Y, Z\rangle$$
$$(cX)Z - c\langle X, Z\rangle = c(XZ - (\langle X, Z\rangle)$$

sind Martingale.

zu b): Um $\langle \alpha X, Z\rangle = \alpha\langle X, Z\rangle$ zu zeigen für $\alpha \in \mathbb{R}$ genügt es zu zeigen, dass

$$\langle \alpha X + Z\rangle - \langle \alpha X - Z\rangle \overset{!}{=} \alpha(\langle X + Z\rangle - X - Z\rangle) \qquad (\star\star)$$

gilt.
$(\star\star)$ gilt für

- $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ nach $(\star)$
- $\alpha \in \mathbb{N}$ nach Induktion
- $\alpha = \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N} : \alpha' = m, X' = \alpha' X = mX$ Dann gilt:

$$\langle X' + Z\rangle - \langle X' - Z\rangle = m(\langle \frac{1}{m}X' + Z\rangle - \langle \frac{1}{m}X' - Z\rangle)$$

- $\alpha \in \mathbb{Q}^+ : \alpha = \frac{q}{m}$
- $\alpha \in \mathbb{Q}^- :$

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\alpha - \alpha)X + Z\rangle - \langle (\alpha - \alpha)X - Z\rangle \\ &\overset{(\star)}{=} \langle \alpha X + Z\rangle - \langle \alpha X - Z\rangle + \langle -\alpha X + Z\rangle - \langle -\alpha X - Z\rangle \end{aligned}$$

Also
$$\langle \alpha X + Z\rangle - \langle \alpha X - Z\rangle = -(\langle -\alpha X + Z\rangle - \langle -\alpha X - Z\rangle)$$

- $\alpha \in \mathbb{R}$: Wähle $\alpha_m \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha_m \longrightarrow \alpha$ + Stetigkeit

zu (iii): a) und b) sind klar.
zu c): Dies folgt aus der Tatsache, dass die Multiplikation in $\mathbb{R}$ die zum Quadrieren gehörige Bilinearform ist.

$$\begin{aligned} MN - \langle M, N\rangle &= \frac{1}{4}\left[(M+N)^2 - (M-N)^2 - (\langle M+N\rangle - \langle M-N\rangle)\right] \\ &= \frac{1}{4}((M+N)^2 - \langle M+N\rangle) - \frac{1}{4}((M-N)^2 - \langle M-N\rangle) \end{aligned}$$

ist ein Martingal.
Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 3.12, denn aus der Martingaleigenschaft von

$$MN - A \text{ und } MN - B$$

folgt, dass
$$B - A$$

ein Martingal ist mit stetigen Pfaden von lokal beschränkter Variation.
Hieraus folgt
$$B - A = B_0 - A_0 = 0.$$

□

Betrachtet man

$$\langle \int_0^{\cdot} H_s dM_s \rangle = \int_0^{\cdot} H_s^2 d\langle M \rangle_s$$

so kann man vermuten, dass

$$\langle \int_0^{\cdot} H_s dM_s, \int_0^{\cdot} K_s dN_s \rangle = \int_0^{\cdot} H_s K_s d\langle M, N \rangle_s$$

gilt. Zum Nachweis dieser Vermutung benutzt man die Kunita Watanabe Ungleichung, die man aus der Lebesgue-Stieltjen Integrationstheorie herleiten kann.

Satz 3.20. *Seien $f, g, h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ rechtsseitig stetige Funktionen mit*

$$f(0) = g(0) = h(0)$$

f sei lokal von beschränkter Variation und g, h seien monoton wachsend.
Gilt

$$|f(t) - f(s)|^2 \leq (g(t) - g(s))(h(t) - h(s)) \qquad \text{für alle } 0 \leq s < t,$$

so gilt für alle messbaren Funktionen $x, y : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\int_s^t |x(u)|\ |y(u)|\ d\|f\|_u \leq \left(\int_s^t |x(u)|^2 dg(u) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t |y(u)|^2 dh(u) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hierbei bezeichnet $\|f\|$ das Variationsmaß zu μ_f, also

$$\|f\| := \|\mu_f\| = \mu_{FV.(f)}$$

Beweis. siehe Revusz, Yor, Continious Martingales and Brownian Motion. □

Durch pfadweise Betrachtung erhält man die Kunita Watanabe Ungleichung:

Satz 3.21 (Kunita Watanabe Ungleichung)**.** *Seien M, N stetige L_2-Martingale und H, K progressiv messbare Prozesse.*
Dann gilt:

$$\int_s^t |H(u)|\ |K(u)|\ d\|\langle M, N \rangle\|_u \leq \left(\int_s^t H(u)^2 d\langle M \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^t K(u)^2 d\langle N \rangle_u \right)^{\frac{1}{2}}$$

Beweis. Wegen Satz 3.20 genügt es zu zeigen, dass

$$|\langle M, N \rangle_t - \langle M, N \rangle_s|^2 \leq (\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_s)(\langle N \rangle_t - \langle N \rangle_s) \qquad \text{für alle } 0 \leq s < t$$

für $\mathbb{P}$ fast alle $\omega \in \Omega$ gilt.

Da die quadratische Variation monoton wachsend ist, gilt:

$$\langle M + \lambda N\rangle_t - \langle M + \lambda N\rangle_s \ \geq 0 \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R},$$

also auch

$$\langle M\rangle_t + 2\lambda\langle M, N\rangle_t + \lambda^2\langle N\rangle_t - (\langle M\rangle_s + 2\lambda\langle M, N\rangle_s + \lambda^2\langle N\rangle_s) \geq 0 \qquad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R},$$

also auch

$$(\star) \quad \langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s + 2\lambda(\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s) + \lambda^2(\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s) \geq 0 \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Minimiert in λ wird dies bei

$$\lambda^\star = -\frac{\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s}{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}$$

Eingesetzt in $(\star)$ liefert dies:

$$\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s + \frac{(\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s)^2}{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s} \geq 2\frac{(\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s)^2}{\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s}$$

Also

$$(\langle M, N\rangle_t - \langle M, N\rangle_s)^2 \leq (\langle M\rangle_t - \langle M\rangle_s)(\langle N\rangle_t - \langle N\rangle_s)$$

was die Behauptung impliziert. □

Dies kann man dazu nutzen, die quadratische Kovariation von Integralprozessen auszurechnen.

Satz 3.22. *Seien $M, N \in \mathcal{H}_{2,c}$ und $H \in L_2(\mu_M)$. Dann gilt:*

a) $\mathbb{E}\int_0^\infty |H_s d| |\langle M, N\rangle||_s < \infty$

b) $\mathbb{E}(H \cdot M)_\infty N_\infty = \mathbb{E}\int_0^\infty H_s d\langle M, N\rangle_s$

c) $\langle H \cdot M, N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s$ *für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher*

d) Sind M und N stetige L_2-Martingale und ist $H \in L_2(\mu_M)$, so gilt:

$$\langle H \cdot M, N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s \qquad \textit{für alle } t \geq 0 \ \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

Insbesondere gilt für $K \in L_2(\mu_N)$

$$\langle H\cdot M, K\cdot N\rangle_t = \int\limits_0^t H_s K_s d\langle M,N\rangle_s \qquad \textit{für alle } t\geq 0\ \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

Beweis. $a)$ Kumita Watanabe Ungleichung liefert mit $K\equiv 1$:

$$\int\limits_0^\infty |H_s| d\|\langle M,N\rangle\|_s \leq \left(\int\limits_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int\limits_0^\infty 1 d\langle N\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}}_{=\langle N\rangle_\infty^{\frac{1}{2}}}$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int\limits_0^\infty |H_s| d\|\langle M,N\rangle\|_s &\leq \left(\mathbb{E}\int\limits_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}\langle N\rangle_\infty)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\int H^2 d\mu_M\right)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}\langle N\rangle_\infty)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \|H\|_{L_2(\mu_M)}\|N\|_{\mathcal{H}_2} < \infty\end{aligned}$$

da

$$\mathbb{E}\langle N\rangle_\infty = \mathbb{E}(N_\infty^2 - N_0^2) \leq \mathbb{E}N_\infty^2 = \|N\|_{\mathcal{H}_2}$$

$b)$ Für $N\in\mathcal{H}_{2,c}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}A:\quad L_2(\mu_M) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ H &\mapsto \mathbb{E}\left((H\cdot M)_\infty N_\infty - \int\limits_0^\infty H_s d\langle M,N\rangle_s\right)\end{aligned}$$

stetig und linear, denn

$$\begin{aligned}|A(H)| &= \left|\mathbb{E}\left((H\cdot M)_\infty N_\infty - \int\limits_0^\infty H_s d\langle M,N\rangle_s\right)\right|\\ &\leq \mathbb{E}|(H\cdot M)_\infty|\ |N_\infty| + \mathbb{E}\int\limits_0^\infty |H_s| d\|\langle M,N\rangle\|_s\\ &\underset{\text{C.S.U.}}{\overset{a)}{\leq}} \left(\mathbb{E}(H\cdot M)_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} (\mathbb{E}N_\infty^2)^{\frac{1}{2}} + \|H\|_{L_2(\mu_M)}\|N\|_{\mathcal{H}_2}\\ &= \|H\cdot M\|_{\mathcal{H}_2}\|N\|_{\mathcal{H}_2} + \|H\|_{L_2(\mu_M)}\|N\|_{\mathcal{H}_2}\\ &\overset{\text{Isometrie}}{=} \|H\|_{L_2(\mu_M)}\|N\|_{\mathcal{H}_2} + \|H\|_{L_2(\mu_M)}\|N\|_{\mathcal{H}_2}\\ &= 2\|H\|_{L_2(\mu_M)}\|N\|_{\mathcal{H}_2}\end{aligned}$$

Für $H \in \mathcal{E}$ gilt $A(H) = 0$.
Also gilt auch $A(H) = 0$ für alle $H \in \overline{\mathcal{E}} = L_2(\mu_M)$.
$c)$ $\left(\int\limits_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s\right)_{t\geq 0}$ ist ein adaptierter Prozess mit Pfaden von lokal beschränkter Variation, die stetig sind.
Zu zeigen verbleibt:

$$\left((H\cdot M)_t N_t - \int\limits_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s\right)_{t\geq 0}$$

ist ein Martingal.
Für jede Stoppzeit τ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H\cdot M)_\tau N_\tau &= \mathbb{E}(H\cdot M)_\infty^\tau N_\infty^\tau \\
&= \mathbb{E}(H\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot M)_\infty N_\infty^\tau \\
&\overset{b)}{=} \mathbb{E}\int\limits_0^\infty H_s\mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)d\langle M, N^\tau\rangle_s \\
&= \mathbb{E}\int\limits_0^\infty H_s\mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)d\langle M, N\rangle_s^\tau \\
&= \mathbb{E}\int\limits_0^\infty H_s\mathbb{1}_{(0,\tau]}(s)d\langle M, N\rangle_s \\
&= \mathbb{E}\int\limits_0^\tau H_s d\langle M, N\rangle_s \\
&= \mathbb{E}(\int\limits_0^\cdot H_s d\langle M, N\rangle_s)_\tau
\end{aligned}$$

Also ist

$$(H\cdot M)N - \int\limits_0^\cdot H_s d\langle M, N\rangle_s$$

ein gleichgradig integrierbares Martingal.
$d)$ wie in $c)$ ist zu zeigen, dass

$$\left((H\cdot M)_t N_t - \int\limits_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s\right)_{t\geq 0}$$

ein Martingal ist.
Für jede beschränkte Stoppzeit τ ist $N^\tau \in \mathcal{H}_{2,c}$ und damit liefert $b)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H\cdot M)_\tau N_\tau &= \mathbb{E}(H\cdot M)_\infty^\tau N_\infty^\tau \\
&= \mathbb{E}(H\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot M)_\infty N_\infty^\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M^\tau)_\infty N_\infty^\tau \\
&\overset{b)}{=} \mathbb{E} \int_0^\tau H_s d\langle M, N^\tau\rangle_s \\
&= \mathbb{E} \int_0^\tau H_s d\langle M, N\rangle_s^\tau \\
&= \mathbb{E} \int_0^\tau H_s d\langle M, N\rangle_s
\end{aligned}
$$

was die Martingaleigenschaft impliziert. □

Benutzt wurde im Beweis, dass auch die quadratische Kovariation verträglich ist mit Stoppen. Dies soll jetzt nachgeholt werden.

14.12.15

Satz 3.23. *Seien M, N stetige L_2–Martingale. Für jede Stoppzeit τ gilt:*

$$\langle M, N\rangle^\tau = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M, N^\tau\rangle = \langle M^\tau, N^\tau\rangle$$

Beweis. O.B.d.A. sei $M_0 = 0$. Zeige

$$\langle M, N\rangle^\tau = \langle M, N^\tau\rangle,$$

denn der Rest folgt aus Symmetriegründen.
Es gilt: $\langle M, N\rangle^\tau$ ist adaptiert, stetig und hat Pfade von beschränkter Variation. Zeige deshalb, dass $(M_t N_t^\tau - \langle M, N\rangle_t^\tau)_{t\geq 0}$ ein Martingal ist. Dann folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit der quadratischen Kovariation.
Für jede beschränkte Stoppzeit σ gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_\sigma N_\sigma^\tau) &= \mathbb{E}(M_\sigma N_{\sigma\wedge\tau}) \\
&= \mathbb{E}(N_{\sigma\wedge\tau}(M_\sigma - M_{\sigma\wedge\tau}) + N_{\sigma\wedge\tau} M_{\sigma\wedge\tau}) \\
&= \mathbb{E}N_{\sigma\wedge\tau}(M_\sigma - M_{\sigma\wedge\tau}) + \mathbb{E}N_{\sigma\wedge\tau} M_{\sigma\wedge\tau} \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(N_{\sigma\wedge\tau}(M_\sigma - M_{\sigma\wedge\tau}))|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}\right) + \mathbb{E}\langle M, N\rangle_{\sigma\wedge\tau} \\
&= \mathbb{E}\left(N_{\sigma\wedge\tau} \underbrace{\mathbb{E}(M_\sigma - M_{\sigma\wedge\tau}|\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau})}_{=0, \text{ wg. Optional Sampling}} \right) + E\langle M, N\rangle_\sigma^\tau \\
&= \mathbb{E}\langle M, N\rangle_\sigma^\tau
\end{aligned}
$$

Da σ eine beliebige, beschränkte Stoppzeit ist, ist

$$M_t N_t^\tau - \langle M, N\rangle_t^\tau$$

ein Martingal. □

<u>Ziel:</u> Die quadratische Variation ist tatsächlich die quadratische Variation der Pfade. Das heißt, die quadratische Variation entlang eines Gitters des Intervalls $[0, t]$ konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen $\langle M\rangle_t$, wenn die Feinheit der Zerlegung gegen Null strebt. Vorbereitend benötigen wir:

Satz 3.24. *Sei M ein beschränktes Martingal mit stetigen Pfaden und $M_0 = 0$, sodass der quadratische Variationsprozess ebenfalls beschränkt ist.*
Sei $\pi^{(n)}$ eine Folge von Gittern der Form

$$0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \dots \qquad \sup_i t_i^{(n)} = +\infty$$

mit

$$|\pi^{(n)}| = \sup_i (t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Für ein gegebenes t ergibt das so ein endliches Gitter:

Die quadratische Variation entlang eines solchen Gitters bis t, ist dann definiert durch

$$V_n^{(2)}(t) := \sum_{i\in\mathbb{N}} (M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t})^2 \qquad \textit{für alle } t \geq 0$$

Dann gilt:

$$\mathbb{E} \sup_{t\geq 0} (V_n^{(2)}(t) - \langle M\rangle_t)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Beweis. Da $M \in b\mathfrak{M}_c$ mit $M_0 = 0$ ist, gilt

$$\langle M\rangle_t = M_t^2 - 2\int_0^t M_s dM_s \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} M_t^2 - \sum_{i\in\mathbb{N}} (M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t})^2 &= \sum_{i\in\mathbb{N}} M^2_{t_i^{(n)}\wedge t} - M^2_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t} - (M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t})^2 \\ &= 2\sum_{i\in\mathbb{N}} M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t} (M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t}) \\ &= 2(H^{(n)} \cdot M)_t \end{aligned}$$

mit

$$H^{(n)} := \sum_{i=1}^{\infty} M_{t_{i-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]},$$

denn für jeden Summanden gilt

$$(M_{t_{i-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]}) \cdot M)_t = (M_{t_{i-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]} \mathbb{1}_{(0,t]}) \cdot M)_\infty = M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t} (M_{t_i^{(n)}\wedge t} - M_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t})$$

$H^{(n)}$ konvergiert in $L_2(\mu_M)$ gegen M, denn:

$$\int (H^{(n)} - M)^2 d\mu_M = \underbrace{\int_{(0,T]\times\Omega} (H^{(n)} - M)^2 d\mu_M}_{(1)} + \underbrace{\int_{(T,\infty)\times\Omega} (H^{(n)} - M)^2 d\mu_M}_{(2)}$$

Da M und auch $H^{(n)}$ gleichmäßig beschränkt sind, existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$(2) \leq C\mu_M((T,\infty)\times\Omega) \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{, da } \mu_M([0,\infty)\times\Omega) < \infty$$

Zur Abschätzung von (1) definiere

$$m(T,\delta) := \sup\{|M_t - M_s| : 0 \leq s,t < T, |t-s| < \delta\}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(1) &= \mathbb{E}\int_0^T (H_t^{(n)} - M)^2 d\langle M\rangle_t \\
&\leq \mathbb{E}\, m(T,|\pi^{(n)}|)^2 \langle M\rangle_T \\
\text{Die quadratische Variation } \langle M\rangle \text{ ist beschränkt } &\leq C_2 \mathbb{E}\, m(T,|\pi^{(n)}|)^2
\end{aligned}$$

Auf $[0,T]$ ist $t \mapsto M_t(\omega)$ gleichmäßig stetig, weshalb

$$m(T,|\pi^{(n)}|) \longrightarrow 0 \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

Da M beschränkt ist, ist $m(T,|\pi^{(n)}|)$ gleichmäßig beschränkt in n und mit Hilfe der majorisierten Konvergenz folgt

$$\mathbb{E}\, m(T,|\pi^{(n)}|)^2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\geq 0}(\langle M\rangle_t - V_n^{(2)}(t))^2 &= \mathbb{E}\sup_{t\geq 0}(M_t^2 - V_n^{(2)}(t) - (M_t^2 - \langle M\rangle_t))^2 \\
&= \mathbb{E}\sup_{t\geq 0}(2(H^{(n)}\cdot M)_t - 2(M\cdot M)_t)^2 \\
\text{Wegen der Doob'schen } L_2\text{-Ungleichung, die besagt: } \mathbb{E}\sup_{t\geq 0} N_t^2 \leq 4\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}N_t^2 \quad &\leq 8\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}((H^{(n)}\cdot M)_t - (M\cdot M)_t)^2 \\
&= 8||H^{(n)}\cdot M - M\cdot M||_{\mathcal{H}_2} \\
&= 8||H^{(n)} - H||_{L_2(\mu_M)} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

□

Durch Lokalisation kann die gewünschte Konvergenz in Wahrscheinlichkeit gezeigt werden.

Satz 3.25. *Sei M ein stetiges Martingal mit $M_0 = 0$. Dann gilt für alle $T > 0$:*

$$\sup_{0\leq t\leq T}|V_n^{(2)}(t) - \langle M\rangle_t| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \textit{in Wahrscheinlichkeit}$$

Beweis. Sei

$$\tau_k = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq k \text{ oder } \langle M \rangle_t \geq k\}$$

Dann erfüllt M^{τ_k} die Voraussetzungen von Satz 3.24.
Definiere

$$\begin{aligned} V_{n,k}^{(2)}(t) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (M^{\tau_k}_{t_i^{(n)} \wedge t} - M^{\tau_k}_{t_{i-1}^{(n)} \wedge t})^2 \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (M_{t_i^{(n)} \wedge t \wedge \tau_k} - M_{t_{i-1}^{(n)} \wedge t \wedge \tau_k})^2 \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\mathbb{E} \sup_{t \geq 0} (V_{n,k}^{(2)}(t) - \langle M^{\tau_k} \rangle_t)^2 \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit auch

$$(\star) \quad \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |V_{n,k}^{(2)}(t) - \langle M^{\tau_k} \rangle_t| > \epsilon) \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

für jedes $\epsilon > 0$. Wegen

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

existiert zu $\eta > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbb{P}(\tau_k \leq T) < \eta \qquad \text{für alle } k \geq k_0$$

Auf $\{\tau_k \geq T\}$ ist

$$V_{n,k}^{(2)}(t) = V_n^{(2)}(t) \qquad \text{für alle } t \leq T$$

und

$$\langle M^{\tau_k} \rangle_t = \langle M \rangle_t^{\tau_k} \qquad \text{für alle } t \leq T.$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{t \leq T} |V_n^{(2)}(t) - \langle M \rangle_t| > \epsilon) &\leq \mathbb{P}(\sup_{t \leq T} |V_n^{(2)}(t) - V_{n,k}^{(2)}(t)| > \frac{\epsilon}{3}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\sup_{t \leq T} |V_{n,k}^{(2)}(t) - \langle M^{\tau_k} \rangle_t| > \frac{\epsilon}{3}) \\ &\quad + P(\sup_{t \leq T} |\langle M^{\tau_k} \rangle_t - \langle M \rangle_t| > \frac{\epsilon}{3}) \\ &\leq 2\mathbb{P}(\tau_k \leq T) + \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |V_{n,k}^{(2)}(t) - \langle M^{\tau_k} \rangle_t| > \frac{\epsilon}{3}) \end{aligned}$$

Wegen $(\star)$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |V_{n,k_0}^{(2)}(t) - \langle M^{\tau_{k_0}} \rangle_t| > \frac{\epsilon}{3}) < \eta \qquad \text{für alle } n \geq n_0$$

Also ist für alle $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{t \leq T} |V_n^{(2)}(t) - \langle M \rangle_t| > \epsilon) &\leq 2\mathbb{P}(\tau_{k_0} \leq T) + \mathbb{P}(\sup_{t \geq 0} |V_{n,k_0}^{(2)}(t) - \langle M^{\tau_{k_0}} \rangle_t| > \frac{\epsilon}{3}) \\ &\leq 3\eta \qquad \text{für alle } n \geq n_0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $\eta > 0$ beliebig gewählt werden kann. □

4 Lokalisation

16.12.15

<u>Ziel:</u> Ausdehnung des Integrals auf mehr Integranden und Integratoren.
Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, der die usual conditions erfüllt.
Idee: Man lokalisiere in geeigneter Weise.

