

Masterarbeit

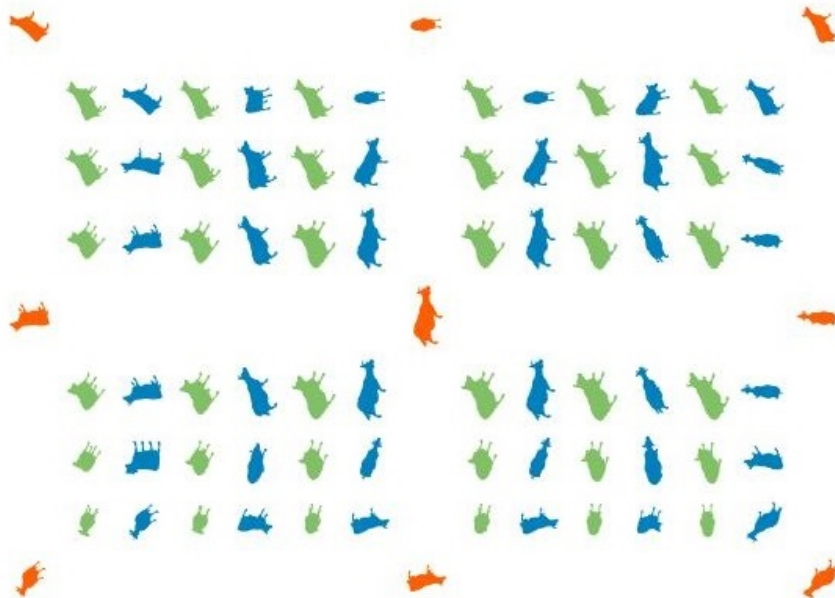
Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Bézier-Flächen

vorgelegt von: Anna Helene Scholzen
Matrikelnummer: 405 343

Gutachter: Prof. Dr. Benedikt Wirth
Zweitgutachter: Prof. Dr. Christoph Böhm

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik

14. August 2018



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Bézier-Kurven und -Flächen	4
3	Bézier-Flächen auf Mannigfaltigkeiten	10
3.1	Einführung Differentialgeometrie	10
3.2	Verallgemeinerte Bézier-Flächen	17
3.3	Wohldefiniertheit und Glattheit	24
3.4	C_0 -Patching	27
3.5	C_1 -Patching	31
3.6	Vergleich Typ I und Typ II	42
4	Generierung der Kontrollpunkte	44
4.1	Generierung der Kontrollpunkte im \mathbb{R}^n	45
4.2	Nebenbedingung reduzieren	50
4.3	Verallgemeinerung auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten	52
5	Beispiele	54
5.1	Sphäre	54
5.2	Spezielle orthogonale Gruppe $SO(d)$	57
6	Fazit	59
7	Literaturverzeichnis	61
8	Plagiatserklärung der Studierenden	62

1 Einführung

In den letzten Jahren ist es immer wichtiger geworden, Daten von nicht euklidischen Räumen, im speziellen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, zu verarbeiten. Zum Beispiel die Nutzung des Riemannschen Formenraums für Computer Darstellungen [5], die Interpretation von Farben in Bildern als Daten auf dem Farbkreis S^1 [6], die Interpretation von Matrizen festen Rangs als Submannigfaltigkeit aller Matrizen [7] und vieles mehr.

In dieser Masterarbeit werden zwei Methoden für Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten dargestellt. Genauer gesagt soll für Datenpunkte p_{i_1, \dots, i_d} auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} assoziiert mit den Knotenpunkten $(i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{Z}^d$ eines kartesischen Gitters in \mathbb{R}^d , eine glatte (d.h. C^1 -) Funktion $\mathcal{B} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{M}$ gefunden werden, die die Flächenkrümmung und den Abstand zu den Datenpunkten $|\mathcal{B}(i_1, \dots, i_d) - p_{i_1, \dots, i_d}|$ approximativ minimiert.

In dieser Masterarbeit werden zwei Methoden für Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mittels stückweise kubischen Bézier-Flächen vorgestellt. Es gibt bereits einige Veröffentlichungen, die sich mit Daten-Fitting auf Mannigfaltigkeiten beschäftigt haben. Zum Beispiel haben Davydov und Schumaker eine Methode zur Dateninterpolation und Daten-Fitting auf Mannigfaltigkeiten mit Powell-Subin-Splines 2008 vorgestellt [8]. Allerdings nur für den Spezialfall, dass die Mannigfaltigkeit zweidimensional ist. Machado und Leite haben 2006 eine kleinste-Quadrate-Methode für Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten beschrieben, aber nur für Spline-Kurven und keine Flächen [9]. Den Ansatz, Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Bézier-Flächen zu lösen gibt es noch nicht. Einige Veröffentlichungen beschäftigen sich mit der Erweiterung von Bézier-Kurven auf Mannigfaltigkeiten, z.B. haben Lin und Walker 2001 eine Verallgemeinerung des de Casteljau Algorithmus auf Mannigfaltigkeiten vorgestellt [10]. Popiel und Noakes haben 2007 die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Bézier-Kurven auf Mannigfaltigkeiten analysiert [11]. In der Literatur findet sich allerdings bisher wenig Lektüre zu der Verallgemeinerung von Bézier-Flächen auf Mannigfaltigkeiten. Absil, Gousenbourger, Striewski und Wirth haben 2016 in dem Paper „Differentiable piecewise-Bézier surfaces on Riemannian manifolds“ [1] drei Methoden für Dateninterpolation auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Bézier-Flächen vorgestellt. Die in dieser Masterarbeit vorgestellten Methoden orientieren sich an dem Paper von Absil, Gousenbourger, Striewski und Wirth. Dabei werden zwei neue Methoden für die Berechnung von Bézier-Flächen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten vorgestellt mit dem Ziel, dass man diese schneller und leichter berechnen kann. Anschließend wird die Generierung der Kontrollpunkte so angepasst, dass Daten-Fitting statt Dateninterpolation betrieben wird.

Das erste Ziel ist, Bézier-Flächen auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern und eine schnelle Berechnung zu ermöglichen. Als nächstes sollen mehrere Bézier-Flächen stetig zusammengefügt werden. Dafür müssen die C^0 -Bedingungen aus dem euklidischen Raum auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Da die resultierende Fläche nicht nur stetig, sondern auch stetig differenzierbar sein soll, müssen zudem die C^1 -Bedingungen

aus dem euklidischen Raum auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden. Zum Schluss müssen noch die Kontrollpunkte der Bézier-Fläche so konstruiert werden, dass Daten-Fitting betrieben wird. Die resultierende Bézier-Fläche soll möglichst glatt sein (d.h. die mittlere quadratische zweite Ableitung soll minimiert werden) und möglichst nah an den Kontrollpunkten liegen. Dies erreicht man, indem die Energie der Bézier-Fläche, die minimiert werden soll, anders definiert wird, als wenn Dateninterpolation, wie in [1], betrieben wird.

Die Masterarbeit ist wie folgt aufgebaut. In Abschnitt 2 wird zunächst eine kurze Einführung/Erinnerung zu Bézier-Kurven und -Flächen im euklidischen Raum gegeben. Anschließend werden in Abschnitt 3 die Konzepte auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen und die Wohldefiniertheit und \mathcal{C}^1 -Stetigkeit bewiesen. Dazu wird am Anfang von Abschnitt 3 noch eine kleine Einführung in die Differentialgeometrie gegeben und alle Funktionen und Konzepte die benötigt werden, werden eingeführt. In Abschnitt 4 wird die Generierung der Kontrollpunkte betrachtet, um Daten-Fitting zu betreiben. Dazu wird die Energie einer Bézier-Fläche definiert, die den Abstand zu den Datenpunkten und die Krümmung der Bézier-Fläche berücksichtigt. Die Kontrollpunkte werden so gewählt, dass sie die \mathcal{C}^1 -Stetigkeitsbedingungen erfüllen und der verbleibende Spielraum wird genutzt, um die Energie der Bézier-Fläche zu minimieren. Anschließend werden in Abschnitt 5 einige numerische Beispiele auf unterschiedlichen Mannigfaltigkeiten dargestellt. Zum Schluss wird in Abschnitt 6 noch ein Fazit gezogen.

2 Bézier-Kurven und -Flächen

In diesem Abschnitt wird eine kurze Zusammenfassung zu Bézier-Kurven und -Flächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n gegeben. Dabei wird sich an der Einführung zu Bézier-Kurven und -Flächen im euklidischen Raum \mathbb{R}^n aus dem Paper „Differentiable piecewise-Bézier surfaces on Riemannian manifolds“ von Absil, Gouzenbourger, Striowski und Wirth [1] orientiert. Die Konzepte von Bézier-Flächen sollen dann später auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen werden. Eine umfassende Beschreibung und Analyse von Bézier-Kurven und -Flächen im euklidischen Raum kann in [2] nachgelesen werden.

Definition 2.1 (Bézier-Kurve). *Für eine Sequenz von Kontrollpunkten $b_0, \dots, b_K \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{N}$ ist die dazugehörige Bézier-Kurve $\beta_K(\cdot; b_0, \dots, b_K) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert als*

$$\beta_K(t; b_0, \dots, b_K) = \sum_{j=0}^K b_j B_{j,K}(t), \quad (1)$$

dabei ist

$$B_{j,K}(t) = \binom{K}{j} t^j (1-t)^{K-j} \quad (2)$$

das j te Bernsteinpolynom von Grad K und K ist der Grad der Bézier-Kurve.

Eine Bézier-Kurve interpoliert den ersten und letzten Kontrollpunkt und die initiale und finale Geschwindigkeit ist tangential zu dem initialen und finalen Liniensegment zwischen den Kontrollpunkten

$$\begin{aligned} \beta_K(0; b_0, \dots, b_K) &= b_0, & \dot{\beta}_K(0; b_0, \dots, b_K) &= K(b_1 - b_0), \\ \beta_K(1; b_0, \dots, b_K) &= b_K, & \dot{\beta}_K(1; b_0, \dots, b_K) &= K(b_K - b_{K-1}), \end{aligned}$$

wobei $\dot{\beta}_K$ für die Zeitableitung von β_K steht.

Eine Bézier-Kurve liegt vollständig in der konvexen Hülle von ihren Kontrollpunkten b_0, \dots, b_K . Denn für ein beliebiges, aber festes $t \in [0, 1]$ ist $\{B_{j,K}(t)\}_{j=1, \dots, K}$ eine Zerlegung der Eins und damit ist $\sum_{j=0}^K b_j B_{j,K}(t)$ eine Konvexkombination von b_0, \dots, b_K .

Der Casteljau Algorithmus bietet eine Methode, um $b_0^K = \beta_K(t_0; b_0, \dots, b_K)$ für einen Zeitpunkt $t_0 \in [0, 1]$ iterativ zu berechnen.

Definition 2.2 (Der Casteljau Algorithmus für Bézier-Kurven). *Für eine Sequenz von Kontrollpunkten $b_0, \dots, b_K \in \mathbb{R}^n$, $K \in \mathbb{N}$ und einen Zeitpunkt $t_0 \in [0, 1]$ ist $b_0^K = \beta_K(t_0; b_0, \dots, b_K)$ iterativ definiert über*

$$\begin{aligned} b_j^0 &= b_j, & j &= 0, \dots, K, \\ b_j^k &= t_0 b_{j+1}^{k-1} + (1-t_0) b_j^{k-1}, & k &= 1, \dots, K, \quad j = 0, \dots, K-k. \end{aligned} \quad (3)$$

Der Casteljau Algorithmus hat eine einfache geometrische Interpretation, da er nur Konvexkombinationen mit Koeffizienten t_0 und $1 - t_0$ benutzt, siehe Abbildung 1.

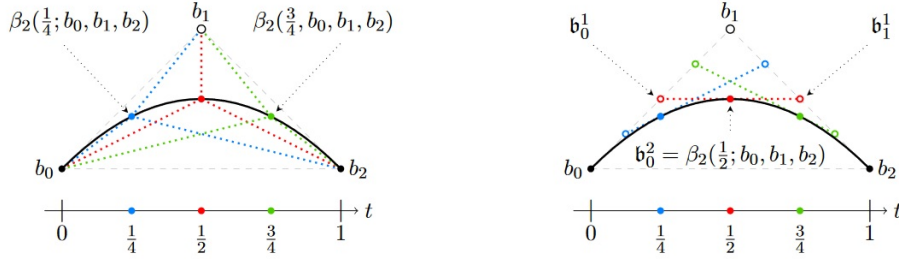


Abbildung 1: Berechnung einer quadratischen ($K=2$) Bézier-Kurve als gewichtetes Mittel der Kontrollpunkte (links) und über den Casteljau Algorithmus (rechts). Im Euklidischen Raum sind die beiden Kurven identisch, aber auf Mannigfaltigkeiten muss dies im Allgemeinen nicht gelten, wie später gezeigt wird (Quelle: „Differentiable Piecewise-Bézier Surfaces on Riemannian Manifolds“ [1]).

Man kann nicht nur eine Bézier-Kurve betrachten, sondern auch mehrere Bézier-Kurven zu einem Bézier-Spline zusammenfügen.

Definition 2.3 (Bézier-Spline für Kurven). Für zwei Kurven $\beta_K(\cdot; b_0^l, \dots, b_K^l)$, $\beta_K(\cdot; b_0^r, \dots, b_K^r) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, wird der dazugehörige Bézier-Spline definiert als

$$\mathcal{B}_K : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto \begin{cases} \beta_K(t; b_0^l, \dots, b_K^l) & \text{falls } t \in [0, 1], \\ \beta_K(t-1; b_0^r, \dots, b_K^r) & \text{falls } t \in (1, 2]. \end{cases} \quad (4)$$

Satz 2.4. Der Bézier-Spline (4) ist genau dann stetig, wenn

$$b_K^l = b_0^r \quad (5)$$

und genau dann stetig differenzierbar, wenn zusätzlich

$$b_K^l = \frac{b_{K-1}^l + b_1^r}{2} \quad (6)$$

gilt.

Beweis. Die beiden Bézier-Kurven sind offensichtlich jeweils stetig differenzierbar, da sie zu jedem Zeitpunkt eine Konvexkombination von ihren Kontrollpunkten sind und die Konvexkombinationen stetig differenzierbar von t abhängen. Demnach reicht es zu zeigen, dass die Schnittstelle der beiden Kurven, d.h. der Bézier-Spline bei $t = 1$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist.

Für Stetigkeit muss $\beta_K(1; b_0^l, \dots, b_K^l) = \beta_K(0; b_0^r, \dots, b_K^r)$ gelten.

Es gilt

$$\beta_K(1; b_0^l, \dots, b_K^l) = \sum_{j=0}^K b_j^l B_{j,K}(1) = b_K^l,$$

$$\beta_K(0; b_0^r, \dots, b_K^r) = \sum_{j=0}^K b_j^r B_{j,K}(0) = b_0^r.$$

Stetigkeit folgt also genau dann, wenn (5) gilt.

Für stetige Differenzierbarkeit müssen die Ableitungen an der Stelle $t = 1$ übereinstimmen. Es gilt

$$\dot{\beta}_K(1; b_0^l, \dots, b_K^l) = K(b_K^l - b_{K-1}^l),$$

$$\dot{\beta}_K(0; b_0^r, \dots, b_K^r) = K(b_1^r - b_0^r)$$

und damit folgt

$$\dot{\beta}_K(1; b_0^l, \dots, b_K^l) = \dot{\beta}_K(0; b_0^r, \dots, b_K^r) \Leftrightarrow K(b_K^l - b_{K-1}^l) = K(b_1^r - b_0^r)$$

$$\Leftrightarrow b_K^l - b_{K-1}^l = b_1^r - b_0^r \Leftrightarrow b_K^l = \frac{b_{K-1}^l + b_1^r}{2}.$$

□

Die Idee von Bézier-Kurven kann man auch auf höhere Dimensionen fortführen und Bézier-Flächen definieren.

Definition 2.5 (Bézier-Fläche). *Für eine Familie von Kontrollpunkten $(b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K} \subset \mathbb{R}^n$ ist die dazugehörige Bézier-Fläche $\beta_K(\cdot, \cdot; (b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K}) : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert als*

$$\beta_K(t_1, t_2; (b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K}) = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2). \quad (7)$$

Für feste $t_1, t_2 \in [0, 1]$ ist $\beta_K(t_1, t_2; (b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K})$ wieder eine Konvexkombination der Kontrollpunkte $(b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K}$. Die Ränder der Bézier-Fläche bestehen aus den vier Bézier-Kurven der Kontrollpunkte $b_{0,j}, b_{K,j}, b_{j,0}, b_{j,K}$, $j = 0, \dots, K$, denn

$$\beta_K(0, t_2; (b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K}) = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(0) B_{j,K}(t_2)$$

$$= \sum_{j=0}^K b_{0,j} B_{j,K}(t_2) = \beta_K(t_2; b_{0,j}, \dots, b_{0,K}).$$

Analog für die drei anderen Ränder.

Auch für Bézier-Flächen gibt es die Möglichkeit für beliebige, aber feste $t_1, t_2 \in [0, 1]$ $\beta_K(t_1, t_2; (b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K})$ über de Casteljans Algorithmus zu berechnen, siehe Abbildung 2 zur Visualisierung.

Definition 2.6 (De Casteljau Algorithmus für Bézier-Flächen). Für eine Familie von Kontrollpunkten $(b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K} \subset \mathbb{R}^n$ kann man mithilfe von de Casteljau's Algorithmus $b_{0,0}^K = \beta_K(t_1, t_2; (b_{i,j})_{i,j=0,\dots,K})$ iterativ an einem Punkt $[t_1, t_2] \in [0, 1]^2$ bestimmen via

$$b_{i,j}^0 = b_{i,j}, \quad i, j = 0, \dots, K,$$

$$b_{i,j}^k = (1 - t_1 \quad t_1) \begin{pmatrix} b_{i,j}^{k-1} & b_{i,j+1}^{k-1} \\ b_{i+1,j}^{k-1} & b_{i+1,j+1}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - t_2 \\ t_2 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, K, \quad i, j = 0, \dots, K - k. \quad (8)$$

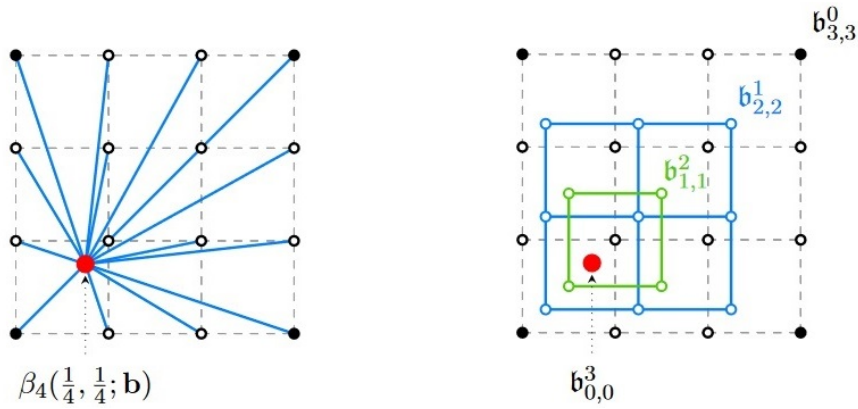


Abbildung 2: Berechnung einer kubischen ($K=3$) Bézier-Fläche als gewichtetes Mittel der Kontrollpunkte (links) und über de Casteljau's Algorithmus (rechts) (Quelle: „Differentiable Piecewise-Bézier Surfaces on Riemannian Manifolds“ [1]).

Wie bei Bézier-Kurven kann man auch mehrere Bézier-Flächen zu einem Spline zusammenfügen.

Definition 2.7 (Bézier-Spline für Flächen). Zwei Bézier-Flächen $\beta_K(\cdot, \cdot; (b_{i,j}^l)_{i,j=0,\dots,K})$ und $\beta_K(\cdot, \cdot; (b_{i,j}^r)_{i,j=0,\dots,K})$ können zu einem Bézier-Spline in t_2 -Richtung zusammengefügt werden via

$$\mathcal{B}_K : [0, 1] \times [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^n : (t_1, t_2) \mapsto \begin{cases} \beta_K(t_1, t_2; (b_{i,j}^l)_{i,j=0,\dots,K}) & \text{falls } t_2 \in [0, 1], \\ \beta_K(t_1, t_2 - 1; (b_{i,j}^r)_{i,j=0,\dots,K}) & \text{falls } t_2 \in (1, 2]. \end{cases} \quad (9)$$

Analog kann man zwei Bézier-Flächen in t_1 -Richtung zusammenfügen.

Satz 2.8. Die zusammengesetzte Bézier-Fläche, definiert wie in (9), ist genau dann stetig, wenn

$$b_{i,K}^l = b_{i,0}^r \quad \forall i = 0, \dots, K \quad (10)$$

und stetig differenzierbar genau dann, wenn zusätzlich

$$b_{i,K}^l = \frac{b_{i,K-1}^l + b_{i,1}^r}{2} \quad \forall i = 0, \dots, K. \quad (11)$$

Beweis. Die beiden Bézier-Flächen sind offensichtlich jeweils stetig differenzierbar, da sie zu jedem Zeitpunkt (t_1, t_2) eine Konvexkombination von ihren Kontrollpunkten sind und die Konvexkombinationen stetig differenzierbar von (t_1, t_2) abhängen. Demnach reicht es zu zeigen, dass die Schnittstelle der beiden Flächen, d.h. die zusammengesetzte Bézier-Fläche bei $t_2 = 1$ stetig bzw. stetig differenzierbar ist.

Für Stetigkeit muss $\beta_K(t_1, 1; (b_{i,j}^l)_{i,j=0,\dots,K}) = \beta_K(t_1, 0; (b_{i,j}^r)_{i,j=0,\dots,K})$ gelten. Es gilt

$$\begin{aligned} \beta_K(t_1, 1; (b_{i,j}^l)_{i,j=0,\dots,K}) &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j}^l B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(1) \\ &= \sum_{i=0}^K b_{i,K}^l B_{i,K}(t_1) \stackrel{(10)}{=} \sum_{i=0}^K b_{i,0}^r B_{i,K}(t_1) \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j}^r B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(0) = \beta_K(t_1, 0; (b_{i,j}^r)_{i,j=0,\dots,K}). \end{aligned}$$

Stetigkeit folgt also genau dann, wenn (10) gilt.

