



Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Masterarbeit

**Numerische Implementierung
geometrischer Tomographie mit
Krümmungsregularisierung**

Autor: Farina Bolte
Matrikelnummer: 406629
E-Mail: f.bolt04@uni-muenster.de

Abgabedatum: 04. August 2020

Betreuer: Prof. Dr. Benedikt Wirth

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Eindeutigkeit der Rekonstruktion konvexer Körper mittels X-rays	5
3. Numerische Implementierung der Rekonstruktion	23
3.1. Diskretisierung	24
3.2. Ganzzahlige quadratische Optimierung	25
3.3. Diskretisierung mit Krümmungsregularisierung	29
3.3.1. Berechnung der Gewichte	29
3.3.2. Nebenbedingungen	31
3.4. Implementierung	33
3.5. Ergebnisse	36
4. Eindeutigkeit der Rekonstruktion konvexer Körper mit Löchern	48
5. Fazit und Ausblick	62
Literaturverzeichnis	64
A. Algorithmus	66

1. Einleitung

Diese Masterarbeit beschäftigt sich mit Hammer's X-ray-Problem und einer numerischen Implementierung zur Rekonstruktion konvexer Körper mit Krümmungsregularisierung. Im Jahre 1963 veröffentlichte P. C. Hammer [13] folgendes Problem: Wie viele Röntgenbilder (engl. X-ray pictures) eines konvexen Körpers müssen aufgenommen werden, um ihn exakt zu rekonstruieren? Er stellte sich ein konvexes Loch in einem ansonsten homogenen Festkörper (überall von gleicher Dichte) vor, das er mit X-rays bestimmen wollte. Die Messungen sollten so genau sein, dass die Intensität an jedem Punkt die Länge des Schnitts durch den Körper entlang einer Röntgenrichtung bestimmt.

In der Praxis taucht dieses Problem bei der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung (engl. non-destructive testing) auf. Wenn wir zum Beispiel ein Gussteil auf Lufteinschlüsse untersuchen möchten, wird häufig eine Durchstrahlungsprüfung mit Röntgenstrahlung angewendet.

X-rays lassen sich auf zwei unterschiedliche Arten aufnehmen: Zum einen gibt es (parallele) X-rays, die durch ihre Aufnahmerichtungen bestimmt sind. Parallel zu diesen Richtungen werden dann unendlich viele Messungen des Körpers vorgenommen. Zum anderen gibt es Punkt-X-rays, die von endlich vielen Punktquellen in alle Richtungen ausgehen. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit nur mit parallelen X-rays und suchen dementsprechend nach einer Menge von Richtungen, entlang derer die X-rays einen beliebigen konvexen Körper eindeutig bestimmen.

Gardner und McMullen [11] haben dieses Problem 1980 gelöst, indem sie bewiesen haben:

Sei S eine Menge von Richtungen in einer Ebene im \mathbb{R}^n , die keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. Dann werden konvexe Körper im \mathbb{R}^n durch die in den Richtungen $u \in S$ aufgenommenen X-rays eindeutig bestimmt.

Diese Aussage leiten wir im zweiten Kapitel der Arbeit her. Das theoretisch gewonnene Ergebnis werden wir dann in der Praxis anwenden und implementieren eine tatsächliche Rekonstruktion eines konvexen Körpers anhand von mit X-rays gewonnenen Daten. Hierzu nehmen wir mehrere Messungen eines konvexen Körpers mit X-rays auf und suchen eine Rekonstruktion, deren Messungen mit den ursprünglichen übereinstimmen. Das bedeutet wir lösen ein Minimierungsproblem, bei dem wir aufgrund von Messungenauigkeiten noch eine Regularisierung hinzufügen. Diese soll unter anderem sicherstellen, dass wir eine konvexe Rekonstruktion erhalten. Weil wir Konvexität mittels Krümmung feststellen können, werden wir mit Krümmungsregularisierung arbeiten.

Das Aufstellen dieses Minimierungsproblems mitsamt seinen Nebenbedingungen und dessen Diskretisierung für die Programmierung behandeln wir im dritten Kapitel. Dabei diente der Artikel von T. Schoenemann et al. [15] als Vorlage. Am Ende des Kapitels

stellen wir Ergebnisse der Rekonstruktion mit dem implementierten Algorithmus vor, wobei wir einfache Beispielbilder konvexer Körper als Vorlage nahmen.

Wenn wir auf das Anwendungsbeispiel mit dem Gussteil zurückkommen, so kann dieses durchaus mehr als nur einen Lufteinschluss aufweisen. Neben der Rekonstruktion dieser Löcher, könnte es ebenso erwünscht sein auch das Gussteil selbst mitzurekonstruieren. Hierzu liefern uns Bianchi und Longinetti [2] aufbauend auf Gardner und McMullen [11] theoretische Ergebnisse. Diese stellen wir im dritten Kapitel vor und geben schließlich einen Ausblick auf die Erweiterung unserer Programmierung zur Lösung des Problems der Rekonstruktion eines konvexen Körpers mit mehreren kreisrunden disjunkten Löchern mittels X-rays.

2. Eindeutigkeit der Rekonstruktion konvexer Körper mittels X-rays

Dieses Kapitel stützt sich vor allem auf die Texte von Gardner [8] und Gardner und McMullen [11]. Unser Ziel ist es die Aussage aus der Einleitung zu beweisen, die besagt unter welchen Bedingungen konvexe Körper im \mathbb{R}^n durch (parallele) X-rays eindeutig bestimmt sind. Wir zeigen das Resultat zunächst für konvexe Körper im \mathbb{R}^2 und verallgemeinern dies am Ende für den Fall \mathbb{R}^n , indem wir einen konvexen Körper im \mathbb{R}^n als Vereinigung der Schnitte des konvexen Körpers mit bestimmten Ebenen betrachten. Als Erstes definieren wir einen konvexen Körper, die X-ray-Transformation und was es bedeutet, wenn ein konvexer Körper eindeutig durch X-rays bestimmt ist.

Definition 2.1. *Konvexe Menge und konvexer Körper*

Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, wenn $(1-t)x + ty \in C$ für alle $x, y \in C$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt. Die Verbindungsstrecke von je zwei beliebigen Punkten aus C muss also ganz in der Menge C liegen. Somit hat eine konvexe Menge keine „Löcher“ oder „Dellen“.

Ein *konvexer Körper* ist eine kompakte, konvexe Menge, deren Inneres nichtleer ist.

Definition 2.2. *Konvexe und konkave Funktion*

Eine reellwertige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $0 \leq t \leq 1$ gilt. Sie heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

Die nächste Definition benötigen wir für die X-ray-Transformation und sie stammt aus [10].

Definition 2.3. *Richtung*

Eine *Richtung* ist ein Einheitsvektor $u \in S^{n-1}$, wobei $S^{n-1} = \{x : \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre und $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet. Ist u eine Richtung, dann ist $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = 0\}$ der zu u orthogonale $(n-1)$ -dimensionale Unterraum und $l_u = \{tu : t \in \mathbb{R}\}$ ist die Gerade durch den Ursprung o parallel zu u . Die Schreibweise $x \cdot u$ steht für das Skalarprodukt der Vektoren.