Lokalisierung des Integrators

Definition 4.1. *Sei $\mathcal{G}$ eine Familie von Prozessen, die aus der Null starten und cadlag Pfade haben. Dann heißt X lokaler $\mathcal{G}$–Prozess, wenn es eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt mit:*

(i) $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \tau_3 \leq \dots$

(ii) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = +\infty$

(iii) $X^{\tau_n} \in \mathcal{G}$

Mit $\mathcal{G}_{loc}$ wird die Familie der lokalen $\mathcal{G}$–Prozessen bezeichnet.

Hauptbeispiele:

- $\mathfrak{M}^0 = \{M \in \mathfrak{M} : M_0 = 0\}$

  $\hookrightarrow \mathfrak{M}^0_{\text{loc}}$ als lokalisierte Variante
- $\mathfrak{M}^0_c = \{M \in \mathfrak{M}^0 : M$ hat stetige Pfade$\}$

  $\hookrightarrow \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}} := (\mathfrak{M}^0_c)_{\text{loc}}$
- $\mathcal{H}^0_2 := \{M \in \mathfrak{M}^0 : \sup\limits_{t\geq 0} \mathbb{E} M_t^2 < \infty\}$

  $\hookrightarrow \mathcal{H}^0_{2,\text{loc}} := (\mathcal{H}^0_2)_{\text{loc}}$
- $\mathcal{H}^0_{2,c} = \{M \in \mathcal{H}^0_2 : M$ hat stetige Pfade$\}$

  $\hookrightarrow \mathcal{H}^0_{2,c,\text{loc}} := (\mathcal{H}^0_{2,c})_{\text{loc}}$
- $b\mathfrak{M}^0_c = \{M \in \mathfrak{M}^0_c : \exists C > 0 : \sup\limits_{t\geq 0} |M_t| < C\}$

  $\hookrightarrow b\mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}} := (b\mathfrak{M}^0_c)_{\text{loc}}$

Es soll geklärt werden, wann $\mathcal{G}_{\text{loc}}$ ein Vektorraum ist.

Bemerkung 4.2. *(i) Ist $\mathcal{G}$ abgeschlossen gegen Stoppen, so auch $\mathcal{G}_{loc}$.*

(ii) Ist $\mathcal{G}$ ein Vektorraum und abgeschossen gegen Stoppen, so ist auch $\mathcal{G}_{loc}$ ein Vektorraum.

Dabei heißt eine Menge von Prozessen $\mathfrak{A}$ abgeschlossen gegen Stoppen, falls für jedes $X \in A$ und jede Stoppzeit τ auch $X^\tau \in \mathfrak{A}$ ist.

Beweis. zu (i): Sei $X \in \mathcal{G}_{\text{loc}}$ und τ eine beliebige Stoppzeit. Es existiert eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

und $X^{\tau_n} \in \mathcal{G}$.
Dann gilt:

$$(X^\tau)^{\tau_n} = X^{\tau\wedge\tau_n} = (X^{\tau_n})^\tau \in \mathcal{G},$$

da $\mathcal{G}$ abgeschlossen gegen Stoppen ist. Daraus folgt also

$$X^\tau \in \mathcal{G}.$$

zu (ii): Seien $X, Y \in \mathcal{G}_{\text{loc}}$. Dann existieren

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

und

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n = +\infty$$

mit

$$X^{\tau_n} \in \mathcal{G}, Y^{\sigma_n} \in \mathcal{G}$$

$(\tau_n \wedge \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalisieren $X + Y$ nach $\mathcal{G}$, denn

$$(X+Y)^{\tau_n\wedge\sigma_n} = X^{\tau_n\wedge\sigma_n} + Y^{\tau_n\wedge\sigma_n} = (\underbrace{X^{\tau_n}}_{\in\mathcal{G}})^{\sigma_n} + (\underbrace{Y^{\sigma_n}}_{\in\mathcal{G}})^{\tau_n}$$

Dass

$$cX \in \mathcal{G}_{\text{loc}} \qquad \text{für alle } c \in \mathbb{R}$$

gilt, ist klar. □

Als Folgerung erhält man

$$\mathfrak{M}^0_{\text{loc}}, \quad \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}, \quad \mathcal{H}^0_{2,c,\text{loc}}, \quad b\mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}$$

sind Vektorräume.
Obwohl

$$b\mathfrak{M}^0_c \subsetneqq \mathcal{H}^0_{2,c} \subsetneqq \mathfrak{M}^0_c$$

gilt, fallen nach Lokalisieren alle drei lokalen Räume zusammen.

Satz 4.3. *Es gilt:*

$$b\mathfrak{M}^0_{c,loc} = \mathcal{H}^0_{2,c,loc} = \mathfrak{M}^0_{c,loc}$$

Beweis. Aus
$$b\mathfrak{M}_c^0 \subsetneqq \mathcal{H}_{2,c}^0 \subsetneqq \mathfrak{M}_c^0$$
folgt
$$b\mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0 \subset \mathcal{H}_{2,c,\text{loc}}^0 \subset \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0$$
zu zeigen:
$$b\mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0 \supset \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0$$
Sei also $M \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0$. Dann ist $M_0 = 0$ und M hat stetige Pfade.
Weiter existiert eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit
$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$
und
$$M^{\tau_n} \in \mathfrak{M}_c^0$$
Setze
$$\sigma_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$$
Dann ist
$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n = +\infty.$$
Betrachte $(\tau_n \wedge \sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folge lokalisiert M nach $b\mathfrak{M}_c^0$, denn $M^{\tau_n} \in \mathfrak{M}_c^0$ und somit $(M^{\tau_n})^{\sigma_n} \in b\mathfrak{M}_c^0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung. *Auch die Folge $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalisiert schon M nach $b\mathfrak{M}_c^0$, denn beschränkte lokale Martingale sind beschränkte Martingale, d.h. es gilt*
$$b(\mathfrak{M}_{c,loc}^0) \subseteq b\mathfrak{M}_c^0$$
Außerdem gilt: Ist M ein stetiges lokale Martingal mit $M_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher und integrierbaren M_0, so ist M ein Supermartingal.

Anwenden kann man dies für die Definition der quadratischen Variation für $M \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0$.
Sei dazu
$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}.$$
Dann ist $M^{\tau_n} \in b\mathfrak{M}_c^0$ und zu Martingalen aus $b\mathfrak{M}_c^0$ kennen wir den quadratischen Variationsprozess
$$\langle M^{\tau_n}\rangle = (M^{\tau_n})^2 - 2(M^{\tau_n} \cdot M^{\tau_n}).$$

Definition 4.4. *Sei $M \in \mathfrak{M}_{c,loc}^0$. Dann ist der quadratische Variationsprozess von M definiert durch*
$$\langle M\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle M^{\tau_n}\rangle \mathbb{1}_{(\tau_{n-1},\tau_n]}$$
mit
$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$$

Wegen der Verträglichkeit mit Stoppen folgt wie im Beweis zu Satz 3.11:

$$\langle M\rangle^{\tau_n} = \langle M^{\tau_n}\rangle \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dies bedeutet insbesondere, dass der quadratische Variationsprozess des lokalen Martingales M bis zur Stoppzeit τ_n mit dem des ('echten') Martingales M^{τ_n} übereinstimmt. Da lokale, stetige Martingale mit Pfaden von lokal beschränkter Variation konstant sind (Satz 3.12 für lokale Martingale), folgt eine Charakterisierung des quadratischen Variationsprozesses durch

Satz 4.5. *Zu $M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ existiert, bis auf Nichtunterscheidbarkeit, genau ein stochastischer Prozess A mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $A_0 = 0$

(ii) $(A_t)_{t\geq 0}$ *ist adaptiert mit stetigen, wachsenden Pfaden.*

(iii) $(M_t^2 - A_t)_{t\geq 0} \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$

Beweis. $A := \langle M\rangle$ erfüllt die Bedingungen $(i)-(iii)$ und ist wegen Satz 3.12 eindeutig. ☐

Bemerkung. *Man erhält folgende Doob-Meyer Zerlegung:*

$$M_t^2 = \underbrace{M_t^2 - \langle M\rangle_t}_{\text{lokaler Martingalanteil}} + \underbrace{\langle M\rangle_t}_{\substack{\text{wachsender,}\\ \text{vorhersehbarer}\\ \text{Anteil}}}$$

Bislang haben wir nur Prozesse betrachtet, die aus der Null starten. Durch Hinzufügen einer $\mathcal{F}_0$-messbaren Startvariablen kommen wir zur allgemeinen Definition eines stetigen lokalen Martingals.

Definition 4.6. *Ein stochastischer Prozess M heißt stetiges, lokales Martingal, wenn M_0 $\mathcal{F}_0$–messbar ist und $M - M_0 \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ gilt, d.h.*

$$M = \underbrace{M_0}_{\text{Startvariable}} + \underbrace{M - M_0}_{\in\mathfrak{M}^0_{c,loc}}$$

Für stetige, lokale Martingale wird die quadratische Variation definiert durch

$$\langle M\rangle := \langle M - M_0\rangle$$

Bemerkung. (i) *Beachte, dass für das Martingal M in Definition 4.6 nicht $M_0 = 0$ gelten muss . Für Definition 4.4 hingegen schon.*
(ii) *Durch Definition 4.6 wird ein eindeutig bestimmter, adaptierter, wachsender Prozess mit stetigen Pfaden definiert, so dass gilt:*

$$\left(M_t^2 - M_0^2 - \langle M\rangle_t\right)_{t\geq 0} \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$$

Satz 4.7. *Für jedes stetige, lokale Martingal M und für jede Stoppzeit τ gilt:*

$$\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$$

Beweis. O.E.d.A. kann $M_0 = 0$ vorausgesetzt werden. Weiter kann, analog zu Satz 3.11, geschlossen werden, dass

$$(M^\tau)^2 - \langle M \rangle^\tau \in \mathfrak{M}^0_{\mathrm{c,loc}}$$

Mit Satz 4.5 folgt die Behauptung. □

Die quadratische Kovariation kann durch Polarisation mit Hilfe der quadratischen Variation definiert werden. Bezeichne mit FV^0_c die Menge aller adaptierten Prozesse, die aus der Null starten und stetige Pfade haben von lokal beschränkter Variation.
Bezeichne mit $\mathfrak{M}_{\mathrm{c,loc}}$ die lokalen, stetigen Martingale.
Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \cdot \rangle : \quad \mathfrak{M}_{\mathrm{c,loc}} &\longrightarrow FV^0_c \\ M &\mapsto \langle M \rangle \end{aligned}$$

eine quadratische Abbildung, d.h.

(i) $\langle cM \rangle = c^2 \langle M \rangle$ für alle $c \in \mathbb{R}$

(ii) $\langle M + N \rangle + \langle M - N \rangle = 2(\langle M \rangle + \langle N \rangle)$ für alle $M, N \in \mathfrak{M}_{c,\mathrm{loc}}$

Definition 4.8. *Definiere für stetige lokale Martingale $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ die quadratische Kovariation durch*

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{4}(\langle M + N \rangle - \langle M - N \rangle)$$

Satz 4.9. *Die Abbildung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{M}_{c,loc} \times \mathfrak{M}_{c,loc} \longrightarrow FV^0_c$$

ist bilinear und symmetrisch.
Für $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ ist $\langle M, N \rangle$ der eindeutig bestimmte Prozess aus FV^0_c mit

$$MN - \langle M, N \rangle \in \mathfrak{M}_{c,loc}$$

Beweis. Es gilt

$$M_t N_t - M_0 N_0 = (M_t - M_0)(N_t - N_0) + M_0 N_t + N_0 M_t - 2 M_0 N_0$$

Also

$$M_t N_t - \langle M, N \rangle_t = M_0 N_0 + (M_t - M_0)(N_t - N_0) - \langle M, N \rangle_t + M_0 N_t + N_0 M_t - 2 M_0 N_0$$

$$= \underbrace{M_0 N_0}_{\substack{\text{Start-}\\\text{variable}}} + \underbrace{(M_t - M_0)(N_t - N_0) - \langle M, N\rangle_t}_{\in \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}} + \underbrace{N_0(M_t - M_0)}_{\in \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}} + \underbrace{M_0(N_t - N_0)}_{\in \mathfrak{M}^0_{c,\text{loc}}}$$

Also ist

$$M_t N_t - \langle M, N\rangle \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}$$

□

Wie kann man die Variation nutzen, um auf eine Martingaleigenschaft zu schließen? 21.12.15
Klar ist:

(i) Ist M ein stetiges L_2–Martingal mit $M_0 = 0$, so ist $M^2 - \langle M\rangle$ ein Martingal.

(ii) Ist $M \in \mathcal{H}^0_{2,c}$, so ist $M^2 - \langle M\rangle \in \mathfrak{M}^0_c$

Dies kann man anwenden:

Satz 4.10. *Für $M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ gilt:*

(i) Ist $\mathbb{E}\langle M\rangle_\infty < \infty$, so ist $M \in \mathcal{H}^0_{2,c}$.

(ii) Ist $\mathbb{E}\langle M\rangle_t < \infty$ für alle $t \geq 0$, so ist M ein stetiges L_2–Martingal.

Beweis. zu (i): Zeige zunächst die Martingaleigenschaft von M durch $\mathbb{E}M_\tau (= \mathbb{E}M_0) = 0$ für alle beschränkten Stoppzeiten τ.
Betrachte hierzu eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

mit $M^{\tau_n} \in b\mathfrak{M}^0_c$.
Dann ist $\mathbb{E}M^{\tau_n}_\tau = 0$, da $M^{\tau_n} \in b\mathfrak{M}^0_c \subseteq \mathcal{H}^0_{2,c}$ und

$$\begin{aligned}\mathbb{E}M^2_{\tau_n\wedge\tau} &= \mathbb{E}(M^{\tau_n})^2_\tau \\ &= \mathbb{E}\langle M^{\tau_n}\rangle_\tau \\ &= \mathbb{E}\langle M\rangle^{\tau_n}_\tau \\ &= \mathbb{E}\langle M\rangle_{\tau_n\wedge\tau} \uparrow \mathbb{E}\langle M\rangle_\tau \leq \mathbb{E}\langle M\rangle_\infty\end{aligned}$$

Also ist $(M_{\tau_n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.
Zusammen mit

$$M_{\tau_n\wedge\tau} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M_\tau \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

folgt

$$0 = \mathbb{E}M_{\tau_n\wedge\tau} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}M_\tau$$

also

$$\mathbb{E}M_\tau = 0$$

M ist also ein Martingal und wegen

$$\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}M_t^2 = \sup_{t\geq 0}\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{E}M_{\tau_n\wedge\tau}^2 \leq \mathbb{E}\langle M\rangle_\infty$$

folgt

$$M \in \mathcal{H}_{2,c}^0$$

zu (ii): Für jedes $T > 0$ ist $M^T \in \mathcal{H}_{2,c}^0$, da

$$\mathbb{E}\langle M^T\rangle_\infty = \mathbb{E}\langle M\rangle_T < \infty$$

Also gilt für alle $s \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_t^T|\mathcal{F}_s)\\ &= M_s^T\\ &= M_s\end{aligned}$$

Da T beliebig gewählt wurde, folgt die Martingaleigenschaft.
M ist ein L_2–Martingal, da für $t \leq T$:

$$\mathbb{E}M_t^2 = \mathbb{E}(M^T)_t^2 = \mathbb{E}\langle M^T\rangle_t = \mathbb{E}\langle M\rangle_t < \infty$$

□

<u>Ziel:</u>

- Lokalisierung des Integranden
- Definition des stochastischen Integralprozesses für $M \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0$ und lokalisiertem Integranden H.

Definition 4.11. *Für $M \in \mathfrak{M}_{c,loc}^0$ definieren wir den Raum $L_{loc}^2(M)$ durch die Menge aller Prozesse H, die folgende Bedingungen erfüllen:*

(i) H ist previsibel und

(ii) $\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $t \geq 0$.

Mit $lb\mathcal{P}$ bezeichne die Menge der lokal beschränkten previsiblen Prozesse, das heißt: $H \in lb\mathcal{P}$ genau dann, wenn

(i) H ist previsibel

(ii) Es existiert eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stoppzeiten mit

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\tau_n = +\infty$$

und $H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \in b\mathcal{P}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

In der obigen Definition werden zwei Möglichkeiten aufgezeigt, wie ein Integrand lokalisiert werden kann. Zu bemerken ist dabei, dass der Raum der lokal beschränkten Prozesse unabhängig von einem lokalen Martingal definiert wird. Für die meisten Anwendungen ist dies auch ausreichend. Um allerdings das stochastische Integral auf eine möglichst große Klasse von Prozessen auszudehnen, ist eine spezifische, vom Integrator M abhängige, Klasse $L^2_{\text{loc}}(M)$ zu wählen.

Satz 4.12. *Es gilt:*

(i) $L^2_{loc}(M)$ ist ein Vektorraum für jedes $M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$.

(ii) $L_2(\mu_M) \subseteq L^2_{loc}(M)$ für jedes stetige L_2–Martingal.

(iii) $lb\mathcal{P} \subseteq L^2_{loc}(M)$ für alle $M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$.

(iv) Ist H ein adaptierter Prozess mit linksseitig stetigen Pfaden, die rechtsseitige Limiten haben, so ist $H \in lb\mathcal{P}$.

Beweis. (i) klar, da

$$\int_0^t (H_s + K_s)^2 d\langle M\rangle_s \leq 2\left(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s + \int_0^t K_s^2 d\langle M\rangle_s\right) < \infty$$

(ii) Für $H \in L_2(\mu_M)$ gilt

$$\mathbb{E}\int_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s = \int H^2 d\mu_M < \infty$$

Also

$$\int_0^\infty H_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty$$

$\mathbb{P}$-fast sicher, was $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$ impliziert.
(iii) $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokalisiere H in $b\mathcal{P}$, das heißt $H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \in b\mathcal{P}$.
Wegen $\tau_n \uparrow \infty$ gilt:

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\tau_n \wedge t} H_s^2 d\langle M\rangle_s$$

Da $\tau_n \uparrow \infty$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, mit $\tau_n(\omega) > t$. Dann gilt

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s = \int_0^t \underbrace{H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}}_{\text{beschränkt}} d\langle M\rangle_s$$

$$\leq C_n \langle M \rangle_t(\omega) < \infty$$

(iv) Definiere für $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |H_t| \geq n\}$$

Dann ist $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge, da

$$H(0+) := \lim_{t \downarrow 0} H_t$$

eine endliche Zufallsvariable ist. □

Für $M \in \mathfrak{M}^0_{\text{c,loc}}$ und $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$ kann nun der stochastische Integralprozess $H \cdot M$ durch Lokalisation definiert werden.
Definiere dazu Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t \geq n \text{ oder } \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \geq n\}$$

Dann ist, wegen $H \in L^2_{\text{loc}}(M)$:

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

Für den gestoppten Prozess M^{τ_n} gilt:

$$\mathbb{E}\langle M^{\tau_n} \rangle_\infty = \mathbb{E}\langle M \rangle^{\tau_n}_\infty = \mathbb{E}\langle M \rangle_{\tau_n} \leq n < \infty$$

Also ist $M^{\tau_n} \in \mathcal{H}^0_{2,c}$.
Weiter ist $H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \in L_2(\mu_{M^{\tau_n}})$, denn

$$\begin{aligned}
\int H^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} d\mu_{M^{\tau_n}} &= \mathbb{E} \int_0^\infty H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}(s) d\langle M^{\tau_n} \rangle_s \\
&= \mathbb{E} \int_0^\infty H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]}(s) d\langle M \rangle^{\tau_n}_s \\
&= \mathbb{E} \int_0^{\tau_n} H_s^2 d\langle M \rangle_s \\
&\leq n < \infty
\end{aligned}$$

Definition 4.13. *Sei $M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$. Definiere den stochastischen Integralprozess $H \cdot M$ durch*

$$H \cdot M := \sum_{n=1}^\infty (H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot M^{\tau_n}) \mathbb{1}_{(\tau_{n-1},\tau_n]}$$

Bemerkung. - *Die stochastischen Intervalle* $((\tau_{n-1},\tau_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *bilden eine disjunkte Zerlegung von* $(0,\infty)\times\Omega)$.

- *Der Integralprozess startet aus der Null.*

- *Auf* $(0,\tau_n]$ *stimmt der Integralprozess* $H\cdot M$ *mit* $H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot M^{\tau_n}$ *überein, denn für* $m<n$ *gilt, wegen der Verträglichkeit mit Stoppen:*

$$\begin{aligned}\left(H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot M^{\tau_n}\right)^{\tau_m} &= H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\mathbb{1}_{(0,\tau_m]}\cdot (M^{\tau_n})^{\tau_m}\\ &= H\mathbb{1}_{(0,\tau_m]}\cdot M^{\tau_m}\end{aligned}$$

- $(H\cdot M)^{\tau_n} = H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot M^{\tau_n}$ *für alle* $n\in\mathbb{N}$

Will man einen stochastischen Integralprozess $H\cdot M$ konkret ausrechnen, wird man in der Regel eine Lokalisierung mittels einer Folge von Stoppzeiten durchführen und dann die nicht lokalen gestoppten Prozesse ausrechnen. Für die Folge der lokalisierenden Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss dann gelten, dass M^{τ_n} ein L_2-Martingal ist und $H1_{(0,\tau_n]}\in L_2(\mu_{M^{\tau_n}})$. Weiter muss $\sup\tau_n=\infty$ erfüllt sein. Man ist dabei frei in der Wahl der lokalisierenden Folge. Das Verifizieren von Eigenschaften mittels Lokalisation kann man abstrakt so formulieren.