Für stetige Differenzierbarkeit müssen die Ableitungen an der Stelle $t_2 = 1$ übereinstimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt_2} \beta_K(t_1, t_2; (b_{i,j}^l)_{i,j=0,\dots,K}) \right|_{t_2=1} &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j}^l B_{i,K}(t_1) \left. \frac{d}{dt_2} B_{j,K}(t_2) \right|_{t_2=1} \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j}^l B_{i,K}(t_1) K (B_{j-1,K-1}(1) - B_{j,K-1}(1)) \\ &= K \sum_{i=0}^K (b_{i,K}^l - b_{i,K-1}^l) B_{i,K}(t_1), \\ \left. \frac{d}{dt_2} \beta_K(t_1, t_2; (b_{i,j}^r)_{i,j=0,\dots,K}) \right|_{t_2=0} &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j}^r B_{i,K}(t_1) \left. \frac{d}{dt_2} B_{j,K}(t_2) \right|_{t_2=0} \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j}^r B_{i,K}(t_1) K (B_{j-1,K-1}(0) - B_{j,K-1}(0)) \\ &= K \sum_{i=0}^K (b_{i,1}^r - b_{i,0}^r) B_{i,K}(t_1). \end{aligned}$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $\forall i = 0, \dots, K$

$$b_{i,K}^l - b_{i,K-1}^l = b_{i,1}^r - b_{i,0}^r \stackrel{(10)}{\Leftrightarrow} b_{i,K}^l - b_{i,K-1}^l = b_{i,1}^r - b_{i,K}^l \Leftrightarrow b_{i,K}^l = \frac{b_{i,K-1}^l + b_{i,1}^r}{2}$$

gilt.

□

3 Bézier-Flächen auf Mannigfaltigkeiten

Die Konzepte für Bézier-Flächen im euklidischen Raum sollen erweitert werden, um diese auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten anwenden zu können. Es gibt bereits einige Veröffentlichungen, die sich mit der Erweiterung von Bézier-Kurven auf Mannigfaltigkeiten beschäftigen, z.B. haben Lin und Walker eine Verallgemeinerung des de Casteljau Algorithmus auf Mannigfaltigkeiten vorgestellt [10]. Popiel und Noakes haben die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Bézier-Kurven auf Mannigfaltigkeiten analysiert [11]. Allerdings findet man in der Literatur kaum Lektüre zu der Verallgemeinerung von Bézier-Flächen auf Mannigfaltigkeiten. Absil, Gousenbourger, Striewski und Wirth haben eine erste Methode dargestellt, um die Konzepte auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern [1]. In dieser Arbeit soll eine weitere alternative Methode für die Verallgemeinerung von Bézier-Flächen auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten präsentiert werden. Mit dieser verallgemeinerten Bézier-Fläche wird anschließend eine Möglichkeit dargestellt, um Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu betreiben.

Dafür werden einige Grundlagen aus der Differentialgeometrie benötigt. Zu diesem Zweck werden kurz einige Standard-Notationen für die Riemannsche Geometrie eingeführt, dabei wird sich an der Auswahl und den Beweisen aus „Differentiable Piecewise-Bézier Surfaces on Riemannian Manifolds“ von Absil, Gousenbourger, Striewski und Wirth [1] orientiert. Eine detailliertere Darstellung der Konzepte zur Riemannschen Geometrie findet man in Standardbüchern, wie z.B. [3].

3.1 Einführung Differentialgeometrie

Definition 3.1 (Riemannsche Metrik). *Sei \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik $g_y(\cdot, \cdot) : T_y\mathcal{M} \times T_y\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform in dem Tangentialraum $T_y\mathcal{M}$ von einem Punkt $y \in \mathcal{M}$, die differenzierbar von y abhängt.*

Sei \mathcal{M} im Folgenden eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik g .

Definition 3.2 (Kurve). *Eine Kurve in \mathcal{M} ist eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$. Die Länge und Energie einer Kurve ist definiert als*

$$L[\gamma] = \int_1^0 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$
$$E[\gamma] = \int_1^0 g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

wobei $\dot{\gamma}$ für die Zeitableitung von γ steht.

Zwischen zwei Punkten in \mathcal{M} gibt es beliebig viele Kurven unterschiedlicher Länge.

Definition 3.3 (Geodätische). *Die Kurve γ , die für fixe Endpunkte $\gamma(0) = y_0 \in \mathcal{M}$, $\gamma(1) = y_1 \in \mathcal{M}$ $E[\gamma]$ minimiert, heißt Geodätische von y_0, y_1 . Sie minimiert nicht nur $E[\gamma]$, sondern auch $L[\gamma]$, siehe [3].*

Damit ist eine Geodätische die kürzeste Kurve zwischen zwei Punkten in \mathcal{M} .

Definition 3.4 (Riemannsche Distanz). *Die Riemannsche Distanz $d(y_0, y_1)$ von zwei Punkten $y_0, y_1 \in \mathcal{M}$ ist die minimale Länge der Kurven von y_0 nach y_1 . Wenn $d(y_0, y_1)$ klein genug ist, ist die verbindende Geodätische eindeutig.*

Wenn die Geodätische zwischen zwei Punkten existiert und eindeutig ist, kann man den Logarithmus und die Exponentialabbildung definieren.

Definition 3.5 (Logarithmus). *Der Logarithmus von einem Punkt $y_1 \in \mathcal{M}$ in Bezug zu einem Punkt $y_0 \in \mathcal{M}$ ist definiert als die initiale Geschwindigkeit der Geodätischen γ von y_0 zu y_1*

$$\log_{y_0}(y_1) = \dot{\gamma}(0). \quad (12)$$

Definition 3.6 (Exponentialabbildung). *Die Exponentialabbildung von einem Tangentialvektor $v \in T_{y_0}\mathcal{M}$ ist der Punkt, der bei $t = 1$ von der Geodätischen γ , die in $y_0 \in \mathcal{M}$ mit initialer Geschwindigkeit v startet, erreicht wird*

$$\exp_{y_0}(v) = \gamma(1). \quad (13)$$

Es gilt $\log_{y_0}(\exp_{y_0}(v)) = v$ und $\exp_{y_0}(\log_{y_0}(y_1)) = y_1$.

Bemerkung 3.7. *Wenn zwei Punkte auf der Mannigfaltigkeit nah genug beieinander liegen, ist die Geodätische zwischen diesen Punkten eindeutig und damit ist die Exponentialabbildung in dieser Umgebung ein Diffeomorphismus, siehe [3].*

Definition 3.8 (Injektivitätsradius). *Für eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist der Injektivitätsradius definiert als*

$$i(\mathcal{M}) := \inf_{x \in \mathcal{M}} i_x$$

mit $i_x := \sup\{\epsilon > 0 \mid \exp_x|_{B_\epsilon(0_x)} \text{ ist ein Diffeomorphismus}\}$. Dabei ist 0_x der Nullvektor im Tangentialraum von x .

Wenn $r < i(\mathcal{M})$ gilt, ist die Exponentialabbildung \exp_y eingeschränkt auf $B_r(0_y)$ ein Diffeomorphismus für alle $y \in \mathcal{M}$. Das heißt die Geodätische zwischen zwei Punkten in $B_{i(\mathcal{M})}(y)$ ist eindeutig für alle $y \in \mathcal{M}$.

Für die spätere Definition der verallgemeinerten Bézier-Fläche wird der gewichtete geodätische Durchschnitt als Kernkonzept benutzt.

Definition 3.9 (Gewichteter geodätischer Durchschnitt). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Der gewichtete geodätische Durchschnitt von Punkten $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{M}$ für Gewichte $w_1, \dots, w_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ist ein Punkt $y \in \mathcal{M}$ der*

$$\min_{y \in \mathcal{M}} \sum_{i=1}^n w_i d^2(y_i, y)$$

löst.

Wenn der Minimierer existiert und eindeutig ist, wird dieser als

$$\text{av}[(y_1, \dots, y_n), (w_1, \dots, w_n)]$$

bezeichnet.

Im euklidischen Raum ist der gewichtete geodätische Durchschnitt eine Konvexkombination von Punkten $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^d$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass im euklidischen Raum

$$\text{av}[(y_1, \dots, y_n), (w_1, \dots, w_n)] = \sum_{i=1}^n w_i y_i$$

gilt.

$$\text{Sei } \tilde{b} := \text{av}[(y_1, \dots, y_n), (w_1, \dots, w_n)], \quad J[y] := \sum_{i=1}^n w_i d^2(y_i, y).$$

Da \tilde{b} J minimiert, folgt aufgrund der Notwendigen Bedingung für Extremstellen

$$0 = \text{grad} J[\tilde{b}] = -2 \sum_{k=1}^n w_k \log_{\tilde{b}} y_k, \quad (14)$$

siehe [4], Thm. 1.2 für Details.

Für den gewichteten geodätischen Durchschnitt von zwei Punkten gibt es eine explizite Formel, sodass kein Optimierungsproblem gelöst werden muss.

Satz 3.10. Für zwei Punkte $y_1, y_2 \in \mathcal{M}$, Gewichte $1 - w, w \in [0, 1]$ gilt

$$\text{av}[(y_1, y_2), (1 - w, w)] = \exp_{y_1} (w \log_{y_1} (y_2)). \quad (15)$$

Beweis. Sei $y \in \mathcal{M}$ beliebig \Rightarrow

$$\begin{aligned} (1 - w)d^2(y_1, y) + wd^2(y_2, y) &= (1 - w)(1 - w + w)d^2(y_1, y) + w(1 - w + w)d^2(y_2, y) \\ &= (1 - w)^2 d^2(y_1, y) + (1 - w)wd^2(y_1, y) + w(1 - w)d^2(y_2, y) + w^2 d^2(y_2, y) \\ &\stackrel{\text{Young}}{\geq} 2(1 - w)wd(y_1, y)d(y_2, y) + (1 - w)wd^2(y_1, y) + w(1 - w)d^2(y_2, y) \\ &= (1 - w)w [d^2(y_1, y) + 2d(y_1, y)d(y_2, y) + d^2(y_2, y)] \\ &= (1 - w)w(d(y_1, y) + d(y_2, y))^2 \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} (1 - w)wd^2(y_1, y_2) \\ &= (1 - w)d^2(y_1, \tilde{y}) + wd^2(y_2, \tilde{y}), \end{aligned}$$

mit \tilde{y} der Punkt auf der Geodätischen zwischen y_1 und y_2 , sodass $d(y_1, \tilde{y}) = wd(y_1, y_2)$ und $d(y_2, \tilde{y}) = (1 - w)d(y_1, y_2)$. Damit folgt

$$\text{av}[(y_1, y_2), (1 - w, w)] = \arg \min_{y \in \mathcal{M}} (1 - w)d^2(y_1, y) + wd^2(y_2, y) = \tilde{y} = \exp_{y_1} (w \log_{y_1} (y_2)).$$

□

Für die späteren Stetigkeitsbeweise wird eine Menge benötigt, die den gewichteten geodätischen Durchschnitt aller ihrer Punkte enthält. Dafür reicht eine geodätisch konvexe Menge nicht aus, da sie nur den gewichteten geodätischen Durchschnitt von jeweils zwei Punkten enthält. Deswegen wird als Verallgemeinerung einer geodätisch konvexen Menge die multigeodätisch konvexe Menge definiert.

Definition 3.11 (multigeodätisch konvexe Menge). *Eine Menge $U \subseteq \mathcal{M}$ heißt multigeodätisch konvex, wenn sie alle gewichteten geodätischen Durchschnitte von beliebig vielen Punkten aus U enthält. Die multigeodätisch konvexe Hülle $co(U)$ einer Menge $U \subseteq \mathcal{M}$, ist die kleinste multigeodätisch konvexe Menge in \mathcal{M} , die U enthält.*

Bemerkung 3.12. *Eine multigeodätisch konvexe Menge ist nach Definition insbesondere eine geodätisch konvexe Menge. Eine geodätisch konvexe Menge ist im Allgemeinen jedoch keine multigeodätisch konvexe Menge.*

Beispiel 3.13. *Betrachte \mathbb{R}^3 mit der euklidischen Metrik $g_x(v, v) = \|v\|^2$, nur mit dem Unterschied, dass die Metrik für x in einer Umgebung der drei Linien, die den Ursprung mit $y_i = (\cos \frac{2i\pi}{3}, \sin \frac{2i\pi}{3}, 1)$, $i = 1, \dots, 3$ verbinden, kleiner ist, $g_x(v, v) = \alpha \|v\|^2$ für $\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 < \alpha < \sqrt{2} - 1$, siehe Abbildung 3. Dann folgt, dass das Dreieck, das von $2y_1, 2y_2, 2y_3$ aufgespannt wird, geodätisch konvex, aber nicht multigeodätisch konvex ist. Denn für $\alpha < \sqrt{2} - 1$ gilt*

$$\text{av} \left[(2y_1, 2y_2, 2y_3), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right] \approx (0, 0, 0).$$

Da das Dreieck den Ursprung aber nicht enthält, ist es nicht multigeodätisch konvex.

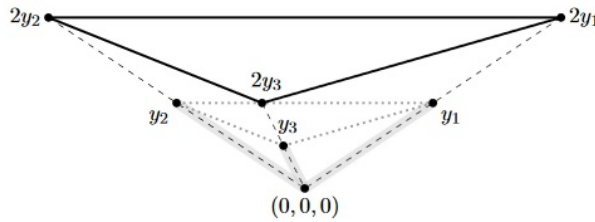


Abbildung 3: Illustration des Beispiels 3.13 (Quelle: „Differentiable Piecewise-Bézier Surfaces on Riemannian Manifolds“ [1]).

Bemerkung 3.14. *Die multigeodätisch konvexe Hülle $co(U)$ existiert immer als Schnitt aller multigeodätisch konvexen Mengen, die U enthalten. Im Allgemeinen kann die multigeodätisch konvexe Hülle $co(U)$ nicht als die Menge der gewichteten geodätischen Durchschnitte von allen Punkten in U gesehen werden.*

Beispiel 3.15. Betrachte $U = \{y_1, y_2, y_3\}$, mit $y_i = (\cos \frac{2i\pi}{3}, \sin \frac{2i\pi}{3}, 1)$, $i = 1, \dots, 3$. Dann enthält die Menge der gewichteten geodätischen Durchschnitte von allen Punkten in U den Punkt $(0, 0, 1)$ nicht. Der Schnitt aller multigeodätisch konvexen Mengen, die U enthalten, enthält allerdings den Punkt $(0, 0, 1)$.

Da für die später vorgestellten Konzepte von verallgemeinerten Bézier-Flächen der gewichtete geodätische Durchschnitt eine Schlüsselrolle spielt, ist es wichtig, dass man immer einen gewichteten geodätischen Durchschnitt für Punkte in \mathcal{M} finden kann.

Satz 3.16 (Existenz des gewichteten geodätischen Durchschnitts). Sei \mathcal{M} eine glatte, endlich-dimensionale, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für alle Punkte $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{M}$ und Gewichte $w_1, \dots, w_n \in [0, 1]$, mit $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ existiert der gewichtete geodätische Durchschnitt.

Beweis. Sei $J[y] := \sum_{i=1}^n w_i d^2(y_i, y)$ und betrachte eine minimierende Sequenz $\{y^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$J[y^j] \xrightarrow[\text{monoton}]{j \rightarrow \infty} \inf_{y \in \mathcal{M}} J[y]$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $w_1 \neq 0$ angenommen werden. Da für j groß genug

$$0 \leq d^2(y_1, y^j) \leq \frac{1}{w_1} J[y^j] \leq \frac{1}{w_1} J[y^1]$$

gilt, folgt, dass die Sequenz $\{y^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Mit dem Hopf-Rinow Theorem folgt dann, dass $\{y^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ precompact ist, also besitzt $\{y^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $\{y^{j_k}\}_{j_k \in \mathbb{N}}$ die gegen ein $y \in \mathcal{M}$ konvergiert.

Der Grenzwert y ist dann der gewichtete geodätische Durchschnitt, da aufgrund der Stetigkeit von $d(\cdot, \cdot)$ gilt

$$J[y] = \lim_{j_k \rightarrow \infty} J[y^{j_k}] = \inf_{y \in \mathcal{M}} J[y].$$

□

Um bestimmte Stetigkeitseigenschaften der verallgemeinerten Bézier-Flächen zu zeigen, muss der gewichtete geodätische Durchschnitt eindeutig sein und stetig von den Punkten und Gewichten abhängen. Definiere dafür zulässige Mengen.

Definition 3.17 (zulässig). Eine Menge $U \subseteq \mathcal{M}$ heißt zulässig, wenn der gewichtete geodätische Durchschnitt von endlich vielen Punkten aus U eindeutig ist und stetig differenzierbar von den Punkten und den Gewichten abhängt.

Bemerkung 3.18. In einer zulässigen Menge $U \subseteq \mathcal{M}$ ist insbesondere die Geodätische zwischen zwei Punkten eindeutig und damit ist der Logarithmus und die Exponentialabbildung eindeutig und stetig differenzierbar, siehe [3].

Satz 3.19 (Existenz zulässiger Mengen). *Für jedes $y \in \mathcal{M}$ existiert eine zulässige multigeodätisch konvexe Umgebung.*

Beweis. Für $y, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{M}$, $w_1, \dots, w_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ definiere

$$J[y] := \sum_{i=1}^n w_i d^2(y_i, y).$$

Für $y \in \mathcal{M}$, $\rho > 0$ klein genug ist $B_\rho(y)$ geodätisch konvex.

Für $y_1, \dots, y_n \in B_\rho(y)$ hat J nach [4], Thm. 1.2 einen lokalen Minimierer im Inneren von $B_\rho(y)$.

Sei Δ eine obere Schranke an die Krümmung von \mathcal{M} in einer Umgebung von y und r der Injektivitätsradius von \exp_y . Definiere

$$\rho_0 := \begin{cases} \min\left(r, \frac{\pi}{4\sqrt{\Delta}}\right) & \text{für } \Delta > 0, \\ r & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere $U := B_{\rho_0/3}(y)$, damit hat für alle Punkte $y_1, \dots, y_n \in U$ und Gewichte $w_1, \dots, w_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ die Energie J einen eindeutigen globalen Minimierer der in U liegt. Zeige zunächst, dass der Minimierer nicht außerhalb von $B_{\rho_0}(y)$ liegt:

$\mathbb{A} : \tilde{y} = \min_{y \in \mathcal{M}} J[y]$ und $\tilde{y} \in \mathcal{M} \setminus B_{\rho_0}(y)$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $w_1 > 0$ angenommen werden, damit folgt

$$\begin{aligned} J[\tilde{y}] &= \sum_{i=1}^n w_i d^2(y_i, \tilde{y}) \geq \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{2}{3}\rho_0\right) = \frac{2}{3}\rho_0 \\ &> (1 - w_1) \left(\frac{2}{3}\rho_0\right) \geq \sum_{i=1}^n w_i d^2(y_i, y_1) = J[y_1] \quad \zeta \end{aligned}$$

Damit folgt, dass der globale Minimierer im Inneren von $B_{\rho_0}(y)$ liegt. Da J nach [4], Thm. 1.2 strikt konvex in $B_{\rho_0}(y)$ ist, ist der Minimierer im Inneren von $B_{\rho_0}(y)$ eindeutig. Da J nach [4], Thm. 1.2 einen lokalen Minimierer im Inneren von $B_{\rho_0/3}(y) = U$ hat, muss dieser global sein und damit liegt der globale Minimierer in U .

Nun muss noch gezeigt werden, dass der gewichtete geodätische Durchschnitt von Punkten in U stetig differenzierbar von den Punkten und den Gewichten abhängt. Nach (14) ist der gewichtete geodätische Durchschnitt $b = \text{av}[(y_1, \dots, y_n), (w_1, \dots, w_n)]$ charakterisiert durch den Punkt $\tilde{b} \in \mathcal{M}$, für den gilt

$$0 = \text{grad}J[\tilde{b}] = -2 \sum_{k=1}^n w_k \log_{\tilde{b}} y_k.$$

Ersetze \tilde{b} durch $\exp_b v$ für ein $v \in T_b \mathcal{M}$, damit folgt

$$0 = \sum_{k=1}^n w_k \log_{\exp_b v} y_k =: F(v, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n). \quad (16)$$

Es gilt

$$F(0, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n) = \sum_{k=1}^n w_k \log_b y_k = -\frac{1}{2} \text{grad} J[b]^{b=\text{av}[(y_1, \dots, y_n), (w_1, \dots, w_n)]} 0$$

Wenn $\frac{\partial F}{\partial v}((0, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n))$ invertierbar ist und F stetig differenzierbar ist, kann das implizite Funktionentheorem angewendet werden. Damit folgt, dass es eine C^1 -Funktion h gibt, die in einer Umgebung U von $(y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n)$ definiert ist, mit $h(y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n) = v$ und $F(x, h(x)) = 0 \forall x \in U$. Die Funktion h löst (16) und hängt stetig differenzierbar von den Gewichten und Punkten ab.

Zeige, dass das implizite Funktionentheorem angewendet werden kann. Die stetige Differenzierbarkeit von F ist klar, da die Exponentialabbildung und der Logarithmus stetig differenzierbar sind.