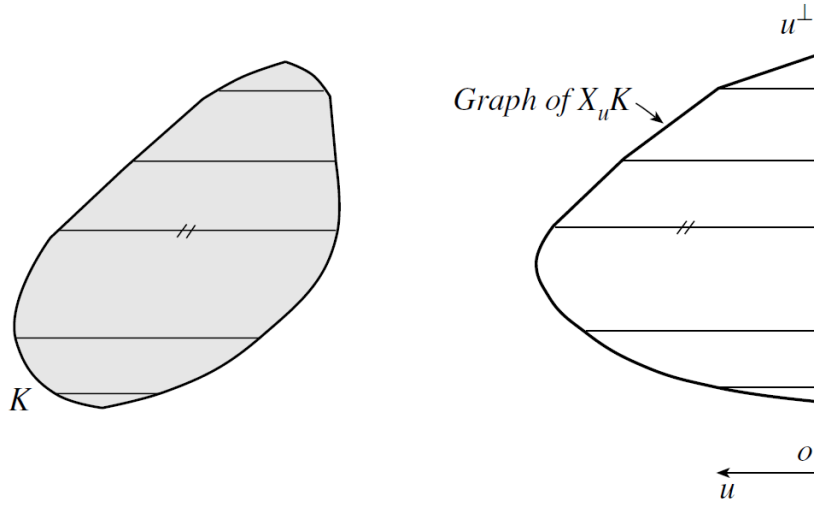


Abbildung 2.1.: X-ray eines konvexen Körpers K im \mathbb{R}^2

Definition 2.4. *X-ray-Transformation*

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion, die außerhalb einer beschränkten Menge gleich 0 ist. Die *X-ray-Transformation* integriert die Funktion f über Geraden $\{x + tu : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$, die repräsentiert werden durch eine Richtung $u \in S^{n-1}$ und einen Punkt $x \in u^\perp$. Wir definieren

$$X_u f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + tu) dt.$$

als *X-ray-Transformation* oder (*parallelen*) *X-ray* von f in Richtung u .

Hierbei ist f eine Dichtefunktion und die X-ray-Transformation liefert uns Informationen über die Masse entlang der Geraden $\{x + tu : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$. Als Beispiel zur Definition betrachten wir die X-ray-Transformation eines homogenen konvexen Körpers im \mathbb{R}^2 , vergleiche [10].

Beispiel 2.5. *X-ray-Transformation eines homogenen konvexen Körpers im \mathbb{R}^2*

Sei K ein konvexer, homogener Körper (überall von gleicher Dichte) im \mathbb{R}^2 und χ_K die charakteristische Funktion von K mit $\chi_K(y) = 1$, wenn für $y \in \mathbb{R}^2$ gilt, dass $y \in K$ ist und mit $\chi_K(y) = 0$ für $y \notin K$. Da K ein homogener Körper ist, ist die Funktion $f = \chi_K$. Weiter sei $u \in S^1$ eine Richtung und sei $v \in S^1$ orthogonal zu u , sodass $\{u, v\}$ die gleiche Orientierung hat wie die Standard-Orthonormalbasis $\{e_1, e_2\}$ für \mathbb{R}^2 , damit ist $u^\perp = \{sv : s \in \mathbb{R}\}$. Der parallele X-ray von K in Richtung u ist also

$$X_u K(s) := X_u \chi_K(sv) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_K(sv + tu) dt = \int_{sv+l_u} \chi_K(y) dy$$

für $s \in \mathbb{R}$.

Hier liefert uns die X-ray-Transformation die Länge des Schnitts der Geraden in Richtung u mit dem Körper.

In diesem Fall ist $X_u K$ stetig und konkav auf seinem Träger. Siehe Abbildung 2.1 aus [8].

Im folgenden steht die Bezeichnung $X_u K = X_u \chi_K$ für den X-ray eines homogenen konvexen Körpers K . Wir benutzen die charakteristische Funktion, weil K überall von gleicher Dichte ist. Wie oben erwähnt reicht es konvexe Körper im \mathbb{R}^2 zu betrachten und deshalb werden wir des öfteren Definitionen und Theoreme auf diesen Fall einschränken. So ist auch die nachfolgende Definition auf den \mathbb{R}^2 beschränkt.

Definition 2.6. *Eindeutig bestimmt durch X-rays*

Sei $S \subset S^1$ eine Menge von Richtungen. Ein konvexer Körper $K \subset \mathbb{R}^2$ ist *eindeutig bestimmt durch X-rays*, wenn für jeden weiteren konvexen Körper $K' \subset \mathbb{R}^2$ aus $X_u K' = X_u K$ für alle $u \in S$ folgt, dass $K = K'$ ist.

Bemerkung 2.7.

Man kann zeigen, dass für unendliche Mengen $S \subset S^1$ konvexe Körper eindeutig durch X-rays bestimmt sind.

Wir können uns also auf endliche Richtungsmengen für X-rays beschränken.

Die folgenden Definitionen benötigen wir für die spätere Definition eines affinen regelmäßigen Polygons. Es wird sich herausstellen, dass die Menge S keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines solchen Polygons sein darf, um konvexe Körper eindeutig zu bestimmen.

Definition 2.8. *Nichtsinguläre Matrix*

Eine Matrix A ist *nichtsingulär*, wenn $\det A \neq 0$ gilt. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass A nichtsingulär ist genau dann, wenn eine eindeutige Inverse A^{-1} existiert.

Definition 2.9. *Affine Transformation*

Eine *affine Transformation* im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, sodass $\phi(x) = Ax + b$, wobei A eine $n \times n$ Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ ist.

Wir nennen ϕ *nichtsingulär*, wenn die Matrix A nichtsingulär ist. Die Gruppe der nicht-singulären affinen Transformationen wird mit GA_n bezeichnet. Alle Elemente darin sind insbesondere Bijektionen von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^n .

Wenn A die Einheitsmatrix ist, dann ist $\phi(x) = x + b$, und die Abbildung ϕ wird als *Translation* oder *Parallelverschiebung* bezeichnet.

Eine *Dilatation* ist eine Abbildung $\phi(x) = rx$ für ein $r > 0$.

Weil wir bei parallelen X-rays keine Aussage über die Position des Körpers im Raum treffen können, da wir nur mit Richtungen und ohne feste Punkte arbeiten, können wir konvexe Körper nur bis auf Translation mittels parallelen X-rays eindeutig bestimmen.

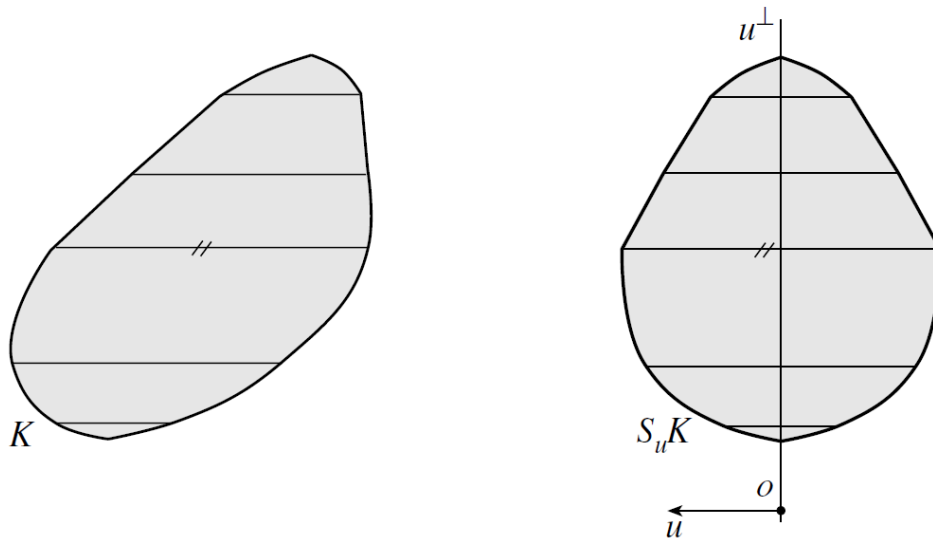


Abbildung 2.2.: Steiner-Symmetrisierung $S_u K$ eines convexen Körpers K im \mathbb{R}^2 in Richtung $u \in S^1$.