Satz 4.14. *Seien* M,N *zwei stochastische Prozesse und* $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von wachsenden Stoppzeiten mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}}\tau_n=\infty$. *Ist für jedes* $n\in\mathbb{N}$ *der gestoppte Prozess* M^{τ_n} *nicht unterscheidbar von* N^{τ_n}, *so ist auch* M *nicht unterscheidbar von* N.

Beweis. Sei τ_n ein Folge wachsender Stoppzeiten und seien M,N Prozesse. Seien M^{τ_n} und N^{τ_n} nicht unterscheidbar für alle $n\in\mathbb{N}$. Es ist zu zeigen, dass M,N nicht unterscheidbar sind, d.h. die Menge

$$A:=\{\omega\in\Omega:\exists t\geq 0: M_t(\omega)\neq N_t(\omega)\}$$

ist vernachlässigbar.
Sei $\omega\in A$ und $t\geq 0$ mit $M_t(\omega)\neq N_t(\omega)$. Da $\tau_n\uparrow\infty$ gibt es ein n_0 mit $t<\tau_{n_0}(\omega)$, also

$$M_t(\omega)=M_t^{\tau_{n_0}}(\omega)\text{ und }N_t(\omega)=N_t^{\tau_{n_0}}(\omega)$$

Es folgt:

$$A\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\omega'\in\Omega:\exists s\geq 0: M_s^{\tau_n}(\omega')\neq N_s^{\tau_n}(\omega')\}$$

Die rechte Menge ist vernachlässigbar, nach Voraussetzung. □

Durch Anwendung dieses Satzes können die folgenden Eigenschaften des stochastischen Integralprozesses gezeigt werden.

Satz 4.15. *Sei $M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$, $H \in L^2_{loc}(M)$. Dann gilt:*

(i) $H \cdot M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$

(ii) $\langle H \cdot M \rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s$ *für alle* $t \geq 0$.

(iii) $(H \cdot M)^\tau = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M^\tau = H\mathbb{1}_{(0,\tau]} \cdot M = H \cdot M^\tau$

(iv) Ist K ein previsibler Prozess mit $K \in L^2_{loc}(H \cdot M)$, so gilt:
- $KH \in L^2_{loc}(M)$
- $K \cdot (H \cdot M) = KH \cdot M$

(v) $(H + K) \cdot M = H \cdot M + K \cdot M$ *für alle* $H, K \in L^2_{loc}(M)$

(vi) Für $N \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M) \cap L^2_{loc}(N)$ gilt:
- $H \in L^2_{loc}(M + N)$
- $H \cdot (M + N) = H \cdot M + H \cdot N$

(vii) Für alle $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$ gilt

$$\langle H \cdot M, N \rangle = \int_0^\cdot H_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Insbesondere gilt damit für $K \in L^2_{loc}(N)$

$$\langle H \cdot M, K \cdot N \rangle = \int_0^\cdot H_s K_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Beweis. (i) ist klar nach Konstruktion, denn für

$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t \geq n \text{ oder } \int_0^t H_s^2 d\langle M \rangle_s \geq n\}$$

ist

$$(H \cdot M)^{\tau_n} = H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot M^{\tau_n} \in \mathcal{H}^0_{2,c}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle H \cdot M \rangle^{\tau_n} &= \langle (H \cdot M)^{\tau_n} \rangle \\
&= \langle H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot M^{\tau_n} \rangle \\
&= \int_0^\cdot H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} d\langle M^{\tau_n} \rangle_s \\
&= \int_0^\cdot H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} d\langle M \rangle_s^{\tau_n}
\end{aligned}$$

$$= \int_0^{\cdot} H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} d\langle M\rangle_s$$
$$= \left(\int_0^{\cdot} H_s^2 d\langle M\rangle_s \right)^{\tau_n}$$

Die letzte Identität folgt aus

$$\left(\int_0^{\cdot} H_s^2 d\langle M\rangle_s \right)_t^{\tau_n} = \left(\int_0^{\cdot} H_s^2 d\langle M\rangle_s \right)_{\tau_n \wedge t}$$
$$= \int_0^{\tau_n \wedge t} H_s^2 d\langle M\rangle_s$$
$$= \int_0^{t} H_s^2 \mathbb{1}_{(0,\tau_n]} d\langle M\rangle_s.$$

Durch Lokalistion hat man also die behauptete Identität

$$\langle H \cdot M\rangle = \int_0^{\cdot} H_s^2 d\langle M\rangle_s$$

gezeigt.
(iii) kann ebenfalls durch Lokalisation nachgewiesen werden, denn für die oben betrachtete Folge τ_n gilt für jede Stoppzeit τ

$$\begin{aligned} ((H\cdot M)^{\tau})^{\tau_n} &= (H\cdot M)^{\tau\wedge\tau_n} \\ &= ((H\cdot M)^{\tau_n})^{\tau} \\ &= (H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot M^{\tau_n})^{\tau} \\ &= H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\mathbb{1}_{(0,\tau]}\cdot M^{\tau_n\wedge\tau} \\ &= (H1_{(0,\tau]}\cdot M^{\tau})^{\tau_n} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zu bemerken ist, dass beim vorletzten Gleichheitszeichen die Verträglichkeit mit Stoppen bei $\mathcal{H}_{2,c}$ Integralprozessen benutzt wurde und dass für die letzte Gleichheit $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine lokalisierende Folge für $H1_{(0,\tau]}$ ist. Die übrigen Identitäten aus (iii) lassen sich analog aus den nichtlokalen Identitäten herleiten.
(iv): Wegen (ii) hat das durch $\langle H \cdot M\rangle$ definierte Maß die Dichte H^2 bezüglich des durch $\langle M\rangle$ definierten Maßes, kurz

$$d\langle H\cdot M\rangle = H^2 d\langle M\rangle.$$

Somit folgt

$$\int_0^t (KH)_s^2 d\langle M\rangle_s = \int_0^t K_s^2 \langle H\cdot M\rangle_s < \infty$$

für alle $t \geq 0$, was $KH \in L^2_{loc}(H \cdot M)$ impliziert. Setze

$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t K_s^2 d\langle H \cdot M\rangle_s \geq n \text{ oder } \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n \text{ oder } \langle M\rangle_t \geq n\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (K \cdot (H \cdot M))^{\sigma_n} &= K\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]} \cdot (H \cdot M)^{\sigma_n} \\ &= K1_{(0,\sigma_n]} \cdot \big(H\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]} \cdot M^{\sigma_n}\big) \\ &= (KH\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]}) \cdot M^{\sigma_n} \\ &= ((KH) \cdot M)^{\sigma_n} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt

$$K \cdot (H \cdot M) = (KH) \cdot M.$$

Zu bemerken ist wieder, dass in der vorletzten Gleichung die nichtlokale Version der Assoziativität benutzt wurde und dass $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für die Integration von KH gegen M darstellt.

(v): Betrachte die lokalisierenden Folgen

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n \text{ oder } \langle M\rangle_t \geq n\}$$

$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t K_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n \text{ oder } \langle M\rangle_t \geq n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \big(H \cdot M + K \cdot M\big)^{\sigma_n\wedge\tau_n} &= (H \cdot M)^{\sigma_n\wedge\tau_n} + (K \cdot M)^{\sigma_n\wedge\tau_n} \\ &= \big(H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot M^{\tau_n}\big)^{\sigma_n} + \big(K\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]} \cdot M^{\sigma_n}\big)^{\tau_n} \\ &= (H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]} \cdot M^{\tau_n\wedge\sigma_n}) + (K\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]} \cdot M^{\tau_n\wedge\sigma_n}) \\ &= (H + K)\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\mathbb{1}_{(0,\sigma_n]} \cdot M^{\tau_n\wedge\sigma_n}) \\ &= \big((H + K) \cdot M\big)^{\sigma_n\wedge\tau_n} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, was

$$(H + K) \cdot M = (H \cdot M + K \cdot M)$$

impliziert.

(vi): Wegen $\langle M, N\rangle = \frac{1}{4}(\langle M + N\rangle - \langle M - N\rangle)$ gilt

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^t H_s^2 d\langle M, N\rangle_s\Big| &\leq \frac{1}{4}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M + N\rangle_s + \int_0^t H_s^2 d\langle M - N\rangle_s\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s + \int_0^t H_s^2 d\langle N\rangle_s\Big). \end{aligned}$$

Für $H \in L^2_{loc}(M) \cap L^2_{loc}(N)$ folgt deshalb

$$\int_0^t H_s^2 d\langle M + N\rangle_s = \int_0^t H_s^2 \langle M\rangle_s + \int_0^t H_s^2 \langle N\rangle_s + 2\int_0^t H_s^2 \langle M, N\rangle_s$$

$$\leq \quad 2\Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s + \int_0^t H_s^2 d\langle N\rangle_s\Big).$$

Somit ist $H \in L^2_{loc}(M+N)$ und die Behauptung kann durch Lokalisation bewiesen werden. Definiere hierzu Stoppzeiten

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n \text{ oder } \int_0^t H_s^2 d\langle N\rangle_s \geq n \text{ oder } \langle M\rangle_t \geq n \text{ oder } \langle N\rangle_t \geq n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(H\cdot(M+N))^{\tau_n} &= H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot(M+N)^{\tau_n}\\
&= H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot(M^{\tau_n}+N^{\tau_n})\\
&= H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot M^{\tau_n} + H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}N^{\tau_n}\\
&= (H\cdot M)^{\tau_n} + (H\cdot N)^{\tau_n}\\
&= (H\cdot M + H\cdot N)^{\tau_n}
\end{aligned}$$

(vii) : O.E.d.A. können wir annehmen, dass $M_0 = 0 = N_0$ gilt. Wegen der Kunita-Watanabe Ungleichung ist die rechte Seite der behaupteten Gleichung wohldefiniert, da

$$\int_0^t |H_s| d\|\langle M, N\rangle\|_s \quad \leq \quad \Big(\int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^t 1 d\langle N\rangle_s\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Durch Lokalisation kann die Behauptung gezeigt werden durch Betrachtung der Stoppzeiten

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t \geq n \text{ oder } \int_0^t H_s^2 d\langle M\rangle_s \geq n \text{ oder } |N_t| \geq n\},$$

denn dann ist $M^{\tau_n} \in \mathcal{H}_{2,c}$, $H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \in L_2(\mu_{M^{\tau_n}})$ und $N^{\tau_n} \in b\mathfrak{M}_c$. Es gilt wegen der Verträglichkeit mit Stoppen

$$\begin{aligned}
\langle H\cdot M, N\rangle^{\tau_n} &= \langle (H\cdot M)^{\tau_n}, N^{\tau_n}\rangle\\
&= \langle H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot M^{\tau_n}, N^{\tau_n}\rangle\\
&= \int_0^{\cdot} H_s\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s) d\langle M^{\tau_n}, N^{\tau_n}\rangle_s\\
&= \int_0^{\cdot} H_s\mathbb{1}_{[0,\tau_n]}(s) d\langle M, N\rangle_s^{\tau_n}\\
&= \Big(\int_0^{\cdot} H_s d\langle M, N\rangle_s\Big)^{\tau_n}.
\end{aligned}$$

Alternativ hätte man auch zeigen können, dass $\langle H\cdot M, N\rangle - \int_0^{\cdot} H_s d\langle M, N\rangle_s \in \mathfrak{M}^0_{c,loc}$ ist. Für $H \in L^2_{loc}(M)$ und $K \in L^2_{loc}(N)$ liefert wieder die Kunita-Watanabe Ungleichung, dass $\int_0^t H_s K_s d\langle M, N\rangle_s$ für alle $t \geq 0$ wohldefiniert ist. Weiter gilt

$$\langle H\cdot M, K\cdot N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, K\cdot N\rangle_s$$

für alle $t \geq 0$ und

$$\langle M, K\cdot N\rangle_t = \int_0^t K_s d\langle M, N\rangle_s.$$

Das durch $\langle M, K \cdot N \rangle$ definierte signierte Maß hat die Dichte K bezüglich des signierten Maßes $\langle M, N \rangle$., kurz

$$d\langle M, K \cdot N \rangle_s = K_s d\langle M, N \rangle_s.$$

Also folgt

$$\langle H \cdot M, K \cdot N \rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s$$

für alle $t \geq 0$. □

Zum Abschluss des Abschnittes soll noch das Verhalten des Integralprozesses, wenn die Zeit gegen unendlich strebt, untersucht werden. Für Integralprozesse aus $\mathcal{H}_{2,c}$ ist dies klar, da eine Konvergenz sowohl in L_2 als auch punktweise fast sicher vorliegt. Integriert man gegen ein lokales Martingal, so ist dies i.a. nicht wahr. Anhand des Verhaltens der quadratischen Variation im Unendlichen kann man entscheiden, ob der Integralprozess punktweise konvergiert. Dies ist der folgende Satz.

Satz 4.16. *Sei M ein stetiges lokales Martingal. Dann konvergiert auf dem Ereignis $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$ das lokale Martingal punktweise $\mathbb{P}$-fast sicher.*

Beweis. O.E.d.A. kann $M_0 = 0$ angenommen werden. Es gilt

$$\{\langle M \rangle_\infty < \infty\} = \bigcup_{C>0} \{\langle M \rangle_\infty \leq C\}.$$

Definiere für $C > 0$ die Stoppzeit σ_C durch

$$\sigma_C = \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > C\}.$$

Dann ist

$$\{\sigma_C = +\infty\} = \{\langle M \rangle_\infty \leq C\}$$

und für den gestoppten Prozess M^{σ_C} gilt

$$\mathbb{E}\langle M^{\sigma_C} \rangle_\infty = \mathbb{E}\langle M \rangle_\infty^{\sigma_C} = \mathbb{E}\langle M \rangle_{\sigma_C} \leq C.$$

Hieraus folgt, dass M^{σ_C} ein $\mathcal{H}_{2,c}$ Martingal ist, das $\mathbb{P}$-fast sicher konvergent ist. Auf dem Ereignis $\{\sigma_C = +\infty\} = \{\langle M \rangle_\infty \leq C\}$ stimmen die Prozesse M und M^{σ_C} überein, so dass also M konvergent ist auf jedem $\{\langle M \rangle_\infty \leq C\}$ und damit auch auf $\{\langle M \rangle_\infty < \infty\}$. □

Man kann dies anwenden auf den Integralprozess $H \cdot M$ und erhält

Satz 4.17. *Seien $M \in \mathfrak{M}_{c,loc}$ und $H \in L^2_{loc}(M)$. auf dem Ereignis*

$$\left\{ \int_0^\infty H_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty \right\}$$

ist der stochastische Integralprozess $H \cdot M$ punktweise konvergent $\mathbb{P}$-fast sicher.

II Der Itō-Kalkül

11.1.16

1 Itō-Formel

Motivation

Die Itō-Formel ist eine Verallgemeinerung der Kettenregel.
Sei $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differentierbar und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1–Funktion.
Kettenregel: Dann gilt:

$$(f \circ x)'(t) = f'(x(t))x'(t) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Alternativ in Integralform:

$$f(x(t)) - f(x(0)) = \int_0^t (f \circ x)'(s)ds = \int_0^t f'(x(s)) \underbrace{x'(s)ds}_{\substack{\text{Radon-Niko-}\\ \text{dym Ablei-}\\ \text{tung}}} = \int_0^t f'(x(s))dx(s)$$

Das heißt, die Kettenregel kann alternativ beschrieben werden als

$$f(x(t)) - f(x(0)) = \int_0^t f'(x(s))dx(s)$$

oder in Kurzschreibweise:

$$df(x(t)) = f'(x(t))dx(t)$$

wobei diese Schreibweise definiert/motiviert ist durch folgende Beobachtung:

$$f(x(t)) - f(x(0)) = \int_0^t 1 \; df(x(s)) = \int_0^t f'(x(s))dx(s)$$

Die erste Verallgemeinerung der Kettenregel lautet also:
Ist $x : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und lokal von beschränkter Variation und ist $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^1–Funktion, so gilt:

$$f(x(t)) - f(x(0)) = \int_0^t f'(x(s))dx(s) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Aber: Stetige Martingale haben keine Pfade von lokaler beschränkter Variation. Das heißt, die obige Formel muss modifiziert werden. Das führt zur zweiten Verallgemeinerung: Der Itō-Formel.
Ist X ein stetiges Semimartingal und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion, so gilt:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s$$

In differentieller Schreibweise:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t$$

<u>Ziel:</u> Rigorose Herleitung der Itō-Formel.
Dazu definiere zunächst, was ein Semimartingal ist.
Wir betrachten allgemein in diesem Kapitel einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, der die usual conditions erfüllt.

Definition 1.1. *Ein stochastischer Prozess X heißt stetiges Semimartingal, wenn eine Zerlegung der Form*

$$X = X_0 + M + A$$

existiert, wobei

$$M \in \mathfrak{M}^0_{c,loc},\ A \in FV^0_c \text{ und } X_0\ \mathcal{F}_0 - \text{messbar}$$

ist.
Diese Zerlegung ist eindeuig, da stetige lokale Martingale mit Pfaden von beschränkter Variation konstant sind (vgl. Satz 3.12)
Dabei nennt man

(i) X_0 die Startvariable,

(ii) M den lokalen Martingalanteil und

(iii) A den beschränkten Variationsanteil

von X.

Die Integration gegen ein Semimartingal wird erklärt durch die seperate Integration gegen den lokalen Martingalanteil M und gegen den beschränkten Variationsanteil A.
Definiere die Menge

$$L_{\text{loc}}(A) := \{H : H \text{ ist progressiv messbar und } \int_0^t |H_s| d\|A\|_s < \infty \text{ für alle } t \geq 0\}$$

Dann kann für

$$H \in L_{\text{loc}}(A) \cap L^2_{\text{loc}}(M) =: L_{\text{loc}}(X)$$

der stochastische Integralprozess

$$H \cdot X$$

definiert werden durch

$$H \cdot X := H \cdot M + H \cdot A$$

wobei

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s dA_s$$

pfadweise definiert ist.
Schreibweise:

$$(H \cdot X)_t = \int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s$$

Der stochastische Integralprozess $H \cdot X$ ist wieder ein Semimartingal mit $H \cdot M$ als lokalem Martingalanteil und $H \cdot A$ als beschränktem Variationsanteil.
Beachte:

$$lb\mathcal{P} \subseteq L_{\text{loc}}(X)$$

Das heißt, die Anzahl der Elemente, die wir Integrieren können, ist sehr groß. So kann zum Beispiel jeder Prozess mit cáglád Pfaden, also linksseitig stetigen und rechtsseitig limitierbaren Pfaden, integriert werden.

Definition 1.2. *Für ein stetiges Semimartingal X der Form*

$$X = X_0 + M + A$$

ist der quadratische Variationsprozess von X definiert durch

$$\langle X \rangle := \langle M \rangle$$

Durch Polarisation erhält man die quadratische Kovariation mittels

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle)$$

für alle Semimartingale X, Y.

Bemerkung 1.3. *Seien $X = X_0 + M + A, Y = Y_0 + N + B$ zwei Semimartingale. Dann gilt:*

(i) $\langle X, Y \rangle = \langle M, N \rangle$

(ii) $\langle H \cdot X \rangle = \langle H \cdot M \rangle = \int_0^\cdot H_s^2 d\langle M \rangle_s = \int_0^\cdot H_s^2 d\langle X \rangle_s$ *für alle* $H \in L_{loc}(X)$

(iii) $\langle H \cdot X, K \cdot Y \rangle = \langle H \cdot M, K \cdot N \rangle = \int_0^\cdot H_s K_s d\langle M, N \rangle_s = \int_0^\cdot H_s K_s d\langle X, Y \rangle_s$ *für alle* $H \in L_{loc}(X), K \in L_{loc}(Y)$

Beweis. (i) folgt aus der Polarisation, denn

$$\langle X + Y \rangle = \langle M + N \rangle \text{ und } \langle X - Y \rangle = \langle M - N \rangle$$

(ii) folgt aus der Definition
(iii) folgt aus (i) □

Bemerkung 1.4. *Auch bei stetigen Semimartingalen kann die quadratische Kovariation als Kovariation der Pfade interpretiert werden.*
Genauer: Seien X, Y Semimartingale. Sei π_n eine Zerlegung

$$\pi_n : 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots \qquad \sup_i t_i^{(n)} = +\infty$$

Dann konvergiert für alle $T \geq 0$:

$$\sup_{0\leq t\leq T} |KV_n(t) - \langle X, Y\rangle_t| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

in Wahrscheinlichkeit.
Dabei ist

$$KV_n(t) = \sum_i (X_{t_i^{(n)}\wedge t} - X_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t})(Y_{t_i^{(n)}\wedge t} - Y_{t_{i-1}^{(n)}\wedge t})$$

die quadratische Kovariation von X und Y entlang der Zerlegung von π.

Beweis. Analoge Argumentation wie bei lokalen Martingalen (vgl. Satz 3.25) □

Der Weg zur Itō-Formel ist die Rückführung auf die partielle Integrationsformel.

Partielle Integrationsformel für FV-Funtionen

Satz 1.5. *Seien $f, g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ rechtsseitig stetige Funktionen, die lokal von beschränkter Variation sind.*
Dann gilt:

$$f(t)g(t) - f(0)g(0) = \int_0^t f(s-)dg(s) + \int_0^t g(s-)df(s) + \sum_{0<s\leq t} \Delta f(s)\Delta g(s) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

wobei

$$f(s-) := \lim_{u\uparrow s} f(u)$$

und

$$\Delta f(s) := f(s) - f(s-)$$

$\Delta f(s)$ misst die Höhe des Sprungs an der Stelle s. Das ist insb. an Unstetigkeitsstellen relevant.