Die Regularität von $\frac{\partial F}{\partial v}((0, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n))$ folgt direkt aus [4], Thm. 1.2, welches außerdem

$$\frac{d^2}{dt^2} J[y(t)] \geq c \left\| \frac{dy}{dt} \right\|^2$$

für eine Geodätische $y : I \rightarrow B_{\rho_0}$ beweist. Hierbei hängt c von der Krümmung von \mathcal{M} in B_{ρ_0} und ρ_0 ab. Damit folgt

$$\begin{aligned} g_b \left(\frac{\partial F}{\partial v}(0, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n)v, v \right) &= g_b \left(\frac{-\frac{1}{2} \text{grad} J[\exp_b v]}{\partial v}(0)v, v \right) \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{d^2}{dt^2} J[\exp_b(tv)]_{t=0} \right| \geq \frac{c}{2} \|v\|^2 \end{aligned}$$

Also ist $\frac{\partial F}{\partial v}((0, y_1, \dots, y_n, w_1, \dots, w_n))$ symmetrisch positiv definit und damit nach Lax-Milgram invertierbar. □

Definition 3.20 (Paralleltransport). *Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ eine Kurve und $t_0, t_1 \in [0, 1]$. Dann existiert zu jedem $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$ ein eindeutiges paralleles Vektorfeld $V : \mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(t_1)}\mathcal{M}$ entlang γ , so dass $v_0 = V(\gamma(t_0))$ gilt.*

Parallel entlang γ bedeutet, dass $\nabla_{\gamma'(t)}V(\gamma(t)) = 0 \forall t \in [0, 1]$ gilt.

Damit lässt sich der Paralleltransport definieren

$$P_{\gamma(t_0) \rightarrow \gamma(t_1)} : T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\gamma(t_1)}\mathcal{M}, \quad v_0 \mapsto V(\gamma(t_1)),$$

welche einem Vektor $v_0 \in T_{\gamma(t_0)}\mathcal{M}$ sein eindeutiges paralleles Vektorfeld ausgewertet an der Stelle $\gamma(t_1)$ zuordnet.

3.2 Verallgemeinerte Bézier-Flächen

Absil, Gousenbourger, Striewski und Wirth stellen in „Differentiable Piecewise-Bézier Surfaces on Riemannian Manifolds“ [1] drei Ansätze vor, um Bézier Flächen auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern und diskutieren diese. Diese drei Methoden berechnen die Bézier-Fläche direkt auf der Mannigfaltigkeit, entweder über den gewichteten geodätischen Durchschnitt, de Casteljaus Algorithmus oder über zweimaliges Anwenden von Bézier-Kurven. Im euklidischen Raum stimmen diese drei Methoden überein, aber auf Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen nicht.

Es ist teilweise sehr rechenaufwändig den gewichteten geodätischen Durchschnitt oder de Casteljaus Algorithmus direkt auf der Mannigfaltigkeit zu berechnen. Daher wird in den beiden hier vorgestellten Methoden versucht dies auf den Tangentialraum zu übertragen. Der Tangentialraum ist ein euklidischer Raum. Damit lässt sich die Bézier-Fläche dort schnell berechnen und somit kann die Rechenzeit verkürzt werden. Dazu müssen die Kontrollpunkte zunächst von der Mannigfaltigkeit auf den Tangentialraum abgebildet werden. Die Frage ist, welchen Tangentialraum man dafür nutzen soll. In den hier vorgestellten Methoden werden die Kontrollpunkte in die vier Tangentialräume der vier Eckkontrollpunkte abgebildet. Dort wird jeweils die Bézier-Fläche berechnet und anschließend werden die vier Flächen wieder auf die Mannigfaltigkeit abgebildet. Da sich diese vier Flächen unterscheiden, müssen sie noch miteinander verrechnet werden, um eine finale Bézier-Fläche auf der Mannigfaltigkeit zu bekommen. Dabei sollte berücksichtigt werden, dass je näher die finale Bézier-Fläche an einem der Eckkontrollpunkte ist, die Bézier-Fläche dieses Eckkontrollpunktes mehr Gewicht in der Verrechnung erhält.

Für diese Verrechnung werden zwei verschiedene Ansätze präsentiert. In der einen Methode wird der gewichtete geodätische Durchschnitt der vier Bézier-Flächen benutzt, wobei die Gewichtung von der Entfernung zu den Eckpunkten abhängt. Da für den gewichteten geodätischen Durchschnitt auf der Mannigfaltigkeit jedesmal ein Optimierungsproblem gelöst werden muss, wird noch eine zweite Methode vorgestellt. Bei dieser Methode wird die Verrechnung über das zweimalige Anwenden von dem ersten Schritt im de Casteljaus Algorithmus durchgeführt, zuerst vertikal und dann horizontal. Die zweite Methode ist wesentlich schneller, da kein Optimierungsproblem gelöst werden muss. Insgesamt benutzen die beiden Methoden nur die Exponentialabbildung, den Logarithmus und den gewichteten geodätischen Durchschnitt. Für Mannigfaltigkeiten, für die es eine explizite Formel der Exponentialabbildung und des Logarithmus gibt, ist vor allem die zweite Methoden sehr leicht zu berechnen.

Sei \mathcal{M} ab jetzt eine eine glatte, endlich-dimensionale, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Definition 3.21 (verallgemeinerte Bézier-Fläche). Für eine Familie von Kontrollpunkten $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ und ein Gewicht $w(\cdot) : [0,1] \rightarrow [0,1]$ mit $w(0) = 0$, $w(1) = 1$ wird die dazugehörige Bézier-Fläche des Typs I und II über den folgenden Algorithmus definiert:

1. Bilde die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,K}$ in die Tangentialebene der vier Eckkontrollpunkte $b_{0,0}, b_{K,0}, b_{0,K}, b_{K,K}$ ab

$$\begin{aligned} v_{i,j}^1 &:= \log_{b_{0,0}}(b_{i,j}), \\ v_{i,j}^2 &:= \log_{b_{K,0}}(b_{i,j}), \\ v_{i,j}^3 &:= \log_{b_{0,K}}(b_{i,j}), \\ v_{i,j}^4 &:= \log_{b_{K,K}}(b_{i,j}) \quad \text{für } i, j = 0, \dots, K, \end{aligned}$$

siehe Abbildung 4 zur Veranschaulichung der Nummerierung.

2. Wende de Casteljau Algorithmus in den vier Tangentialebenen an $k \in \{1, \dots, 4\}$,

$$v^k(t_1, t_2) := \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^k B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2), \quad (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$$

und erhalte in jedem Tangentialraum eine Bézier-Fläche.

3. Bilde die vier Bézier-Flächen zurück auf die Mannigfaltigkeit ab

$$\begin{aligned} q^1(t_1, t_2) &:= \exp_{b_{0,0}}(v^1(t_1, t_2)), \\ q^2(t_1, t_2) &:= \exp_{b_{K,0}}(v^2(t_1, t_2)), \\ q^3(t_1, t_2) &:= \exp_{b_{0,K}}(v^3(t_1, t_2)), \\ q^4(t_1, t_2) &:= \exp_{b_{K,K}}(v^4(t_1, t_2)), \quad (t_1, t_2) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

4. Typ I: Berechne den gewichteten geodätischen Durchschnitt der vier Flächen

$$\begin{aligned} \beta_K^I(t_1, t_2) &:= \text{av}[(q^1(t_1, t_2), q^2(t_1, t_2), q^3(t_1, t_2), q^4(t_1, t_2)), \\ &\quad ((1 - w(t_1))(1 - w(t_2)), w(t_1)(1 - w(t_2)), (1 - w(t_1))w(t_2), w(t_1)w(t_2))]. \end{aligned}$$

Typ II: Wende den ersten Schritt des de Casteljau Algorithmus zunächst in vertikale und anschließend in horizontale Richtung an, um die Flächen zu verrechnen

$$\begin{aligned} \text{av}_{1,2}(t_1, t_2) &:= \text{av}[(q^1(t_1, t_2), q^2(t_1, t_2)), (1 - w(t_1), w(t_1))], \\ \text{av}_{3,4}(t_1, t_2) &:= \text{av}[(q^3(t_1, t_2), q^4(t_1, t_2)), (1 - w(t_1), w(t_1))], \\ \beta_K^{II}(t_1, t_2) &:= \text{av}[(\text{av}_{1,2}(t_1, t_2), \text{av}_{3,4}(t_1, t_2)), (1 - w(t_2), w(t_2))]. \end{aligned}$$

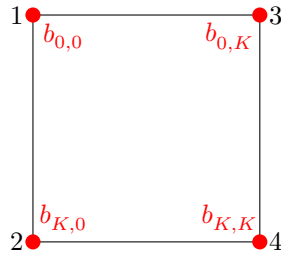


Abbildung 4: Veranschaulichung der Nummerierung. Die Eckpunkte des Patches sind in rot und die Nummerierung der Ecken in schwarz dargestellt.

Bemerkung 3.22. *Im letzten Schritt des Algorithmus von Typ II wird der erste Schritt des de Casteljau Algorithmus in zwei Richtungen angewendet. Er wird zunächst vertikal und dann horizontal berechnet. Man kann allerdings auch den ersten Schritt des de Casteljau Algorithmus erst horizontal und dann vertikal anwenden. Dies führt im Allgemeinen nicht zu den gleichen Ergebnissen. Im Folgenden wird sich auf den Fall beschränkt, indem der erste Schritt des de Casteljau Algorithmus erst vertikal und dann horizontal angewendet wird. Die nachfolgenden Beweise funktionieren allerdings auch für den anderen Fall.*

Im letzten Schritt des Algorithmus wird der gewichtete geodätische Durchschnitt berechnet oder der erste Schritt des de Casteljau Algorithmus wird zweimal angewendet. Die Bézier-Fläche soll stetig differenzierbar sein, insbesondere wenn mehrere Bézier-Flächen miteinander verbunden werden. Dafür müssen die Bézier-Flächen und die Normalenableitungen der einzelnen Patches an den Schnittflächen von jeweils zwei Patches übereinstimmen (rote Kante in Abbildung 5). Dies kann man erreichen, indem die vier verschiedenen Flächen je nach Nähe zu den Eckkontrollpunkten unterschiedlich gewichtet werden, sodass an der Kante bzw. dem Rand eines Patches jeweils nur die Flächen der Eckkontrollpunkte berücksichtigt werden, die auf der Kante liegen (rote Kontrollpunkte in Abbildung 5).

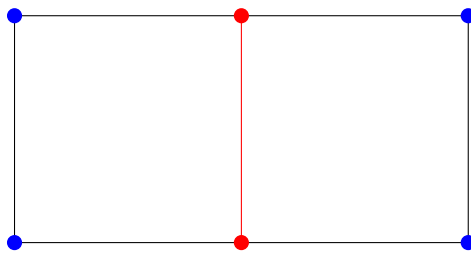


Abbildung 5: Zwei Patches. Eckkontrollpunkte in rot bzw blau. Schnittfläche der beiden Patches in rot.

Die Gewichte müssen dementsprechend so gewählt werden, dass die Normalenableitungen übereinstimmen und an den Rändern nur die Flächen der Eckkontrollpunkte des Randes berücksichtigt werden. Die Frage ist allerdings, wie genau die Gewichte gewählt werden sollen. Betrachte dazu den folgenden Spezialfall in 1D im euklidischen Raum:

Angenommen die linke und rechte Bézier-Kurve sind jeweils konstante Funktionen. Sei $B_-(t) = A$ die linke Bézier-Kurve und $B_+(t) = C$ die rechte Bézier-Kurve, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} B(t) &:= \text{av} [(B_-(t), B_+(t)), (1 - w(t), w(t))] \\ &= \text{av} [(A, C), (1 - w(t), w(t))] \\ &= (1 - w(t))A + w(t)C \end{aligned}$$

Gesucht ist ein Polynom $w(t)$, sodass die Randbedingungen erfüllt sind und die Kurvenkrümmung minimiert wird

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad (17)$$

$$w(1) = 1, \quad w'(1) = 0 \quad \text{und} \quad (18)$$

$$\int_0^1 \|B''(t)\|^2 dt \quad \text{ist minimal.}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|B''(t)\|^2 dt &= \int_0^1 w''(t)^2 (C - A)^2 dt = (C - A)^2 \int_0^1 w''(t)^2 dt \\ &\Rightarrow \text{minimiere } \int_0^1 w''(t)^2 dt \quad \text{so, dass (17) und (18) gilt.} \\ &\Rightarrow w'''(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]. \\ &\Rightarrow w(t) = 1 - 2(t - 1)^2(t + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Die Kurvenkrümmung soll minimiert werden, damit die resultierende Bézier-Kurve möglichst glatt ist.

In Abbildung 6 ist Daten-Fitting mit unterschiedlichen Gewichten dargestellt, um die Auswirkungen zu vergleichen. Dabei wurde eine Kurve im Parametrisierungsgebiet durch die Bézier-Fläche von Typ II auf die Sphäre übertragen. Man sieht, dass die drei Bézier-Flächen jeweils stetig sind, da für alle drei Gewichte $w(0) = 0$ und $w(1) = 1$ gilt. Die magentafarbene Kurve macht an dem linken Rand eines Patches jeweils einen starken Knick und sieht damit nicht stetig differenzierbar aus. Die Normalenableitungen an den Rändern stimmen auch nur für die blaue Bézier-Fläche überein, sodass nur diese stetig differenzierbar ist. Die grüne Bézier-Fläche macht zwar keinen Knick und sieht stetig differenzierbar aus. Sie ist allerdings nicht stetig differenzierbar, wie man nachrechnen kann und sie hat eine höhere Krümmungsenergie als die blaue Bézier-Fläche. Das liegt daran, dass das Gewicht der blauen Bézier-Fläche die Kurvenkrümmung minimiert.

Sei im Folgenden $w(t) = 1 - 2(t - 1)^2(t + \frac{1}{2})$.

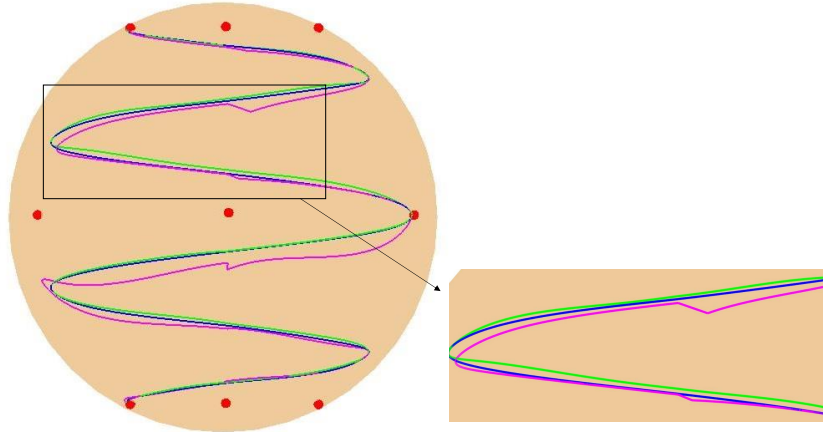


Abbildung 6: Daten-Fitting einer Kurve im Parametrisierungsgebiet, die durch die Bézier-Fläche von Typ II mit unterschiedlichen Gewichten auf die Sphäre übertragen wurde. Die kubischen Bézier-Flächen wurden jeweils zu 2000×2000 Zeitpunkten berechnet. Die Datenpunkte sind in rot dargestellt. Für die grüne Bézier-Fläche wurde das Gewicht $w(t) = t^5$, für die magentafarbene Bézier-Fläche das Gewicht $w(t) = 1 - (t - 1)^3$ und für die blaue Bézier-Fläche das Gewicht $w(t) = 1 - 2(t - 1)^2(t + \frac{1}{2})$ gewählt. Die Kontrollpunkte wurden mit Algorithmus 1 berechnet, siehe Kapitel 4.

Wenn man diesen Algorithmus nun anwendet, hängt es sehr von der Mannigfaltigkeit ab, wie schnell er ist. Denn je nachdem, ob die Exponentialabbildung und der Logarithmus durch eine explizite Formel gegeben sind oder zur Berechnung jedes Mal ein Optimierungsproblem gelöst werden muss, kann die Zeit für die Berechnung sehr variieren. Wenn man eine Bézier-Fläche von Grad K für t Zeitpunkte auswerten will, müssen

- $4K^2$ Logarithmen für Typ I und $4K^2 + 3t$ Logarithmen für Typ II,
- $4t$ Exponentialabbildungen für Typ I und $7t$ Exponentialabbildungen für Typ II

berechnet werden.

Die Differenz von $3t$ Exponential- und Logarithmus-Berechnungen zwischen Typ I und Typ II ergibt sich daraus, dass das Optimierungsproblem von Typ I im vierten Schritt bei Typ II durch die Benutzung von dem Logarithmus und der Exponentialabbildung ersetzt wird. Dadurch müssen zwar bei Typ II mehr Exponentialabbildungen und Logarithmen berechnet werden, der Algorithmus ist aber trotzdem schneller (zumindest wenn eine explizite Formel für die Exponentialabbildung und den Logarithmus vorliegt), da kein aufwändiges Optimierungsproblem gelöst werden muss.

Satz 3.23. Wenn man die Definition der verallgemeinerten Bézier-Fläche β_K^Y , $Y = I, II$ im euklidischen Raum anwendet, stimmt sie mit der Definition der normalen Bézier-Fläche β_K überein.

Beweis. Seien $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,K}$ Kontrollpunkte im \mathbb{R}^n . Wende den Algorithmus zur Berechnung der verallgemeinerten Bézier-Fläche an:

1. Zunächst werden die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,K}$ in die Tangentialebene der vier Eckkontrollpunkte $b_{0,0}, b_{K,0}, b_{0,K}, b_{K,K}$ abgebildet

$$\begin{aligned} v_{i,j}^1 &:= \log_{b_{0,0}}(b_{i,j}) = b_{i,j} - b_{0,0} \\ v_{i,j}^2 &:= \log_{b_{K,0}}(b_{i,j}) = b_{i,j} - b_{K,0} \\ v_{i,j}^3 &:= \log_{b_{0,K}}(b_{i,j}) = b_{i,j} - b_{0,K} \\ v_{i,j}^4 &:= \log_{b_{K,K}}(b_{i,j}) = b_{i,j} - b_{K,K} \quad \text{für } i, j = 0, \dots, K. \end{aligned}$$

2. Wende de Casteljaus Algorithmus in den vier Tangentialebenen an:

$$\begin{aligned} v^1(t_1, t_2) &:= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^1 B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K (b_{i,j} - b_{0,0}) B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) - b_{0,0} \underbrace{\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2)}_{=1} \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) - b_{0,0}, \quad (t_1, t_2) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

Analog für die anderen Eckpunkte ergibt sich

$$\begin{aligned} v^2(t_1, t_2) &:= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) - b_{K,0}, \\ v^3(t_1, t_2) &:= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) - b_{0,K}, \\ v^4(t_1, t_2) &:= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) - b_{K,K}, \quad (t_1, t_2) \in [0, 1]^2. \end{aligned}$$

3. Anschließend werden die vier Bézier-Flächen zurück auf die Mannigfaltigkeit abgebildet:

$$q^1(t_1, t_2) := \exp_{b_{0,0}}(v^1(t_1, t_2)) = v^1(t_1, t_2) + b_{0,0} = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2),$$

$$q^2(t_1, t_2) := \exp_{b_{K,0}}(v^2(t_1, t_2)) = v^2(t_1, t_2) + b_{K,0} = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2),$$

$$q^3(t_1, t_2) := \exp_{b_{0,K}}(v^3(t_1, t_2)) = v^3(t_1, t_2) + b_{0,K} = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2),$$

$$q^4(t_1, t_2) := \exp_{b_{K,K}}(v^4(t_1, t_2)) = v^4(t_1, t_2) + b_{K,K} = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2),$$

$$(t_1, t_2) \in [0, 1]^2.$$

4. Da im euklidischen Raum bereits

$$q^1(t_1, t_2) = q^2(t_1, t_2) = q^3(t_1, t_2) = q^4(t_1, t_2)$$

gilt, folgt direkt

$$\beta_K^I(t_1, t_2) = \beta_K^{II}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K b_{i,j} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) = \beta_K(t_1, t_2).$$

□

3.3 Wohldefiniertheit und Glattheit

Satz 3.24 (\mathcal{C}^1 -Stetigkeit für ein Patch). *Wenn die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ nah genug beieinander liegen, dann sind β_K^I und β_K^{II} wohldefiniert und definieren \mathcal{C}^1 -Flächen auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} .*

Beweis. Sei

$$\epsilon := \max_{i,j,k,l \in \{0,\dots,K\}} d(b_{i,j}, b_{k,l}). \quad (19)$$

Mit Satz 3.19 folgt, dass es für jedes $y \in \mathcal{M}$ eine zulässige multigeodätisch konvexe Hülle gibt. Wenn die Kontrollpunkte nah genug beieinander liegen, kann U nach dem Beweis von Satz 3.19 so gewählt werden, dass

$$B_{\sqrt{3}\epsilon}(b_{i,j}) \subseteq U \quad \forall i, j = 0, \dots, K.$$

U ist zulässig und damit ist der gewichtete geodätische Durchschnitt zwischen endlich vielen Punkten in U eindeutig und hängt stetig differenzierbar von den Punkten und den Gewichten ab. Damit ist insbesondere die Geodätische zwischen zwei Punkten in U eindeutig. Daraus folgt, dass die Exponentialabbildung und der Logarithmus in U eindeutig und damit stetig differenzierbar in U sind.

Es wird gezeigt, dass die einzelnen Schritte im Algorithmus jeweils stetig differenzierbar sind und damit sind dann auch β_K^I und β_K^{II} stetig differenzierbar. Schritt 1-3 wird nur für den Eckpunkt $b_{0,0}$ gezeigt, da die anderen Fälle analog sind.

1. Im ersten Schritt des Algorithmus werden die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}\}_{i,j=0,\dots,K}$ mittels des Logarithmus auf die Tangentialebene der vier Eckpunkte abgebildet

$$v_{i,j}^1 := \log_{b_{0,0}}(b_{i,j}).$$

Dieser Schritt ist stetig differenzierbar, da der Logarithmus in U stetig differenzierbar ist.

2. In jedem Tangentialraum wird der Casteljau Algorithmus angewendet

$$v^1(t_1, t_2) := \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^1 B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2), \quad (t_1, t_2) \in [0, 1]^2.$$

Die vier Tangentialräume sind jeweils euklidische Räume und damit ist der Casteljau Algorithmus stetig differenzierbar, da er zu jedem Zeitpunkt eine Konvexkombination von Tangentialvektoren ist, die stetig differenzierbar von t_1 und t_2 abhängt.