Um die zentrale Aussage dieses Kapitels zu beweisen, formulieren wir die Idee eines X-rays in einen geometrischen Ausdruck um und definieren die Steiner-Symmetrisierung.

Definition 2.10. *Steiner-Symmetrisierung*

Sei $u \in S^{n-1}$ eine beliebige Richtung. Dann erhalten wir die *Steiner-Symmetrisierung* (engl. Steiner symmetral) eines convexen Körpers $K \subset \mathbb{R}^n$ in Richtung u wie folgt: Sei $H = u^\perp$ die Hyperebene durch den Ursprung o mit der Normalen u . Wenn $L = \{tu + b : t \in \mathbb{R}\}$ für ein $b \in H$ eine Gerade in Richtung u ist, sodass $L \cap K \neq \emptyset$ gilt, dann sei $C(K, L)$ der Abschnitt von L mit Mittelpunkt $L \cap H$ mit der gleichen Länge wie $L \cap K$. Die *Steiner-Symmetrisierung* $S_u K$ von K in Richtung u ist nun die Vereinigung der Abschnitte $C(K, L)$. Siehe Abbildung 2.2 aus [8].

Lemma 2.11. *Die Steiner-Symmetrisierung $S_u K$ hat das gleiche Volumen wie der convexe Körper K und die beiden Mengen haben die gleichen X-rays in Richtung u .*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition. □

Der Beweis des folgenden Lemmas stammt aus [3].

Lemma 2.12. *Die Steiner-Symmetrisierung eines convexen Körpers ist wieder ein convexer Körper.*

Beweis. Ist K' irgendein in K enthaltener Körper, so ist der aus K' durch Symmetrisierung an H entstehende Körper in $S_u K$ enthalten. Nun seien \bar{A} und \bar{B} zwei Punkte von

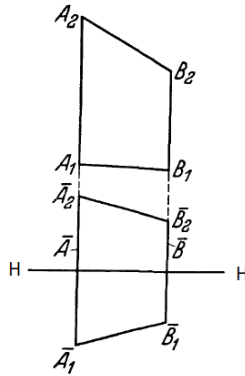


Abbildung 2.3.

$S_u K$. Zu zeigen ist, dass die Strecke $\overline{A\bar{B}}$ ganz zu $S_u K$ gehört. Durch \bar{A} und \bar{B} lege man die zu H senkrechten Geraden. Ihre Schnittpunkte mit dem Rand von $S_u K$ seien \bar{A}_1, \bar{A}_2 beziehungsweise \bar{B}_1, \bar{B}_2 . Das (gleichschenklige) Trapez $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{A}_2$ entsteht durch Symmetrisierung an H aus einem Trapez $A_1B_1B_2A_2$, das zu K gehört und natürlich konvex ist. Folglich gehört $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{B}_2\bar{A}_2$, also auch die Strecke $\overline{A\bar{B}}$, zu $S_u K$. Siehe Abbildung 2.3 aus [3]. \square

Für einen gegebenen konvexen Körper K und eine gegebene Richtung u enthalten $X_u K$ und $S_u K$ die gleichen Informationen über K . Deshalb identifizieren wir $X_u K$ ab jetzt mit $S_u K$. Weiterhin ist $X_u K$ aber eine Funktion und $S_u K$ eine Menge.

Das nächste Theorem zeigt, dass Eindeutigkeit bis auf Translation äquivalent zur Eindeutigkeit der konvexen Körper ist, wenn wir mit der Steiner-Symmetrisierung arbeiten. Dafür definieren wir noch den Schwerpunkt einer beschränkten, messbaren Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und beweisen ein Lemma.

Definition 2.13. *Schwerpunkt*

Sei μ ein Maß in \mathbb{R}^n und E eine beschränkte Menge in \mathbb{R}^n mit endlichem positivem Maß bezüglich μ . Der *Schwerpunkt* von E bezüglich μ ist der Punkt $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ mit

$$c_i = \frac{1}{\mu(E)} \int_E x_i \, d\mu(x)$$

für $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, wobei T für transponiert steht.

Ab jetzt beschränken wir uns wieder auf den \mathbb{R}^2 .

Lemma 2.14. *Seien E und E' zusammenhängende Körper im \mathbb{R}^2 , sodass jede Gerade parallel zu einer gegebenen festen Richtung u die Körper E und E' in gleich langen Abschnitten schneidet. Dann liegen die Schwerpunkte von E und E' auf derselben Geraden parallel zu u .*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir u parallel zur x -Achse, sodass $X_u E = X_u E(y)$ der X-ray von E in x -Richtung ist, und wir wählen $\lambda_2(E) = 1$, wobei λ_n das n -dimensionale Lebesgue-Maß in \mathbb{R}^n bezeichnet. Sei $E_y = \{x : (x, y) \in E\}$ und c der Schwerpunkt von E . Dann gilt mit der Definition des Schwerpunkts und $E = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} E_y \times \{y\}$

$$c = \int_E (x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{E_y} (x, y) \, dx \, dy.$$

Die y -Koordinate von c ist demnach

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{E_y} y \, dx \, dy &= \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{E_y} 1 \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{E_y} \chi_E(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x, y) \, dx \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y X_u E(y) \, dy, \end{aligned}$$

weil $E_y = \{x : (x, y) \in E\}$ gilt. Analog berechnen wir die y -Koordinate des Schwerpunkts von E' und erhalten $\int_{-\infty}^{\infty} y X_u E'(y) \, dy$. Da $X_u E = X_u E'$ nach Voraussetzung gilt, sind die y -Koordinaten der Schwerpunkte von E und E' gleich. \square

Aus dem Lemma folgt folgende Aussage:

Korollar 2.15. *Der Schwerpunkt eines konvexen Körpers K und der seiner Steiner-Symmetrisierung $S_u K$ liegen auf derselben Geraden in Richtung u .*

Betrachten wir Abbildung 2.2 wird klar, dass ein einzelner X-ray einen konvexen Körper niemals eindeutig bestimmen kann. Wir nehmen daher an, dass unsere gesuchte Menge S wenigstens zwei nicht parallele Richtungen enthält.

Theorem 2.16. *Sei $S \subset S^1$ eine Menge mit mindestens zwei paarweise nicht parallelen Richtungen. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) *Wenn K und K' konvexe Körper im \mathbb{R}^2 sind und $S_u K$ durch Translation aus $S_u K'$ für alle $u \in S$ hervorgeht, dann entsteht auch K durch Translation von K' .*
- (ii) *Wenn K und K' konvexe Körper im \mathbb{R}^2 sind und $S_u K = S_u K'$ für alle $u \in S$ gilt, dann ist $K = K'$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass Aussage (i) gilt. Wenn $S_u K = S_u K'$ für alle $u \in S$ gilt, dann impliziert (i), dass K durch Translation von K' entstanden ist. Nach Lemma 2.14 liegen für jedes $u \in S$ die Schwerpunkte von K und K' auf derselben Geraden parallel zu u . Weil S nach Voraussetzung nicht parallele Richtungen enthält, folgt daraus, dass K und K' den gleichen Schwerpunkt haben. Also ist $K = K'$ und es gilt (ii).