Beweis. Die Aussage folgt mit Fubini:
O.E.d.A.: $f(0) = 0 = g(0)$
Es existieren eindeutig bestimmte, endliche signierte Maße μ_f, μ_g auf $(0, T]$ mit

$$\mu_f((s,t]) = f(t) - f(s) \qquad \text{für alle } 0 < s < t \leq T$$

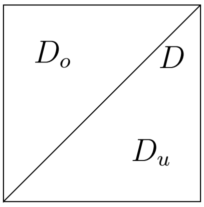
und

$$\mu_g((s,t]) = g(t) - g(s) \qquad \text{für alle } 0 < s < t \leq T$$

Sei $\mu := \mu_f \otimes \mu_g$ das dazugehörige Produktmaß auf $(0,T] \times (0,T]$.

Für das Rechteck $(0,t] \times (0,t]$ gilt:

$$\mu((0,t] \times (0,t]) = \mu_f((0,t])\mu_g((0,t]) = f(t)g(t)$$



$$D_o := \{(s,r) : 0 < s \leq t, s < r \leq t\}$$

$$D_u := \{(s,r) : 0 < s \leq t, r < s\}$$

$$D := \{(s,s) : 0 < s \leq t\}$$

Dann ist

$$\mu(D_o) = \int\limits_{(0,t]} \mu_f((0,s))d\mu_g(s) = \int\limits_0^t f(s-)gf(s)$$

$$\mu(D_u) = \int\limits_{(0,t]} \mu_g((0,s))d\mu_f(s) = \int\limits_0^t g(s-)df(s)$$

$$\mu(D) = \int\limits_{(0,t]} \mu_g(\{s\})d\mu_f(s) = \sum_{0<s\leq t} \Delta g(s)\Delta f(s)$$

Die Maße am einzelnen Punkt $\{s\}$ sind nur dann $\neq 0$, wenn f und g dort eine Unstetigkeitsstelle, also einen Sprung, haben.

Insbesondere folgt:

$$f(t)g(t) = \mu(D_o) + \mu(D_u) + \mu(D) = \int\limits_0^t f(s-)dg(s) + \int\limits_0^t g(s-)df(s) + \sum_{0<s\leq t} \Delta f(s)\Delta g(s)$$

□

Bemerkung. *Sind f, g stetig, so fällt der Summenterm weg. Dann bleibt übrig:*

$$f(t)g(t) - f(0)g(0) = \int\limits_0^t f(s)dg(s) + \int\limits_0^t g(s)df(s)$$

Sind f, g absolut-stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes, also

$$df(t) = f'(t)dt$$

und

$$dg(t) = g'(t)dt$$

so gilt:

$$f(t)g(t) - f(0)g(0) = \int\limits_0^t f(s)g'(s)ds + \int\limits_0^t g(s)f'(s)ds$$

was der bekannten, reellen partiellen Integration entspricht.

11.1.16

Satz 1.6 (partielle Integration für lokale Martingale). *Seien $M, N \in \mathfrak{M}_{c,loc}$. Dann gilt:*

$$M_tN_t - M_0N_0 = \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_s + \langle M, N\rangle_t \quad \textit{für alle } t \geq 0 \ \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

Beweis. Sei O.B.d.A. $M_0 = N_0 = 0$.
Für $M \in b\mathfrak{M}_c^0$ gilt

$$M_t^2 = 2\int M_s dM_s + < M >_t \tag{3}$$

Durch

$$\tau_n := \{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$$

kann die Gleichung 3 auch auf lokale Martingale ausgedehnt werden.
Die Behauptung folgt dann mit Polarisation:

$$\begin{aligned}
M_tN_t &= \frac{1}{4}((M+N)_t^2 - (M-N)_t^2) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\int_0^t (M_s+N_s)d(M_s+N_s) + \langle M+N\rangle_t - 2\int_0^t (M_s-N_s)d(M_s-N_s) - \langle M-N\rangle_t\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4\int_0^t M_s dN_s + 4\int_0^t N_s dM_s + 4\langle M, N\rangle_t\right) \\
&= \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t N_s dM_y + \langle M, N\rangle_t
\end{aligned}$$

Da $\mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0 = b\mathfrak{M}_{\text{loc}}^0$, sind $M, N \in lb\mathcal{P} \subseteq L_{\text{loc}}^2(M) \cap L_{\text{loc}}^2(N)$ und damit integrierbar. □

Satz 1.7 (gemischte partielle Integration). *Sei $M \in \mathfrak{M}_{c,loc}, A \in FV_c$. Dann gilt:*

$$M_tA_t - M_0A_0 = \underbrace{\int_0^t M_s dA_s}_{\substack{\textit{Lebesgue-}\\\textit{Stieltjes-}\\\textit{Integral}}} + \underbrace{\int_0^t A_s dM_s}_{\substack{\textit{stochastisches}\\\textit{Integral}}} \underbrace{(+\langle A, M\rangle_t)}_{\substack{=0,\ \textit{da } A\\ \textit{beschr. Var. hat}}} \quad \textit{für alle } t \geq 0 \ \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

Beweis. O.B.d.A. $M_0 = 0 = A_0$.
<u>1. Schritt:</u> Sei $M \in b\mathfrak{M}_c$ und sei $A \in FV_c$ beschränkt. Definiere für $n \in \mathbb{N}$ Stoppzeiten $(\tau_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ durch

$$\tau_0^{(n)} = 0, \tau_{i+1}^{(n)} = \inf\{t \geq \tau_i^{(n)} : |A_t - A_{\tau_i^{(n)}}| \geq 2^{-n} \text{ oder } |M_t - M_{\tau_i^{(n)}}| \geq 2^{-n}\}$$

Dies ist eine Lokalisation im Raumbereich. Definiere die stochastischen Prozesse $\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq 0}$, $\left(Y_t^{(n)}\right)_{t\geq 0}$ durch

$$X_t^{(n)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} M_{\tau_i^{(n)}\wedge t}(A_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

$$Y_t^{(n)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} A_{\tau_i^{(n)}\wedge t}(M_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - M_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Damit ist $\left(Y_t^{(n)}\right)_{t\geq 0}$ ein stochastischer Integralprozess, der in $\mathcal{H}_{2,c}$ gegen $A{\cdot}M$ konvergiert. $\left(X_t^{(n)}\right)_{t\geq 0}$ ist 'fast' ein Lebesgue-Stieltjes Integralprozess, der gleichmäßig auf Kompakta punktweise in ω gegen $\int\limits_0^{\cdot} M_s dA_s$ konvergiert.
Zusammen mit einem Teleskopsummenargument folgt die Behauptung, denn

$$\begin{aligned}
M_t A_t &= \sum_{i\in\mathbb{N}} M_{\tau_i^{(n)}\wedge t} A_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - M_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t} A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} M_{\tau_i^{(n)}\wedge t}(A_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}) + \sum_{i\in\mathbb{N}} A_{\tau_i^{(n)}\wedge t}(M_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}) \\
&= X_t^{(n)} - Y_t^{(n)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^t M_s dA_s + \int\limits_0^t A_s dM_s
\end{aligned}$$

Nachweis der Konvergenz von $X^{(n)}$ und $Y^{(n)}$:
Definiere den Prozess $H^{(n)} \in b\mathcal{P}$ durch

$$H^{(n)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} A_{\tau_{i-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{(\tau_{i-1}^{(n)}, \tau_i^{(n)}]}$$

Dann gilt:

$$H^{(n)} \longrightarrow A \qquad \text{in } L_2(\mu_M)$$

denn

$$\begin{aligned}
\int (H^{(n)} - A)^2 d\mu_M &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \int \underbrace{(H^{(n)} - A)^2}_{\leq 2^{-n}} \mathbb{1}_{(\tau_{i-1}^{(n)}, \tau_i^{(n)}]} d\mu_M \\
&= (2^{-n})^2 \underbrace{\mu_M([0,\infty) \times \Omega}_{<\infty} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Die Stetigkeit des Integrals liefert

$$Y^{(n)} = H^{(n)} \cdot M \longrightarrow A \cdot M \qquad \text{in } \mathcal{H}_{2,c}$$

Doobsche-L_2-Ungleichung liefert eine gleichmäßige Konvergenz in t für eine Teilfolge punktweise in ω. Dies bedeutet

$$\sup_{t\geq 0} \left| (H^{(n_k)} \cdot M)_t(\omega) - (A \cdot M)_t(\omega) \right| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Setze

$$Z_t^{(n)} = \sum_{i\in\mathbb{N}} M_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}(A_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Dann gilt:

$$\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(n)} - Z_t^{(n)}| \longrightarrow 0 \qquad \text{für alle } T > 0$$

denn

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T}\left|\sum_{i\in\mathbb{N}} M_{\tau_i^{(n)}\wedge t}(A_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}) - \sum_{i\in\mathbb{N}} M_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}(A_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t})\right| \\
&\qquad \leq \sup_{0\leq t\leq T}\sum_{i\in\mathbb{N}} \underbrace{|M_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - M_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}|}_{\leq 2^{-n}}\, |A_{\tau_i^{(n)}\wedge t} - A_{\tau_{i-1}^{(n)}\wedge t}| \\
&\qquad \leq \sup_{0\leq t\leq T} 2^{-n} FV_t(A) \\
&\qquad \leq 2^{-n} \underbrace{FV_T(A)}_{<\infty} \xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Setze $K^{(n)} = \sum_{\in\mathbb{N}} M_{\tau_{i-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{(\tau_{i-1}^{(n)}, \tau_i^{(n)}]}$. Dann ist $Z^{(n)}$ der Integralprozess von $K^{(n)}$ gegen A, denn

$$\int_0^t K_s^{(n)} dA_s = Z_t^{(n)} \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Beachte:

$$\begin{aligned}
\int_0^t M_{\tau_{i-1}^{(n)}} \mathbb{1}_{(\tau_{i-1}^{(n)}, \tau_i^{(n)}]}(s,\omega) dA_s(\omega) &= \int_0^t M_{\tau_{i-1}^{(n)}}(\omega) \mathbb{1}_{(\tau_{i-1}^{(n)}(\omega), \tau_i^{(n)}(\omega)]}(s) dA_s \\
&= \begin{cases} 0 & \text{,falls } t \leq \tau_{i-1}^{(n)}(\omega) \\ M_{\tau_{i-1}^{(n)}(\omega)}(\omega) \cdot (A_t(\omega) - A_{\tau_{i-1}^{(n)}(\omega)}(\omega)) & \text{,falls } \tau_{i-1}^{(n)}(\omega) < t \leq \tau_i^{(n)}(\omega) \\ M_{\tau_{i-1}^{(n)}(\omega)}(\omega) \cdot (A_{\tau_i^{(n)}(\omega)}(\omega) - A_{\tau_{i-1}^{(n)}(\omega)}(\omega)) & \text{,falls } \tau_i^{(n)}(\omega) < t \end{cases} \\
&= M_{\tau_{i-1}^{(n)}(\omega)\wedge t}(\omega) \cdot (A_{\tau_i^{(n)}(\omega)\wedge t}(\omega) - A_{\tau_{i-1}^{(n)}(\omega)\wedge t}(\omega))
\end{aligned}$$

Es gilt weiter:

$$\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t K^{(n)}(s) dA_s - \int_0^t M(s) dA_s\right| \leq \sup_{0\leq t\leq T}\int_0^t \left|K^{(n)}(s) - M(s)\right| d\,\|A\|_s \leq 2^{-n} FV_T(A) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

2. Schritt: Durch Lokalisation kann die Behauptung für $M \in \mathfrak{M}_{c,\text{loc}}^0$ bewiesen werden. Betrachte hierzu

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n \text{ oder } |A_t| \geq n\}$$

Dann ist $M^{\tau_n} \in b\mathfrak{M}_c$ und $A^{\tau_n} \in FV_c^0$ beschränkt und

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

Also ist

$$\begin{aligned}(M\cdot A)^{\tau_n} &= M^{\tau_n}\cdot A^{\tau_n}\\ &\overset{\text{1. Schritt}}{=} M^{\tau_n}\cdot A^{\tau_n} + A^{\tau_n}\cdot M^{\tau_n}\\ &= M\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot A^{\tau_n} + A\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}\cdot M^{\tau_n}\\ &= (M\cdot A)^{\tau_n} + (A\cdot M)^{\tau_n}\\ &= (M\cdot A + A\cdot M)^{\tau_n}\end{aligned}$$

Da dies für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt, folgt

$$M_tA_t = \int_0^t M_s dA_s + \int_0^t A_s dM_s \quad \text{für alle } t\geq 0\ \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

□

Als Ergebnis erhalten wir die partielle Integration für Semimartingale:

Satz 1.9. *Seien X, Y stetige Semimartingale. Dann gilt:*

$$X_tY_t - X_0Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X,Y\rangle_t \quad \textit{für alle } t\geq 0\ \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

Satz 1.8. *Sei X ein Semimartingal. Dann gilt:*

$$X_t^2 - X_0^2 = 2\int_0^t X_s dX_s + \langle X\rangle_t \quad \textit{für alle } t\geq 0\ \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

Beweis. O.B.d.A. $X_0 = 0$. Sei $X_t = M_t + A_t$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}X_t^2 &= M_t^2 + A_t^2 + 2M_tA_t\\ &= \underbrace{2\int_0^t M_s dM_s + \langle M\rangle_t}_{=M_t^2 \text{ nach Def.}} + \underbrace{2\int_0^t A_s dA_s}_{=A_t^2 \text{ durch part. Integration}} + \underbrace{2\int_0^t M_s dA_s + 2\int_0^t A_s dM_s}_{=2M_tA_t \text{ durch part. Int.}}\\ &= 2\int_0^t (M_s + A_s) dM_s + 2\int_0^t (A_s + M_s) dA_s + \langle M\rangle_t\\ &= 2\int_0^t (M_s + A_s) d(M_s + A_s) + \langle M\rangle_t\end{aligned}$$

$$= 2 \int\limits_0^t X_s dX_s + \langle X \rangle_t$$

□

Beweis zu Satz 1.9. Der Beweis folgt durch Polarisation. O.B.d.A.: $X_0 = 0 = Y_0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
X_t Y_t &= \frac{1}{4}((X+Y)_t^2 - (X-Y)_t^2) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\int\limits_0^t (X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \langle X+Y \rangle_t - 2\int\limits_0^t (X_s - y_s) d(X_s - Y_s) - \langle X_Y \rangle_t\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(4\int\limits_0^t X_s dY_s + 4\int\limits_0^t Y_s dX_s + 4\langle X, Y \rangle_t\right) \\
&= \int\limits_0^t X_s dY_s + \int\limits_0^t Y_s dX_y + \langle X, Y \rangle_t
\end{aligned}$$

□

Die Itō-Formel

18.1.16

Satz 1.10 (Itō-Formel)**.** *Sei X ein stetiges Semimartingal und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Dann gilt:*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int\limits_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \quad \textit{für alle } t \geq 0 \ \mathbb{P}\textit{-fast sicher}$$

Hat X die Darstellung

$$X = X_0 + M + A$$

so ist $f \circ X$ ein Semimartingal mit Darstellung

$$f \circ X = f(X_0) + \underbrace{f'(X) \cdot M}_{\substack{\textit{lokaler Martingal-}\\ \textit{Anteil}}} + \underbrace{f'(X) \cdot A + \frac{1}{2} f''(X) \cdot \langle X \rangle}_{\substack{\textit{beschränkter}\\ \textit{Variations-}\\ \textit{Anteil}}}$$

In differentieller Schreibweise lautet die Itō-Formel

$$\begin{aligned}
df(X_t) &= f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X \rangle_t \\
&= f'(X_t) dM_t + f'(X)_t dA_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d\langle X \rangle_t
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $X = X_0 + M + A$ die Semimartingaldarstellung von X.
Sei
$$\mathfrak{A} := \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}) : \text{Itō-Formel gilt für } \left(f(X_t)\right)_{t\geq 0} \right\}$$
Dann ist $\mathfrak{A}$ nicht nur ein Vektorraum, sondern auch eine Algebra, da für $f, g \in \mathfrak{A}$ auch $fg \in \mathfrak{A}$ ist.
Dies kann durch partielle Integration gezeigt werden:
Da $f, g \in \mathfrak{A}$ gilt die Itō-Formel für f und g, d.h.:
$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s$$
und
$$g(X_t) = g(X_0) + \int_0^t g'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X_s)d\langle X\rangle_s$$
Da $f(X)$ und $g(X)$ Semimartingale sind, wird für die quadratische Kovariation $\langle f(X), g(X)\rangle$ nur der Martingalanteil gebraucht:
$$\langle f(X), g(X)\rangle_t = \int_0^t f'(X_s)g'(X_s)d\langle X\rangle_s$$
Partielle Integration liefert
$$\begin{aligned}
&f(X_t)g(X_t) - f(X_0)g(X_0) \\
&= \int_0^t f(X_s)dg(X_s) + \int_0^t g(X_s)df(X_s) + \langle f(X), g(X)\rangle_t \\
&= \int_0^t f(X_s)g'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f(X_s)g''(X_s)d\langle X\rangle_s + \int_0^t g(X_s)f'(X_s)dX_s \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^t g(X_s)f''(X_s)d\langle X\rangle_s + \frac{1}{2}\,2\int_0^t f'(X_s)g'(X_s)d\langle X\rangle_s \\
&= \int_0^t (fg)'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t (fg)''(X_s)d\langle X\rangle_s
\end{aligned}$$
Da $f(x) = x \in \mathfrak{A}$ liegt, sind alle Polynome in $\mathfrak{A}$ enthalten.
Durch Betrachtung von Stoppzeiten der Form
$$\tau_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n \text{ oder } \langle X\rangle_t \geq n \text{ oder } FV_t(A) \geq n\}$$
kann angenommen werden, dass X ein beschränktes Semimartingal ist, mit beschränkter quadratischer Variation und mit $FV_\infty(A) := \lim_{t\to\infty} FV_t(A) < C$ für ein $C > 0$, also mit beschränkter Variation.

X nimmt nur Werte in einem Kompaktum K an und daher kann die Funktion f mit ihren Ableitungen f' und f'' gleichmäßig durch Polynome $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approximiert werden, d.h.

$$\sup_{x\in K}|f(x)-p_n(x)| \longrightarrow 0$$

$$\sup_{x\in K}|f'(x)-p_n'(x)| \longrightarrow 0$$

$$\sup_{x\in K}|f''(x)-p_n''(x)| \longrightarrow 0$$

Jedes p_n erfüllt die Itō-Formel:

$$p_n(X_t)-p_n(X_0)=I_{1,n}(t)+I_{2,n}(t)+I_{3,n}(t)$$

mit

$$I_{1,n}(t)=\int_0^t p_n'(X_s)dM_s$$

$$I_{2,n}(t)=\int_0^t p_n'(X_s)dA_s$$

$$I_{3,n}(t)=\tfrac{1}{2}\int_0^t p_n''(X_s)d\langle X\rangle_s$$

Für $I_{2,n}$ und $I_{3,n}$ kann punktweise in $\omega\in\Omega$ argumentiert werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0}\left|I_{2,n}-\int_0^t f'(X_s)dA_s\right| &\leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t |p_n'(X_s)-f'(X_s)|\ d\ \|A\|_s\\ &\leq \underbrace{\sup_{x\in K}|p_n'(x)-f'(x)|}_{\to 0}\underbrace{FV_\infty(A)}_{<\infty}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0}\left|I_{3,n}-\frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s\right| &\leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t \frac{1}{2}|p_n''(X_s)-f''(X_s)|\ d\ \langle X\rangle_s\\ &\leq \underbrace{\sup_{x\in K}|p_n''(x)-f''(x)|}_{\to 0}\frac{1}{2}\underbrace{\langle X\rangle_\infty}_{<\infty}\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Da $I_{1,n}$ ein stochastisches Integral ist, ist zunächst eine Konvergenz in $\mathcal{H}_{2,c}$ zu überlegen. Es gilt:

$$\|p_n'\circ X-f'\circ X\|_{L_2(\mu_M)}\longrightarrow 0$$

denn

$$\int (p_n'(X) - f'(X))^2 d\mu_M \leq \underbrace{\left(\sup_{x\in K} |p_n'(x) - f'(x)\right)^2}_{\to 0} \underbrace{\mu_M([0,\infty)\times\Omega)}_{<\infty} \longrightarrow 0$$

Die Stetigkeit des Integrals liefert in $\mathcal{H}_{2,c}$:

$$p_n'(X)\cdot M \longrightarrow f'(X)\cdot M$$

Mit der Doob'schen L_2–Ungleichung erhält man, dass die Pfade von $\int\limits_0^{\cdot} p_n'(X_s)dM_s$ gleichmäßig in t für eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\int\limits_0^{\cdot} f'(X_s)dM_s$ konvergiert.
Insgesamt erhält man also für diese Teilfolge:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \lim_{k\to\infty} p_{n_k}(X_t) - p_{n_k}(X_0) \\ &= \lim_{k\to\infty} I_{1,n_k}(t) + I_{2,n_k}(t) + I_{3,n_k}(t) \\ &= \int\limits_0^t f'(X_s)dM_s + \int\limits_0^t f'(X_s)dA_s + \frac{1}{2}f''(X_s)d\langle X\rangle_s \end{aligned}$$

wobei dieser Limes $\mathbb{P}$-fast sicher punktweise in ω, aber gleichmäßig in t zu verstehen ist. Deshalb ist $(f(X_t))_{t\geq 0}$ nicht unterscheidbar vom Prozess

$$f(X_0) + \int\limits_0^{\cdot} f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}f''(X_s)d\langle X\rangle_s$$

□

Mehrdimensionale Itō-Formel

Satz 1.11 (Mehrdimensionale Itō-Formel)**.** *Ein d-dimensionaler Prozess $X = (X^{(1)},\dots,X^{(n)})$ heißt stetiges Semimartingal, wenn jede seiner Komponenten stetige Semimartingale sind.*
Ist f eine $C^2(\mathbb{R}^d)$-Funktion, so gilt:

$$f(X_t) - f(X_0) = \int\limits_0^t \triangledown f(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t H_f(X_s)d\langle X\rangle_s$$

Dabei ist $\triangledown f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_d f(x) \end{pmatrix}$ *der Gradient von f in $x\in\mathbb{R}^d$ ist*
und $H_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11}f(x) & \cdots & \partial_{1d}f(x) \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \partial_{d1}f(x) & \cdots & \partial_{dd}f(x) \end{pmatrix}$ *die Hesse-Matrix von f in $x\in\mathbb{R}^d$.*

Weiter wird definiert:

$$\int_0^t \nabla f(X_s)dX_s := \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(X_s)dX_s^{(i)}$$

und

$$\int_0^t H_f(X_s)d\langle X\rangle_s := \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{i,j} f(X_s)d\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_s$$

Ist der lokale Martingalanteil einer Komponente gleich 0, so kann die Differenzierbarkeit abgeschwächt werden:

Satz 1.12. *Sei X ein stetiges, reelles Semimartingal und B ein FV_c-Prozess. Sei f eine $C^{1,2}$–Funktion (das heißt, f ist in der ersten Variable einmal stetig differenzierbar und zweimal stetig differenzierbar in der zweiten Variable). Dann gilt:*

$$f(B_t, X_t) = f(B_0, X_0) + \int_0^t \partial_1 f(B_s, X_s)dB_s + \int_0^t \partial_2 f(B_s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{22} f(X_s)d\langle X\rangle_s$$

Auch kann eine lokale Version der Ito-Formel analog bewiesen werden.