3. Die vier Flächen werden mittels der Exponentialabbildung zurück auf die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} abgebildet

$$q^1(t_1, t_2) := \exp_{b_{0,0}}(v^1(t_1, t_2)).$$

Zeige, dass $\forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ $q^1(t_1, t_2)$ in U liegt.

Betrachte dazu die Riemannsche Distanz von $q^1(t_1, t_2)$ und $b_{0,0}$. Aus der Definition der Riemannschen Distanz und der Exponentialabbildung folgt direkt $d^2(b_{0,0}, \exp_{b_{0,0}}(v^1)(t_1, t_2)) = g_{b_{0,0}}(v^1(t_1, t_2), v^1(t_1, t_2))$ und damit gilt für $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$

$$\begin{aligned} d^2(b_{0,0}, q^1(t_1, t_2)) &= d^2(b_{0,0}, \exp_{b_{0,0}}(v^1)(t_1, t_2)) = g_{b_{0,0}}(v^1(t_1, t_2), v^1(t_1, t_2)) \\ &= g_{b_{0,0}}\left(\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^1 B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2), \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^1 B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2)\right) \\ &= \left| \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) B_{k,K}(t_1) B_{l,K}(t_2) g_{b_{0,0}}(v_{i,j}^1, v_{k,l}^1) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) B_{k,K}(t_1) B_{l,K}(t_2) |g_{b_{0,0}}(v_{i,j}^1, v_{k,l}^1)|. \end{aligned}$$

Schätze $|g_{b_{0,0}}(v_{i,j}^1, v_{k,l}^1)|$ ab.

Im Tangentialraum von $b_{0,0}$ gilt für $i, j, k, l \in \{0, \dots, K\}$

$$\begin{aligned} \|v_{i,j}^1 - v_{k,l}^1\|_{g_{b_{0,0}}} &\leq \underbrace{\|v_{i,j}^1\|_{g_{b_{0,0}}}}_{=d(b_{0,0}, b_{i,j}) \stackrel{(19)}{\leq} \epsilon} + \underbrace{\|v_{k,l}^1\|_{g_{b_{0,0}}}}_{=d(b_{0,0}, b_{k,l}) \stackrel{(19)}{\leq} \epsilon} \\ &\Rightarrow \sqrt{g_{b_{0,0}}(v_{i,j}^1 - v_{k,l}^1, v_{i,j}^1 - v_{k,l}^1)} \leq 2\epsilon \\ &\Rightarrow \left| \underbrace{\|v_{i,j}^1\|_{g_{b_{0,0}}}^2}_{\stackrel{(19)}{\leq} \epsilon^2} + \underbrace{\|v_{k,l}^1\|_{g_{b_{0,0}}}^2}_{\stackrel{(19)}{\leq} \epsilon^2} - 2g_{b_{0,0}}(v_{i,j}^1, v_{k,l}^1) \right| \leq 4\epsilon^2 \\ &\Rightarrow |g_{b_{0,0}}(v_{i,j}^1, v_{k,l}^1)| \leq 3\epsilon^2. \end{aligned}$$

Damit kann man $d(b_{0,0}, q^1(t_1, t_2))$ für $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ abschätzen

$$\begin{aligned} d^2(b_{0,0}, q^1(t_1, t_2)) &\leq \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) B_{k,K}(t_1) B_{l,K}(t_2) |g_{b_{0,0}}(v_{i,j}^1, v_{k,l}^1)| \\ &\leq \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) B_{k,K}(t_1) B_{l,K}(t_2) 3\epsilon^2 \\ &= 3\epsilon^2 \underbrace{\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^K B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) B_{k,K}(t_1) B_{l,K}(t_2)}_{=1} = 3\epsilon^2. \end{aligned}$$

Also gilt $d(b_{0,0}, q^1(t_1, t_2)) \leq \sqrt{3}\epsilon \forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ und damit liegen die vier Flächen in $B_{\sqrt{3}\epsilon}(b_{0,0}) \subseteq U$ und da die Exponentialabbildung stetig differenzierbar in U ist, ist auch dieser Schritt stetig differenzierbar.

4. Bei Typ I wird nun der gewichtete geodätische Durchschnitt der vier Flächen berechnet. Dies ist stetig differenzierbar, da die Flächen in U liegen, U zulässig ist und damit der gewichtete geodätische Durchschnitt stetig differenzierbar ist.

Bei Typ II wird zunächst der gewichtete geodätische Durchschnitt der Eckpunkte 1 und 2 und der gewichtete geodätische Durchschnitt der Eckpunkte 3 und 4 berechnet und anschließend der gewichtete geodätische Durchschnitt der resultierenden Punkte. Dies ist stetig differenzierbar, da die vier Flächen in U liegen, U zulässig ist und damit der gewichtete geodätische Durchschnitt stetig differenzierbar ist.

Damit folgt, dass β_K^I und β_K^{II} wohldefiniert sind und \mathcal{C}^1 -Flächen auf der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} definieren. \square

3.4 C_0 -Patching

Nun sollen mehrere Patches betrachtet werden. Führe dazu folgende Schreibweisen ein:

Für $(M + 1) \times (N + 1)$ Patches sei

$$b_{i,j}^{m,n} \quad i, j = 0, \dots, K, \quad (m, n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$$

der Kontrollpunkt $b_{i,j}$ des Patches (m, n) , siehe Abbildung 7.

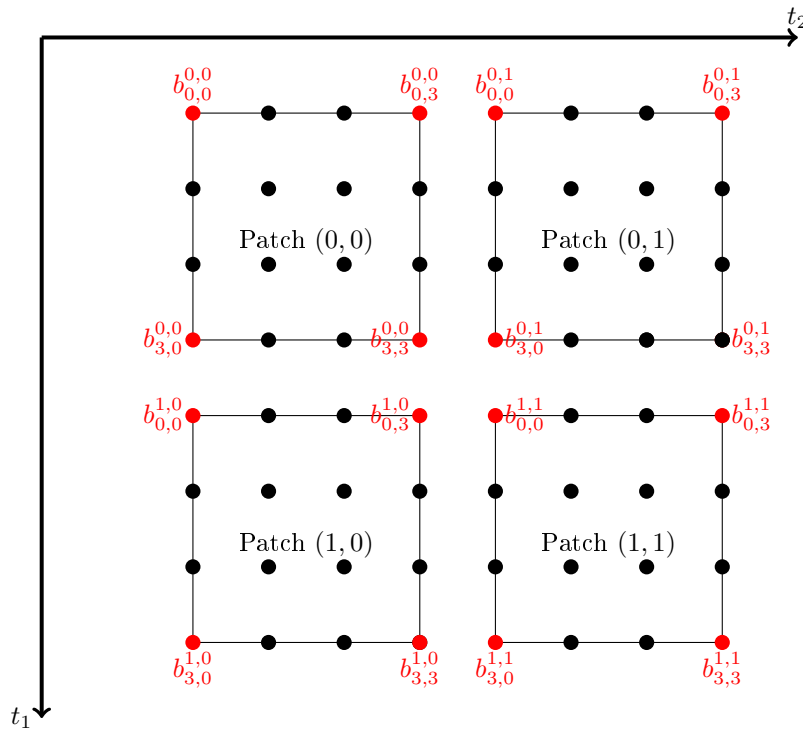


Abbildung 7: Verdeutlichung der Beschriftung der Kontrollpunkte für mehrere Patches für eine kubische Bézier-Fläche. Die Eckkontrollpunkte sind in rot und alle anderen Kontrollpunkte sind in schwarz dargestellt.

Die Variablen im Algorithmus werden wie folgt angepasst:

1. In Schritt 1 werden die Variablen in die Tangentialräume der Eckkontrollpunkte abgebildet. Sei

$$v_{i,j}^{(m,n,k)} \quad i, j = 0, \dots, K, \quad (m, n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}, \quad k \in \{1, \dots, 4\}$$

der Kontrollpunkt $b_{i,j}$ des Patches (m, n) in dem Tangentialraum des Kontrollpunktes der Ecke k . Also

$$v_{i,j}^{(m,n,1)} := \log_{b_{0,0}^{m,n}} (b_{i,j}^{m,n}),$$

$$v_{i,j}^{(m,n,2)} := \log_{b_{K,0}^{m,n}} (b_{i,j}^{m,n}),$$

$$v_{i,j}^{(m,n,3)} := \log_{b_{0,K}^{m,n}} (b_{i,j}^{m,n}),$$

$$v_{i,j}^{(m,n,4)} := \log_{b_{K,K}^{m,n}} (b_{i,j}^{m,n})$$

für $i, j = 0, \dots, K, \quad (m, n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$.

2. In Schritt 2 wird in jedem Tangentialraum de Casteljaus Algorithmus angewendet.

Für das Patch (m, n) definiere

$$v^{(m,n,k)}(t_1, t_2) := \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(m,n,k)} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(t_2) \quad \text{für } t_1, t_2 \in [0, 1], \quad k = 1, \dots, 4.$$

$v^{(m,n,k)}(t_1, t_2)$ ist ein Vektor im Tangentialraum des Eckkontrollpunktes des Patches (m, n) in der Ecke k .

3. In Schritt 3 werden die vier Bézier-Flächen wieder zurück auf die Mannigfaltigkeit abgebildet. Definiere

$$q^{(m,n,1)}(t_1, t_2) := \exp_{b_{0,0}^{m,n}} \left(v^{(m,n,1)}(t_1, t_2) \right),$$

$$q^{(m,n,2)}(t_1, t_2) := \exp_{b_{K,0}^{m,n}} \left(v^{(m,n,2)}(t_1, t_2) \right),$$

$$q^{(m,n,3)}(t_1, t_2) := \exp_{b_{0,K}^{m,n}} \left(v^{(m,n,3)}(t_1, t_2) \right),$$

$$q^{(m,n,4)}(t_1, t_2) := \exp_{b_{K,K}^{m,n}} \left(v^{(m,n,4)}(t_1, t_2) \right), \quad (t_1, t_2) \in [0, 1]^2.$$

4. In Schritt 4 wird für Typ I der gewichtete geodätische Durchschnitt der vier Bézier-Flächen berechnet, hierfür werden keine weiteren Definitionen benötigt.

Bei Typ II wird der erste Schritt des de Casteljaus Algorithmus in zwei Richtungen angewendet, um die Bézier-Flächen zu verrechnen. Definiere für die Anwendung des ersten Schritts des de Casteljaus Algorithmus in die vertikale Richtung

$$\text{av}_{i,j}^{m,n}(t_1, t_2) := \text{av} \left[\left(q^{(m,n,i)}(t_1, t_2), q^{(m,n,j)}(t_1, t_2) \right), (1 - w(t_1), w(t_1)) \right], \quad (i, j) \in \{(1, 2), (3, 4)\}.$$

Definition 3.25 (Spline für verallgemeinerte Bézier-Flächen). Für mehrere Patches $(m, n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$ definiere die zusammengesetzte verallgemeinerten Bézier-Flächen \mathcal{B} von Typ I und II via

$$\mathcal{B}_K^Y : [0, M] \times [0, N] \rightarrow \mathcal{M}$$

$$(t_1, t_2) \mapsto \beta_K^Y \left(t_1 - m, t_2 - n; (b_{i,j}^{m,n})_{i,j=0,\dots,K} \right), \quad m = \lfloor t_1 \rfloor, \quad n = \lfloor t_2 \rfloor \quad (20)$$

mit $Y = I, II$.

Lemma 3.26. Wenn die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}^{m,n}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ für $(m, n) \in \{(0, 0), (0, 1)\}$ nah genug beieinander liegen und

$$b_{j,K}^{0,0} = b_{j,0}^{0,1} \quad \forall j = 0, \dots, K, \quad (21)$$

$$b_{K,j}^{0,0} = b_{0,j}^{1,0} \quad \forall j = 0, \dots, K \quad (22)$$

gilt, dann folgt

$$q^{(0,0,3)}(t_1, 1) = q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \quad \text{und}$$

$$q^{(0,0,4)}(t_1, 1) = q^{(0,1,2)}(t_1, 0) \quad \forall t_1 \in [0, 1].$$

Beweis. Da die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}^{m,n}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ für $(m, n) \in \{(0, 0), (0, 1)\}$ nah genug beieinander liegen, ist die Exponentialabbildung eindeutig und es gilt

$$\begin{aligned} q^{(0,0,3)}(t_1, 1) &= \exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)}(t_1, 1) \right) \\ &= \exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,0,3)} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(1) \right) = \exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(\sum_{i=0}^K v_{i,K}^{(0,0,3)} B_{i,K}(t_1) \right) \\ &= \exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(\sum_{i=0}^K \log_{b_{0,K}^{0,0}} \left(b_{i,K}^{0,0} \right) B_{i,K}(t_1) \right) \stackrel{(21)}{=} \exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(\sum_{i=0}^K \log_{b_{0,0}^{0,1}} \left(b_{i,0}^{0,1} \right) B_{i,K}(t_1) \right) \\ &= \exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(\sum_{i=0}^K v_{i,0}^{(0,1,1)} B_{i,K}(t_1) \right) = \exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(\sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,1,1)} B_{i,K}(t_1) B_{j,K}(0) \right) \\ &= \exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,1)}(t_1, 0) \right) = q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \end{aligned}$$

Analog folgt mit (22) $q^{(0,0,4)}(t_1, 1) = q^{(0,1,2)}(t_1, 0)$. □

Satz 3.27 (C_0 -Stetigkeit der zusammengesetzten Bézier-Flächen). Die zusammengesetzten Bézier-Flächen \mathcal{B}_K^I und \mathcal{B}_K^{II} , definiert wie in (20), sind stetig, wenn die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}^{m,n}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ für jedes $(m, n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$ nah genug beieinander liegen und

$$\begin{aligned} b_{j,K}^{m,n} &= b_{j,0}^{m,n+1} \quad \forall j = 0, \dots, K, \quad m = 0, \dots, M, \quad n = 0, \dots, N-1, \\ b_{K,j}^{m,n} &= b_{0,j}^{m+1,n} \quad \forall j = 0, \dots, K, \quad m = 0, \dots, M-1, \quad n = 0, \dots, N \end{aligned} \quad (23)$$

gilt.

Beweis. Mit Satz 3.24 folgt, dass die einzelnen Patches (m, n) jeweils stetig sind. Demnach muss nur gezeigt werden, dass die Schnittstelle zwischen den Domänen, d.h. für $t_1 \in \mathbb{N}$ oder $t_2 \in \mathbb{N}$, stetig ist. Betrachte dazu nur die Patches $(0, 0)$ und $(0, 1)$. Für alle anderen Patches, sowohl in t_1 - als auch in t_2 -Richtung funktioniert der Beweis analog. Es muss gezeigt werden, dass

$$\beta_K^Y \left(t_1, 1; \left(b_{i,j}^{0,0} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) = \beta_K^Y \left(t_1, 0; \left(b_{i,j}^{0,1} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \quad \forall t_1 \in [0, 1], \quad Y = I, II$$

gilt.

Mit Lemma 3.26 folgt für die Bézier-Fläche von Typ I

$$\begin{aligned} & \beta_K^I \left(t_1, 1; \left(b_{i,j}^{0,0} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \\ &= \text{av}[(q^{(0,0,1)}(t_1, 1), q^{(0,0,2)}(t_1, 1), q^{(0,0,3)}(t_1, 1), q^{(0,0,4)}(t_1, 1)), (0, 0, 1 - w(t_1), w(t_1))] \\ &= \text{av}[(q^{(0,0,3)}(t_1, 1), q^{(0,0,4)}(t_1, 1)), (1 - w(t_1), w(t_1))] \\ &\stackrel{3.26}{=} \text{av}[(q^{(0,1,1)}(t_1, 0), q^{(0,1,2)}(t_1, 0)), (1 - w(t_1), w(t_1))] \\ &= \text{av}[(q^{(0,1,1)}(t_1, 0), q^{(0,1,2)}(t_1, 0), q^{(0,1,3)}(t_1, 0), q^{(0,1,4)}(t_1, 0)), (1 - w(t_1), w(t_1), 0, 0)] \\ &= \beta_K^I \left(t_1, 0; \left(b_{i,j}^{0,1} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \quad \forall t_1 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Damit ist die Schnittstelle zwischen den beiden Bézier-Flächen von Typ I stetig und somit ist die zusammengesetzte Bézier-Fläche von Typ I stetig.

Für die Bézier-Fläche von Typ II folgt mit Lemma 3.26

$$\begin{aligned} & \beta_K^{II} \left(t_1, 1; \left(b_{i,j}^{0,0} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \\ &= \text{av} \left[\left(\text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, 1), \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, 1) \right), (0, 1) \right] = \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, 1) \\ &= \text{av} \left[\left(q^{(0,0,3)}(t_1, 1), q^{(0,0,4)}(t_1, 1) \right), (1 - w(t_1), w(t_1)) \right] \\ &\stackrel{3.26}{=} \text{av} \left[\left(q^{(0,1,1)}(t_1, 0), q^{(0,1,2)}(t_1, 0) \right), (1 - w(t_1), w(t_1)) \right] \\ &= \text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, 1) = \text{av} \left[\left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, 0), \text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, 0) \right), (1, 0) \right] \\ &= \beta_K^{II} \left(t_1, 0; \left(b_{i,j}^{0,1} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \quad \forall t_1 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Damit ist die Schnittstelle zwischen den beiden Bézier-Flächen von Typ II stetig und somit ist die zusammengesetzte Bézier-Fläche von Typ II stetig. \square

3.5 C_1 -Patching

Lemma 3.28. *Wenn die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}^{m,n}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ für jedes $(m,n) \in \{(0,0), (0,1)\}$ nah genug beieinander liegen, die Stetigkeitsbedingung (23) erfüllen und $\forall i = 0, \dots, K$:*

$$\frac{v_{i,K-1}^{(0,0,3)} + v_{i,1}^{(0,1,1)}}{2} = v_{i,K}^{(0,0,3)}, \quad (24)$$

$$\frac{v_{i,K-1}^{(0,0,4)} + v_{i,1}^{(0,1,2)}}{2} = v_{i,K}^{(0,0,4)} \quad (25)$$

gilt, dann folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \right|_{t_2=1} &= \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,1)}(t_1, t_2 - 1) \right|_{t_2=1} \quad \text{und} \\ \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \right|_{t_2=1} &= \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,2)}(t_1, t_2 - 1) \right|_{t_2=1} \quad \forall t_1 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \right|_{t_2=1} &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,0,3)} B_{i,K}(t_1) \left. \frac{d}{dt_2} B_{j,K}(t_2) \right|_{t_2=1} \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,0,3)} B_{i,K}(t_1) K (B_{j-1,K-1}(1) - B_{j,K-1}(1)) \\ &\stackrel{B_{j,K-1}(1)=0}{\forall j \neq K-1} K \sum_{i=0}^K \left(v_{i,K}^{(0,0,3)} - v_{i,K-1}^{(0,0,3)} \right) B_{i,K}(t_1) \underbrace{B_{K-1,K-1}(1)}_{=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,1)}(t_1, t_2 - 1) \right|_{t_2=1} &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,1,1)} B_{i,K}(t_1) \left. \frac{d}{dt_2} B_{j,K}(t_2 - 1) \right|_{t_2=1} \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,1,1)} B_{i,K}(t_1) K (B_{j-1,K-1}(0) - B_{j,K-1}(0)) \\ &\stackrel{B_{j,K-1}(0)=0}{\forall j \neq 0} K \sum_{i=0}^K \left(v_{i,1}^{(0,1,1)} - v_{i,0}^{(0,1,1)} \right) B_{i,K}(t_1) \underbrace{B_{0,K-1}(0)}_{=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \right|_{t_2=1} &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,0,4)} B_{i,K}(t_1) \left. \frac{d}{dt_2} B_{j,K}(t_2) \right|_{t_2=1} \\ &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,0,4)} B_{i,K}(t_1) K (B_{j-1,K-1}(1) - B_{j,K-1}(1)) \\ &\stackrel{B_{j,K-1}(1)=0}{\forall j \neq K-1} K \sum_{i=0}^K \left(v_{i,K}^{(0,0,4)} - v_{i,K-1}^{(0,0,4)} \right) B_{i,K}(t_1) \underbrace{B_{K-1,K-1}(1)}_{=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,2)}(t_1, t_2 - 1) \right|_{t_2=1} &= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,1,2)} B_{i,K}(t_1) \left. \frac{d}{dt_2} B_{j,K}(t_2 - 1) \right|_{t_2=1} \\
&= \sum_{i=0}^K \sum_{j=0}^K v_{i,j}^{(0,1,2)} B_{i,K}(t_1) K (B_{j-1, K-1}(0) - B_{j, K-1}(0)) \\
&\stackrel{\substack{B_{j, K-1}(0)=0 \\ \forall j \neq 0}}{=}}{=} K \sum_{i=0}^K \left(v_{i,1}^{(0,1,2)} - v_{i,0}^{(0,1,2)} \right) B_{i,K}(t_1) \underbrace{B_{0, K-1}(0)}_{=1}
\end{aligned}$$

Mit (23) folgt

$$\begin{aligned}
v_{i,K}^{(0,0,3)} &= \log_{b_{0,0,K}^{0,0}} \left(b_{i,K}^{0,0} \right) \stackrel{(23)}{=} \log_{b_{0,0}^{0,1}} \left(b_{i,0}^{0,1} \right) = v_{i,0}^{(0,1,1)} \quad \text{für } i = 0, \dots, K, \\
v_{i,K}^{(0,0,4)} &= \log_{b_{K,0,K}^{0,0}} \left(b_{i,K}^{0,0} \right) \stackrel{(23)}{=} \log_{b_{K,0}^{0,1}} \left(b_{i,0}^{0,1} \right) = v_{i,0}^{(0,1,2)} \quad \text{für } i = 0, \dots, K.
\end{aligned}$$

Mit dieser Identität und mit (24) und (25) folgt dann

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \right|_{t_2=1} &= \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,1)}(t_1, t_2 - 1) \right|_{t_2=1} \quad \text{und} \\
\left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \right|_{t_2=1} &= \left. \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,2)}(t_1, t_2 - 1) \right|_{t_2=1} \quad \forall t_1 \in [0, 1].
\end{aligned}$$

□

Satz 3.29 (\mathcal{C}^1 -Stetigkeit der zusammengesetzten Bézier-Flächen). *Wenn die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}^{m,n}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ für jedes $(m,n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$ nah genug beieinander liegen, die Stetigkeitsbedingung (23) erfüllen und $\forall i = 0, \dots, K$:*

$$\begin{aligned}
\frac{v_{K-1,i}^{(m,n,2)} + v_{1,i}^{(m+1,n,1)}}{2} &= v_{K,i}^{(m,n,2)}, \\
\frac{v_{K-1,i}^{(m,n,4)} + v_{1,i}^{(m+1,n,3)}}{2} &= v_{K,i}^{(m,n,4)}
\end{aligned} \tag{26}$$

für $m = 0, \dots, M - 1$, $n = 0, \dots, N$ und

$$\begin{aligned}
\frac{v_{i,K-1}^{(m,n,3)} + v_{i,1}^{(m,n+1,1)}}{2} &= v_{i,K}^{(m,n,3)}, \\
\frac{v_{i,K-1}^{(m,n,4)} + v_{i,1}^{(m,n+1,2)}}{2} &= v_{i,K}^{(m,n,4)}
\end{aligned} \tag{27}$$

für $m = 0, \dots, M$, $n = 0, \dots, N - 1$ gilt,

dann ist die verallgemeinerte zusammengesetzte Bézier-Fläche \mathcal{B}_K^Y in (20) für $Y = I, II$ stetig differenzierbar.