Angenommen Aussage (ii) gilt. Wir nehmen an, dass $S_u K$ durch Translation aus $S_u K'$ für alle $u \in S$ hervorgeht. Sei K'' der konvexe Körper der durch Translation von K' entsteht und der den gleichen Schwerpunkt wie K hat und sei $u \in S$. Nach Konstruktion der Steiner-Symmetrisierung ist dann auch $S_u K''$ eine Translation von $S_u K'$ und so

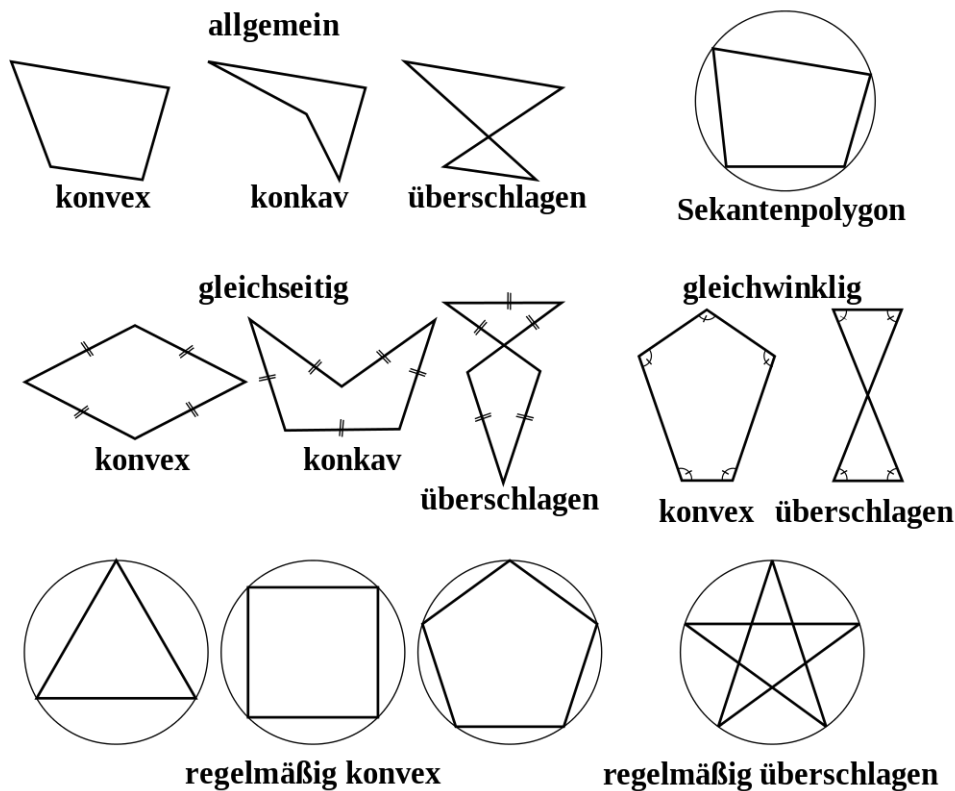


Abbildung 2.4.: Verschiedene Typen von Polygonen. (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Polygon#/media/Datei:Polygon_types_de.svg)

entsteht $S_u K$ durch Translation von $S_u K''$. Mit dem vorherigen Korollar liegen die Steiner-Symmetrisierungen von $S_u K''$ und $S_u K$ auf derselben Geraden in Richtung u , womit $X_u K$ eine Verschiebung von $X_u K''$ in eine Richtung parallel zu u^\perp ist. Wenn wir annehmen, dass u^\perp die y -Achse ist und wir uns die Formel für die y -Koordinate des Schwerpunkts von K aus dem Beweis des Lemmas 2.14 anschauen, dann sehen wir, dass eine Verschiebung um nicht null schon unterschiedliche y -Koordinaten der Schwerpunkte von K und K'' zur Folge hätte. Also ist $X_u K = X_u K''$ und somit $S_u K = S_u K''$ für alle $u \in S$. Mit (ii) gilt $K = K''$ und da K'' durch Translation von K' entsteht, folgt (i). \square

Es reicht somit aus, konvexe Körper nur bis auf Translation zu bestimmen, weil sie nach dem Theorem dann schon eindeutig bestimmt sind. Als Nächstes führen wir den Begriff des Polygons entnommen aus [7] ein.

Definition 2.17. *Polygon*

Ein *Polygon*, *Vieleck* oder *n-Eck* ist eine Folge von n Strecken $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$, die jeweils aufeinanderfolgende Paare von n Punkten A_1, A_2, \dots, A_n verbindet. Die Strecken werden *Seiten* und die Punkte *Ecken* genannt. Alle Verbindungsstrecken zweier

Eckpunkte, die keine Seiten sind, nennt man *Diagonalen*.

In dieser Definition legen wir fest, dass sich die Seiten nicht gegenseitig kreuzen. Polygone mit dieser Eigenschaft werden auch *einfach* genannt, ansonsten nennt man sie *überschlagen*. Liegen die Eckpunkte alle in einer Ebene spricht man von einem *planaren* Polygon.

Ein planares einfaches Polygon heißt *konvexes Polygon*, wenn sein Inneres eine konvexe Menge ist.

Ein planares gleichseitiges (alle Seiten sind gleich lang) und gleichwinkliges (alle Innenwinkel sind gleich groß) Polygon nennen wir *regelmäßig*. Ein regelmäßiges Polygon hat einen *Mittelpunkt*, von dem alle Ecken sowie alle Seiten gleichweit entfernt sind. Er ist der Mittelpunkt des Umkreises und Inkreises des Polygons.

In Abbildung 2.4 sehen wir verschiedene Typen von Polygonen.

Das folgende Theorem liefert das Resultat, dass sich immer Richtungen finden lassen, so dass verschiedene konvexe Polygone die gleichen X-rays haben. Am Ende dieses Kapitels wird es außerdem für den Beweis eines weiteren Theorems benötigt.

Theorem 2.18. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Menge von n paarweise nicht parallelen Richtungen, sodass verschiedene konvexe Polygone mit den gleichen X-rays in diesen Richtungen existieren.*

Beweis. Wir betrachten ein regelmäßiges n -Eck Q mit Mittelpunkt im Ursprung o und ein weiteres regelmäßiges n -Eck Q' , erhalten durch Rotation von Q mit dem Winkel $\frac{\pi}{n}$ um o . Die konvexe Hülle von $Q \cup Q'$ ist ein $2n$ -Eck. Sei u eine Richtung parallel zu einer Seite dieses $2n$ -Ecks und $l_{u^\perp} = \{tu^\perp : t \in \mathbb{R}\}$ die Mittelsenkrechte dieser Seite in Richtung u^\perp durch o . Dann ist das $2n$ -Eck spiegelsymmetrisch bezüglich l_{u^\perp} und die Spiegelung bildet Q auf Q' ab und umgekehrt. Da die X-rays in Richtung u orthogonal zu der Spiegelachse sind und eine Spiegelung über eine Achse orthogonal zur Richtung der X-rays diese nicht ändert, haben Q und Q' die gleichen X-rays in Richtung u . Zur Anschauung siehe Abbildung 2.5. \square

Wir vereinfachen das Problem der Bestimmung einer Richtungsmenge S , in deren Richtungen konvexe Körper durch X-rays eindeutig bestimmt sind, indem wir den Begriff des S -Polygons einführen und ein wichtiges Lemma beweisen.