Satz 1.13. *Sei D eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ und X ein stetiges d–dimensionales Semimartingal mit Pfaden in D. Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine C^2–Funktion. Dann gilt:*

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t \nabla f(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t H_f(X_s)d\langle X\rangle_s$$

Die Itō-Formel kann man benutzen zur Lösung von stochastischen Differential- bzw. Integralgleichungen.

Beispiel. *Sei W ein Wiener-Prozess. Dann gilt:*

$$W_t^3 = tW_t + 3\int_0^t W_s^2 dW_s - \int_0^t s dW_s + 2\int_0^t W_s ds$$

Beweis. Sei $f(x) = x^3$. Dann gilt mit der Itō-Formel:

$$\begin{aligned} dW_t^3 &= 3W_t^2 dW_t + \frac{1}{2}6W_t dt \\ &= 3W_t^2 dW_t + 3W_t dt \\ &= 3W_t^2 dW_t + 2W_t dt + W_t dt \end{aligned}$$

Mit partieller Integration gilt:

$$dtW_t = tdW_t + W_t dt \Leftrightarrow W_t dt = dtW_t - tdW_t$$

Also eingesetzt:

$$dW_t^3 = 3W_t^2 dW_t + 2W_t dt + W_t dt = tW_t + 3W_t^2 dW_t - tdW_s + 2W_t dt$$

□

Beispiel. *Sei W wieder ein Wiener-Prozess. Gesucht ist eine Semimartingaldarstellung für $(W_t^{2n})_{t\geq 0}$, welche zur Berechnung von $\mu_{2n}(t) := \mathbb{E}W_t^{2n}$ genutzt werden soll.*

Beweis. Sei $f(x) := x^{2n}$. Dann gilt mit der Itō-Formel:

$$\begin{aligned} dW_t^{2n} &= 2nW_t^{2n-1}dW_t + \frac{1}{2}2n(2n-1)W_t^{2n-2}dt \\ &= \underbrace{2nW_t^{2n-1}dW_t}_{=:M_t} + \underbrace{n(2n-1)W_t^{2n-2}dt}_{\text{lokal von beschr. Var.}} \end{aligned}$$

M_t ist als stochastischer Integralprozess ein lokales Martingal. Wir beweisen, dass M sogar ein Martingal ist. Nutze dazu *Satz* 4.10.
Es ist

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t (2nW_s^{2n-1})^2 d\langle W\rangle_s = \int_0^t 4n^2 W_s^{4n-2} ds$$

und

$$\mathbb{E}\langle M\rangle_t = \int_0^t 4n^2 \mathbb{E}W_s^{\overbrace{4n-2}^{\substack{\text{gerade}\\ \text{Potenz}}}} ds = \int_0^t 4n^2 \mathbb{E}(\frac{W_s}{\sqrt{s}})^{4n-2} s^{n-1} ds < \infty$$

Damit gilt mit Satz 4.10, dass M ein Martingal ist, was

$$\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_0 = 0$$

impliziert. Also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W_t^{2n} &= \mathbb{E}\int_0^t 2nW_s^{2n-1}dW_s + n(2n-1)\mathbb{E}\int_0^t W_s^{2(n-1)}ds \\ &= n(2n-1)\int_0^t \mathbb{E}W_s^{2(n-1)}ds \end{aligned}$$

Es lässt sich erkennen, dass man induktiv zeigen kann, dass gilt:

$$\mathbb{E}W_t^{2n} = (2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 1 \cdot t^n$$

□

Beispiel (Brownsche Brücke). *Sei W ein Wiener-Prozess. Für einen Endzeitpunkt $T > 0$ und einen Endpunkt $b \in \mathbb{R}$ soll ein stochastsischer Prozess $(X_t)_{0 \le t < T}$ angegeben werden, der sich auf $[0, T)$ wie ein Wiener-Prozess verhält - gegeben $W_T = b$.*
Definiere hierzu

$$X_t = b\frac{t}{T} + (T-t)\int_0^t \frac{1}{T-s} dW_t \qquad \textit{für alle } 0 \le t < T$$

Dann ist $M_t := \int_0^t \frac{1}{T-s} dW_s,\ 0 \le t < T$ ein L_2-Martingal, aber kein $\mathcal{H}_2$-Martingal und

$$\mathbb{E}M_t^2 = \int_0^t \left(\frac{1}{T-s}\right)^2 ds = \frac{1}{T-t} - \frac{1}{t} < \infty \qquad \textit{für alle } 0 \le t < T.$$

Aber

$$\sup_t \mathbb{E}M_t^2 = \sup_{t<T} \frac{1}{T-t} - \frac{1}{t} = +\infty$$

Mit partieller Integration kann man die Semimartingaldarstellung von X zeigen:

$$\begin{aligned}
(T-t)M_t &= \int_0^t T - s dM_s + \int_0^t M_s d(T-s) \\
&= \int_0^t \frac{T-s}{T-s} dW_s - \int_0^t M_s ds \\
&= (W_t - W_0) - \int_0^t M_s ds \\
&= W_t - \int_0^t M_s ds
\end{aligned}$$

Also hat X die Zerlegung

$$X_t = \underbrace{b\frac{t}{T} - \int_0^t M_s ds}_{\textit{beschr. Var.}} + \underbrace{W_t}_{\textit{Martingal}} \qquad \textit{für alle } 0 \le t < T$$

Es gilt:

$$\mathbb{E}X_t = b\frac{t}{T}$$

und

$$\mathbb{V}ar X_t = (T-t)^2 \int_0^T \left(\frac{1}{T-s}\right)^2 \mathbb{1}_{(0,t]} dW_s = (T-t)^2 \left(\frac{1}{T-t} - \frac{1}{t}\right)$$

sowie für $s < t$*:*

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_s) &= \mathbb{E}((X_t - \mathbb{E}X_t)(X_s - \mathbb{E}X_s)) \\
&= \mathbb{E}((T-t)M_t(T-s)M_s) \\
&= (T-t)(T-s)\mathbb{E}M_tM_s \\
&= (T-t)(T-s)\mathbb{E}M_s^2 + (T-t)(T-s)\underbrace{\mathbb{E}(M_t - M_s)M_s}_{=0} \\
&= (T-t)(T-s)\frac{s}{T(T-s)} \\
&= s - s\frac{t}{T}
\end{aligned}$$

M hat unabhängige und normalverteilte Zuwächse, d.h. $M_t - M_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und normalverteilt für alle $0 \leq s \leq t < T$.
Es gilt:

$$M_t - M_s = \int_s^t \frac{1}{T-u} dW_u$$

Da $f(u) := \frac{1}{T-u} \in L_2([s,t))$ existiert eine Folge

$$f^{(n)} = \sum_{i=1}^{l(n)} y_t^{(n)} \mathbb{1}_{(t_{i-1}^{(n)}, t_t^{(n)}]}$$

mit

$$\|f^{(n)} - f\|_{L^2([s,t))} \longrightarrow 0$$

wobei

$$t_0^{(n)}, ..., t_{l(n)}^{(n)}$$

eine Zerlegung des Intervalls $[s,t)$ ist. Dann ist

$$\int_s^t f^{(n)}(u) dW_u = \sum_{i=1}^{l(n)} y_i^{(n)} (W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}}) \xrightarrow{L_2(\mathbb{P})} \int_s^t f(u) dW_u$$

mit $W_{t_i^{(n)}} - W_{t_{i-1}^{(n)}}$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und normalverteilt. Da die Unabhängigkeit und Verteilung im $L_2 - \lim$ erhalten bleibt, ist auch $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und normalverteilt.
Für k Zeitpuntke

$$0 < t_1 < t_s < ... < t_k < T$$

ist die Verteilung $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ eine $k-$dimensionale Normalverteilung.
Für jedes $t < T$ ist X_t normalverteilt, wie eben bewiesen, mit den Parametern

$$\mathbb{E}X_t = b\frac{t}{T} \text{ und } \mathbb{V}arX_t = (T-t)\frac{t}{T}$$

Für $t_1 < t_2 < ... < t_k$ hat $(M_{t_1}, ..., M_{t_k})$ eine $k-$dimensonale Normalverteilung, da

$$M_{t_1}, M_{t_2 - t_1}, ..., M_{t_k - t_{k-1}}$$

stochastisch unabhängig und normalverteilt sind. Dann ist

$$X_{t_i} = b\frac{t_i}{T} + (T - t_i)M_{t_i}$$

eine Transformation von M.
Also ist auch $(X_{t_1}, ..., X_{t_l})$ $k-$dimensional normalverteilt.
Mit Hilfe der Itō-Formel zeigen wir, dass X eine Lösung folgender stochastischen Differentialgleichung ist

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t}dt + dW_t$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = 0$ für alle $0 \le t < T$.
Nutze die Semimartingaldarstellung von X:

$$\begin{aligned} dX_t &= dW_t + b\frac{1}{T}dt - M_t dt \\ &= dW_t + \left(\frac{b}{T} - M_t\right)dt \\ &= dW_t + \left(\frac{b}{T} - \underbrace{\frac{X_t - b\frac{t}{T}}{T - t}}_{\substack{X_t \text{ nach} \\ M_t \text{ umformen}}}\right)dt \\ &= dW_t + \frac{b - X_t}{T - t}dt \end{aligned}$$

Die einfachste stochastische Differentialgleichung ist die Doléans Exponentialgleichung:

Doléans Exponentialsemimartingal

Sei X ein stetiges Semimartingal mit $X_0 = 0$ und sei Z_0 eine $\mathcal{F}_0$-messbare Abbildung. Gesucht ist ein Semimartingal Z, dass die Gleichung

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_s dX_s \quad \text{für alle } t \ge 0$$

erfüllt. Man sagt, dass dann Z eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dZ_t = Z_t dX_t$$

mit Anfangswert Z_0 ist.
Finden der Lösung:
Ansatz:

$$Z_t = f(X_t, \langle X \rangle_t)$$

Itō-Formel:

$$dZ_t = \partial_1 f(X_t, \langle X \rangle_t) dX_t + \partial_2 f(X_t, \langle X \rangle_t) d\langle X \rangle_t + \frac{1}{2}\partial_{11} f(X_t, \langle X \rangle_t) d\langle X \rangle_t$$

Gesucht ist

$$df(X_t, \langle X \rangle_t) = f(X_t, \langle X \rangle_t) dX_t$$

Also muss gelten:

I: $\partial_1 f = f$

II: $\partial_2 f = -\frac{1}{2}\partial_{11} f$

Die erste Gleichung liefert

$$f(x,y) = e^x h(y)$$

Die zweite Gleichung liefert

$$\begin{aligned} h'(y)e^x &= -\frac{1}{2}e^x h(y) \\ \Rightarrow \qquad h'(y) &= -\frac{1}{2}h(y) \\ \Rightarrow \qquad h(y) &= e^{-\frac{1}{2}y} \end{aligned}$$

Also erfüllt

$$f(x,y) = e^x e^{-\frac{1}{2}y} = \exp(x - \frac{1}{2}y)$$

die Gleichungen I und II.
Deshalb definiert man

Definition 1.14.

$$\mathcal{E}(X)_t := \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t) \qquad \textit{für alle } t \geq 0$$

heißt exponentielles Semimartingal von X.

Die Itō-Formel besagt, dass $\mathcal{E}(X)_t$ die Integralgleichung

$$\mathcal{E}(X)_t = 1 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s$$

bzw.

$$d\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_t dX_t$$

mit Anfangswert $\mathcal{E}(X)_0 = 1$ löst.
Dann gilt (allgemeiner): 20.1.16

Satz. *Der Prozess*

$$Z_t = Z_0\mathcal{E}(X)_t = Z_0 \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$$

löst die Integralgleichung

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_s dX_s \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

bzw. die Differentialgleichung

$$dZ_t = Z_t dX_t \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

mit Anfangswert Z_0 eindeutig.

Beweis. Es gilt für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_0\mathcal{E}(X)_t \\ &= Z_0(1 + \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s) \\ &= Z_0 + Z_0 \int_0^t \mathcal{E}(X)_s dX_s \\ &\overset{Z_0\ \mathcal{F}_0\text{-mb}}{=} Z_0 + \int_0^t Z_0\mathcal{E}(X)_s dX_s \\ &= Z_0 + \int_0^t Z_s dX_s \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit:
Sei Y eine Lösung. Dann gilt für $N_t := (\mathcal{E}(X)_t)^{-1} = \exp(-X_t + \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$:

$$\begin{aligned} dN_t &= N_t d(-X_t + \frac{1}{2}\langle X\rangle_t) + \frac{1}{2}N_t d\underbrace{\langle -X_t + \frac{1}{2}\rangle\langle X\rangle_t)}_{=\langle X\rangle_t} \\ &= -N_t dX_t + N_t d\langle X\rangle_t \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned} dY_t N_t &= Y_t dN_t + N_t dY_t + d\langle Y, N\rangle_t \\ &= -Y_t N_t dX_t + Y_t N_t d\langle X\rangle_t + N_t \underbrace{Y_t dX_t}_{=dY_t,\text{ da } Y_t \text{ Lösung}} - \underbrace{N_t Y_t d\langle X\rangle_t}_{(\star)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist

$$Y_t N_t - Y_0 N_0 = \int_0^t d(Y_s N_s) = 0$$

was

$$Y_t = Z_0 N_t^{-1} = Z_0 \mathcal{E}(X)_t$$

impliziert. Zu $(\star)$: Verwende den Satz

$$\langle \int_0^{\cdot} H_s dX_s, \int_0^{\cdot} K_s dX_s \rangle = \int_0^{\cdot} H_s K_s d\langle X \rangle_s$$

bzw. in differentieller Schreibweise:

$$d\langle \int_0^{\cdot} H_s dX_s, \int_0^{\cdot} K_s dX_s \rangle = H.K.d\langle X \rangle.$$

Dann ergibt

$$dY_t = Y_t dX_t$$

und

$$dN_t = -N_t dX_t + N_t d\langle X \rangle_t$$

gerade

$$d\langle Y, N \rangle_t = -N_t Y_t d\langle X \rangle_t$$

□

2 Lineare stochastische Differentialgleichungen

Die Gleichung

$$dZ_t = Z_t dX_s$$

mit Anfangswert Z_0 hat eine Anwendung in der Finanzmathematik:

2.1 Die allgemeine Black-Scholes Modellierung der Preisentwicklung einer Aktie

Sei $(S_t)_{t \geq 0}$ die Preisentwicklung der Aktie. Zwei Einflussfaktoren bestimmen die Entwicklung:

- μ_t entspricht einer zufälligen Rendite und
- σ_t entspricht einer zufälligen Volatilität.

Für kleines h ist dann

$$S_{t+h} - S_t \approx S_t \mu_t h + S_t \sigma_t (W_{t+h} - W_t)$$

mit W_t ein Wiener-Prozess.
Das heißt:

$$\Delta S_t \approx S_t \mu_t \Delta t + S_t \sigma_t \Delta W_t$$

Dies entspricht der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

mit Anfangswert S_0.
Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung wird als Modell für die Entwicklung einer Aktie genommen. Hierbei ist μ ein progressiv messbarer Prozess mit

$$\int_0^t |\mu_s| ds < \infty \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

und σ ein previsibler Prozess mit

$$\int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Dann ist $\sigma \in L^2_{\text{loc}}(W)$ und

$$X_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

bzw.

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

ein stetiges Semimartingal.
Also ist

$$S_t = S_0 \mathcal{E}(X)_t = S_0 \exp(\int_0^t \mu_s ds) \exp(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds)$$

2.2 Das klassische Black-Scholes Modell

Im klassischen Black-Scholes Modell sind μ und σ konstant. Dies sind reelle Parameter. Dann ist

$$S_t = S_0 \exp(\mu t) \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

S nennt man dann auch geometrischen Wiener-Prozess.

2.3 Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist Lösung der Gleichung

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t \tag{4}$$

mit Anfangswert $X_0 = \zeta$, einer $\mathcal{F}_0$−messbaren Zufallsvariable und $\alpha, \sigma > 0$.
Bestimmung der Lösung mittels Variation der Konstanten.

Die Gleichung

$$dY_t = -\alpha Y_t dt$$

wird gelöst durch

$$Y_t = e^{-\alpha t}$$

Es gilt dann $Y_0 = 1$ und

$$d\frac{1}{Y_t} = \alpha \frac{1}{Y_t} dt$$

Ist X eine Lösung der Gleichung 4, so gilt

$$\begin{aligned} d\frac{X_t}{Y_t} &= X_t d\frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_t} dX_t + \underbrace{d\langle X, \frac{1}{Y} \rangle_t}_{\substack{=0, \text{ da } \frac{1}{Y_t} \text{ deter-} \\ \text{ministisch, also} \\ \text{von beschr. Var.}}} \\ &= \alpha \frac{X_t}{Y_t} dt + \frac{1}{Y_t} (\underbrace{-\alpha X_t dt + \sigma dW_t}_{\substack{=dX_t, \text{ da } X_t \text{ Lösung} \\ \text{von Gleichung 4}}}) \\ &= \frac{1}{Y_t} \sigma dW_t \\ &= e^{\alpha t} \sigma dW_t \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{X_t}{Y_t} &= \frac{X_0}{Y_0} + \int_0^t d\frac{X_s}{Y_s} \\ &= \frac{X_0}{Y_0} + \int_0^t e^{\alpha s} \sigma dW_s \\ &= \zeta + \int_0^t e^{\alpha s} \sigma dW_s \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} X_t &= \zeta Y_t + Y_t \int_0^t e^{\alpha s} \sigma dW_s \\ &= \zeta e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} \sigma dW_s \\ &= \zeta e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{\alpha (s-t)} \sigma dW_s \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\mathbb{E} X_t = e^{-\alpha t} \mathbb{E} \zeta =: m(t)$$

und

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}X_t = e^{-2\alpha t}\mathbb{V}\mathrm{ar}\zeta + \int_0^t e^{2\alpha(s-t)}\sigma ds = e^{-2\alpha t}\mathbb{V}\mathrm{ar}\zeta + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-e^{-2\alpha t}) =: v(t)$$

Man beachte, dass ζ und $\int_0^t e^{\alpha(s-t)}\sigma dW_s$ stochastisch unabhängig sind. Ist ζ eine normalverteilte Zufallsvariable oder konstant, so ist

$$X_t \sim \mathcal{N}(m(t), v(t))$$

Wegen $\lim_{t\to\infty} m(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$ konvergiert X_t in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$-verteilte Zufallsvariable.
Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist eine mean-reverting Diffusion mit Rückkehrlevel 0 und Rückkehrrate α. Das heißt, egal an welcher Stelle der Prozess ist, hat er die Tendenz, gestört durch die Störung σdW_t, in Richtung 0.
Ist ζ eine $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$−verteilte Zufallsvariable, so ändert sich die Verteilung von X_t nicht. Das heißt, $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha})$ ist die stationäre Verteilung.

2.4 Der Vasicek-Prozess

Der Vasicek-Prozess findet Einsatz bei Zinsstrukturmodellen. Er ist die Lösung der Gleichung

$$dX_t = \vartheta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t \tag{5}$$

mit Anfangswert ζ, Returnlevel $\mu \in \mathbb{R}$ und Rückkehrrate $\vartheta > 0$.
Die Standardabweichung der Störung ist $\sigma > 0$.
Zur Lösung führen wir den Vasicek-Prozess auf einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess zurück: Ist X eine Lösung von Gleichung 5, so löst

$$Z_t = X_t - \mu$$

die Gleichung

$$dZ_t = d(X_t - \mu) = dX_t = \vartheta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t = -\vartheta Z_t dt + \sigma dW_t$$

Also ist Z ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess und

$$X_t - \mu = e^{-\vartheta t}(\zeta - \mu) + \int_0^t e^{\vartheta(s-t)}\sigma dW_s$$

$$\Leftrightarrow \qquad X_t = e^{-\vartheta t}\zeta + \mu(1-e^{-\vartheta t}) + \int_0^t e^{\vartheta(s-t)}\sigma dW_s$$

Es gilt:

$$\mathbb{E}X_t = e^{-\vartheta t}\mathbb{E}\zeta + \mu(1-e^{-\vartheta t}) =: m(t) \longrightarrow \mu$$

und

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}X_t = e^{2\vartheta t}\mathbb{V}\mathrm{ar}\zeta + \frac{\sigma^2}{2\vartheta}(1-e^{-2\vartheta t}) =: v(t) \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\vartheta}$$

Ist ζ normalverteilt, so ist $X_t \sim \mathcal{N}(m(t), v(t))$ und X_t konvergiert in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{2\vartheta})$−verteilte Zufallsvariable.