Beweis. Sei $K \in \mathbb{N}$ fest. Schreibe zur besseren Lesbarkeit im Folgenden \mathcal{B}^Y , statt \mathcal{B}_K^Y .

Analog wie im Beweis von Satz 3.24 kann man begründen, dass die Exponentialabbildung und der Logarithmus stetig differenzierbar sind, wenn die Kontrollpunkte nah genug beieinander liegen. Des Weiteren folgt mit Satz 3.24 die stetige Differenzierbarkeit des jeweiligen Patches (m, n) . Demnach muss nur gezeigt werden, dass die Schnittstelle zwischen den Domänen stetig differenzierbar ist. Dies gilt, wenn die Normalenableitungen übereinstimmen. Es wird die Normalenableitungen der Schnittstelle von dem Patch $(0, 0)$ mit dem Patch $(0, 1)$ nachgerechnet.

Die Rechnung lässt sich analog für alle anderen Patches in t_2 -Richtung durchführen. Bei dem Beweis in t_1 -Richtung ergeben sich für Typ II leichte Abänderungen, da bei Typ II im letzten Schritt der erste Schritt des de Casteljau Algorithmus zuerst in t_1 -Richtung und dann in t_2 -Richtung angewendet wird. Der Beweis lässt sich allerdings mit genau den gleichen Argumenten durchführen, weswegen sich hier auf den Fall in t_2 -Richtung beschränkt wird.

Typ I

$$b := \mathcal{B}^I(t_1, 1) \stackrel{(23)}{=} \begin{cases} \beta_K^I \left(t_1, 1; \left(b_{i,j}^{0,0} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \\ = \text{av} \left[\left(q^{(0,0,1)}(t_1, 1), q^{(0,0,2)}(t_1, 1), q^{(0,0,3)}(t_1, 1), q^{(0,0,4)}(t_1, 1) \right), \right. \\ \quad \left. \left((1-w(t_1))(1-w(1)), w(t_1)(1-w(1)), (1-w(t_1))w(1), w(t_1)w(1) \right) \right], \\ \beta_K^I \left(t_1, 0; \left(b_{i,j}^{0,1} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \\ = \text{av} \left[\left(q^{(0,1,1)}(t_1, 0), q^{(0,1,2)}(t_1, 0), q^{(0,1,3)}(t_1, 0), q^{(0,1,4)}(t_1, 0) \right), \right. \\ \quad \left. \left((1-w(t_1))(1-w(0)), w(t_1)(1-w(0)), (1-w(t_1))w(0), w(t_1)w(0) \right) \right]. \end{cases}$$

Die Optimalitätsbedingung (14) für die beiden gewichteten geodätischen Durchschnitte führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= (1-w(t_1))(1-w(1))\log_b \left(q^{(0,0,1)}(t_1, 1) \right) + w(t_1)(1-w(1))\log_b \left(q^{(0,0,2)}(t_1, 1) \right) \\ &\quad + (1-w(t_1))w(1)\log_b \left(q^{(0,0,3)}(t_1, 1) \right) + w(t_1)w(1)\log_b \left(q^{(0,0,4)}(t_1, 1) \right) \\ 0 &= (1-w(t_1))(1-w(0))\log_b \left(q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \right) + w(t_1)(1-w(0))\log_b \left(q^{(0,1,2)}(t_1, 0) \right) \\ &\quad + (1-w(t_1))w(0)\log_b \left(q^{(0,1,3)}(t_1, 0) \right) + w(t_1)w(0)\log_b \left(q^{(0,1,4)}(t_1, 0) \right) \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned} F_1(t_1, t_2, b) &:= (1-w(t_1))(1-w(t_2))\log_b \left(q^{(0,0,1)}(t_1, t_2) \right) \\ &\quad + w(t_1)(1-w(t_2))\log_b \left(q^{(0,0,2)}(t_1, t_2) \right) \\ &\quad + (1-w(t_1))w(t_2)\log_b \left(q^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \right) \\ &\quad + w(t_1)w(t_2)\log_b \left(q^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2(t_1, t_2, b) &:= (1 - w(t_1))(1 - w(t_2 - 1)) \log_b \left(q^{(0,1,1)}(t_1, t_2 - 1) \right) \\
&\quad + w(t_1)(1 - w(t_2 - 1)) \log_b \left(q^{(0,1,2)}(t_1, t_2 - 1) \right) \\
&\quad + (1 - w(t_1))w(t_2 - 1) \log_b \left(q^{(0,1,3)}(t_1, t_2 - 1) \right) \\
&\quad + w(t_1)w(t_2 - 1) \log_b \left(q^{(0,1,4)}(t_1, t_2 - 1) \right).
\end{aligned}$$

F_1 und F_2 sind Verkettungen von \mathcal{C}^1 -Funktionen und damit sind sie auch \mathcal{C}^1 -Funktionen. Da $b = \mathcal{B}^I(t_1, 1)$ und $F_1(t_1, 1, b) = 0, F_2(t_1, 1, b) = 0$ gilt, folgt mit dem Impliziten Funktionentheorem, dass die linke und rechte Ableitung von \mathcal{B}^I in Richtung t_2 an der Stelle $(t_1, 1)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \mathcal{B}^I}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^-)} &= -(D_b F_1(t_1, 1, b))^{-1} D_{t_2} F_1(t_1, 1, b), \\
\left. \frac{\partial \mathcal{B}^I}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^+)} &= -(D_b F_2(t_1, 1, b))^{-1} D_{t_2} F_2(t_1, 1, b).
\end{aligned}$$

Für stetige Differenzierbarkeit müssen die Normalenableitungen übereinstimmen. Es muss

$$\left. \frac{\partial \mathcal{B}^I}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^-)} = \left. \frac{\partial \mathcal{B}^I}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^+)}$$

gezeigt werden.

Dies wird in zwei Schritten gezeigt:

1. Zeige als Erstes $D_b F_1(t_1, 1, b) = D_b F_2(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$.
2. Zeige als Zweites $D_{t_2} F_1(t_1, 1, b) = D_{t_2} F_2(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$.

1. Schritt

Es gilt $w(t) = 1 - 2(t - 1)^2(t + \frac{1}{2})$ und damit $w(1) = 1, w(0) = 0$.

Es folgt $\forall b \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
F_1(t_1, 1, b) &= (1 - w(t_1)) \log_b \left(q^{(0,0,3)}(t_1, 1) \right) + w(t_1) \log_b \left(q^{(0,0,4)}(t_1, 1) \right) \\
&\stackrel{3.26}{=} (1 - w(t_1)) \log_b \left(q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \right) + w(t_1) \log_b \left(q^{(0,1,2)}(t_1, 0) \right) = F_2(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1].
\end{aligned}$$

Da also $\forall b \in \mathcal{M}, \forall t_1 \in [0, 1] F_1(t_1, 1, b) = F_2(t_1, 1, b)$ gilt, folgt

$$D_b F_1(t_1, 1, b) = D_b F_2(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1].$$

2. Schritt

Es bleibt zu zeigen, dass $D_{t_2} F_1(t_1, 1, b) = D_{t_2} F_2(t_1, 1, b)$ gilt.

Betrachte $t_2 = 1$. Da

$$w(t) = 1 - 2(t - 1)^2(t + \frac{1}{2}), \quad w'(t) = -4(t - 1)(t + \frac{1}{2}) - 2(t - 1)^2$$

folgt $w(1) = 1, w'(1) = 0$.

Ersetze für bessere Lesbarkeit in der folgenden Rechnung $v^{(0,m,k)}(t_1, t_2)$ durch $v^{(0,m,k)}$ für $k = 1, \dots, 4, m = 0, 1$.

$$\begin{aligned}
D_{t_2} F_1(t_1, t_2, b) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} \left[(1-w(t_1))(1-w(t_2)) \log_b \left(\exp_{b_{0,0}^{0,0}} \left(v^{(0,0,1)} \right) \right) \right. \\
&\quad + w(t_1)(1-w(t_2)) \log_b \left(\exp_{b_{K,0}^{0,0}} \left(v^{(0,0,2)} \right) \right) \\
&\quad + (1-w(t_1))w(t_2) \log_b \left(\exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \right) \\
&\quad \left. + w(t_1)w(t_2) \log_b \left(\exp_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \right) \right] \Big|_{t_2=1} \\
&= -(1-w(t_1))w'(1) \log_b \left(\exp_{b_{0,0}^{0,0}} \left(v^{(0,0,1)} \right) \right) \\
&\quad + (1-w(t_1))(1-w(1)) \frac{d}{dt_2} \log_b \left(\exp_{b_{0,0}^{0,0}} \left(v^{(0,0,1)} \right) \right) \Big|_{t_2=1} \\
&\quad - w(t_1)w'(1) \log_b \left(\exp_{b_{K,0}^{0,0}} \left(v^{(0,0,2)} \right) \right) \\
&\quad + w(t_1)(1-w(1)) \frac{d}{dt_2} \log_b \left(\exp_{b_{K,0}^{0,0}} \left(v^{(0,0,2)} \right) \right) \Big|_{t_2=1} \\
&\quad + (1-w(t_1))w'(1) \log_b \left(\exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \right) \\
&\quad + (1-w(t_1))w(1) \frac{d}{dt_2} \log_b \left(\exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \right) \Big|_{t_2=1} \\
&\quad + w(t_1)w'(1) \log_b \left(\exp_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \right) \\
&\quad + w(t_1)w(1) \frac{d}{dt_2} \log_b \left(\exp_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \right) \Big|_{t_2=1} \\
&\stackrel{w(1)=1}{w'(1)=0} = (1-w(t_1)) \frac{d}{dt_2} \log_b \left(\exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \right) \Big|_{t_2=1} \\
&\quad + w(t_1) \frac{d}{dt_2} \log_b \left(\exp_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \right) \Big|_{t_2=1} \\
&= (1-w(t_1)) \log'_b \left(\exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \right) \exp'_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,3)} \Big|_{t_2=1} \\
&\quad + w(t_1) \log'_b \left(\exp_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \right) \exp'_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,4)} \Big|_{t_2=1}
\end{aligned}$$

Mit $w(0) = 0, w'(0) = 0$ folgt analog

$$\begin{aligned}
D_{t_2} F_2(t_1, t_2, b) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} \left[(1-w(t_1))(1-w(t_2-1)) \log_b \left(\exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,1)} \right) \right) \right. \\
&\quad + w(t_1)(1-w(t_2-1)) \log_b \left(\exp_{b_{K,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,2)} \right) \right) \\
&\quad + (1-w(t_1))w(t_2-1) \log_b \left(\exp_{b_{0,K}^{0,1}} \left(v^{(0,1,3)} \right) \right) \\
&\quad \left. + w(t_1)w(t_2-1) \log_b \left(\exp_{b_{K,K}^{0,1}} \left(v^{(0,1,4)} \right) \right) \right] \Big|_{t_2=1} \\
&= (1-w(t_1)) \log'_b \left(\exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,1)} \right) \right) \exp'_{b_{0,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,1)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,1)} \Big|_{t_2=1} \\
&\quad + w(t_1) \log'_b \left(\exp_{b_{K,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,2)} \right) \right) \exp'_{b_{K,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,2)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,2)} \Big|_{t_2=1}.
\end{aligned}$$

Nach dem Beweis von Lemma 3.26 gilt nicht nur

$$q^{(0,0,3)}(t_1, 1) = q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \quad \text{und} \quad q^{(0,0,4)}(t_1, 1) = q^{(0,1,2)}(t_1, 0),$$

sondern auch

$$v^{(0,0,3)}(t_1, 1) = v^{(0,1,1)}(t_1, 0) \quad \text{und} \quad v^{(0,0,4)}(t_1, 1) = v^{(0,1,2)}(t_1, 0).$$

Da nach (23) außerdem $b_{0,K}^{0,0} = b_{0,0}^{0,1}$ und $b_{K,K}^{0,0} = b_{K,0}^{0,1}$ gilt, bleibt, um

$$D_{t_2} F_1(t_1, 1, b) = D_{t_2} F_2(t_1, 1, b)$$

zu beweisen, nur noch

$$\frac{d}{dt_2} v^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=1} = \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,1)}(t_1, t_2-1) \Big|_{t_2=1}, \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt_2} v^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=1} = \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,2)}(t_1, t_2-1) \Big|_{t_2=1} \quad (29)$$

zu zeigen. Dies folgt mit Lemma 3.28 und damit folgt die stetige Differenzierbarkeit der zusammengesetzten Bézier-Fläche von Typ I.

Typ II

$$b := \mathcal{B}^{II}(t_1, 1) \stackrel{(23)}{=} \begin{cases} \beta_K^{II} \left(t_1, 1; \left(b_{i,j}^{0,0} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \\ = \text{av} \left[\left(\text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, 1), \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, 1) \right), (1-w(1), w(1)) \right] = \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, 1), \\ \beta_K^{II} \left(t_1, 0; \left(b_{i,j}^{0,1} \right)_{i,j=0,\dots,K} \right) \\ = \text{av} \left[\left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, 0), \text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, 0) \right), (1-w(0), w(0)) \right] = \text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, 0). \end{cases}$$

Die Optimalitätsbedingung (14) für die beiden gewichteten geodätischen Durchschnitte führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - w(1))\log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, 1) \right) + w(1)\log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, 1) \right), \\ 0 &= (1 - w(0))\log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, 0) \right) + w(0)\log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, 0) \right). \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned} F_3(t_1, t_2, b) &:= (1 - w(t_2))\log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, t_2) \right) + w(t_2)\log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \right), \\ F_4(t_1, t_2, b) &:= (1 - w(t_2 - 1))\log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) + w(t_2 - 1)\log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right). \end{aligned}$$

F_3 und F_4 sind Verkettungen von \mathcal{C}^1 -Funktionen und damit sind sie auch \mathcal{C}^1 -Funktionen. Da $b = \mathcal{B}^{II}(t_1, 1)$ und $F_3(t_1, 1, b) = 0, F_4(t_1, 1, b) = 0$ gilt, folgt mit dem Impliziten Funktionentheorem, dass die linke und rechte Ableitung von \mathcal{B}^{II} in Richtung t_2 an der Stelle $(t_1, 1)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{B}^{II}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^-)} &= -(D_b F_3(t_1, 1, b))^{-1} D_{t_2} F_3(t_1, 1, b), \\ \left. \frac{\partial \mathcal{B}^{II}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^+)} &= -(D_b F_4(t_1, 1, b))^{-1} D_{t_2} F_4(t_1, 1, b). \end{aligned}$$

Für stetige Differenzierbarkeit müssen die Normalenableitungen übereinstimmen. Es muss

$$\left. \frac{\partial \mathcal{B}^{II}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^-)} = \left. \frac{\partial \mathcal{B}^{II}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^+)}$$

gezeigt werden.

Dies wird in zwei Schritten gezeigt:

1. Zeige als Erstes $D_b F_3(t_1, 1, b) = D_b F_4(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$.
2. Zeige als Zweites $D_{t_2} F_3(t_1, 1, b) = D_{t_2} F_4(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$.

1. Schritt

Es gilt $w(t) = 1 - 2(t - 1)^2(t + \frac{1}{2})$ und damit $w(1) = 1, \quad w(0) = 0$.

Es folgt $\forall b \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} F_3(t_1, 1, b) &= \log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, 1) \right) \\ &= \log_b \left(\exp_{q^{(0,0,3)}(t_1, 1)} \left(w(t_1) \log_{q^{(0,0,3)}(t_1, 1)} \left(q^{(0,0,4)}(t_1, 1) \right) \right) \right) \\ &\stackrel{3.26}{=} \log_b \left(\exp_{q^{(0,1,1)}(t_1, 0)} \left(w(t_1) \log_{q^{(0,1,1)}(t_1, 0)} \left(q^{(0,1,2)}(t_1, 0) \right) \right) \right) \\ &= \log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, 0) \right) = F_4(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Da also $\forall b \in \mathcal{M}, \forall t_1 \in [0, 1] \quad F_3(t_1, 1, b) = F_4(t_1, 1, b)$ gilt, folgt

$$D_b F_3(t_1, 1, b) = D_b F_4(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1].$$

2. Schritt

Zeige, dass $D_{t_2}F_3(t_1, 1, b) = D_{t_2}F_4(t_1, 1, b) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$ gilt.

Betrachte $t_2 = 1$. Da

$$w(t) = 1 - 2(t-1)^2\left(t + \frac{1}{2}\right), \quad w'(t) = -4(t-1)\left(t + \frac{1}{2}\right) - 2(t-1)^2$$

gilt, folgt $w(1) = 1, w'(1) = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} D_{t_2}F_3(t_1, t_2, b) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} \left[(1 - w(t_2)) \log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, t_2) \right) + w(t_2) \log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \right) \right] \Big|_{t_2=1} \\ &= \left[-w'(t_2) \log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, t_2) \right) + (1 - w(t_2)) \log'_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, t_2) \right) \frac{d}{dt_2} \text{av}_{1,2}^{0,0}(t_1, t_2) \right. \\ &\quad \left. + w'(t_2) \log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \right) + w(t_2) \log'_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \right) \frac{d}{dt_2} \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \right] \Big|_{t_2=1} \\ &\stackrel{\substack{w(1)=1 \\ w'(1)=0}}{=} \log'_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \right) \frac{d}{dt_2} \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=1}. \end{aligned}$$

Mit $w(0) = 0, w'(0) = 0$ folgt analog

$$\begin{aligned} D_{t_2}F_4(t_1, t_2, b) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} \left[(1 - w(t_2 - 1)) \log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) + w(t_2 - 1) \log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) \right] \Big|_{t_2=1} \\ &= \left[-w'(t_2 - 1) \log_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - w(t_2 - 1)) \log'_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) \frac{d}{dt_2} \text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + w'(t_2 - 1) \log_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) \right. \\ &\quad \left. + w(t_2 - 1) \log'_b \left(\text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) \frac{d}{dt_2} \text{av}_{3,4}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right] \Big|_{t_2=1} \\ &\stackrel{\substack{w(0)=0 \\ w'(0)=0}}{=} \log'_b \left(\text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \right) \frac{d}{dt_2} \text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \Big|_{t_2=1}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.26 folgt $\text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, 1) = \text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, 0) =: d$. Definiere

$$\mathcal{F}(t_1, t_2) := \begin{cases} \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) & t_2 \in [0, 1], t_1 \in [0, 1], \\ \text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) & t_2 \in (1, 2], t_1 \in [0, 1]. \end{cases}$$

Es bleibt zu zeigen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_2} \text{av}_{3,4}^{0,0}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} \text{av}_{1,2}^{0,1}(t_1, t_2 - 1) \Big|_{t_2=1} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{F}(t_1, t_2)}{dt_2} \Big|_{(t_1, 1-)} &= \frac{d\mathcal{F}(t_1, t_2)}{dt_2} \Big|_{(t_1, 1+)}. \end{aligned}$$

Die Optimalitätsbedingung (14) für die beiden gewichteten geodätischen Durchschnitte in \mathcal{F} führt zu

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - w(t_1)) \log_d \left(q^{(0,0,3)}(t_1, 1) \right) + w(t_1) \log_d \left(q^{(0,0,4)}(t_1, 1) \right), \\ 0 &= (1 - w(t_1)) \log_d \left(q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \right) + w(t_1) \log_d \left(q^{(0,1,2)}(t_1, 0) \right). \end{aligned}$$

Definiere

$$\begin{aligned} G_1(t_1, t_2, d) &:= (1 - w(t_1)) \log_d \left(q^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \right) + w(t_1) \log_d \left(q^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \right), \\ G_2(t_1, t_2, d) &:= (1 - w(t_1)) \log_d \left(q^{(0,1,1)}(t_1, t_2 - 1) \right) + w(t_1) \log_d \left(q^{(0,1,2)}(t_1, t_2 - 1) \right). \end{aligned}$$

G_1 und G_2 sind Verkettungen von \mathcal{C}^1 -Funktionen und damit sind sie auch \mathcal{C}^1 -Funktionen. Da $G_1(t_1, 1, d) = 0, G_2(t_1, 1, d) = 0$, folgt mit dem Impliziten Funktionentheorem, dass die linke und rechte Ableitung von \mathcal{F} in Richtung t_2 an der Stelle $(t_1, 1)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^-)} &= -(D_d G_1(t_1, 1, d))^{-1} D_{t_2} G_1(t_1, 1, d) \\ \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^+)} &= -(D_d G_2(t_1, 1, d))^{-1} D_{t_2} G_2(t_1, 1, d). \end{aligned}$$

Die Normalenableitungen müssen übereinstimmen. Es muss

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^-)} = \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_2} \right|_{(t_1, 1^+)}$$

gezeigt werden.