Definition 2.19. *Entartetes konvexes Polygon*

Ein konvexes Polygon ist *entartet*, wenn mindestens einer der folgenden Fälle eintritt:

- (i) Mindestens zwei aufeinanderfolgende Seiten stimmen zumindest teilweise überein.
- (ii) Mindestens eine Seite hat Länge 0.
- (iii) Wenigstens ein Winkel ist 180° .

Daher sieht ein entartetes konvexes Polygon von n Seiten aus wie ein Polygon mit weniger Seiten.

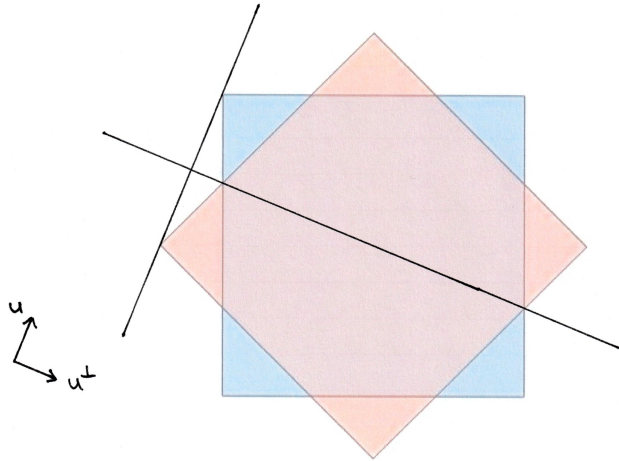


Abbildung 2.5.: Zwei regelmäßige Vierecke mit den gleichen X-rays in den Richtungen, die parallel zu den Seiten des 8-Ecks der konvexen Hülle $\text{conv}(Q \cup Q')$ verlaufen.

Definition 2.20. *S-Polygon*

Sei S eine endliche Menge von Richtungen. Ein (nicht entartetes) konvexes Polygon P heißt *S-Polygon*, wenn es folgende Eigenschaft besitzt:

Wenn v ein Eckpunkt von P und $u \in S$ ist, dann trifft die Gerade $l_u + v$ durch v parallel zu u einen weiteren Eckpunkt v' von P oder es gilt $(l_u + v) \cap P = \{v\}$. Im zweiten Fall ist $l_u + v$ eine Stützgerade von P mit Stützpunkt v , das heißt die Gerade $l_u + v$ schneidet das Polygon P im Punkt v so, dass es vollständig in einem der beiden durch die Stützgerade definierten abgeschlossenen Halbräume liegt.

Beispiel 2.21.

Ein regelmäßiges n -Eck ist ein *S-Polygon*, wenn S eine Teilmenge der Richtungen dessen Seiten oder Diagonalen ist.

Lemma 2.22. *Sei $S \subset S^1$ eine Menge mit mindestens zwei paarweise nicht parallelen Richtungen. Seien K_1 und K_2 zwei verschiedene konvexe Körper im \mathbb{R}^2 mit gleichem Schwerpunkt und gleicher Steiner-Symmetrisierung für jedes $u \in S$. Seien außerdem $C_i = \partial K_i$ ($i = 1, 2$) die Ränder der Körper. Da $K_1 \neq K_2$ gilt, ist $C_1 \neq C_2$. Dann existiert ein *S-Polygon* P , sodass die Eckpunkte von P eine Teilmenge von $C_1 \cap C_2$ sind.*

Beweis. Weil K_1 und K_2 die gleiche Steiner-Symmetrisierung haben, haben sie auch die gleiche Fläche. Laut Voraussetzung ist $K_1 \neq K_2$ und die Körper haben den gleichen Schwerpunkt, daher ist $(\text{int } K_1) \setminus K_2$ eine nichtleere offene Menge, wobei $\text{int } (K_1)$ das Innere von K_1 bezeichnet. Sei R eine beliebige Zusammenhangskomponente von $(\text{int } K_1) \setminus K_2$, also eine maximale zusammenhängende Teilmenge. Dann ist R eine offene Menge beschränkt durch einen Kreisbogen von C_1 und einen von C_2 mit gemeinsamen Endpunkten y und z , wobei $y \neq z$ ist. Sei $u \in S$ eine Richtung. Wenn L die Menge der

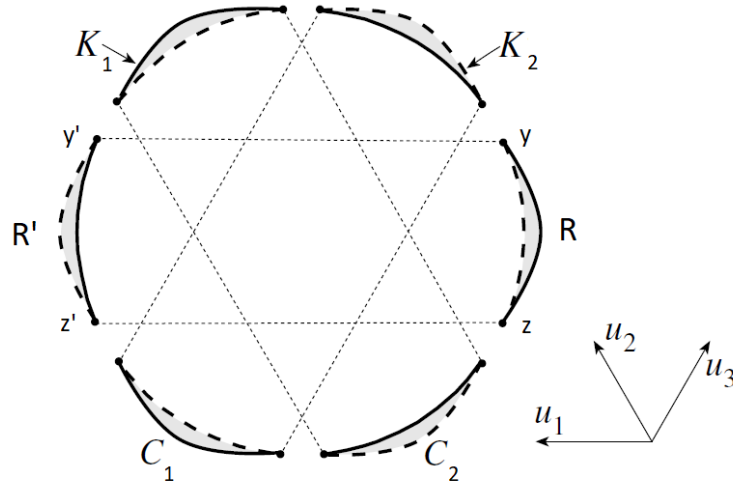


Abbildung 2.6.: Ein Beispiel der Zusammenhangskomponenten R und R' für die Richtung u_1 .

Geraden in Richtung u ist, dann haben die offenen Strecken in L ,

$$((\text{int } K_1) \setminus K_2) \cap L, \quad ((\text{int } K_2) \setminus K_1) \cap L,$$

dieselbe Länge, aufgrund der gleichen Steiner-Symmetrisierung in dieser Richtung. Es folgt, dass

$$R' = \bigcup \{((\text{int } K_2) \setminus K_1) \cap L : L \cap R \neq \emptyset\}$$

eine Zusammenhangskomponente von $(\text{int } K_2) \setminus K_1$ ist, deren Fläche mit der von R übereinstimmt. Desweiteren liegen die gemeinsamen Endpunkte y' und z' der Kreisbögen aus C_1 und C_2 , die R' beschränken, auf der Geraden durch y und z in Richtung u .

Wir können dieses Vorgehen nun iterieren, indem wir jede Folge von Richtungen in S benutzen. Ausgehend von R erhalten wir durch solche Folgen von Operationen Gebiete mit der gleichen Fläche wie R , die alle in der beschränkten Menge $K_1 \cup K_2$ liegen. Siehe Abbildung 2.6 aus [8]. Somit ist die Anzahl der dadurch erzeugten Mengen endlich und der Prozess konvergiert. Wenn wir die so erhaltenen Gebiete mit $R = R_1, \dots, R_k$ bezeichnen und wenn jedes R_i durch Kreisbögen aus C_1 und C_2 mit gemeinsamen Endpunkten y_i und z_i beschränkt ist, dann ist $\{y_1, z_1, \dots, y_k, z_k\}$ die Menge der Eckpunkte des gesuchten S -Polygons (manche der Punkte y_i und z_j können übereinstimmen). \square

Nach Lemma 2.22 reicht es nun die Richtungsmengen S zu bestimmen, die S -Polygone zulassen. Dazu beweisen wir ein weiteres Lemma, dem wir ein paar Definitionen und ein

Hilfslemma voranstellen müssen. Für das weitere Vorgehen identifizieren wir $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mit den komplexen Zahlen.