2.5 Die allgemeine 1-dimensionale lineare stochastische Differentialgleichung

Diese lautet:

$$dX_t = (X_t\mu_t + a_t)dt + (X_t\sigma_t + \eta_t)dW_t$$

mit Anfangswert ζ, einer $\mathcal{F}_0$-messbaren Zufallsvariable.
Voraussetzungen:

- μ ist progressiv messbar mit $\int_0^t |\mu_s| ds < \infty$ für alle $t \geq 0$,
- a ist progressiv messbar mit $\int_0^t |a_s| ds < \infty$ für alle $t \geq 0$,
- $\sigma \in L^2_{\text{loc}}(W)$ und
- $\eta \in L^2_{\text{loc}}(W)$.

Die Lösung wird mittels einer Art Variation der Konstanten bestimmt:

$$dX_t = \underbrace{X_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)}_{\text{Black-Scholes Gleichung}} + \underbrace{a_t dt + \eta_t dW_t}_{\text{Inhomogentität}} \tag{6}$$

Betrachte zunächst $\boxed{25.1.16}$

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$$

mit $S_0 = 1$.
Diese Differentialgleichung wird gelöst durch

$$S_t = \exp\left(\int_0^t \mu_s ds\right)\exp\left(\int_0^t \sigma_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$$

Sei X eine Lösung von Gleichung 6. Dann ist das stochastische Differential von $\left(\frac{X_t}{S_t}\right)$ zu bestimmen. Mit Itō gilt erstmal:

$$\begin{aligned}
d\frac{1}{S_t} &= -\frac{1}{S_t^2}dS_t + \frac{1}{2}2\frac{1}{S_t^3}d\langle S\rangle_t \\
&= -\frac{1}{S_t^2}S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{S_t^3}S_t^2\sigma_t^2 dt \\
&= -\frac{1}{S_t}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{1}{S_t}\sigma_t^2 dt
\end{aligned}$$

Dann gilt weiter mit Partielle Integration:

$$\begin{aligned}
d\frac{X_t}{S_t} &= X_t d\frac{1}{S_t} + \frac{1}{S_t}dX_t + \langle X, \frac{1}{S}\rangle_t \\
&= -X_t\frac{1}{S_t}(\mu_t dt + \sigma_t dW_t) + \frac{X_t}{S_t}\sigma_t^2 dt \\
&\quad + \frac{1}{S_t}\big((X_t\mu_t + a_t)dt + (X_t\sigma_t + \eta_t)dW_t\big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{X_t}{S_t}\sigma_t^2 dt - \frac{1}{S_t}\sigma_t\eta_t dt \\
&= \frac{1}{S_t}(a_t - \sigma_t\eta_t)dt + \frac{1}{S_t}\eta_t dW_t
\end{aligned}
$$

Da die rechte Seite nicht mehr von X abhängt, kann man die linke Seite durch Integration bestimmen.

$$
\frac{X_t}{S_t} = \frac{X_0}{S_0}\int_0^t d\left(\frac{X}{S}\right)_s = \zeta + \int_0^t \frac{1}{S_u}(a_u - \sigma_u\eta_u)du + \int_0^t \frac{1}{S_u}\eta_u dW_u
$$

und damit ist die Lösung

$$
X_t = \zeta S_t + S_t \int_0^t \frac{1}{S_u}(a_u - \sigma_u\eta_u)du + S_u \int_0^t \frac{1}{S_u}\eta_u dW_u
$$

Einschub: Wieso ist der Ausdruck/das Integral

$$
\int_0^t \frac{\eta_u}{S_u} dW_u
$$

wohl definiert? $\rightsquigarrow$ Nach Voraussetzung ist $\eta_u \in L^2_{\text{loc}}(W)$. Es ist zu überprüfen, ob $\frac{\eta_u}{S_u} \in L^2_{\text{loc}}(W)$:

$$
\int_0^t \left(\frac{\eta_u}{S_u}\right)^2 d\langle W\rangle_u = \int_0^t \left(\frac{\eta_u}{S_u}\right)^2 du \underset{\text{stetig}}{\overset{S_u}{\leq}} \left(\sup_{u\in[0,t]}\frac{1}{S_u}\right)^2 \int_0^t \eta_u^2 du < \infty
$$

3 Hauptsätze der stochastischen Analysis

Ziel: Mit Hilfe der Itō-Formel werden drei wichtige Theoreme aus der stochastischen Analysis bewiesen.

Komplexe Semimartingale

Definition 3.1. *Sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, der die usual conditions erfüllt.*
Ein komplexwertiger stochastischer Prozess ist ein Prozess der Form

$$
H_t = H_t^{(1)} + iH_t^{(2)} \quad t \geq 0
$$

Dieser ist previsibel genau dann, wenn $H^{(1)}$ und $H^{(2)}$ preivisibel sind.

Ist X ein reelles Semimartingal, so ist $H \in L_{loc}(X)$ genau dann, wenn

$$\int\limits_0^t |(H_s^{(1)})^2 + (H_s^{(2)})^2| d\langle X\rangle_s + \int\limits_0^t |H_s^{(1)}| + |H_s^{(2)}| dA_s < \infty \qquad \textit{für alle } t \geq 0$$

wobei $X = X_0 + M + A$.
Der stochastische Integralprozess von H gegen X ist definiert durch

$$H \cdot X = H^{(1)} \cdot X + i(H^{(2)} \cdot X)$$

Ist X ein lokales Martingal, so ist $H \cdot X$ ein komplexwertiges lokales Martigal.

3.2 Das komplexe Doléans Exponential

Sei X ein reelles Semimartingal. Gesucht ist eine Lösung der Gleichung

$$dZ_t = iZ_t dX_t$$

zum Anfangswert ζ, wobei ζ eine $\mathbb{C}$–wertige $\mathcal{F}_0$–messbare Abbildung ist.
Vermutung:

$$dZ_t = iZ_t dX_t = Z_t d(iX_t)$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen nicht richtig definiert ist. Nimmt man aber diese Umformung an, so können wir vermuten, dass

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp(iX_t - \frac{1}{2}\langle iX\rangle_t) \\ &= \exp(iX_t + \frac{1}{2}\langle X\rangle_t) \end{aligned}$$

eine Lösung ist.
Nachweis mit Hilfe der reellen Itō-Formel:

$$d\cos X_t = -\sin X_t dX_t - \frac{1}{2}\cos X_t d\langle X\rangle_t$$

$$d\sin X_t = \cos X_t dX_t - \frac{1}{2}\sin X_t d\langle X\rangle_t$$

Also ist

$$\begin{aligned} de^{iX_t} &= d(\cos X_t + i\sin X_t) \\ &= d\cos X_t + i\ d\sin X_t \\ &= (-\sin X_t + i\cos X_t)dX_t - \frac{1}{2}(\cos X_t + i\sin X_t)d\langle X\rangle_t \\ &= ie^{iX_t}dX_t - \frac{1}{2}e^{iX_t}d\langle X\rangle_t \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} de^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}e^{iX_t} &= e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}de^{iX_t} + e^{iX_t}de^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t} \\ &= e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}ie^{iX_t}dX_t - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}e^{iX_t}d\langle X\rangle_t + e^{iX_t}\overbrace{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}d\langle X\rangle_t}^{\text{Itō auf } e^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}} \\ &= ie^{\frac{1}{2}\langle X\rangle_t}e^{iX_t}dX_t \end{aligned}$$

Also ist

$$Z_t = \zeta \exp(iX_t + \frac{1}{2}\langle X\rangle_t) \quad t \geq 0$$

eine Lösung.

Folgerung 3.3. *Ist X ein reellwertiges lokales Martingal, so ist*

$$\left(\exp(iX_t + \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)\right)_{t\geq 0}$$

ein komplexwertiges lokales Martingal.

Lemma 3.4. *Sei $\mathcal{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$ und $Y_1, ..., Y_d$ seien reellwertige Zufallsvariablen mit*

$$\mathbb{E}\left(\exp(i(\vartheta, Y))|\mathcal{G}\right) = \exp(-\frac{1}{2}|\vartheta|^2 t)$$

für $t > 0$ und für alle $\vartheta \in \mathbb{R}^d$, wobei

$$(\vartheta, Y) = \sum_{j=1}^{d} \vartheta_j Y_j$$

und

$$|\vartheta|^2 = \sum_{j=1}^{d} \vartheta_j^2$$

Dann sind $Y_1, ..., Y_d$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{G}$ und $Y_1, ..., Y_d$ sind verteilt wie unabhängige $\mathcal{N}(0,t)$-verteilte Zufallsvariablen.

Beweis. Zunächst gilt:

$$\mathbb{E}\exp(i(\vartheta, Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}\exp(i(\vartheta, Y))|\mathcal{G}) = \exp(-\frac{1}{2}|\vartheta|^2 t)$$

Dies ist die Fouriertransformierte einer $\mathcal{N}(0, tI_d)$ Verteilung. Also sind $Y_1, ..., Y_d$ stochastisch unabhängig und jeweils $\mathcal{N}(0,t)$-verteilt.
Da die Fouriertransformierte der bedingten Verteilung von $Y_1, ..., Y_d$ - gegeben $\mathcal{G}$- mit der der unbedingten Verteilung übereinstimmt, stimmt die bedingte Verteilung von $(Y_1, ..., Y_d)$ - gegeben $\mathcal{G}$- mit der unbedingten überein. Damit ist $(Y_1, ..., Y_d)$ stochastisch unabhängig von $\mathcal{G}$. □

Dies führt zum Satz von Lévy:

Satz von Lévy

Satz 3.5. *Sei* $W = (W^{(1)}, ..., W^{(d)})$ *ein* $d-$*dimensionales stetiges lokales Martingal mit* $W_0^{(i)} = 0$ *für alle* $i = 1, ..., d$ *und* $\langle W^{(i)}, W^{(j)} \rangle_t = \delta_{ij} t$ *mit* $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$.
Dann ist W *ein* $d-$*dimensionaler Wiener-Prozess. Dies bedeutet, dass die Komponenten von* W *unabhängige Wiener-Prozesse sind.*

Beweis. Zeige, dass W ein stochastischer Prozess ist, mit unabhängigen Zuwächsen, die von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen stammen, d.h. $\boxed{27.1.16}$

- $W_t - W_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$ und
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \underbrace{(t-s)I_d}_{\substack{\text{Kovariations-}\\ \text{matrix}}})$

Wende hierzu Lemma 3.4 an:
Für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}^d$ ist

$$X_\vartheta(t) := (\vartheta, W_t) = \sum_{k=1}^{d} \vartheta_k W_t^{(k)}$$

ein lokales Martingal, mit

$$\langle X_\vartheta \rangle_t = \sum_{k=1}^{d} \vartheta_k^2 \langle W^{(k)} \rangle_t + \sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^{d} \vartheta_k \vartheta_l \underbrace{\langle W^{(k)}, W^{(l)} \rangle_t}_{=0} = |\vartheta|^2 t$$

Also ist

$$M_\vartheta(t) := \exp(iX_\vartheta(t) + \frac{1}{2}|\vartheta|^2 t) \quad t \geq 0$$

ein komplexwertiges, exponentielles, lokales Martingal. Es ist zu zeigen, dass M_ϑ sogar ein Martingal ist. Zeige dazu, dass $Re(M_\vartheta)$ und $Im(M_\vartheta)$ reelle Martingale sind.
Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} dM_\vartheta(t) &= iM_\vartheta(t) dX_\vartheta(t) \\ \Leftrightarrow \quad d\big(Re(M_\vartheta(t)) + iIm(M_\vartheta(t))\big) &= i\big(Re(M_\vartheta(t)) + iIm(M_\vartheta(t))\big) dX_\vartheta(t) \end{aligned}$$

Dies entspricht dem folgenden System von eindimensionalen stochastischen Differentialgleichungen:

$$dRe(M_\vartheta(t)) = -Im(M_\vartheta(t)) dX_\vartheta(t)$$

$$dIm(M_\vartheta(t)) = Re(M_\vartheta(t)) dX_\vartheta(t)$$

Also folgt:

$$\langle Re(M_\vartheta) \rangle_t = \int_0^t Im(M_\vartheta(s))^2 d\langle X_\vartheta \rangle_s$$

$$\langle Im(M_\vartheta)\rangle_t = \int_0^t Re(M_\vartheta(s))^2 d\langle X_\vartheta\rangle_s$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\langle Re(M_\vartheta)\rangle_t + \langle Im(M_\vartheta)\rangle_t\right) &= \mathbb{E}\int_0^t \left((Im(M_\vartheta(s))^2 + Re(M_\vartheta(s))^2\right) \underbrace{|\vartheta|^2 ds}_{=d\langle X_\vartheta\rangle_s} \\
&= \mathbb{E}\int_0^t |M_\vartheta(s)|^2|\vartheta|^2 ds \\
&= \mathbb{E}\int_0^t e^{|\vartheta|^2 s}|\vartheta|^2 ds \\
&= \int_0^t e^{|\vartheta|^2 s}|\vartheta|^2 ds < \infty
\end{aligned}$$

Also ist $(M_\vartheta(t))_{t\geq 0}$ ein komplexes Martingal. Dies liefert für $s \leq t$:

$$1 = \mathbb{E}\left(\frac{M_\vartheta(t)}{M_\vartheta(s)}\middle|\mathcal{F}_s\right) = \mathbb{E}\exp(i(\vartheta, W_t - W_s)|\mathcal{F}_s)\exp(\frac{1}{2}|\vartheta|^2(t-s))$$

Also gilt:

$$\mathbb{E}\exp(i(\vartheta, W_t - W_s)|\mathcal{F}_s) = \exp(-\frac{1}{2}|\vartheta|^2(t-s)))$$

für alle $\vartheta \in \mathbb{R}^d$.
Lemma 3.4 liefert, dass $W_t - W_s$ stochastisch unabhängig ist von $\mathcal{F}_s$ und $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0,(t-s)I_d)$. □

Ziel: Martingaldarstellungssatz
-stochastische Integralprozessdarstellung von lokalen Martingalen
-Charakterisiert einen vollständigen Wiener-Prozess getriebenen Finanzmarkt
Im ersten Schritt wird die Wiener-Filtration eingeführt.

Definition 3.6. *Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Es soll eine Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ erzeugt werden, die die usual conditions erfüllt und im gewissen Sinne von W erzeugt wird. Definiere die Menge aller Nullmengen:*

$$N := \{A \subseteq \Omega : \exists B \in \mathcal{F}_\infty : A \subseteq B \text{ und } \mathbb{P}(B) = 0\}$$

Setze dann für alle $t \geq 0$:

- *(von W erzeugt)* $\mathcal{F}_t^{(0)} := \sigma(W_s : s \leq t)$ *mit* $\mathcal{F}_\infty^{(0)} := \sigma(W_s : s \geq 0)$
- *(alle NM in $\mathcal{F}_0^{(1)}$)* $\mathcal{F}_t^{(1)} := \sigma(\mathcal{F}_t^{(0)} \cup N)$

- *(rechtsseitig stetig)* $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}^{(1)}_{t+} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}^{(1)}_{t+\epsilon}$ *mit* $\mathcal{G}_\infty := \sigma(\mathcal{G}_t : t \geq 0)$

Dann wird $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *Wiener-Filtration genannt und* W *ist ein Wiener-Prozess bezüglich* $\mathcal{G}$.

Das führt zum ersten Teil des Martingaldarstellungssatzes für Martingale.

Martingaldarstellungssatz, Teil I (Martingale)

Satz 3.7. *Sei* W *ein* d*−dimensionaler Wiener-Prozess mit Wiener-Filtration* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$. *Sei* $Y \in L_2(\mathcal{G}_\infty)$. *Dann existiert ein bzgl.* $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *previsibler Prozess* $H = (H^{(1)}, ..., H^{(d)})$ *mit*

$$\sum_{k=1}^{d} \mathbb{E} \int_0^\infty (H_s^{(k)})^2 ds < \infty$$

(das heißt, jede Komponente $H^{(k)}$ *von* H *ist in* $L_2(\mu_W)$*), so dass*

$$\begin{aligned} Y &= \mathbb{E}Y + \int_0^\infty H_s dW_s \\ &:= \mathbb{E}Y + \sum_{k=1}^{d} \int_0^\infty H_s^{(k)} dW_s^{(k)} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_t) &= \mathbb{E}Y + (H \cdot W)_t \\ &:= \mathbb{E}Y + \sum_{k=1}^{d} (H^{(k)} \cdot W^{(k)})_t \\ &= \mathbb{E}Y + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t H_s^{(k)} dW_s^{(k)} \end{aligned}$$

Beweis. Das Blumentalsche $0-1$ Gesetz besagt, dass $\mathcal{G}_0$ eine triviale σ-Algebra ist, d.h. $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ für alle $A \in \mathcal{G}_0$.
Daher ist Y unabhängig von $\mathcal{G}_0$ und es gilt

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}_0) = \mathbb{E}Y \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

O.B.d.A.: $\mathbb{E}Y = 0$
Setze

$$L_{2,d}(\mu_W) := \underbrace{L_2(\mu_W) \times ... \times L_2(\mu_W)}_{d}$$

Also ist $H = (H^{(1)}, ..., H^{(d)}) \in L_{2,d}(\mu_W)$ genau dann, wenn H previsibel ist bzgl. $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ und

$$\sum_{k=1}^{d} \mathbb{E} \int_0^\infty (H_s^{(k)})^2 ds = \sum_{k=1}^{d} \|H^{(k)}\|^2_{L_2(\mu_W)} < \infty$$

$L_{2,d}(\mu_W)$ ist ein Hilbertraum mit Norm

$$\|H\|_{2,d} = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} \|H^{(k)}\|^2_{L_2(\mu_W)}}$$

Definiere

$$\begin{aligned} I: \quad & L_{2,d}(\mu_W) \longrightarrow L_{2,0}(\mathcal{G}_\infty) \\ & \qquad H \mapsto \int H dW = \sum_{k=1}^{d} \int_0^\infty H_s^{(k)} dW_s^{(k)} \end{aligned}$$

mit

$$L_{2,0}(\mathcal{G}_\infty) :== \{X \in L_2(\Omega, \mathcal{G}_\infty, \mathbb{P}) : \mathbb{E}X = 0\}$$

I ist eine lineare Isometrie.
Zu zeigen verbleibt die Surjektivität von I.
Sei $V := I(L_{2,d}(\mu_W))$ das Bild von $L_{2,d}(\mu_W)$ unter I.
Wegen der Isometrieeigenschaft ist V ein abgeschlossener Teilraum von $L_{2,0}(\mathcal{G}_\infty)$ und abgeschlossen bezüglich Stoppen. Betrachte nun den Senkrechtraum $V^\perp$, der definiert ist durch

$$V^\perp := \{Z \in L_{2,0}(\mathcal{G}_\infty) : \mathbb{E}ZX = 0 \ \forall X \in V\}$$

Das heißt, Z steht senkrecht auf allen $X \in V$.
Man beachte, dass für jedes $M_\infty \in L_{2,0}(\mathcal{G}_\infty)$ durch

$$M_t = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{G}_t) \quad t \geq 0$$

ein $\mathcal{H}_2$–Martingal definiert wird, mit

$$M_0 = \mathbb{E}(M_\infty|\mathcal{G}_0) = \mathbb{E}(M_\infty) = 0$$

Weiter ist für jedes $M_\infty \in V$ und $Z_\infty \in V^\perp$ der Prozess $(M_t Z_t)_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal, denn für alle Stoppzeiten τ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_\tau Z_\tau) &= \mathbb{E}(M_\tau \mathbb{E}(Z_\infty|\mathcal{G}_\tau)) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_\tau Z_\infty|\mathcal{G}_\tau)) \\ &= \mathbb{E}M_\tau Z_\infty \\ &= \mathbb{E} \underbrace{M_\infty^\tau}_{\in V} Z_\infty \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zu zeigen: $V^\perp = \{0\}$ (denn dann ist V der ganze Raum und I damit surjektiv).
Sei $Z_\infty \in V^\perp$. Zu zeigen: $Z_\infty = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher.
Wegen Folgerung 3.3 ist für jedes $\vartheta \in \mathbb{R}^d$

$$M_\vartheta(t) = \exp(i(\vartheta, W_t) + \frac{1}{2}|\vartheta|^2 t) \quad t \geq 0$$

ein komplexwertiges Martingal.
$Re(M_\vartheta)$ und $Im(M_\vartheta)$ sind reelle Martingale und Integralprozesse, da sie Lösungen einer geeigneten Differentialgleichung sind. Stoppt man M_ϑ bei $T > 0$, so sind $Re(M_\vartheta^T)$ und $Im(M_\vartheta^T)$ beides $\mathcal{H}_2$–Martingale.
Also:

$$Re(M_\vartheta^T(\infty)) - 1 = Re(M_\vartheta(T)) - 1 \in V$$

und

$$Im(M_\vartheta^T(\infty)) = Im(M_\vartheta(T)) \in V$$

Dies impliziert

$$\left(Z_t M_\vartheta^T(t)\right)_{t\geq 0}$$

ist ein gleichgradig integrierbares Martingal.
Somit gilt:

$$\mathbb{E}(Z_t \exp(i(\vartheta, W_t - W_s))|\mathcal{G}_s) = Z_s \exp(-\frac{1}{2}|\vartheta|^2(t-s)) \qquad \text{für alle } 0 \leq s < t \leq T, \vartheta \in \mathbb{R}^d$$

Durch iteriertes Bedingen unter $j = 1, ..., n$ und $0 \leq t_1 < ... < t_n \leq T$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_T \exp(i(\sum_{j=1}^n (\vartheta_j, W_{t_j} - W_{t_{j-1}})) &= \mathbb{E}Z_0 \exp(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (t_j - t_{j-1})|\vartheta|^2) \\ &= 0 \qquad \text{für alle } \vartheta_1, ..., \vartheta_n \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Durch ein Approximationsargument erhält man

$$\mathbb{E}Z_T f(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1}) = 0$$

für alle $0 \leq t_1 < ... < t_n \leq T$ und alle $f : (\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow \mathbb{C}$ beschränkt und stetig.
Dies impliziert $Z_T = 0$, denn

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}Z_T f(W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, ..., W_{t_1}) = 0 \qquad \text{für alle } f \in C_b((\mathbb{R}^d)^n, \mathbb{C}) \\ \Rightarrow\ & \mathbb{E}Z_T \mathbb{1}_A = 0 \qquad \text{für alle } A \in \sigma(W_{t_1}, ..., W_{t_n}) \\ \Rightarrow\ & \mathbb{E}Z_T \mathbb{1}_A = 0 \qquad \text{für alle } A \in \mathcal{G} \\ \Rightarrow\ & \mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}(Z_\infty|\mathcal{G}_T) = \mathbb{E}(Z_T|\mathcal{G}_T) = 0 \end{aligned}$$

Da $T > 0$ beliebig, ist auch $Z_\infty := \lim_{T\to\infty} Z_T = 0$ $\square$

Bemerkung. *Der Integrand in der Integralprozessdarstellung ist eindeutig:*
Für $H, K \in L_{2,d}(\mu_W)$ mit

$$I(H) = I(K)$$

gilt:

$$0 = I(H) - I(K) = I(H - K)$$

und

$$\|H - K\|_{L_{2,d}(\mu_W)} = \|I(H - K)\|_{L_{2,0}(\mathcal{G}_\infty)} = \|0\|_{L_{2,0}(\mathcal{G}_\infty)} = 0$$

Also $H = K$

Martingaldarstellungssatz, Teil II (lokale Martingale)

1.2.16

Satz 3.8. *Sei $(M_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal bezüglich der von einem Wiener-Prozess W erzeugten Filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$. Dann hat M stetige Pfade und es gibt einen previsiblen d–dimensionalen Prozess $H = (H^{(1)}, ..., H^{(d)})$ mit*

$$\sum_{k=1}^{d} \int_0^t (H_s^{(k)})^2 ds < \infty \qquad \text{für alle } t \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

der

$$\begin{aligned} M_t &= M_0 + \int_0^t H_s dW_s \qquad \text{für alle } t \geq 0 \\ &:= M_0 + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t H_s^{(k)} dW_s^{(k)} \end{aligned}$$

erfüllt.