Dies wird wieder in zwei Schritten gezeigt:

- A) Zeige als Erstes $D_d G_1(t_1, 1, d) = D_d G_2(t_1, 1, d) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$.
- B) Zeige als Zweites $D_{t_2} G_1(t_1, 1, d) = D_{t_2} G_2(t_1, 1, d) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$.

Schritt 2.A)

Mit Lemma 3.26 folgt $\forall d \in \mathcal{M}, \forall t_1 \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} G_1(t_1, 1, d) &= (1 - w(t_1)) \log_d \left(q^{(0,0,3)}(t_1, 1) \right) + w(t_1) \log_d \left(q^{(0,0,4)}(t_1, 1) \right) \\ &\stackrel{3.26}{=} (1 - w(t_1)) \log_d \left(q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \right) + w(t_1) \log_d \left(q^{(0,1,2)}(t_1, 0) \right) = G_2(t_1, 1, d). \end{aligned}$$

Da demnach für alle $d \in \mathcal{M}, \forall t_1 \in [0, 1]$ $G_1(t_1, 1, d) = G_2(t_1, 1, d)$ gilt, folgt

$$D_d G_1(t_1, 1, d) = D_d G_2(t_1, 1, d) \quad \forall t_1 \in [0, 1].$$

Schritt 2.B)

Zeige, dass $D_{t_2} G_1(t_1, 1, d) = D_{t_2} G_2(t_1, 1, d) \quad \forall t_1 \in [0, 1]$ gilt.

Für bessere Lesbarkeit ersetze in der folgenden Rechnung $v^{(0,m,k)}(t_1, t_2)$ durch $v^{(0,m,k)}$ für $k = 1, \dots, 4, m = 0, 1$.

$$\begin{aligned}
D_{t_2} G_1(t_1, t_2, d) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} \left[(1 - w(t_1)) \log_d \left(\exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \right) + w(t_1) \log_d \left(\exp_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \right) \right] \Big|_{t_2=1} \\
&= \left[(1 - w(t_1)) \log'_d \left(\exp_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \right) \exp'_{b_{0,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,3)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \right. \\
&\quad \left. + w(t_1) \log'_d \left(\exp_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \right) \exp'_{b_{K,K}^{0,0}} \left(v^{(0,0,4)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \right] \Big|_{t_2=1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{t_2} G_2(t_1, t_2, d) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} \left[(1 - w(t_1)) \log_d \left(\exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,1)} \right) \right) + w(t_1) \log_d \left(\exp_{b_{K,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,2)} \right) \right) \right] \Big|_{t_2=1} \\
&= \left[(1 - w(t_1)) \log'_d \left(\exp_{b_{0,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,1)} \right) \right) \exp'_{b_{0,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,1)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,1)}(t_1, t_2 - 1) \right. \\
&\quad \left. + w(t_1) \log'_d \left(\exp_{b_{K,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,2)} \right) \right) \exp'_{b_{K,0}^{0,1}} \left(v^{(0,1,2)} \right) \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,2)}(t_1, t_2 - 1) \right] \Big|_{t_2=1}
\end{aligned}$$

Nach dem Beweis von Lemma 3.26 gilt nicht nur

$$q^{(0,0,3)}(t_1, 1) = q^{(0,1,1)}(t_1, 0) \quad \text{und} \quad q^{(0,0,4)}(t_1, 1) = q^{(0,1,2)}(t_1, 0),$$

sondern auch

$$v^{(0,0,3)}(t_1, 1) = v^{(0,1,1)}(t_1, 0) \quad \text{und} \quad v^{(0,0,4)}(t_1, 1) = v^{(0,1,2)}(t_1, 0).$$

Da nach (23) außerdem $b_{0,K}^{0,0} = b_{0,0}^{0,1}$ und $b_{K,K}^{0,0} = b_{K,0}^{0,1}$ gilt, bleibt, um

$$D_{t_2} G_1(t_1, 1, d) = D_{t_2} G_2(t_1, 1, d)$$

zu beweisen, nur noch

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt_2} v^{(0,0,3)}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,1)}(t_1, t_2 - 1) \Big|_{t_2=1}, \\
\frac{d}{dt_2} v^{(0,0,4)}(t_1, t_2) \Big|_{t_2=1} &= \frac{d}{dt_2} v^{(0,1,2)}(t_1, t_2 - 1) \Big|_{t_2=1}
\end{aligned}$$

zu zeigen.

Dies folgt mit Lemma 3.28 und damit folgt, dass auch Typ II stetig differenzierbar ist. □

Bemerkung 3.30. *Im Allgemeinen ist es sehr schwer Kontrollpunkte $\{b_{i,j}^{m,n}\}_{i,j=0,\dots,K} \in \mathcal{M}$ auf der Mannigfaltigkeit zu finden, sodass ihre Logarithmen die Bedingungen (24) und (25) erfüllen. Um dieses Problem zu umgehen wird bei der Generierung der Kontrollpunkte versucht, die Kontrollpunkte direkt in den vier Tangentialräumen zu berechnen, sodass (24) und (25) erfüllt sind. Beachte, dass sich diese Kontrollpunkte im Allgemeinen unterscheiden werden, da man im Allgemeinen keine Kontrollpunkte finden wird, die die Bedingungen in allen vier Tangentialräumen erfüllen. Nachdem man diese vier verschiedenen*

Versionen der Kontrollpunkte in den einzelnen Tangentialräumen berechnet hat, wird der zweite Schritt des Algorithmus durchgeführt und die Bézier-Flächen in den vier Tangentialräumen werden berechnet. Danach werden die vier unterschiedlichen Bézier-Flächen auf die Mannigfaltigkeit abgebildet und verrechnet.

Bemerkung 3.31. Die \mathcal{C}^1 -Stetigkeitsbedingungen der verallgemeinerten Bézier-Fläche (26), (27) decken sich im euklidischen Raum mit den \mathcal{C}^1 -Stetigkeitsbedingungen der normalen Bézier-Fläche (11). Betrachte dazu die \mathcal{C}^1 -Stetigkeitsbedingungen der beiden Patches (m, n) und $(m, n + 1)$ und nehme an, dass die \mathcal{C}^0 -Stetigkeitsbedingungen (23) erfüllt sind.

Beweis. Im euklidischen Raum gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{i,K-1}^{(0,0,3)} + v_{i,1}^{(0,1,1)}}{2} = v_{i,K}^{(0,0,3)} \\
& \Leftrightarrow \frac{\log_{b_{0,K}^{m,n}}(b_{i,K-1}^{m,n}) + \log_{b_{0,0}^{m,n+1}}(b_{i,1}^{m,n+1})}{2} = \log_{b_{0,K}^{m,n}}(b_{i,K}^{m,n}) \\
& \Leftrightarrow \frac{b_{i,K-1}^{m,n} - b_{0,K}^{m,n} + b_{i,1}^{m,n+1} - b_{0,0}^{m,n+1}}{2} = b_{i,K}^{m,n} - b_{0,K}^{m,n}, \\
& \stackrel{(23)}{\Leftrightarrow} \frac{b_{i,K-1}^{m,n} + b_{i,1}^{m,n+1} - 2b_{0,K}^{m,n}}{2} = b_{i,K}^{m,n} - b_{0,K}^{m,n}, \\
& \Leftrightarrow \frac{b_{i,K-1}^{m,n} + b_{i,1}^{m,n+1}}{2} = b_{i,K}^{m,n}.
\end{aligned}$$

Analog für die anderen \mathcal{C}^1 -Stetigkeitsbedingungen. □

3.6 Vergleich Typ I und Typ II

Typ I und Typ II stimmen im Allgemeinen nicht überein. Der Unterschied der beiden Methoden ist die Verrechnung der vier unterschiedlichen Flächen, die sich aus der Abbildung der Flächen der einzelnen Tangentialräume der vier Eckkontrollpunkte auf die Mannigfaltigkeit ergeben. Je weiter die Eckkontrollpunkte auseinander liegen, desto größer werden die Unterschiede, da dann die vier Flächen unterschiedlicher sind und somit die beiden verschiedenen Verrechnungen weiter auseinander liegen.

Um dies zu verdeutlichen, sind in Abbildung 8 drei Sphären mit unterschiedlichen Datenpunkten und jeweils zwei Bézier-Flächen dargestellt. Die magentafarbenen Bézier-Flächen wurden jeweils mit Typ I und die blauen Bézier-Flächen jeweils mit Typ II berechnet. In dem linken Bild liegen die Datenpunkte noch relativ nah zusammen, im mittleren sind sie auf die komplette Sphäre verstreut, aber in beiden Fällen sind die Datenpunkte symmetrisch angeordnet. Im rechten Bild sind die Datenpunkte weit und unregelmäßig verstreut. Man sieht, dass sich die Bézier-Flächen im linken Bild nicht sichtbar unterscheiden, der maximale Abstand der beiden Bézier-Flächen beträgt ca. 0,0001. Im mittleren Bild sind die Datenpunkte weiter entfernt und dadurch werden die Unterschiede zwischen den beiden Methoden deutlicher, der maximale Abstand beträgt hier ca. 0,09. Die Unterschiede sind vor allem in der Mitte des Patches zu sehen, da dort alle vier Flächen miteinander verrechnet werden. In den Ecken hat bei beiden Methoden die Fläche des entsprechenden Eckdatenpunktes fast das ganze Gewicht, sodass es dort kaum zu Unterschieden kommt. Im rechten Bild, wo die Datenpunkte weit und unregelmäßig verstreut sind, sind die Unterschiede zwischen den Methoden von der gleichen Größenordnung wie bei dem mittleren Bild, die maximale Differenz beträgt hier ca. 0,02.

Wenn man die Zeit vergleicht, die beide Methoden brauchen, um die Bézier-Fläche zu berechnen, fällt auf, dass Methode I viel langsamer ist als Methode II. In diesem Beispiel wurde die Bézier-Fläche an 300 Zeitpunkten in t_1 - und t_2 -Richtung berechnet. Methode I braucht 10-15 mal so lange wie Methode II. Dies liegt daran, dass bei Methode I für jeden Zeitpunkt ein Optimierungsproblem berechnet werden muss. In Methode II wird dies mittels des zweimaligen Anwendens des ersten Schritts des de Casteljau Algorithmus approximiert und so beschleunigt.

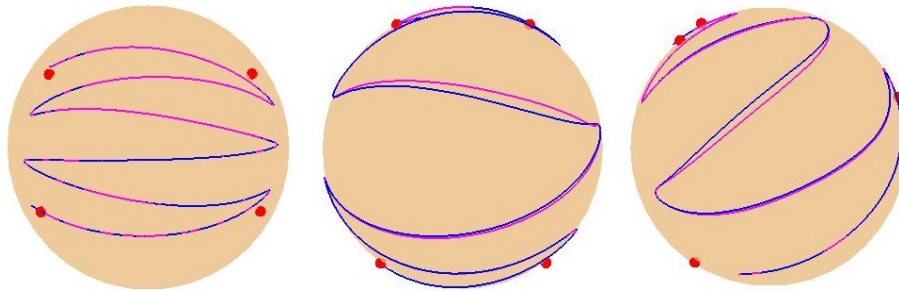


Abbildung 8: Vergleich der Bézier-Fläche von Typ I und Typ II. Es wurde jeweils eine Kurve im Parametrisierungsgebiet mittels Bézier-Flächen auf die Sphäre übertragen. Die kubischen Bézier-Flächen wurden jeweils zu 300×300 Zeitpunkten berechnet. Die Datenpunkte sind jeweils in rot dargestellt, die Bézier-Fläche, die mit Typ I konstruiert wurde ist in magenta und die Bézier-Fläche, die mit Typ II konstruiert wurde, ist in blau dargestellt. Die Kontrollpunkte wurden mit Algorithmus 1 berechnet, siehe Kapitel 4.

Man kann Unterschiede zwischen den beiden Methoden erkennen, allerdings sind diese gering, wenn die Datenpunkte nah beieinander liegen. In dem Fall der Sphäre hat es außerdem keinen großen Einfluss, ob die Datenpunkte symmetrisch oder unsymmetrisch verstreut sind. Die Sphäre ist allerdings selber eine symmetrische Mannigfaltigkeit. Bei anderen (unsymmetrischen) Mannigfaltigkeiten kann es durchaus Einfluss haben, ob die Datenpunkte symmetrisch oder unsymmetrisch angeordnet sind. Zudem zeigt sich, dass Methode II, wie erwartet, schneller ist als Methode I.

4 Generierung der Kontrollpunkte

Für gegebene Datenpunkte

$$p_{m,n} \in \mathcal{M}, \quad (m,n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$$

soll eine Bézierfläche $\mathcal{B}_K : [0, M] \times [0, N] \rightarrow \mathcal{M}$ des Grades K berechnet werden, die

1. möglichst glatt ist und
2. möglichst nah an den Datenpunkten liegt.

Dabei sollen die \mathcal{C}^0 -Stetigkeitsbedingungen (23)

$$\begin{aligned} b_{i,K}^{m,n} &= b_{i,0}^{m,n+1} & \forall i = 0, \dots, K, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-2, \\ b_{K,i}^{m,n} &= b_{0,i}^{m+1,n} & \forall i = 0, \dots, K, m = 0, \dots, M-2, n = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Außerdem soll die Bézier-Fläche \mathcal{C}^1 -stetig sein, also muss gelten

$$\begin{aligned} \frac{v_{K-1,i}^{(m,n,2)} + v_{1,i}^{(m+1,n,1)}}{2} &= v_{K,i}^{(m,n,2)}, \\ \frac{v_{K-1,i}^{(m,n,4)} + v_{1,i}^{(m+1,n,3)}}{2} &= v_{K,i}^{(m,n,4)} \end{aligned}$$

für $i = 0, \dots, K, m = 0, \dots, M-2, n = 0, \dots, N-1$ und

$$\begin{aligned} \frac{v_{i,K-1}^{(m,n,3)} + v_{i,1}^{(m,n+1,1)}}{2} &= v_{i,K}^{(m,n,3)}, \\ \frac{v_{i,K-1}^{(m,n,4)} + v_{i,1}^{(m,n+1,2)}}{2} &= v_{i,K}^{(m,n,4)} \end{aligned}$$

für $i = 0, \dots, K, m = 0, \dots, M-1, n = 0, \dots, N-2$.

Bemerkung 4.1. *Beachte, dass es für Datenpunkte $p_{m,n} \in \mathcal{M}$ mit $(m,n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$ M Patches in t_1 -Richtung und N Patches in t_2 -Richtung gibt und es damit $M-1$ Schnittstellen der Patches in t_1 -Richtung und $N-1$ Schnittstellen der Patches in t_2 -Richtung gibt.*

Damit die Bézier-Fläche möglichst glatt ist und möglichst nah an den Datenpunkten liegt, sollen die Kontrollpunkte der Bézier-Fläche optimiert werden. Minimiere dazu den Abstand der Bézier-Fläche zu den Datenpunkten und die mittlere quadratische zweite Ableitung, um die Krümmungsenergie zu minimieren und damit die Fläche möglichst glatt zu gestalten. Da dies ein kompliziertes nichtlineares Optimierungsproblem ist, wird das Problem zunächst im euklidischen Raum gelöst und dann auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen.

4.1 Generierung der Kontrollpunkte im \mathbb{R}^n

Betrachte zunächst die Generierung der Kontrollpunkte im euklidischen Raum \mathbb{R}^n und verallgemeinere dies anschließend auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Es wird sich hier auf kubische Bézier-Flächen beschränkt. Sei also im Folgenden $K = 3$.

1. Ziel: Glattheit

Die Bézier-Fläche soll möglichst glatt sein, d.h sie soll die Krümmungsenergie

$$F[\mathcal{B}] := \int_{[0,M] \times [0,N]} \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial(t_1, t_2)} \right\|_F^2 d(t_1, t_2) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{[0,1] \times [0,1]} \left\| \frac{\partial^2 \beta^{m,n}}{\partial(t_1, t_2)} \right\|_F^2 d(t_1, t_2) \quad (30)$$

minimieren. Dabei ist $\|\cdot\|_F$ die Frobeniusnorm, $\frac{\partial^2}{\partial(t_1, t_2)}$ der Hesse-Operator und $\beta^{m,n}$ die Bézier-Fläche des Patches (m, n) , die über die Kontrollpunkte $\{b_{i,j}^{m,n}\}_{i,j=0,\dots,3}$ definiert ist.

Die Bézier-Fläche $\beta^{m,n}$ kann durch ihre Bernsteinpolynome, wie in (7) dargestellt werden

$$\beta^{m,n}(t_1, t_2; (b_{i,j}^{m,n})_{i,j=0,\dots,3}) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 b_{i,j}^{m,n} B_{i,3}(t_1) B_{j,3}(t_2).$$

Damit kann man die die Krümmungsenergie \hat{F} von einer einzelnen Bézier-Fläche definieren als

$$\hat{F}[\beta^{m,n}] = \sum_{i,j,o,p=0}^3 \alpha_{i,j,o,p} b_{i,j}^{m,n} \cdot b_{o,p}^{m,n},$$

dabei steht \cdot für das innere Euklidische Produkt und die Koeffizienten $\alpha_{i,j,o,p}$ sind gegeben durch

$$\alpha_{i,j,o,p} = \int_{[0,1] \times [0,1]} \left[\frac{\partial^2 B_{i,3}(t_1) B_{j,3}(t_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right] : \left[\frac{\partial^2 B_{o,3}(t_1) B_{p,3}(t_2)}{\partial(t_1, t_2)} \right] d(t_1, t_2).$$

Die Hesse-Matrix der Bernsteinpolynome kann explizit dargestellt werden

$$\frac{\partial^2 B_{i,3}(t_1) B_{j,3}(t_2)}{\partial(t_1, t_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 B_{i,3}(t_1)}{\partial^2(t_1)} B_{j,3}(t_2) & \frac{\partial B_{i,3}(t_1)}{\partial(t_1)} \frac{\partial B_{j,3}(t_2)}{\partial(t_2)} \\ \frac{\partial B_{i,3}(t_1)}{\partial(t_1)} \frac{\partial B_{j,3}(t_2)}{\partial(t_2)} & B_{i,3}(t_1) \frac{\partial^2 B_{j,3}(t_2)}{\partial^2(t_2)} \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten $\alpha_{i,j,o,p}$ können demnach einfach analytisch berechnet werden und sind unabhängig von den Kontroll- und Datenpunkten.

Damit ergibt sich für die Krümmungsenergie (30) des gesamten Bézier-Splines

$$F[\mathcal{B}] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}[\beta^{m,n}] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{i,j,o,p=0}^3 \alpha_{i,j,o,p} b_{i,j}^{m,n} \cdot b_{o,p}^{m,n}.$$

Um dies später auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen zu können, soll nun jeder Kontrollpunkt eines Patches durch die Differenz der 4 Datenpunkte eines Patches dargestellt werden. Diese Differenz kann man dann auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten durch den Logarithmus ersetzen. Da $F[\mathcal{B}]$ eine Summe der $\hat{F}[\beta]$ ist und $\hat{F}[\beta]$ nur Ableitungen einer einzelnen Bézier-Fläche enthält, ist $F[\mathcal{B}]$ invariant unter einer uniformen Translation der Kontrollpunkte. Definiere

$$\hat{F}[\beta^{m,n}] = \frac{1}{4} \sum_{r,s \in \{0,1\}} \sum_{i,j,o,p=0}^3 \alpha_{i,j,o,p} e_{i,j}^{m,n}(r,s) \cdot e_{o,p}^{m,n}(r,s),$$

mit

$$e_{i,j}^{m,n}(r,s) = b_{i,j}^{m,n} - p_{m+r,n+s}, \quad (31)$$

für $i, j = 0, \dots, 3$, $r, s = 0, 1$, $m = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, N-1$.

Aus Symmetriegründen werden die Kontrollpunkte zu jedem Datenpunkt des Patches verschoben und anschließend wird der Mittelwert berechnet.

Die Krümmungsenergie der Bézier-Fläche kann insgesamt dargestellt werden als

$$F[\mathcal{B}] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{4} \sum_{r,s \in \{0,1\}} \sum_{i,j,o,p=0}^3 (L(V))_{i,j,r,s}^{m,n} \cdot e_{o,p}^{m,n}(r,s), \quad (32)$$

mit $V = (e_{i,j}^{m,n}(r,s))_{\substack{(m,n) \in \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\} \\ i,j \in \{0, \dots, 3\}, r,s \in \{0,1\}}}$ und dem linearen Operator L

$$(L(V))_{i,j,r,s}^{m,n} = \frac{1}{4} \sum_{o,p=0}^3 \alpha_{i,j,o,p} e_{i,j}^{m,n}(r,s). \quad (33)$$

2. Ziel: Approximation der Datenpunkte

Die Bézier-Fläche soll nicht nur möglichst glatt, sondern zudem auch noch möglichst nah an den Datenpunkten liegen, diese also approximieren. Es soll also nicht nur die Krümmungsenergie minimiert werden, sondern auch der Abstand zu den Datenpunkten

$$\begin{aligned}
D[\mathcal{B}] &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \lambda_{m,n} | \mathcal{B}(m,n) - p_{m,n} |^2 \\
&= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{m,n} | \beta^{m,n}(0,0) - p_{m,n} |^2 + \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_{m,N} | \beta^{m,N-1}(0,1) - p_{m,N} |^2 \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{M,n} | \beta^{M-1,n}(1,0) - p_{M,n} |^2 + \lambda_{M,N} | \beta^{M-1,N-1}(1,1) - p_{M,N} |^2.
\end{aligned} \tag{34}$$

Dabei ist $\lambda_{m,n} \in [0, \infty)$ das Gewicht der einzelnen Datenpunkte. Wenn die Bézier-Fläche gleich nah an allen Datenpunkten liegen soll, wählt man $\lambda = \lambda_{m,n} \forall (m,n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$. Es gibt allerdings auch die Möglichkeit den Datenpunkten unterschiedlich viel Gewicht einzuräumen und so die Bézier-Fläche möglichst nah an die Datenpunkte mit großem Gewicht anzupassen.