Lemma 2.23. *Eine Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann affin, wenn komplexe Zahlen c_1, c_2 und c_3 existieren, sodass $\phi(z) = c_1z + c_2\bar{z} + c_3$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, wobei \bar{z} die komplex konjugierte von z ist.*

Beweis. Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ beliebig und $\phi(z) := z' = x' + iy'$ mit $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. Wir beginnen mit der Hinrichtung. Da ϕ affin ist, existieren $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ mit

$$\phi(z) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy + e \\ bx + dy + f \end{pmatrix}.$$

Seien $c_1 = \frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2}$, $c_2 = \frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2}$ und $c_3 = e + if$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} c_1z + c_2\bar{z} + c_3 &= \left(\frac{a+d}{2} + i\frac{b-c}{2} \right) (x + iy) + \left(\frac{a-d}{2} + i\frac{b+c}{2} \right) (x - iy) + e + if \\ &= ax + ibx + idy + cy + e + if \\ &= ax + cy + e + i(bx + dy + f). \end{aligned}$$

Und somit gilt $\phi(z) = x' + iy' = c_1z + c_2\bar{z} + c_3$ für $x' = ax + cy + e$ und $y' = bx + dy + f$. Für die Rückrichtung sei $\phi(z) = c_1z + c_2\bar{z} + c_3$ und seien $c_1 = a + ib$, $c_2 = c + id$ und $c_3 = e + if$ mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi(z) &= (a + ib)(x + iy) + (c + id)(x - iy) + e + if \\ &= ax - by + i(ay + bx) + cx + dy + i(dx - cy) + e + if \\ &= (a + c)x + (d - b)y + e + i((b + d)x + (a - c)y + f) \end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} a + c & d - b \\ b + d & a - c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + c)x + (d - b)y + e \\ (b + d)x + (a - c)y + f \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass ϕ affin ist. □

Definition 2.24. *Affines regelmäßiges Polygon*

Sei $\phi \in \text{GA}_n$ eine nichtsinguläre affine Transformation. Ein *affines regelmäßiges Polygon* ist das Bild unter einem $\phi \in \text{GA}_n$ eines regelmäßigen Polygons.

Auch die nächsten drei Definitionen benötigen wir für das nachfolgende Lemma.

Definition 2.25. *Haupteinheitswurzel*

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Die *n-te Haupteinheitswurzel* (engl. principal *n*-th root of unity) eines Rings ist ein Element ω , das die Gleichungen

$$\omega^n = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ik} = 0 \quad \text{für } 1 \leq k < n$$

erfüllt.

Definition 2.26. *Mittelpunkt-Polygon*

Sei P ein Polygon. Das *Mittelpunkt-Polygon* (engl. midpoint polygon) von P ist das Polygon $M(P)$, dessen Eckpunkte die Mittelpunkte der Seiten von P sind.

Definition 2.27. *Hausdorff-Metrik*

Die *Hausdorff-Metrik* δ in der Klasse der nichtleeren kompakten Mengen im \mathbb{R}^n ist definiert durch

$$\delta(E, F) = \max \left\{ \max_{x \in E} d(x, F), \max_{x \in F} d(x, E) \right\}.$$

Jetzt haben wir alles Werkzeug für die Aussage und den Beweis von Lemma 2.28 zusammen. Das affine regelmäßige n -Eck in diesem Lemma werden wir kurz darauf mit dem S -Polygon in Verbindung bringen.

Lemma 2.28. *Sei $P_0 \subset \mathbb{C}$ ein konvexes n -Eck mit Schwerpunkt seiner Ecken im Ursprung. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiere $P_k = \frac{1}{\cos(\pi/n)} M(P_{k-1})$. Dann konvergiert die Folge $(P_{2k})_{k=0}^{\infty}$ (in der Hausdorff-Metrik) zu einem affinen regelmäßigen n -Eck.*

Beweis. Wir nehmen an, dass die Eckpunkte von P_0 im Uhrzeigersinn repräsentiert werden durch $a_i \in \mathbb{C}$, $0 \leq i \leq n-1$. Es bezeichne $M^2(P_0) = M(M(P_0))$ das zweite Mittelpunkt-Polygon von P_0 und im Allgemeinen sei $M^k(P_0) = M(M^{k-1}(P_0))$ das k -te Mittelpunkt-Polygon von P_0 . Man beachte aber, dass P_k nicht gleich $M^k(P_0)$ ist, sondern eine Dilatation von letzterem mit einem Dilatationsfaktor so gewählt, dass, wenn P_0 ein regelmäßiges Polygon ist, alle Polygone P_k die gleiche Fläche haben. Die Eckpunkte von $M(P_0)$ werden repräsentiert durch $\frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ und die von $M^2(P_0)$ durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) + \frac{1}{2}(a_i + a_{i-1}) \right) &= \frac{1}{4}(a_i + a_{i+1}) + \frac{1}{4}(a_i + a_{i-1}) \\ &= \frac{1}{4}(a_{i-1} + 2a_i + a_{i+1}) \end{aligned}$$

für $0 \leq i \leq n-1$, wobei die Indizes i modulo n genommen werden, damit keine negativen Indizes auftauchen. Wenn der Spaltenvektor $p_0 = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ das Polygon P_0 repräsentiert, dann repräsentiert $p_2 = Ap_0$ das zweite Mittelpunkt-Polygon $M^2(P_0)$,

wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist. Die Matrix A ist eine *zyklische Matrix*, das heißt eine Matrix der Form

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren einer solchen Matrix sind nach [12] bekannt. Wenn $\omega = e^{2\pi i/n}$ die n -te Haupteinheitswurzel ist, dann sind die Eigenwerte von C

$$b_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \omega^{jk},$$

mit den zugehörigen Eigenvektoren

$$y_j = (1, \omega^j, \omega^{2j}, \dots, \omega^{(n-1)j})^T$$

für $0 \leq j \leq n-1$. Um die Eigenwerte unserer Matrix A zu berechnen, benötigen wir noch folgende Formeln:

$$(1) \quad \cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$(2) \quad \sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$(3) \quad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y,$$

$$(4) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)).$$

Mit $\sin(\pi j) = 0$ für alle $j = 0, 1, \dots, n-1$ sind die Eigenwerte dann

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\omega^j + \frac{1}{4}\omega^{(n-1)j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{2\pi j i/n} + e^{2\pi j(n-1)i/n}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi j(n-1)}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi j(n-1)}{n}\right)\right) \\ &\stackrel{(1),(2)}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(2 \cos\left(\frac{2\pi j + 2\pi j(n-1)}{2n}\right) \cos\left(\frac{2\pi j - 2\pi j(n-1)}{2n}\right) \right. \\ &\quad \left. + i\left(2 \sin\left(\frac{2\pi j + 2\pi j(n-1)}{2n}\right) \cos\left(\frac{2\pi j - 2\pi j(n-1)}{2n}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi j n}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi j - \pi j n}{n}\right) + i \left(\sin\left(\frac{\pi j n}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi j - \pi j n}{n}\right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \cos(\pi j) \cos\left(\frac{2\pi j}{n} - \pi j\right) + i \left(\sin(\pi j) \cos\left(\frac{2\pi j}{n} - \pi j\right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \cos(\pi j) \cos\left(\frac{2\pi j}{n} - \pi j\right) \right) \\
&\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \left(1 + \cos(\pi j) \left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \cos(\pi j) + \sin\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \sin(\pi j) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \cos^2(\pi j) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + (1 - \sin^2(\pi j)) \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \right) \stackrel{(4)}{=} \cos^2\left(\frac{j\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

für $0 \leq j \leq n-1$ mit zugehörigen Eigenvektoren y_j wie oben.