Bemerkung. *Für M wird keine Stetigkeit der Pfade gefordert. Dies zeigt, dass dieser Satz mehr als nur eine lokale Variante von Satz 3.7 ist.*

Beweis. *a*) Stetigkeit der Pfade von M:
O.E.d.A.: $M_0 = 0$.
Da M ein lokales Martingal ist, existieren Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\tau_1 \leq \tau_2 \leq ... \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \tau_n = +\infty$$

und

$$M^{\tau_n} \in \mathfrak{M} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Wir zeigen die Stetigkeit für alle $M^{\tau_n}, n \in \mathbb{N}$. Also kann o.E.d.A. die gleichgradige Integrierbarkeit von M mit Limes $M_\infty = \lim_{t\to\infty} M_t$ angenommen werden.
<u>Problem:</u> M_∞ ist aus $L_1(\mathcal{G}_\infty)$, aber für ein $H \in Ł_{2,d}(\mu_W)$ ist $H \cdot W$ in $L_2(\mathcal{G}_\infty)$.

Beachte, dass

$$M_t = \mathbb{E}(M_\infty | \mathcal{G}_t) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

gilt. Es existiert eine Folge $M_\infty^{(n)}$ von beschränkten $\mathcal{G}_\infty$–messbaren Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{E}|M_\infty - M_\infty^{(n)}| < 3^{-n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

denn

$$\mathbb{E}|M_\infty - M_\infty \mathbb{1}_{\{|M_\infty| \leq k\}}| = \mathbb{E}|M_\infty| \mathbb{1}_{\{|M_\infty| > k\}} \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

Zu jedem n kann ein k_n gefunden werden, dass obige Abschätzung erfüllt.
Als beschränkte Zufallsvariable ist $M_\infty^{(n)} \in L_2(\mathcal{G}_\infty)$. Also existiert ein $H_n \in L_{2,d}(\mu_W)$ mit

$$M_\infty^{(n)} = \mathbb{E} M_\infty^{(n)} + \int_0^\infty H_n(s) dW_s$$

Da $(H_n \cdot W)_t$ stetige Pfade hat, hat auch

$$M_t^{(n)} = \mathbb{E}(M_\infty^{(n)} | \mathcal{F}_t)$$

stetige Pfade.
Mit Borel-Cantelli zeigt man, dass die Pfade von M punktweise in ω und sogar gleichmässig in t durch die Pfade von $M^{(n)}$ approximiert werden können. Dies impliziert die Stetigkeit der Pfade von M.
Genauer: Die Doob'sche Ungleichung liefert

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \geq 0} |M_t - M_t^{(n)}| > 2^{-n}\right) \leq 2^n \mathbb{E}|M_\infty - M_\infty^{(n)}| < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Also sind die Wahrscheinlichkeiten aufsummierbar und Borel-Cantelli besagt, dass die Wahrscheinlichkeit des Limes Superior der Ereignisfolge Null beträgt. Der Limes Inferior der Komplimente hat also Wahrscheinlichkeit 1 und damit existiert $\mathbb{P}$–fast-sicher zu jedem ω ein $n_0(\omega)$ mit

$$\sup_{t \geq 0} |M_t(\omega) - M_t^{(n)}(\omega)| < 2^{-n} \qquad \text{für alle } n \geq n_0(\omega).$$

Also hat M stetige Pfade.
$b)$ Nachweis der Integraldarstellung:
Wegen $a)$ hat M stetige Pfade und kann daher durch

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$$

in $b\mathfrak{M}_c$ lokalisiert werden. M^{τ_n} hat wegen Satz 3.7 eine Integraldarstellung

$$M^{\tau_n} = H^{(n)} \cdot W$$

für einen previsiblen Prozess $H^{(n)} \in L_{2,d}(\mu_W)$.
Beachte: $M_0 = 0$.

Die Familie der previsiblen Prozesse $(H^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist in einem gewissen Sinne konsistent, d.h.

$$H^{(n)}\mathbb{1}_{(0,\tau_k]} = H^{(k)}\mathbb{1}_{(0,\tau_k]} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n,$$

denn mit der Verträglichkeit mit Stoppen gilt:

$$\begin{aligned} H^{(n)}\mathbb{1}_{(0,\tau_{n-1}]} \cdot W &= (H^{(n)} \cdot W)^{\tau_{n-1}} \\ &= (M^{\tau_n})^{\tau_{n-1}} \\ &= M^{\tau_{n-1}} \\ &= H^{(n-1)} \cdot W \\ &= H^{(n-1)}\mathbb{1}_{(0,\tau_{n-1}]} \cdot W \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit der Integranden impliziert

$$H^{(n)}\mathbb{1}_{(0,\tau_{n-1}]} = H^{(n-1)}\mathbb{1}_{(0,\tau_{n-1}]} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Per Induktion kann man dies fortsetzen und erhält

$$H^{(n)}\mathbb{1}_{(0,\tau_k]} = H^{(k)}\mathbb{1}_{(0,\tau_k]} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n.$$

Insbesondere ist $H^{(n)}\mathbb{1}_{(\tau_n,\infty)} = 0$.
Also gibt es es genau einen previsiblen Prozess H mit

$$H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} = H^{(n)}\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \quad n \in \mathbb{N}$$

Man kann H z.B. durch

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H^{(n)}\mathbb{1}_{(\tau_{n-1},\tau_n]}$$

angeben.
Es ist $H \in L^2_{\text{loc}}(W)$, denn

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\int_0^\infty |H_s|^2\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}ds &= \mathbb{E}\int_0^\infty |H^{(n)}|^2\mathbb{1}_{(0,\tau_n]}ds \\ &= \mathbb{E}\int_0^\infty |H_s^{(n)}|^2 ds < \infty \end{aligned}$$

was

$$\int_0^t |H_s|^2 ds < \infty \quad \text{für alle } t \geq 0 \ \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

impliziert.
Damit kann H gegen W integriert werden und es folgt

$$\begin{aligned} M^{\tau_n} &= H^{(n)}\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot W \\ &= H\mathbb{1}_{(0,\tau_n]} \cdot W \\ &= (H \cdot W)^{\tau_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Also stimmt M, bis auf Nichtunterscheidbarkeit, mit $H \cdot M$ überein. □

Ziel: - Wechsel zu einem äquivalentem Wahrscheinlichkeitsmaß
- Struktur des Dichtequotientenproztesses untersuchen
$\Rightarrow$ Satz von Girsanov
Sei $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum, der die usual conditions erfüllt. Sei Q ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{F}_\infty$ und

$$L_t := \frac{dQ}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} \qquad t \geq 0$$

der Dichtequotientenprozess.
Es gilt:

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_\infty} = L_\infty \text{ und } \mathbb{E}(L_\infty|\mathcal{F}_t) = L_t$$

für alle $t \geq 0$.
Der Prozess $(L_t)_{t\geq 0}$ ist also ein gleichgradig integrierbares Martingal. Da die Filtration die usual conditions erfüllt, gibt es eine Version von L_t mit cadlag-Pfaden. Also

$$L_\infty = \lim_{t\to\infty} L_t.$$

Man kann den Dichtequotientenprozess nutzen, um aus lokalen $Q-$Martingalen lokale $\mathbb{P}-$Martingale zu machen und umgekehrt.

Allgemeine Bayes-Formel

Lemma 3.9. (i) *Sei* $Y \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$ *mit* $T > 0$. *Dann gilt*

$$\mathbb{E}_Q(Y|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YL_T|\mathcal{F}_t) \qquad \textit{für alle } t \leq T$$

(ii) *N ist ein lokales $Q-$Martingal genau dann, wenn NL ein lokales $\mathbb{P}-$Martingal ist.*

Beweis. (i) Wegen $\mathbb{E}_Q Y = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} Y L_T$ gilt

$$YL_T \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$$

Für $A \in \mathcal{F}_t$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\int_A \mathbb{E}_Q(Y|\mathcal{F}_t)dQ = \int_A Y dQ = \int_A YL_T d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YL_T|\mathcal{F}_t)d\mathbb{P} \\ &= \int_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YL_T|\mathcal{F}_t)\frac{L_t}{L_t}d\mathbb{P} \\ &= \int_A \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(YL_T|\mathcal{F}_t)dQ\end{aligned}$$

(ii) Zeige die Behauptung für Martingale. Durch Lokalisierung erfolgt dann die Ausweitung auf lokale Martingale.
Es gilt für $t \leq T$ wegen (i)

$$\mathbb{E}_Q(N_T|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(N_T L_T|\mathcal{F}_t)$$

Daraus folgt

$$L_t\mathbb{E}_Q(N_T|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(N_T L_T|\mathcal{F}_t)$$

und damit

$$N \text{ ist ein } Q\text{–Martingal} \Leftrightarrow NL \text{ ist ein } \mathbb{P}\text{–Martingal.}$$

□

Für stetige Dichtequotientenprozesse ergibt sich eine Darstellung von L als Doléans-Exponential.

Satz von Girsanov, Teil I

Satz 3.10. *Seien $\mathbb{P}, Q$ äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ mit*

$$\left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} =: L_t \quad t \geq 0$$

$(L_t)_{t\geq 0}$ habe stetige Pfade $\mathbb{P}$–fast sicher.

(i) Definiert man das lokale Martingal X durch

$$X_t = \int\limits_0^t \frac{1}{L_s}dL_s$$

für alle $t \geq 0$, so gilt

$$L_t = L_0 \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t) \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

(ii) Ist M ein stetiges lokales Martingal bezüglich $\mathbb{P}$, so wird durch

$$N_t = M_t - \langle M, X\rangle_t \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

ein lokales Q–Martingal definiert, dessen quadratische Variation bezüglich Q mit der von M bezüglich $\mathbb{P}$ übereinstimmt.

Beachte:

$$N_t = M_t - \langle M, X\rangle_t = M_t - \int\limits_0^t \frac{1}{L_s}d\langle M, L\rangle_s$$

Beweis. (i) Da Q äquivalent zu $\mathbb{P}$ ist, gilt $L_t > 0$ $\mathbb{P}$–fast sicher für alle $t \geq 0$. $\left(\frac{1}{L_t}\right)_{t\geq 0}$ hat stetige Pfade und kann deshalb gegen L_t integriert werden. Setze also

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{L_s} dL_s \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

und

$$Y_t = \ln L_t$$

Dann impliziert die Itō-Formel

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{L_t} dL_t - \frac{1}{2}\frac{1}{L_t^2} d\langle L_t\rangle \\ &= dX_t - \frac{1}{2} d\langle X\rangle_t \end{aligned}$$

Also

$$\ln \frac{L_t}{L_0} = Y_t - Y_0 = X_t - \underbrace{X_0}_{=0} - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t$$

Und damit

$$L_t = L_0 \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t)$$

Beachte: L erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dL_t = L_t dX_t$$

mit Anfangswert L_0.
(ii) zu zeigen: $(N_t L_t)_{t\geq 0}$ ist ein lokales $\mathbb{P}$–Martingal.
Es gilt mit partieller Integration:

$$dM_t L_t = M_t dL_t + L_t dM_t + d\langle L, M\rangle_t$$

und

$$d\langle M, X\rangle_t L_t = \langle M, X\rangle_t dL_t + L_t d\langle M, X\rangle_t = \langle M, X\rangle_t dL_t + \frac{L_t}{L_t} d\langle M, L\rangle_t$$

Bildet man das stochastische Differential von $N_t L_t$ ergibt das

$$dN_t L_t = dM_t L_t - d\langle M, X\rangle_t L_t = N_t dL_t + L_t dM_t$$

Also ist NL ein lokales $\mathbb{P}$–Martingal und damit N ein lokales Q–Martingal.
$M = N - \langle M, X\rangle$ ist ein Semimartingal bezüglich Q mit N als lokalem Martingalanteil. Also ist

$$\underbrace{\langle M\rangle^{\mathbb{P}}}_{\text{bzgl. } Q} = \underbrace{\langle N\rangle^{Q}}_{\text{bzgl. } \mathbb{P}}$$

Das heißt, beim Übergang von $\mathbb{P}$ nach Q wird ein Term von beschränkter Variation addiert, was die quadratische Variation nicht ändert. □

<u>Frage:</u> Wann ist ein positives Martingal ein Dichtequotientenprozess eines zu $\mathbb{P}$ äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$? $\boxed{3.2.16}$

Satz von Girsanov, Teil II

Satz 3.11. *Es gibt ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ mit*

$$\left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

genau dann, wenn $(L_t)_{t\geq 0}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist mit

$$L_\infty = \lim_{t\to\infty} L_t > 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und

$$\mathbb{E}L_\infty = 1$$

Beweis. „⇒" Da $\mathbb{P}$ äquivalent zu Q auf $\mathcal{F}_\infty$ ist, existiert eine $\mathcal{F}_\infty$–messbare Zufallsvariable $D > 0$ und

$$\left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_\infty} = D$$

Weiter ist

$$L_t = \left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}(D|\mathcal{F}_t) \quad \text{für alle } t \geq 0$$

Also ist $(L_t)_{t\geq 0}$ gleichgradig integrierbar mit

$$L_\infty = \lim_{t\to\infty} L_t = D > 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

und

$$\mathbb{E}L_\infty = \mathbb{E}D = 1$$

„⇐" Definiere das Maß Q durch

$$\left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_\infty} = L_\infty$$

Wegen $L_\infty > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher ist Q äquivalent zu $\mathbb{P}$.
Für jedes $t > 0$ gilt

$$L_t = \mathbb{E}(L_\infty|\mathcal{F}_t) = \left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}$$

Also kann mittels $(L_t)_{t\geq 0}$ der Dichtequotientenprozess von Q bezüglich $\mathbb{P}$ definiert werden. □

Im Spezialfall einer Wiener-Filtration kann die Struktur des Dichtequotientenprozesses genauer angegeben werden.

Satz von Girsanov, Teil III

Satz 3.12. *Sei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein d–dimensionaler Wiener-Prozess und $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ die von W erzeugte Wiener-Filtration. Dann gilt:*
(i) Ist Q ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{G}_\infty)$, so existiert ein

previsibler Prozess $(H_t)_{t\geq 0}$ *mit*

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |H_s|^2 ds < \infty \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1$$

und

$$L_t = \left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_t} = \exp\left(\int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |H_s|^2 ds\right)$$

für alle $t \geq 0$. *Weiter ist bezüglich* Q

$$\overline{W_t} = W_t - \int_0^t H_s ds \quad t \geq 0$$

ein $d-$*dimensionaler Wiener-Prozess.*
(ii) *Ist für einen previsiblen* $\mathbb{R}^d-$*wertigen Prozess* $(H_t)_{t\geq 0}$ *der Prozess*

$$L_t = \exp\left(\int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t |H_s|^2 d\right) \quad t \geq 0$$

ein gleichgradig integrierbares $\mathbb{P}-$*Martingal mit*

$$L_\infty = \lim_{t\to\infty} L_t > 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher}$$

so gibt es ein zu $\mathbb{P}$ *äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß* Q *auf* $(\Omega, \mathcal{G}_\infty)$, *das*

$$\left.\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{G}_t} = L_t \quad t \geq 0$$

erfüllt.
Bezüglich Q *ist*

$$\overline{W} = W_t - \int_0^t H_s ds$$

ein $d-$*dimensionaler Wiener-Prozess.*

Beweis. (i) Die Aussage folgt aus dem Satz von Girsanov, Teil I, dem Martingaldarstellungssatz, Teil II und dem Satz von Lévy.
$(L_t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal bezüglich einer Wiener-Filtration und hat deshalb stetige Pfade.
Es ist $L_t > 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $t \geq 0$.
Für

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{L_s} dL_s$$

gilt:

$$L_t = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{G}_t} = L_0 \exp(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t) \quad \text{für alle } t \geq 0$$

Da $\mathcal{G}_0$ trivial ist bezüglich $\mathbb{P}$, ist $L_0 \equiv 1$.
Das lokale Martingal $(X_t)_{t\geq 0}$ hat nach dem Martingaldarstellungssatz eine Darstellung der Form

$$X_t = \int_0^t H_s dW_s$$

mit

$$\mathbb{P}\left(\int_0^t |H_s|^2 ds < \infty \text{ für alle } t \geq 0\right) = 1$$

(beachte: $X_0 = 0$). Es ist

$$X_t = \sum_{i=k}^{d} \int_0^t H_s^{(k)} dW_s^{(k)}$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle X\rangle_t &= \sum_{k=1}^{d} \langle \int_0^{\cdot} H_s^{(k)} dW_s^{(k)}\rangle_t + \sum_{\substack{j,l=1\\ j\neq l}}^{d} \underbrace{\langle \int_0^{\cdot} H_s^{(j)} dW_s^{(k)}, \int_0^{\cdot} H_s^{(l)} dW_s^{(l)}\rangle_t}_{=0} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_0^t (H_s^{(i)})^2 ds \\
&= \int_0^t |H_s|^2 ds
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $\overline{W_t} = W_t - \int_0^t H_s dW_s$ ist für $t \geq 0$ ein d–dimensionaler Wiener-Prozess bezüglich Q.
Mit dem Satz von Girsanov Teil I folgt für die i–te Komponente, dass

$$\begin{aligned}
W_t^{(i)} - \langle W^{(i)}, X\rangle_t &= W_t^{(i)} - \langle W^{(i)}, \sum_{j=1}^{d} \int_0^{\cdot} H_s^{(i)} dW_s^{(i)}\rangle_t \\
&= W_t^{(i)} - \sum_{j=1}^{d} \int_0^t H_s^{(i)} d\underbrace{\langle W^{(i)}, W_s^{(j)}\rangle_s}_{=0 \text{ für } i\neq j} \\
&= W_t^{(i)} - \int_0^t H_s^{(i)} ds
\end{aligned}$$

ein Martingal bezüglich Q für alle $1 \leq i \leq d$ ist. Weiter gilt

$$\langle \overline{W}^{(i)} \rangle = \langle W^{(i)} \rangle_t = t$$

und

$$\langle \overline{W}^{(i)}, \overline{W}^{(j)} \rangle_t = \langle W^{(i)}, W^{(j)} \rangle_t = 0 \qquad \text{für alle } i \neq j$$

Damit sind alle Voraussetzungen für den Satz von Lévy erfüllt, der die Wiener-Prozess Eigenschaft von $\overline{W}$ bezüglich Q impliziert.
(ii) folgt aus dem Satz von Girsanov, Teil II. Beachte:

$$\mathbb{E}L_t = 1 \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

und

$$\mathbb{E}L_\infty \overset{\text{ggi}}{=} \mathbb{E} \lim_{t\to\infty} L_t = 1 > 0$$

$\square$

3.13 Anwendung 1: Maßwechsel

Sei $(W_t)_{t\geq0}$ ein Wiener-Prozess bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$. Der Prozess

$$L_t = \exp(\vartheta W_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t) \qquad \text{mit } \vartheta \neq 0$$

ist ein positives Martingal mit $\mathbb{E}L_t = 1$, aber $L_t \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher, weshalb $(L_t)_{t\geq0}$ nicht gleichgradig integrierbar ist. Deshalb gibt es kein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ mit

$$\frac{dQ}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = L_t \qquad \text{für alle } t \geq 0$$