Betrachte, wie oben $V = (e_{i,j}^{m,n}(r,s))_{\substack{(m,n) \in \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\} \\ i,j \in \{0, \dots, 3\}, r,s \in \{0,1\}}}$, um jeden Kontrollpunkt eines Patches durch die Differenz der 4 Datenpunkte eines Patches darzustellen. Definiere damit den linearen Operator Λ

$$(\Lambda(V))_{i,j,r,s}^{m,n} = \begin{cases} \lambda_{m,n} e_{0,0}^{m,n}(0,0) & \text{für } i, j = 0, r, s = 0, m, n \in \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\}, \\ \lambda_{m,N} e_{0,3}^{m,N-1}(0,1) & \text{für } i = 0, j = 3, r = 0, s = 1, m \in \{0, \dots, M-1\}, n = N-1, \\ \lambda_{M,n} e_{3,0}^{M-1,n}(1,0) & \text{für } i = 3, j = 0, r = 1, s = 0, m = M-1, n \in \{0, \dots, N-1\}, \\ \lambda_{M,N} e_{3,3}^{M-1,N-1}(1,1) & \text{für } i, j = 3, r, s = 1, m = M-1, n = N-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{35}$$

Damit lässt sich die Abstandsenergie (34) schreiben als

$$D[\mathcal{B}] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r,s \in \{0,1\}} \sum_{i,j=0}^3 (\Lambda(V))_{i,j,r,s}^{m,n} \cdot e_{i,j}^{m,n}(r,s). \tag{36}$$

3. Kombination der beiden Energien

Um eine Bézier-Fläche zu bekommen, die die Krümmungsenergie minimiert und dabei die Datenpunkte approximiert, müssen die Krümmungsenergie (32) und die Energie, die den Abstand zu den Datenpunkten misst (34), kombiniert und minimiert werden. Definiere die Energie einer Bézier-Fläche als

$$\begin{aligned}
 E[\mathcal{B}] &= \frac{1}{2}F[\mathcal{B}] + \frac{1}{2}D[\mathcal{B}] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{F}[\beta^{m,n}] + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \lambda_{m,n} | \mathcal{B}(m,n) - p_{m,n} |^2.
 \end{aligned} \tag{37}$$

(38)

Dabei ist $\lambda_{m,n} \in [0, \infty) \forall (m,n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}$ frei zu wählen und legt fest, ob eher Daten-Fitting oder Dateninterpolation stattfindet. Angenommen alle Datenpunkte werden gleichstark gewichtet, das heißt

$$\lambda = \lambda_{m,n} \quad \forall (m,n) \in \{0, \dots, M\} \times \{0, \dots, N\}.$$

Für $\lambda \rightarrow \infty$ bekommt der Abstandsterm viel Gewicht, die Krümmungsenergie wird vernachlässigt und daraus resultierend wird der Abstand der optimierenden Bézier-Fläche \mathcal{B} zu den Datenpunkten minimal

$$| \mathcal{B}(m,n) - p_{m,n} |^{2\lambda \rightarrow \infty} \cong 0.$$

Damit wird Dateninterpolation betrieben und die Glattheit der Bézier-Fläche vernachlässigt.

Wenn andersherum $\lambda \in [0, \infty)$ sehr klein bzw. $\lambda = 0$ gewählt wird, wird nur die Krümmungsenergie minimiert und der Abstand zu den Datenpunkten vernachlässigt. Die Bézier-Fläche, die die Energie minimiert, ist also sehr glatt, aber approximiert im Allgemeinen nicht die Datenpunkte.

Daraus resultierend gilt

- λ klein $\Rightarrow F[\mathcal{B}]$ wird minimiert, $D[\mathcal{B}]$ wird nicht berücksichtigt,
- $\lambda \uparrow \Rightarrow F[\mathcal{B}] \uparrow, D[\mathcal{B}] \downarrow.$

Die Gewichtung zwischen Daten-Fitting und Dateninterpolation kann durch die Wahl der $\lambda_{m,n} \in [0, \infty)$ je nach Anwendung und Ansprüche an die resultierende Bézier-Fläche individuell angepasst werden.

Da die Bézier-Fläche stetig differenzierbar sein soll, muss nicht nur die Energie (37) minimiert werden, sondern die Kontrollpunkte müssen auch die \mathcal{C}^1 -Stetigkeitsbedingungen (23), (26), (27) erfüllen. Damit ergibt sich insgesamt das Minimierungsproblem :

$$\begin{aligned}
E[\mathcal{B}] &= \min_{\{b_{i,j}^{m,n}\}_{m=0,\dots,M,n=0,\dots,N}^{i,j=0,\dots,3}} \frac{1}{2}F[\mathcal{B}] + \frac{1}{2}D[\mathcal{B}] \\
(32),(36) \quad \min_{\{b_{i,j}^{m,n}\}_{m=0,\dots,M,n=0,\dots,N}^{i,j=0,\dots,3}} &\left(\frac{1}{8} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r,s \in \{0,1\}} \sum_{i,j,o,p=0}^3 (L(V))_{i,j,r,s}^{m,n} \cdot e_{o,p}^{m,n}(r,s) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r,s \in \{0,1\}} \sum_{i,j=0}^3 (\Lambda(V))_{i,j,r,s}^{m,n} \cdot e_{i,j}^{m,n}(r,s) \right) \tag{39}
\end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned}
b_{i,3}^{m,n} &= b_{i,0}^{m,n+1} & \forall i = 0, \dots, 3, m = 1, \dots, M-2, n = 1, \dots, N-1, \\
b_{3,i}^{m,n} &= b_{0,i}^{m+1,n} & \forall i = 0, \dots, 3, m = 1, \dots, M-1, n = 1, \dots, N-2,
\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\frac{v_{K-1,i}^{(m,n,2)} + v_{1,i}^{(m+1,n,1)}}{2} &= v_{K,i}^{(m,n,2)}, \\
\frac{v_{K-1,i}^{(m,n,4)} + v_{1,i}^{(m+1,n,3)}}{2} &= v_{K,i}^{(m,n,4)}
\end{aligned} \tag{41}$$

für $i = 0, \dots, K$, $m = 0, \dots, M-2$, $n = 0, \dots, N-1$ und

$$\begin{aligned}
\frac{v_{i,K-1}^{(m,n,3)} + v_{i,1}^{(m,n+1,1)}}{2} &= v_{i,K}^{(m,n,3)}, \\
\frac{v_{i,K-1}^{(m,n,4)} + v_{i,1}^{(m,n+1,2)}}{2} &= v_{i,K}^{(m,n,4)}
\end{aligned} \tag{42}$$

für $i = 0, \dots, K$, $m = 0, \dots, M-1$, $n = 0, \dots, N-2$.

4.2 Nebenbedingung reduzieren

Um das Minimierungsproblem (39) zu vereinfachen, kann man die Nebenbedingungen (40), (41), (42) reduzieren. Nehme dazu an, dass die Kontrollpunkte

$b_{k,l}^{m,n}$ mit $(k,l) \in Q := \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, $(m,n) \in D := \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\}$ unabhängig sind.

Man kann die Notation für Kontrollpunkte außerhalb eines Patches erweitern, indem man

$$b_{k,l}^{m,n} = b_{k,3+l}^{m,n-1} = b_{3+k,l}^{m-1,n} = b_{3+k,3+l}^{m-1,n-1}$$

definiert.

Die Bedingungen (40), (41), (42) lassen sich dann vereinfachen zu

$$\begin{aligned} b_{-1,1}^{m,n} &= 2b_{0,1}^{m,n} - b_{1,1}^{m,n}, \\ b_{-1,0}^{m,n} &= 2b_{0,0}^{m,n} - b_{1,0}^{m,n}, \\ b_{-1,-1}^{m,n} &= 2b_{0,-1}^{m,n} - b_{1,-1}^{m,n} = 4b_{0,0}^{m,n} - 2b_{0,1}^{m,n} - 2b_{1,0}^{m,n} + b_{1,1}^{m,n}, \\ b_{0,-1}^{m,n} &= 2b_{0,0}^{m,n} - b_{0,1}^{m,n}, \\ b_{1,-1}^{m,n} &= 2b_{1,0}^{m,n} - b_{1,1}^{m,n}. \end{aligned} \quad (43)$$

Anstatt die $b_{k,l}^{m,n}$, $(k,l) \in Q$, $(m,n) \in D$ zu betrachten, kann man auch die translatierten Kontrollpunkte

$$u_{k,l}^{m,n} = b_{k,l}^{m,n} - p_{m,n}, \quad (k,l) \in Q, \quad (m,n) \in D \quad (44)$$

als unabhängige Argumente annehmen und diese optimieren.

Um die $u_{k,l}^{m,n}$ als unabhängige Argumente zu benutzen, müssen die Energievariablen $e_{i,j}^{m,n}(r,s)$ durch diese dargestellt werden. Dafür werden zwei Operatoren definiert:

1. Der lineare Operator S berechnet die $u_{k,l}^{m,n}$ für $(k,l) \in \{-1,0,-1\}^2 \setminus Q$, aus den Bedingungen (43):

$$S : \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{(k,l) \in Q}^{(m,n) \in D} \rightarrow \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{(k,l) \in \{-1,0,-1\}^2}^{(m,n) \in D} : \begin{cases} u_{-1,1}^{m,n} &= 2u_{0,1}^{m,n} - u_{1,1}^{m,n}, \\ u_{-1,0}^{m,n} &= 2u_{0,0}^{m,n} - u_{1,0}^{m,n}, \\ u_{-1,-1}^{m,n} &= 4u_{0,0}^{m,n} - 2u_{0,1}^{m,n} - 2u_{1,0}^{m,n} + u_{1,1}^{m,n}, \\ u_{0,-1}^{m,n} &= 2u_{0,0}^{m,n} - u_{0,1}^{m,n}, \\ u_{1,-1}^{m,n} &= 2u_{1,0}^{m,n} - u_{1,1}^{m,n}, \\ u_{k,l}^{m,n} &= u_{k,l}^{m,n} \text{ für } (k,l) \in Q. \end{cases} \quad (45)$$

2. Der Operator \tilde{T} bildet die Vektoren $u_{k,l}^{m,n}$ auf die Energievektoren $e_{i,j}^{m,n}(r,s)$ ab, indem er ausnutzt, dass

$$e_{i,j}^{m,n}(r,s) = u_{k,l}^{\tilde{m},\tilde{n}} + (p_{\tilde{m},\tilde{n}} - p_{m+r,n+s}),$$

wobei $\tilde{m}, \tilde{n}, k, l$

$$(\tilde{m}, \tilde{n}) = (m + a_i, n + a_j) \text{ und } (k, l) = (i - 3a_i, j - 3a_j) \text{ mit } a_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \in \{0, 1\}, \\ 1 & \text{falls } i \in \{2, 3\} \end{cases}$$

erfüllen. Führe folgende Notation ein

$$w_{i,j}^{m,n}(r, s) = u_{k,l}^{\tilde{m},\tilde{n}}, \quad (46)$$

$$z_{i,j}^{m,n}(r, s) = p_{\tilde{m},\tilde{n}} - p_{m+r,n+s}. \quad (47)$$

$$U \equiv \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{k,l \in \{-1,0,1\}}^{(m,n) \in D}, \quad V \equiv \left(e_{i,j}^{m,n}(r, s) \right)_{\substack{i,j=0,\dots,3 \\ r,s \in \{0,1\}}}^{(m,n) \in D},$$

$$W \equiv \left(w_{i,j}^{m,n}(r, s) \right)_{\substack{i,j=0,\dots,3 \\ r,s \in \{0,1\}}}^{(m,n) \in D}, \quad Z \equiv \left(z_{i,j}^{m,n}(r, s) \right)_{\substack{i,j=0,\dots,3 \\ r,s \in \{0,1\}}}^{(m,n) \in D},$$

und führe den linearen Operator

$$T : U \rightarrow W \quad (48)$$

und damit ist

$$\tilde{T} : U \rightarrow V = T(U) + Z.$$

Die Energie einer Bézier-Fläche kann damit geschrieben werden als

$$E[\mathcal{B}] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r,s \in \{0,1\}} \sum_{i,j=0}^3 \frac{1}{8} \left(L\tilde{T}S\tilde{U} \right)_{i,j,r,s}^{m,n} \cdot \left(\tilde{T}S\tilde{U} \right)_{i,j,r,s}^{m,n} + \frac{1}{2} \left(\Lambda\tilde{T}\tilde{U} \right)_{i,j,r,s}^{m,n} \cdot \left(\tilde{T}\tilde{U} \right)_{i,j,r,s}^{m,n} \quad (49)$$

für $\tilde{U} = \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{k,l \in Q}^{m,n \in D}$ und wird minimiert durch

$$\tilde{U}_{opt} = -(S^*T^*LTS + 4T^*\Lambda T)^{-1}(S^*T^*LZ + 4T^*\Lambda Z), \quad (50)$$

dabei bezeichnet * den adjungierten Operator (beachte, dass L und Λ selbstadjungiert sind).

4.3 Verallgemeinerung auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Das Minimierungsproblem ist auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit im Allgemeinen nicht linear und ziemlich komplex. Deswegen wird das Problem nicht auf der Mannigfaltigkeit selber gelöst, sondern in den Tangentialräumen der Eckkontrollpunkte. Dort werden die einzelnen Bézier-Flächen berechnet, anschließend auf die Mannigfaltigkeit projiziert und miteinander verrechnet. Dies macht Sinn, da der Tangentialraum eines Punktes die Mannigfaltigkeit in einer lokalen Umgebung um den Punkt gut approximiert. Um das Problem im Tangentialraum lösen zu können, müssen die unterschiedlichen Operatoren aus der Energieformel (49) auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden.

- Die $u_{k,l}^{m,n}$ werden in (44) als Differenz zwischen zwei euklidischen Punkten definiert. Dies kann man auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten mittels des Logarithmus verallgemeinern

$$u_{k,l}^{m,n} = \log_{p_{m,n}} \left(b_{k,l}^{m,n} \right), \quad (k,l) \in Q, \quad m = 0, \dots, M-1, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Dies führt, wie bereits erwähnt, dazu, dass über Tangentialvektoren optimiert wird.

- Der Operator L , der in (33) und der Operator Λ , der in (35) definiert wird, können nun als Operatoren von B nach B interpretiert werden, wobei B das Kartesische Produkt der Tangentialräume ist

$$B = \prod_{\substack{i,j=0,\dots,3, \\ r,s \in \{0,1\}, \\ m=0,\dots,M-1, \\ n=0,\dots,N-1}} T_{p_{m+r,n+s}} \mathcal{M}.$$

- Der Operator S in (45) ist nun ein Operator in dem Tangentialraum.
- Der Operator Z , der in (47) definiert wird, kann auch mittels des Logarithmus auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert werden

$$z_{i,j}^{m,n}(r,s) = \log_{p_{m+r,n+s}} (p_{\tilde{m},\tilde{n}}). \quad (51)$$

- T aus (48) wird als der Paralleltransport der Variablen $u_{k,l}^{m,n}$ zu den Ecken des Patches definiert

$$T : \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{k,l \in \{-1,0,1\}}^{(m,n) \in D} \mapsto \left(w_{i,j}^{m,n}(r,s) \right)_{\substack{i,j=0,\dots,3 \\ r,s \in \{0,1\}}}^{(m,n) \in D} \quad w_{i,j}^{m,n}(r,s) = P_{p_{\tilde{m},\tilde{n}} \rightarrow p_{m+r,n+s}} u_{k,l}^{\tilde{m},\tilde{n}}.$$

- \tilde{T} kann dann auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen werden, indem die verallgemeinerten Versionen von T und Z benutzt wird.
- Die adjungierten Operatoren S^* und T^* sind gegeben durch

$$S^* : \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{k,l \in \{-1,0,1\}}^{(m,n) \in D} \mapsto \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{(k,l) \in Q}^{(m,n) \in D} : \begin{cases} u_{0,0}^{m,n} = u_{0,0}^{m,n} + 2u_{0,-1}^{m,n} + 2u_{-1,0}^{m,n} + 4u_{-1,-1}^{m,n} \\ u_{1,0}^{m,n} = u_{1,0}^{m,n} - u_{-1,0}^{m,n} + 2u_{1,-1}^{m,n} - 2u_{-1,-1}^{m,n}, \\ u_{1,1}^{m,n} = u_{1,1}^{m,n} + u_{-1,-1}^{m,n} - u_{1,-1}^{m,n} - u_{-1,1}^{m,n}, \\ u_{0,1}^{m,n} = u_{0,1}^{m,n} - u_{0,-1}^{m,n} + 2u_{-1,1}^{m,n} - 2u_{-1,-1}^{m,n}, \end{cases}$$

$$T^* : \left(w_{i,j}^{m,n}(r,s) \right)_{\substack{i,j=0,\dots,3 \\ r,s \in \{0,1\}}}^{(m,n) \in D} \mapsto \left(u_{k,l}^{m,n} \right)_{k,l \in \{-1,0,1\}}^{(m,n) \in D},$$

$$u_{k,l}^{\hat{m},\hat{n}} = \sum_{\substack{r,s \in \{0,1\} \\ m \in \hat{m} + A_k \\ n \in \hat{n} + A_l}} P_{p_{m+r,n+s} \rightarrow p_{\hat{m},\hat{n}}} w_{k+3(\hat{m}-m),l+3(\hat{n}-n)}^{m,n}(r,s),$$

wobei $A_{-1} = \{-1\}$, $A_0 = \{-1, 0\}$ und $A_1 = \{0\}$.

Der Algorithmus, um die Kontrollpunkte auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu generieren, gestaltet sich damit wie folgt:

Algorithmus 1 Generierung der Kontrollpunkte

- 1: Berechne $Z = \left(z_{i,j}^{m,n}(r,s) \right)_{\substack{i,j=0,\dots,3 \\ r,s \in \{0,1\}}}^{(m,n) \in D}$ mit (51).
 - 2: Berechne $S^*T^*LZ + 4T^*\Lambda Z$ und löse (50) mit dem konjugierten Gradienten-Verfahren.
 - 3: Berechne alle $u_{k,l}^{m,n}$ für $k, l \in \{-1, 0, 1\}$ und $(m, n) \in D$ mit $S\tilde{U}_{opt}$.
-

Nun kann man die Bézier-Flächen in jedem Tangentialraum berechnen und diese anschließend auf die Mannigfaltigkeit abbilden und miteinander verrechnen. Beachte hierbei, dass das Minimierungsproblem nur in den Tangentialräumen und nicht auf der Mannigfaltigkeit selber gelöst wird. Der Tangentialraum approximiert die Mannigfaltigkeit zwar lokal gut, aber die berechnete Lösung muss nicht die optimale Lösung auf der Mannigfaltigkeit sein, sondern kann abweichen.

5 Beispiele

Zum Schluß werden hier noch einige Beispiele für kubische Bézier-Spline-Flächen auf ausgewählten Riemannschen Mannigfaltigkeiten, der Sphäre und dem Raum der Rotationsmatrizen gezeigt. Da sich Typ I und Typ II nicht signifikant unterscheiden, aber Typ II sehr viel schneller zu berechnen ist, wurden alle hier vorgestellten Beispiele mit Typ II berechnet. Außerdem werden in allen Beispielen die Datenpunkte $p_{m,n}$, $m = 0, \dots, M$, $n = 0, \dots, N$ gleich stark gewichtet, das heißt

$$\lambda = \lambda_{m,n} \quad \forall m = 0, \dots, M, \quad n = 0, \dots, N.$$

5.1 Sphäre

Tabelle 1: Riemannsche Operatoren für \mathbb{S}^{d-1} , vergleiche [12].

Raum	$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : x^T x = 1\}$
Tangententialraum	$T_x \mathbb{S}^{d-1} = \{v \in \mathbb{R}^d : x^T v = 0\}$
Inneres Produkt	$\langle v_1 v_2 \rangle_x = v_1^T v_2$
Riemannsche Distanz	$d(x, y) = \arccos(x^T y)$
Exponentialabbildung	$\exp_x(v) = x \cos(\ v\) + \frac{v}{\ v\ } \sin(\ v\)$
Logarithmus	$\log_x(y) = \frac{(I_d - x x^T)y}{\sqrt{1 - (x^T y)^2}} \arccos(x^T y)$
Paralleltransport	$P_{x \rightarrow y}(v) = -x \sin(\ \xi\) + \frac{\xi}{\ \xi\ } \cos(\ \xi\) \xi^T v + I_d - \frac{\xi \xi^T}{\ \xi\ ^2} v, \quad \xi = \log_x(y)$

Tabelle 1 listet die expliziten Formeln der Riemannschen Operatoren auf, die gebraucht werden, um die Kontrollpunkte zu optimieren und eine Bézier-Fläche auf der Sphäre \mathbb{S}^{d-1} zu berechnen. Wir betrachten in unseren Beispielen die Sphäre \mathbb{S}^2 .

In Abbildung 9 ist Daten-Fitting auf der Sphäre für ein 2x2 Patch für eine Kurve im Parametrisierungsgebiet, die durch die Bézier-Fläche von Typ II auf die Sphäre übertragen wurde, dargestellt. Die Bézier-Flächen wurden jeweils zu 1000×1000 Zeitpunkten berechnet. Die Datenpunkte liegen links weit auseinander und rechts nah zusammen. Es wurden jeweils zwei unterschiedliche λ -Werte gewählt, sodass einmal eher Dateninterpolation durchgeführt ($\lambda = 1000$) und einmal mehr Wert auf die Glattheit ($\lambda = 0,001$) gelegt wurde. Wie erwartet interpoliert die berechnete Bézier-Fläche in Abbildung 9 links für $\lambda = 1000$ den ersten und letzten Datenpunkte und die Bézier-Fläche für $\lambda = 0,001$ ist weiter von den Datenpunkten entfernt. Dies trifft auch für die beiden Bézier-Flächen in Abbildung 9 rechts zu, auch wenn das in der Abbildung nicht gut erkennbar ist.