Weil Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind und die y_j dann eine Basis bilden, können wir

$$p_0 = \sum_{j=0}^{n-1} z_j y_j = \sum_{j=0}^{n-1} z_j (1, \omega^j, \omega^{2j}, \dots, \omega^{(n-1)j})^T \quad (2.1)$$

schreiben mit $z_j \in \mathbb{C}$. Der Eckenschwerpunkt D von P_0 ist der Ursprung. Mit der Formel $D = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i$ folgt, dass die Summe $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0$ ist. Da $p_0 = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})^T$ ist, erhalten wir mit Darstellung (2.1)

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} z_j + \sum_{j=0}^{n-1} z_j \omega^j + \sum_{j=0}^{n-1} z_j \omega^{2j} + \dots + \sum_{j=0}^{n-1} z_j \omega^{(n-1)j} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} z_j \left(1 + \omega^j + \omega^{2j} + \dots + \omega^{(n-1)j} \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left(z_j \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{ij} \right) = z_0 \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n z_0,
\end{aligned}$$

da ω n -te Haupteinheitswurzel ist und es folgt $z_0 = 0$. Der Spaltenvektor $p_{2k} = A^k p_0$ repräsentiert $M^{2k}(P_0)$ und es ist

$$p_{2k} = A^k p_0 = A^k \left(\sum_{j=1}^{n-1} z_j y_j \right) = \sum_{j=1}^{n-1} z_j (A^k y_j) = \sum_{j=1}^{n-1} z_j \cos^{2k} \left(\frac{j\pi}{n} \right) y_j.$$

Nach Definition ist $P_1 = \frac{1}{\cos(\pi/n)} M(P_0)$,

$$P_2 = \frac{1}{\cos(\pi/n)} M(P_1) = \frac{1}{\cos(\pi/n)} M \left(\frac{1}{\cos(\pi/n)} M(P_0) \right) = \frac{1}{\cos^2(\pi/n)} M^2(P_0) \quad \text{und}$$

$$P_{2k} = \frac{1}{\cos(\pi/n)} M(P_{2k-1}) = \frac{1}{\cos^{2k}(\pi/n)} M^{2k}(P_0).$$

Also wird das Polygon P_{2k} repräsentiert durch

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\cos^{2k}(\pi/n)} z_j \cos^{2k} \left(\frac{j\pi}{n} \right) y_j.$$

Sei $R = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k}$. Für $1 < j < n - 1$ haben wir

$$\left(\frac{\cos(j\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{2k} \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$, da $\cos(\frac{\pi}{n}) > |\cos(\frac{j\pi}{n})|$ und somit $\left| \frac{\cos(j\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right| < 1$ gilt für $1 < j < n - 1$. Demnach wird R repräsentiert durch

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\cos^{2k}(\pi/n)} z_j \cos^{2k} \left(\frac{j\pi}{n} \right) y_j \\ & \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{2k} z_1 y_1 + \left(\frac{\cos((n-1)\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{2k} z_{n-1} y_{n-1} \\ & = z_1 y_1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos(\pi - \pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{2k} z_{n-1} y_{n-1} \\ & \stackrel{(3)}{=} z_1 y_1 + \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{-\cos(\pi/n)}{\cos(\pi/n)} \right)^{2k} z_{n-1} y_{n-1} \\ & = z_1 y_1 + z_{n-1} y_{n-1} = z_1 y_1 + z_{n-1} \bar{y}_1, \end{aligned}$$

wobei \bar{y}_1 den Spaltenvektor bezeichnet, dessen Einträge die komplex konjugierten von denen von y_1 sind. Die Gleichung $y_{n-1} = \bar{y}_1$ lässt sich einfach mit dem obigen Additionstheorem (3) und der Formel $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ nachrechnen. Mit Lemma 2.23 sehen wir, dass R ein affines Bild des regelmäßigen Polygons repräsentiert durch $y_1 = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})^T$ ist, weil die n -ten Einheitswurzeln in \mathbb{C} auf dem Einheitskreis die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks bilden. \square

Als nächstes bringen wir das S -Polygon mit dem Mittelpunkt-Polygon in Zusammenhang und erhalten schließlich ein Korollar aus dem eben bewiesenen Lemma, das uns die Richtungen der Menge S eines S -Polygons liefert.

Lemma 2.29. *Ist ein Polygon P ein S -Polygon, dann ist auch das Mittelpunkt-Polygon $M(P)$ eines.*

Beweis. Sei P ein S -Polygon mit den Eckpunkten a_i , $0 \leq i \leq n-1$. Mögliche Richtungen der Menge S wären Richtungen der Seiten und Diagonalen von P . Das wäre die Menge der Vektoren $\{(a_{i+1} - a_i), (a_{i+2} - a_i), (a_{i+3} - a_i), \dots, (a_{i-2} - a_i) : i = 0, \dots, n-1\}$, hier nicht normiert und es ist i modulo n . Die Eckpunkte des Mittelpunkt-Polygons $M(P)$ sind $\frac{1}{2}(a_i + a_{i+1})$ und die Menge der Richtungen der Seiten und Diagonalen von $M(P)$ lautet

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left(\frac{1}{2}(a_{i+1} + a_{i+2}) - \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) \right), \left(\frac{1}{2}(a_{i+2} + a_{i+3}) - \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) \right), \dots, \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{1}{2}(a_{i-2} + a_{i-1}) - \frac{1}{2}(a_i + a_{i+1}) \right) : i = 0, \dots, n-1 \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{2}(a_{i+2} - a_i), \frac{1}{2}(a_{i+2} - a_i + a_{i+3} - a_{i+1}), \dots, \frac{1}{2}(a_{i-2} - a_i + a_{i-1} - a_{i+1}) : i = 0, \dots, n-1 \right\}.
\end{aligned}$$

Damit sind die Vektoren der Seiten von $M(P)$ die Hälfte der Vektoren der Diagonalen von P . Ebenso sind die Vektoren der Diagonalen von $M(P)$ die Hälfte der Summe der Vektoren der zugehörigen Diagonalen von P , was die Vektoren der Seiten von P ergibt. Das bedeutet, wenn P ein S -Polygon ist, dann ist auch $M(P)$ für diese Richtungsmenge S ein S -Polygon. \square

Korollar 2.30. *Existiert ein S -Polygon, dann ist S eine Teilmenge der Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons.*

Beweis. Sei P_0 aus Lemma 2.28 ein S -Polygon. Dann ist nach Lemma 2.29 für jedes k das Polygon $P_{2k} = \frac{1}{\cos^{2k}(\pi/n)} M^{2k}(P_0)$ ein S -Polygon und deshalb ist auch $R = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2k}$ eines. Nach Lemma 2.28 ist R ein affines regelmäßiges n -Eck, womit S eine Teilmenge der Richtungen dessen Diagonalen oder Seiten sein muss. Aber eine Teilmenge von Richtungen von Diagonalen eines affinen regelmäßigen n -Ecks, ist auch eine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen $2n$ -Ecks. \square

Jetzt können wir die Menge S von Richtungen bestimmen, durch die wir gleiche Steiner-Symmetrisierungen trotz verschiedener konvexer Körper erhalten.