Für einen endlichen Zeitraum $[0,T]$ ist dies aber möglich, da durch Stoppen in T L zu einem gleichgradig integrierbaren Martingal gemacht werden kann.
Genauer: $L_t^T := L_{t\wedge T}$ ist für alle $t \geq 0$ gleichgradig integrierbar mit

$$L_\infty^T = \lim_{t\to\infty} L_{t\wedge T} = L_T > 0$$

Also existiert ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q_T auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ mit

$$\frac{dQ_T}{d\mathbb{P}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = L_t^T = \begin{cases} L_t & t < T \\ L_T & t \geq T \end{cases}$$

Ist $\vartheta : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar mit

$$\int_0^\infty \vartheta(s)^2 < \infty$$

so sei

$$L_t = \exp(\int_0^t \vartheta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta_s^2 ds) \quad t \geq 0$$

Es ist $\int_0^\infty \vartheta_s dW_s$ eine $\mathcal{N}(0, \int_0^\infty \vartheta_s^2 ds)-$ verteilte Zufallsvariable und

$$L_\infty = \lim_{t\to\infty} L_t = \exp(\int_0^\infty \vartheta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty \vartheta_s^2 ds) > 0$$

Weiter ist für $p > 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}L_t^p &= \mathbb{E}\Big(\exp(\int_0^t \vartheta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \vartheta_s^2 ds)\Big)^p \\
&= \mathbb{E}\exp(p\int_0^t \vartheta_s dW_s - \frac{1}{2}p\int_0^t \vartheta_s^2 ds) \\
&= e^{-\frac{1}{2}p\int_0^t \vartheta_s^2 ds}\mathbb{E}\exp(p\int_0^t \vartheta_s dW_s) \\
\text{Ist } Y \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}\exp(\lambda Y) = \exp(\tfrac{1}{2}\lambda^2\sigma^2) \quad &= e^{-\frac{1}{2}p\int_0^t \vartheta_s^2 ds}\exp(\frac{1}{2}p^2\int_0^t \vartheta_s^2 ds) \\
&= \exp(\underbrace{\frac{1}{2}p(p-1)}_{>0}\int_0^t \vartheta_s^2 ds) \\
&\leq \exp(\frac{1}{2}p(p-1)\int_0^\infty \vartheta_s^2 ds)
\end{aligned}$$

Also ist $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}L_t^p < \infty$, woraus die gleichgradige Integrierbarkeit von $(L_t)_{t\geq 0}$ folgt. Also existiert ein zu $\mathbb{P}$ äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ mit

$$\frac{Q}{\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = L_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

3.14 Anwendung 2: Zum Satz von Lévy

Sei W ein 1–dimensionaler Wiener-Prozess. Sei $\sigma \in L^2_{\text{loc}}(W)$ und

$$M_t := \int_0^t \sigma_s dW_s \quad t \geq 0$$

sowie

$$N_t := \int_0^t |\sigma_s| dW_s \quad t \geq 0$$

Die Prozesse M, N haben die gleiche Verteilung, sind aber unterschiedliche Prozesse (setze z.B. $\sigma = -1$).
Bemerke

$$sgn(\sigma_t)\sigma_t = |\sigma_t|$$

Also ist

$$N_t = \int_0^t sgn(\sigma_s)\sigma_s dW_s$$

Definiere

$$A := \{(t,\omega) : \sigma_t(\omega) = 0\}$$

Dann ist A eine previsible Menge und es gilt

$$\begin{aligned} N_t &= \underbrace{\int_0^t \mathbb{1}_A(s)|\sigma_s| dW_s}_{=0} + \int_0^t \mathbb{1}_{A^c}(s) sgn(\sigma_s)\sigma_s dW_s \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{A^c}(s) sgn(\sigma_s)\sigma_s dW_s \end{aligned}$$

Setze

$$B_t := \int_0^t \mathbb{1}_A(s) dW_s + \int_0^t \mathbb{1}_{A^c}(s) sgn(\sigma_s) dW_s$$

Dann ist $(B_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal mit

$$\begin{aligned} \langle B\rangle_t &= \langle \int_0^{\cdot} \mathbb{1}_A(s) + \mathbb{1}_{A^c}(s) sgn(\sigma_s) dW_s\rangle_t \\ &= \int_0^t (\mathbb{1}_A(s) + \mathbb{1}_{A^c}(s) \underbrace{sgn(\sigma_s)}_{sgn(\sigma_s)^2=1})^2 d\langle W\rangle_s \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_A(s) + \mathbb{1}_{A^c}(s) ds \\ &= \int_0^t 1 ds \\ &= t \end{aligned}$$

Der Satz von Lévy liefert, dass B ein Wiener-Prozess ist. Damit gilt

$$N_t = \int_0^t \mathbb{1}_A(s) \underbrace{|\sigma_s|}_{\substack{=\sigma_s \\ \text{auf } A}} dW_s + \int_0^t \mathbb{1}_{A^c}(s) sgn(\sigma_s)\sigma_s dW_s$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \sigma_s \underbrace{(\mathbb{1}_A(s) + \mathbb{1}_{A^c}(s) sgn(\sigma_s)) dW_s}_{=dB_s} \\
&= \int_0^t \sigma_s dB_s
\end{aligned}
$$

Also integrieren M und N den gleichen Prozess σ über unterschiedliche Wiener-Prozesse, haben somit die gleiche Verteilung. Deshalb kann man beispielsweise im Back-Scholes Modell annehmen, dass man nur positive Volatilitäten hat. Nimmt man nämlich eine negative Volatilität, so wählt man sich einen anderen, passenden Wiener-Prozess und bekommt wieder eine positive Volatilität heraus, ohne die Verteilung geändert zu haben.

——— Gehalten in der Vorlesung 'Höhere Finanzmathematik', SS 2016 ———

III Stochastische Differentialgleichungen

15.4.16

1 Starke Lösbarkeit

Sei W ein $r-$dimensionaler Wiener-Prozess und seien

$b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (entspricht der Geschwindigkeit eines Teilchens zum Zeitpunkt t)

$\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ (entspricht einer Störung/einem Rauschen)

messbare Funktionen.
Zunächst soll definiert werden, was unter einer starken Lösbarkeit einer stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

mit Anfangsbedingung ξ zu verstehen ist.
Gegeben ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem $r-$dimensionalen Wiener-Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ und kanonischer Filtration

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t)$$

Weiter ist die Startvariable ξ eine von $\mathcal{F}^W$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}^d$.
Definiere

$$\mathcal{F}_t^{(0)} := \sigma(\xi, W_s : s \leq t)$$

sowie das System der vernachlässigbaren Mengen $\mathbb{N}$ durch

$$\mathbb{N} := \{N \subseteq \Omega : \exists A \in \mathcal{F}_\infty^{(0)} \text{ mit } N \subset A \text{ und } \mathbb{P}(A) = 0\}$$

Gehe über zur vervollständigten Filtration durch

$$\mathcal{F}_t^{(1)} := \sigma(\mathcal{F}_t^{(0)} \cup \mathbb{N}) \quad \text{für alle } t \geq 0$$

und

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_{t+}^{(1)} = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^{(1)}.$$

Definition 1.1. *Ein stochastischer Prozess X ist starke Lösung der stochastischen Differentialgleichung*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

mit Startvariable ξ, wenn gilt:

(i) *X ist adaptiert bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$,*

(ii) $\mathbb{P}(X_0 = \xi) = 1$,

(iii) $\int\limits_0^t |b_i(s, X_s)|ds + \int\limits_0^t \sigma_{ij}^2(s, X_s)ds < \infty$ *-fast sicher für alle $t \geq 0$,*

(iv) *X erfüllt die Integralgleichung*

$$X_t = \xi + \int\limits_0^t b(s, X_s)ds + \int\limits_0^t \sigma(s, X_s)dW_s$$

welche komponentenweise definiert ist durch

$$X_t^{(i)} = \xi^{(i)} + \int\limits_0^t b_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^r \int\limits_0^t \sigma_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)} \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq d, t \geq 0$$

Bemerkung. *Die Lösung einer stochastischen Differentialgleichung kann als Output eines dynamischen Systems interpretiert werden. X bestimmt die Entwicklung des Zustandes eines Teilchens in $\mathbb{R}^d$ unter Einfluss des Vektorfeldes b und des Rauschens W. Die Stärke des Einflusses des Rauschens wird bestimmt durch σ.*

Blackbox	*$b(t, X)$ entspricht einem Geschwindigkeitsvektor/Driftvektor zum Zeitpunkt t im Zustand x.* *$\sigma(t, x)$ entspricht einer Streuungsmatrix/Volatilitätsmatrix zum Zeitpunkt t um Zustand x.*

Die Änderung der Lösung kann näherungsweise für kurze Zeiten beschrieben werden durch

$$X_{t+h} - X_t \approx b(t, X_t)h + \sigma(t, X_t) \begin{pmatrix} W_{t+h}^{(1)} - W_t^{(1)} \\ \vdots \\ W_{t+h}^{(r)} - W_t^{(r)} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(b(t, X_t)h, \sigma(t, X_t)\sigma^T(t, X_t)h^2)$$

Der Output eines solchen dynamischen Systems sollte eindeutig vom Input abhängen. Dies führt zur Definition der starken Eindeutigkeit.

Definition 1.2. *Das Paar (b, σ) erfüllt die EIgenschaft der starken Eindeutigkeit, falls für jeden Warhrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $r-$dimensionalen Wiener-Prozess W, jede Startvariable ξ und für je zwei starke Lösungen X, Y von*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

mit Anfangswert ξ gilt

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \quad \text{für alle } t \geq 0) = 1$$

Beispiel 1.3. *Sei $b : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, messbar und nicht wachsend in x, d.h. für $x \leq y$ gilt*

$$b(t, x) \geq b(t, y) \quad \text{für alle } t \geq 0$$

Seien X, Y Lösungen von

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t$$

mit Anfangswert ξ. Dann sind X und Y nicht unterscheidbar, d.h.

$$\mathbb{P}(X = Y \quad \text{für alle } t \geq 0) = 1$$

Beweis. Setze $Z_t := X_t - Y_t$ für alle $t \geq 0$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} Z_t &= \xi + \int_0^t b(x, X_s)ds + W_t - \xi - \int_0^t b(s, Y_s)ds - W_t \\ &= \int_0^t b(s, X_s) - b(s, Y_s)ds \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq Z_t^2 &\overset{\text{Itō}}{=} 2 \int_0^t Z_s dZ_s + \underbrace{\langle Z \rangle_t}_{=0} \\ &= 2 \int_0^t \underbrace{(X_s - Y_s)(b(s, X_s) - b(s, Y_s))}_{\leq 0} ds \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow Z_t^2 = 0 \Rightarrow Z_t = 0 \quad$ für alle $t \geq 0$. □

Zunächst sollen Bedingungen an b und σ gestellt werden, sodass die starke Eindeutigkeit folgt.
Vorbereitend benötigt man das Lemma von Gronwall:

Lemma 1.4 (Lemma von Gronwall). *Seien $T > 0$ und $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft*

$$0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds \qquad \textit{für alle } t \leq T$$

mit $\beta \geq 0$ und $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar.
Dann gilt:

$$g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s)e^{\beta(t-s)}ds \qquad \textit{für alle } t \leq T$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(e^{-\beta t}\int_0^t g(s)ds\right) &= e^{-\beta t}g(t) - \beta e^{-\beta t}\int_0^t g(s)ds \\ &= e^{-\beta t}(g(t) - \beta \int_0^t g(s)ds) \\ &\leq e^{-\beta t}\alpha(t)\end{aligned}$$

Also gilt

$$e^{-\beta t}\int_0^t g(s)ds \leq \int_0^t \alpha(s)e^{-\beta s}ds$$

Wegen der Voraussetzung folgt also

$$\begin{aligned}g(t) &\leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s)ds \\ &\leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s)e^{\beta(t-s)}ds\end{aligned}$$

□

Hieraus kann auf die starke Eindeutigkeit geschlossen werden, wenn eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt ist.
Wir setzen 15.4.16

$$x \in \mathbb{R}^d : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^d |x_i|^2$$

$$\sigma \in \mathbb{R}^{d\times r} : \|\sigma\|^2 = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^2$$

Satz 1.5. *Die Koeffizienten b, σ erfüllen die folgenden Bedingung:*
Für $n \geq 1$ gibt es eine Konstante K_n mit

$$\|b(t,x) - b(t,y)\|^2 + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2 \leq K_n \|x - y\|^2 \qquad \text{für alle } t \geq 0, \|x\|, \|y\| \leq n$$

Dann erfüllt die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{7}$$

die Eigenschaft der starken Eindeutigkeit.

Bemerkung. *Da die Eigenschaft der starken Eindeutigkeit nur von dem Tupel (b, σ) abhängt, sagt man auch, dass das Tupel (b, σ) die Eigenschaft der starken Eindeutigkeit erfüllt.*

Beweis. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Wiener-Prozess W und unabhängiger Startvariable ξ. Seien X, Y Lösungen von Gleichung 7 zur Startvariable ξ.
Lokalisiere durch

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \|X_t\| \geq n \text{ oder } \|Y_t\| \geq n\}$$

Dann gilt:

$$X_t^{\tau_n} - Y_t^{\tau_n} = \int_0^{t\wedge\tau_n} b(u, X_u) - b(u, Y_u) du + \int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma(u, X_u) - \sigma(u, Y_u) dW_u$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|X_t^{\tau_n} - Y_t^{\tau_n}\|^2 &= \mathbb{E}\|\int_0^{t\wedge\tau_n} b(u, X_u) - b(u, Y_u) du + \int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma(u, X_u) - \sigma(u, Y_u) dW_u\|^2 \\
&\leq 2\mathbb{E}\|\int_0^{t\wedge\tau_n} b(u, X_u) - b(u, Y_u) du\|^2 + 2\mathbb{E}\|\int_0^{t\wedge\tau_n} \sigma(u, X_u) - \sigma(u, Y_u) dW_u\|^2 \\
&\overset{\text{Isometrie}}{\leq} 2\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} \|b(u, X_u) - b(u, Y_u)\| du\right)^2 + 2\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma(u, X_u) - \sigma(u, Y_u)\|^2 du \\
&\underset{\text{Ungl.}}{\overset{\text{Hölder}}{\leq}} 2t\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n} \|b(u, X_u) - b(u, Y_u)\|^2 du + 2\mathbb{E}\int_0^{t\wedge\tau_n} \|\sigma(u, X_u) - \sigma(u, Y_u)\|^2 du \\
&\leq 2(1+t)K_n \int_0^t \mathbb{E}\|X_u^{\tau_n} - Y_u^{\tau_n}\|^2 du
\end{aligned}$$

Gronwalls Lemma, angewendet auf

$$g(u) = \mathbb{E}\|X_u^{\tau_n} - Y_u^{\tau_n}\|$$

liefert

$$g \equiv 0 \qquad \text{für alle } u \leq t$$

$\Rightarrow X_u^{\tau_n} = Y_u^{\tau_n}$ für alle $u \leq t$
$\Rightarrow X^{\tau_n}$ ist nicht unterscheidbar von Y^{τ_n} für alle $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow X$ ist nicht unterscheidbar von Y. □

Für die Existenz einer Lösung muss eine globale Lipschitz- und Wachstumsbedingung gefordert werden. Dann kann durch Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes eine starke Lösung eindeutig konstruiert werden.
Für jedes $T > 0$ sei

$$L_2^T := \{X : X \text{ ist adaptiert, stetig, } \mathbb{R}^d-\text{wertig und } \mathbb{E}\sup_{t\leq T}\|X_t\|^2 < \infty\}$$

Durch $\|X\|_{2,T} := \left(\mathbb{E}\sup\limits_{t\leq T}\|X_t\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ wird L_2^T zu einem Hilbertraum.
Wichtige Ungleichungen sind

Lemma 1.6. *Für jedes $X \in L_2^T$ gilt*

(i) $\mathbb{E}\sup\limits_{t\leq T}\|\int\limits_0^t X_u du\|^2 \leq T\int\limits_0^t \|X\|_{2,t}^2 dt$

(ii) $\mathbb{E}\sup\limits_{t\leq T}\|\int\limits_0^t X_u dW_u\|^2 \leq 4\int\limits_0^t \|X\|_{2,t}^2 dt$

Beweis. (ii) folgt aus der Doob'schen L_2-Ungleichung für Martingale:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{t\leq T}\|\int_0^t X_u dW_u\|^2 &\leq 4\sup_{t\leq T}\mathbb{E}\|\int_0^t X_u dW_u\|^2 \\
&\overset{\text{Isō-}}{\underset{\text{Isometrie}}{=}} 4\sup_{t\leq T}\mathbb{E}\int_0^t \|X_u\|^2 du \\
&= 4\mathbb{E}\int_0^T \|X_u\|^2 du \\
&= 4\int_0^T \mathbb{E}\|X_u\|^2 du \\
&\leq 4\int_0^T \|X\|_{2,u}^2 du
\end{aligned}$$

□

Satz 1.7. *Gegeen sei die stochastische Differentialgleichung*

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{8}$$

(b, σ) erfüllen eine globale Lipschitz- und Wachstumsbedingung der Form:
Zu jedem $T > 0$ gibt es eine Konstante K mit

(i) $\|b(t,x) - b(t,y)\|^2 + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\|^2 \leq K\|x-y\|^2$

(ii) $\|b(t,x)\|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K^2(1 + \|x\|^2)$

für alle $t \leq T$ und $x, y \in \mathbb{R}^d$.
Dann gibt es zu jedem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $r-$dimensionalen Wiener-Prozess W und unabhängiger Startvariable ξ, die

$$\mathbb{E}\|\xi\|^2 < \infty$$

erfüllt, einen $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptierten Prozess X mit stetigen Pfaden, der die stochastische Differentialgleichung (8) mit Anfangsbedingung $X_0 = \xi$ löst. Hierbei ist $(F_t)_{t\geq 0}$ die von W und ξ erzeugte Filtration, die die usual conditions erfüllt.
Weiter gibt es zu jedem T eine Konstante C mit

$$\|X\|_{2,T}^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2)e^{Ct}$$

Beweis. Fixiere $T > 0$. Die stochastische Differentialgleichung wird zunächst bis T eindeutig gelöst durch ein Fixpunktargument:
Definiere einen Operator

$$\begin{aligned} A: \quad & L_2^T \longrightarrow L_2^T \\ & X \mapsto \xi + \int_0^{\cdot} b(u, X_u)du + \int_0^{\cdot} \sigma(u, X_u)dW_u \end{aligned}$$

Der Operator A ist wohldefiniert, da es eine Konstante C_1 gibt, mit

$$\|A(X)\|_{2,t}^2 \leq C_1(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2 + \int_0^t \|X\|_{2,u}du) \quad \text{für alle } t \leq T, X \in L_2^T \tag{9}$$

Entscheidend ist die Ungleichung

$$\|A^n(X) - A^n(Y)\|_{2,t}^2 \leq \frac{(C_2t)^n}{n!}\|X - Y\|_{2,t}^2 \quad \text{für alle } t \leq T, X, Y \in L_2^T \tag{10}$$

mit $C_2 = 2K(T + 4)$.
Hieraus folgt

(i) A ist ein stetiger Operator (da A Lipschitz stetig ist mit Konstante $\frac{(C_2t)^n}{n!}$)

(ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N} : A^{n_0}$ ist eine Kontraktion auf L_2^T (denn ab n_0 wird $\frac{(C_2 t)^n}{n!} < 1$).

Wegen (ii) kann der Banach'sche Fixpunktsatz auf A^{n_0} angewendet werden.
Also konvergiert zu jedem Startprozess $Z \in L_2^T$ die Folge $(A^{kn_0}(Z))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt X von A^{n_0}.
Wegen der Stetigkeit von A ist X auch ein Fixpunkt von A und damit eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung bis T, denn

$$\begin{aligned}
A(X) &= A(\lim_{k\to\infty} A^{kn_0}(X)) \\
&= \lim_{k\to\infty} A(A^{kn_0}(X)) \\
&= \lim_{k\to\infty} A^{kn_0}(A(X)) \\
&= X
\end{aligned}$$

Beweis von Gleichung 10 durch Induktion:
IA: $n = 0 \Rightarrow$ klar
IS: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
&\|A^{n+1}(X) - A^{n+1}(Y)\|_{2,t}^2 \\
&= \mathbb{E}\sup_{s\le t}\| \int_0^s b(u, A^n(X)_u) - b(u, A^n(Y)_u)du + \int_0^s \sigma(u, A^n(X)_u - \sigma(u, A^n(Y)_u)dW_u\|^2 \\
&\le 2\mathbb{E}\sup_{s\le t}\| \int_0^s b(u, A^n(X)_u) - b(u, A^n(Y)_u)du\|^2 + \| \int_0^s \sigma(u, A^n(X)_u) - \sigma(u, A^n(Y)_u)dW_u\|^2 \\
&\underset{1.6}{\overset{\text{Lemma}}{\le}} 2t \int_0^t \|b(\cdot, A^n(X).) - b(\cdot, A^n(Y).)\|_{2,u}^2 du + 8 \int_0^t \|\sigma(\cdot, A^n(X).) - \sigma(\cdot, A^n(Y).)\|_{2,u}^2 du \\
&\underset{\text{Bedingung}}{\overset{\text{Lipschitz-}}{\le}} 2K(T+4) \int_0^t \|A^n(X) - A^n(Y)\|_{2,u}^2 du \\
&\overset{IV}{\le} 2K(T+4)\frac{C_2^n}{n!} \int_0^t u^n \|X - Y\|_{2,u}^2 du \\
&\le \frac{C_2^{n+1}}{n!} \int_0^t u^n du \|X - Y\|_{2,t}^2 \\
&= \frac{C_2^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} \|X - Y\|_{2,t}^2
\end{aligned}$$

$\square$

Index