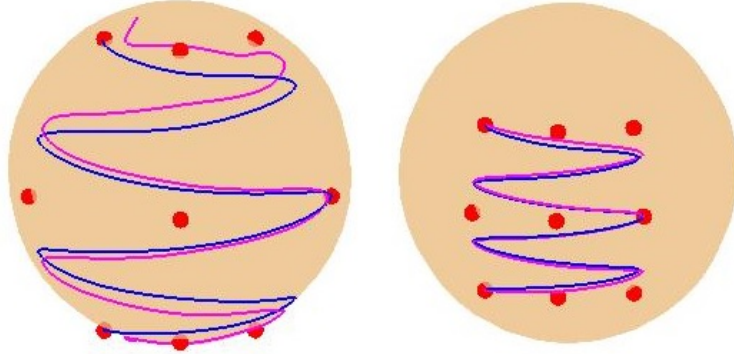


Abbildung 9: Daten-Fitting für ein 2x2 Patch für eine Kurve im Parametrisierungsgebiet, die durch kubische Bézier-Flächen von Typ II auf die Sphäre übertragen wurde. Dabei wurden zwei unterschiedliche λ -Werte (magenta: $\lambda = 0,001$, blau: $\lambda = 1000$) gewählt und die kubischen Bézier-Flächen wurden jeweils zu 1000×1000 Zeitpunkten berechnet. Die Datenpunkte sind in rot dargestellt und liegen links weit auseinander und rechts nah zusammen. Die Kontrollpunkte wurden mit Algorithmus 1 berechnet, siehe Kaptiel 4.

Wider Erwarten sieht die Bézier-Fläche für $\lambda = 1000$ in Abbildung 9 links glatter als die Bézier-Fläche für $\lambda = 0,001$ aus. Man kann nun die Krümmungsenergie berechnen, indem man die Bézier-Fläche nicht als eine Fläche in der Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, sondern in dem \mathbb{R}^3 auffasst und dann die zweite Ableitung über Finite Differenzen approximiert. Sei $\mathcal{B}(i, j)$ die Bézier-Fläche ausgewertet zum Zeitpunkt $(i, j) \in \{0, \dots, 1000\} \times \{0, \dots, 1000\}$ und $\Delta t = \frac{1}{1000}$. Damit lässt sich die zweite Ableitung über Finite Differenzen approximieren

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{B}(i, j)}{\partial^2 t_1} &\approx \frac{\mathcal{B}(i+1, j) - 2\mathcal{B}(i, j) + \mathcal{B}(i-1, j)}{\Delta t^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{B}(i, j)}{\partial^2 t_2} &\approx \frac{\mathcal{B}(i, j+1) - 2\mathcal{B}(i, j) + \mathcal{B}(i, j-1)}{\Delta t^2}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{B}(i, j)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 \mathcal{B}(i, j)}{\partial t_2 \partial t_1} &\approx \frac{\mathcal{B}(i+1, j+1) - \mathcal{B}(i-1, j+1) - \mathcal{B}(i+1, j-1) + \mathcal{B}(i-1, j-1)}{4\Delta t^2}. \end{aligned}$$

Die Krümmungsenergie für die beiden Bézier-Flächen in Abbildung 9 links beträgt:

$$\begin{aligned} \lambda = 0,001 &\Rightarrow F[\mathcal{B}] \approx 7,2269, \\ \lambda = 1000 &\Rightarrow F[\mathcal{B}] \approx 2,7187. \end{aligned}$$

Damit ist die approximierte Krümmungsenergie für $\lambda = 0,001$ etwas höher, wie auch in Abbildung 9 zu erkennen ist. Dies kann daran liegen, dass das Minimierungsproblem nicht auf der Mannigfaltigkeit selber, sondern im Tangentialraum gelöst wird. Somit kann es zu Abweichungen kommen, insbesondere dann, wenn die Datenpunkte weit verstreut sind. Denn der Tangentialraum approximiert die Mannigfaltigkeit immer nur lokal gut. Je weiter die Datenpunkte verstreut sind, desto ungenauer ist die berechnete Lösung in dem Tangentialraum.

Wenn man nun die beiden Bézier-Flächen in Abbildung 9 rechts betrachtet, sollte dieses Problem nicht mehr auftreten, da die Datenpunkte näher zusammen liegen. Tatsächlich sieht die magentafarbene Bézier-Fläche glatter aus und wenn man die Krümmungsenergie berechnet, ergibt sich

$$\begin{aligned}\lambda = 0,001 &\Rightarrow F[\mathcal{B}] \approx 0,2024, \\ \lambda = 1000 &\Rightarrow F[\mathcal{B}] \approx 0,1558.\end{aligned}$$

Die approximierte Krümmungsenergie ist zwar für $\lambda = 0,001$ wieder höher, allerdings ist die Differenz der beiden Krümmungsenergien viel niedriger. Um das Problem zu lösen, dass die Datenpunkte zu weit verstreut sind, als dass die approximative Lösung in dem Tangentialraum gut genug ist, könnte man mehrere Patches, aber dafür kleinere Patches, nutzen. Dies erhöht dann zwar die Rechenzeit, aber dafür ist die Lösung genauer.

Des Weiteren sieht man, dass die Bézier-Flächen an der Schnittstelle der Patches keine Unregelmäßigkeiten aufweisen und stetig differenzierbar aussehen.

In Abbildung 10 wurde statt einer Kurve ein Gitter mittels Bézier-Flächen auf die Sphäre übertragen. Es wurden wieder jeweils zwei unterschiedliche λ -Werte gewählt, sodass einmal Dateninterpolation durchgeführt ($\lambda = 1000$) und einmal mehr Wert auf die Glattheit ($\lambda = 0,001$) gelegt wurde. Die Bézier-Flächen wurden jeweils zu 10×10 Zeitpunkten berechnet. Wie erwartet, gehen die Bézier-Flächen in Abbildung 10 in beiden Fällen für $\lambda = 1000$ durch die Datenpunkte und die Bézier-Flächen für $\lambda = 0,001$ sind weiter von den Datenpunkten entfernt.

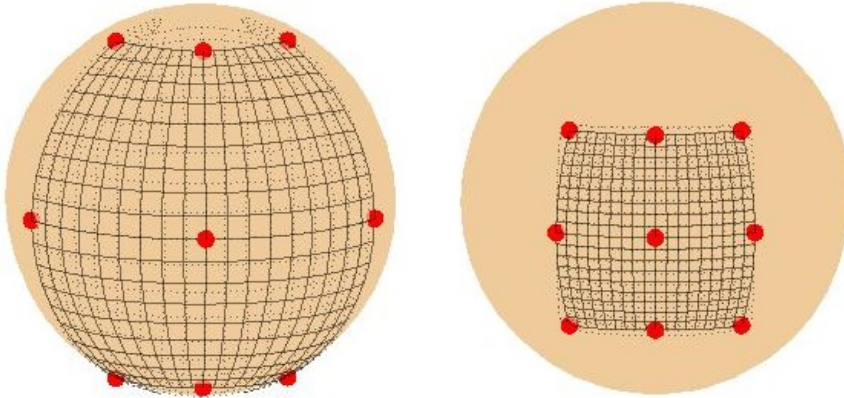


Abbildung 10: Daten-Fitting für ein 2×2 Patch für ein Gitter im Parametrisierungsgebiet, die durch kubische Bézier-Flächen von Typ II auf die Sphäre übertragen wurde. Dabei wurden zwei unterschiedliche λ -Werte (gestrichelte Linien: $\lambda = 0,001$, durchgezogene Linien: $\lambda = 1000$) gewählt und die kubischen Bézier-Flächen wurden jeweils zu 10×10 Zeitpunkten berechnet. Die Datenpunkte sind in rot dargestellt und liegen links weit auseinander und rechts nah zusammen. Die Kontrollpunkte wurden mit Algorithmus 1 berechnet, siehe Kaptiel 4.

Wie bei der Bézier-Fläche in Abbildung 1 kann man auch in Abbildung 10 beobachten, dass die Bézier-Fläche für $\lambda = 0,001$ für die weit entfernten Datenpunkte nicht so glatt aussieht, für die nah zusammen liegenden Datenpunkte hingegen schon. Des Weiteren weist auch die Bézier-Fläche an den Schnittstellen der Patches keine Unregelmäßigkeiten auf und sieht somit stetig differenzierbar aus.

5.2 Spezielle orthogonale Gruppe $SO(d)$

Tabelle 2: Riemannsche Operatoren für $SO(d)$, vergleiche [13].

Raum	$SO(d) = \{X \in \mathbb{R}^{d \times d} : X^T X = I, \det(X) = 1\}$
Tangentialraum	$T_x SO(d) = \{H \in \mathbb{R}^{d \times d} : X^T H + H^T X = 0\}$
Inneres Produkt	$\langle H_1 H_2 \rangle_x = \text{spur}(H_1^T H_2)$
Riemannsche Distanz	$d(X, Y) = \ \log(X^T Y)\ _F$
Exponentialabbildung	$\exp_X(H) = X \exp(X^T H)$
Logarithmus	$\log_X(Y) = X \log(X^T Y)$
Paralleltransport	$P_{X \rightarrow Y}(H) = Y X^T H$

Die spezielle orthogonale Gruppe $SO(d)$ beschreibt für $d = 3$ alle Drehungen im reellen dreidimensionalen Raum. Ihre Elemente sind Rotationsmatrizen, das bedeutet orthogonale Matrizen mit Determinante Eins. Tabelle 1 listet die expliziten Formeln der Riemannschen Operatoren auf, die gebraucht werden, um die Kontrollpunkte zu optimieren und eine Bézier-Fläche in dem Raum der Rotationsmatrizen $SO(3)$ zu berechnen. In Abbildung 11 ist die Drehung einer Kuh mittels Rotationsmatrizen dargestellt. Dabei wird aufgrund der unterschiedlichen λ -Werte einmal Dateninterpolation (blau) und einmal Daten-Fitting (grün) bzw. eine möglichst glatte Rotation berechnet.

Wenn man in Abbildung 11 die Drehung der blauen Kuh betrachtet, sieht man, dass die Datenpunkte (rote Kuh) sehr gut approximiert werden und die Drehung auch an den Schnittstellen der Patches stetig ist. Bei Betrachtung der Drehung der grünen Kuh fällt hingegen auf, dass die Datenpunkte nicht mehr gut approximiert werden und die Kuh oft eine andere Drehung hat. Dafür sind die Drehungen der grünen Kuh minimaler, als die der blauen Kuh. Die Bézier-Fläche der Rotationsmatrizen ist also glatter.

Gleich bleibt allerdings die Glattheit an den Schnittstellen der Patches. Diese Beobachtungen passen zu den für unterschiedliche λ -Werte erwarteten Ergebnissen.

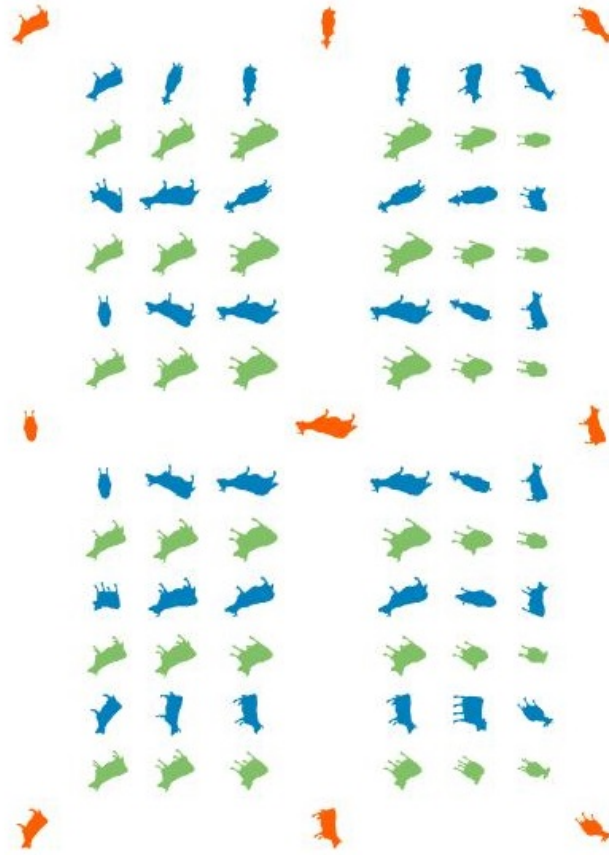


Abbildung 11: Kubische Bézier-Fläche eines 2x2 Patches in dem Raum der Rotationsmatrizen $S0(3)$. Die Datenpunkte sind in rot dargestellt. Es wurden zwei unterschiedliche λ -Werte gewählt (blau $\lambda = 1000$, grün $\lambda = 0,001$) und die kubischen Bézier-Flächen wurden jeweils zu 3×3 Zeitpunkten berechnet. Die Kontrollpunkte wurden mit Algorithmus 1 berechnet, siehe Kapitel 4.

6 Fazit

Es wurden zwei Methoden vorgestellt, um stückweise Bézier-Flächen von dem euklidischen Raum auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten zu verallgemeinern. Die beiden Methoden basieren vor allem auf der Exponentialabbildung und dem Logarithmus sowie dem gewichteten geodätischen Durchschnitt. Bei Typ I wird der gewichtete geodätische Durchschnitt explizit ausgerechnet. Bei Typ II wird er hingegen nur approximiert, um kein Optimierungsproblem lösen zu müssen und so die Rechenzeit zu verkürzen. Das Optimierungsproblem wird mit dem zweimaligen Anwenden des ersten Schritts des de Casteljau Algorithmus approximiert. Es wurde ein kurzes Beispiel auf der Sphäre dargestellt, um zu zeigen, dass Typ I und Typ II im Allgemeinen nicht übereinstimmen.

Des Weiteren wurden die \mathcal{C}^0 - und \mathcal{C}^1 -Bedingungen für zusammengesetzte Bézier-Flächen vom euklidischen Raum auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert und es konnte gezeigt werden, dass beide Methoden stetig differenzierbar sind, wenn die Kontrollpunkte die \mathcal{C}^1 -Bedingungen erfüllen. Außerdem wurde gezeigt, wie man die Kontrollpunkte optimieren kann, sodass die Bézier-Fläche möglichst glatt ist und möglichst nah an den gegebenen Datenpunkten liegt. Es wurde ein Algorithmus angegeben, mit dem man für gegebene Datenpunkte die optimalen Kontrollpunkte approximativ bestimmen und anschließend die Bézier-Fläche auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit berechnen kann. Zum Schluß wurden dann noch Beispiele auf der Sphäre und in dem Raum der Rotationsmatrizen gegeben.

Die Anwendungsmöglichkeiten der vorgestellten Methoden zum Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten sind vielfältig. Anwendungen finden sich vor allem in den Ingenieurwissenschaften und der Geographie, aber nicht nur dort. Es gibt zum Beispiel auch Möglichkeiten der medizintechnischen Anwendungen. Im Prinzip können die beiden Methoden für jedes Problem, das von zwei Parametern (t_1, t_2) abhängt, angewendet werden. Im Speziellen natürlich, wenn es sich dabei um eine Riemannsche Mannigfaltigkeit handelt.

Mögliche Anwendung sind zum Beispiel Windfeld-Approximationen in Städten oder Landschaften. Der Wind in einem Gebiet kann durch positiv semidefinite Kovarianzmatrizen dargestellt werden, die von der Windstärke und der Windrichtung abhängen. Die Menge der positiv semidefiniten Kovarianzmatrizen ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und damit können die beiden vorgestellten Methoden angewendet werden. Dies kann zum Beispiel in Zeiten der Dürre im Zusammenhang mit Waldbränden sehr nützlich sein.

Eine weitere mögliche Anwendung der beiden vorgestellten Methoden ist die Triangulation zur Landvermessung. Hierbei werden die Winkel und eine Seitenlänge eines Dreiecks gemessen und über trigonometrische Formeln die restlichen Längen des Dreiecks bestimmt. Da die Erdoberfläche aber gekrümmt ist, gelten die trigonometrischen Formeln nicht mehr und es muss probiert werden, den Messfehler zu bestimmen. Da die Erdoberfläche eine Mannigfaltigkeit, die Sphäre \mathbb{S}^2 ist, kann man auch über die beiden hier vorgestellten Methoden Landvermessungen vornehmen.

Des Weiteren eignen sich die beiden vorgestellten Methoden für die Verarbeitung von Signalen eines Radars.

Wie oben erwähnt, gibt es auch Anwendungen in der Medizin. Die Methoden können zum Beispiel zur Bildverarbeitung von Magnetresonanztomographie (MRT) Aufnahmen genutzt werden. Dabei ist der erste Parameter t_1 die Zeit, zu der die MRT's aufgenommen wurden. Zu jedem Zeitpunkt werden mehrere Bilder in unterschiedlicher Tiefe aufgenommen. Die Tiefe der MRT-Aufnahmen ist dann der zweite Parameter t_2 . Sodass die beiden vorgestellten Methoden genutzt werden können, um die einzelnen Bilder für die unterschiedlichen Zeitpunkte und Tiefen zusammenzufügen und Veränderungen, wie zum Beispiel das Wachstum eines Tumors, zu analysieren.

Nachdem nun mehrere Anwendungen vorgestellt wurden, sollen abschließend noch zwei Ideen für weitergehende Arbeiten vorgeschlagen werden. Bei der Definition der Energie der Bézier-Fläche ist es möglich, die Datenpunkte unterschiedlich stark zu gewichten ($\lambda_{m,n}$ anpassen). Dies wurde in dieser Arbeit nicht genauer betrachtet, da alle Datenpunkte gleich stark gewichtet wurden. Weitergehende Arbeiten könnten sich mit dieser Fragestellung beschäftigen. Man könnte dann zum Beispiel in Anwendungen Datenpunkten mehr Gewicht geben, bei denen man sich ziemlich sicher ist, dass keine Messfehler vorliegen, und den Datenpunkten, bei denen man sich eher unsicher ist, weniger Gewicht einräumen.

In dem bisherigen Ansatz sind die Datenpunkte jeweils die Eckkontrollpunkte, bzw. die Eckkontrollpunkte approximieren die Datenpunkte. In diesen Punkten wird dann linearisiert. Ein weiterer Ansatz wäre, nicht in jedem Eckkontrollpunkt zu linearisieren, sondern z.B. die Patches zu vergrößern, indem man mehrere Patches zusammenfügt und dadurch in weniger Punkten linearisieren muss. Damit müssen dann weniger Exponentialabbildungen, Logarithmen und gewichtete Durchschnitte berechnet werden und der Rechenaufwand wird reduziert.

Insgesamt wird deutlich, dass Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ein aktuelles Forschungsthema ist und es vielfältige Verwendungsmöglichkeiten in unterschiedlichen Bereichen sowohl in der Forschung als auch in der Anwendung, sowie potentielle Weiterentwicklungsmöglichkeiten der hier vorgestellten Methoden gibt.

7 Literaturverzeichnis

- [1] P.-A. Absil, P.-Y. Gouzenbourger, P. Striowski und B. Wirth, „Differentiable piecewise-Bézier surfaces on Riemannian manifolds“, *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 9(4):1788-1828, 2016.
- [2] G. Farin, „Curves and Surfaces for CAGD“, 5th ed., Academic, London, 2002.
- [3] M. do Carmo, „Riemannian Geometry“, *Math. Theory Appl.*, Birkhäuser Boston, 1992.
- [4] H. Karcher, „Riemannian center of mass and mollifier smoothing“, *Comm. Pure Appl. Math.*, 30 (1977), pp. 509-541.
- [5] P. T. Fletcher, „Geodesic regression and the theory of least squares on Riemannian manifolds“, *Int. J. Comput. Vis.*, 105 (2013), pp. 171-185, <http://dx.doi.org/10.1007/s11263-012-0591-y>.
- [6] R. Bergmann, F. Laus, G. Steidl, und A. Weinmann, „Second order differences of cyclic data and applications in variational denoising“, *SIAM J. Imaging Sci.*, 7 (2014), pp 2916-2953, <http://dx.doi.org/10.1137/140969993>.
- [7] B. Vandereycken, „Low-rank matrix completion by Riemannian optimization“, *SIAM J. Optim.*, 23 (2013), pp. 1214-1236, <http://dx.doi.org/10.1137/110845768>.
- [8] O. Davydov and L. Schumaker, „Interpolation and Scattered Data Fitting on Manifolds using Projected Powell-Sabin Splines“, in *IMA Journal of Numerical Analysis* Vol. 28, Issue: 4, 2008, pp. 785 - 805.
- [9] L. Machado und F. Leite, „Fitting smooth paths on Riemannian manifolds“, in *International Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 2006.
- [10] A. Lin und M. Walker, „CAGD techniques for differentiable manifolds“, in *Proceedings of the 2001 International Symposium Algorithms for Approximation IV*, 2001.
- [11] T. Popiel und L. Noakes, „Bézier curves and C^2 interpolation in Riemannian manifolds“, *J. Approx. Theory*, 148 (2007), pp. 111-127.
- [12] Q. Rentmeesters, „A gradient method for geodesic data fitting on sime symmetric Riemannian manifolds“, in *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, IEEE, Piscataway, NJ, 2011, pp. 7141-7146, <http://dx.doi.org/10.1109/CDC.2011.6161280>.
- [13] N. Boumal und P.-A. Absil, „A discrete regression method on manifolds and its application to data on $SO(n)$ “, in *IFAC Proc. Vol.*, 44 (2011), pp. 2284-2289, <http://dx.doi.org/10.3182/20110828-6-IT1002.00542>.

8 Plagiatserklärung der Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über Daten-Fitting auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Bézier-Flächen selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

(Datum, Unterschrift)