Theorem 2.31. *Seien K_1 und K_2 zwei verschiedene konvexe Körper im \mathbb{R}^2 mit gleichem Schwerpunkt. Sei S eine Menge von Richtungen, sodass $S_u K_1 = S_u K_2$ für jedes $u \in S$ gilt. Dann ist S eine Teilmenge der Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons.*

Beweis. Nach Lemma 2.22 existiert ein S -Polygon für diese Voraussetzungen und mit Korollar 2.30 erhalten wir die Aussage. \square

Damit können wir die zentrale Aussage des Kapitels für X-rays beweisen.

Theorem 2.32. *Sei S eine Menge von Richtungen, die keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. Dann werden konvexe Körper im \mathbb{R}^2 durch die in den Richtungen $u \in S$ aufgenommenen X-rays eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^2$ konvexe Körper mit $S_u K_1 = S_u K_2$ für alle $u \in S$. Dann stimmen die Schwerpunkte der Steiner-Symmetrisierungen überein und nach Korollar 2.15 ist der Schwerpunkt von K_1 gleich dem Schwerpunkt von K_2 , da der Schnitt zweier nicht paralleler Geraden im \mathbb{R}^2 eindeutig ist. Daraus folgt mit Theorem 2.31, dass $K_1 = K_2$ gilt, weil S keine Teilmenge der Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. \square

Nun haben wir die Mengen von Richtungen gefunden, entlang derer X-rays konvexe Körper im \mathbb{R}^2 eindeutig bestimmen. Diese Aussage wollen wir noch für konvexe Körper im \mathbb{R}^n verallgemeinern.

Lemma 2.33. *Sei $S \subset S^1$ die gleiche Menge wie in Theorem 2.32. Dann werden konvexe Körper im \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, durch die in den Richtungen $u \in S$ aufgenommenen X-rays eindeutig bestimmt.*

Beweis. Angenommen K_1 und K_2 sind konvexe Körper im \mathbb{R}^n mit $S_u K_1 = S_u K_2$ für jedes $u \in S$. Dann gilt für jede Ebene L parallel zur Linearen Hülle von S , dem kleinsten Untervektorraum der S enthält, dass $S_u(L \cap K_1) = S_u(L \cap K_2)$ ist. Da $L \cap K_1$ und $L \cap K_2$ konvexe Körper im \mathbb{R}^2 sind, folgt mit Theorem 2.31, dass $L \cap K_1 = L \cap K_2$ ist und damit gilt $K_1 = K_2$, was die Behauptung beweist. \square

Wir können sogar eine noch bessere Aussage erhalten. Dazu benötigen wir die Definition des Doppelverhältnisses.

Definition 2.34. *Doppelverhältnis*

Das *Doppelverhältnis* von vier Punkten x_i , $1 \leq i \leq 4$, auf einer Geraden ist definiert durch

$$\langle x_1, \dots, x_4 \rangle = \frac{\|x_3 - x_1\| \|x_4 - x_2\|}{\|x_4 - x_1\| \|x_3 - x_2\|}.$$

Das Doppelverhältnis ist invariant gegenüber affinen Transformationen. Für einen Beweis für projektive Abbildungen zu denen affine Abbildungen gehören siehe [4].

Theorem 2.35. *Sei $S = \{u_1, \dots, u_4\} \subset S^1$ eine Menge von Richtungen. Wenn die Steigungen der u_i bezüglich eines beliebigen Koordinatensystems ein transzendentes Doppelverhältnis haben, dann sind konvexe Körper im \mathbb{R}^n eindeutig bestimmt durch X-rays in den Richtungen u_1, \dots, u_4 .*

Beweis. Sei s die (endliche) Steigung einer Seite des regelmäßigen n -Ecks R aus Lemma 2.28 repräsentiert durch $(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})^T$ mit $\omega = e^{2\pi i/n}$. Um die Steigung s zu berechnen, verschieben wir alle Seiten des regelmäßigen n -Ecks parallel, sodass sie im Ursprung starten. Die verschobenen Seiten haben die gleiche Steigung wie die ursprünglichen Seiten. Wir drehen das Koordinatensystem so, dass eine der verschobenen Seiten in Richtung der x -Achse zeigt. Die nächste verschobene Seite zeigt nun in Richtung des Winkels $\frac{\pi}{n}$ zur x -Achse, die nächste in Richtung $\frac{2\pi}{n}$ und so weiter, da zwischen zwei benachbarten Seiten genau ein Winkel von $\frac{\pi}{n}$ liegt. Folglich ist die Steigung der ersten Seite $\tan(0)$, der zweiten $\tan(\pi/n)$, der dritten $\tan(2\pi/n)$ und wir erhalten $s = \tan(\pi j/n)$ für ein $j \in \mathbb{Z}$. Mit der rationalen Funktion f mit $f(\tan \theta) = \tan(n\theta)$ ist $f(s) = f(\tan(\pi j/n)) = \tan(\pi j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Damit ist s die Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten also eine algebraische Zahl. Es folgt, dass das Doppelverhältnis

$$\langle s_1, \dots, s_4 \rangle = \frac{(s_3 - s_1)(s_4 - s_2)}{(s_4 - s_1)(s_3 - s_2)}$$

der vier Steigungen s_i , $1 \leq i \leq 4$, der Seiten eines regelmäßigen Polygons auch eine algebraische Zahl ist. Durch affine Transformationen bleibt das Doppelverhältnis erhalten, deshalb suchen wir eine Menge $S = \{u_i : 1 \leq i \leq 4\}$ mit $u_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, sodass für die Steigungen $t_i = \tan \theta_i$ das Doppelverhältnis $\langle t_1, \dots, t_4 \rangle$ eine transzendente Zahl ist, das heißt keine algebraische Zahl. Dieses S erfüllt dann die Voraussetzungen von Theorem 2.32. \square

Weniger als vier Richtungen reichen aber nicht mehr aus um konvexe Körper durch X-rays eindeutig zu bestimmen.

Korollar 2.36. *Konvexe Körper im \mathbb{R}^n sind nicht eindeutig bestimmt durch eine Richtungsmenge $S \subset S^1$ von drei X-rays.*

Beweis. Der Fall $n = 3$ von Theorem 2.18 liefert zwei verschiedene gleichseitige Dreiecke mit den gleichen X-rays aufgenommen in drei abstandsgleichen Richtungen, das heißt der Winkel zwischen jedem Paar benachbarter Richtungen ist gleich. Diese drei Richtungen können durch eine geeignete nichtsinguläre affine Transformation in jede anderen drei verschiedenen Richtungen transformiert werden, sodass die Bilder der Dreiecke auch in den neuen Richtungen die gleichen X-rays haben. Das beweist die Behauptung. \square

Ein Nachteil an Theorem 2.35 ist, dass die Wahl der Richtungen numerisch instabil ist, weil sich in der Nähe jeder transzendenten Zahl eine algebraische Zahl befindet. Somit kann durch kleine Ungenauigkeiten in den Messungen die Eindeutigkeit der Rekonstruktion verloren gehen. In einem weiteren Artikel haben Gardner und Gritzmann eine praktischere Wahl von vier Richtungen zeigen können. Ein Beweis ist an dieser Stelle aber zu umfangreich und kann in [9] nachgelesen werden.

Theorem 2.37. *Konvexe Körper im \mathbb{R}^n sind eindeutig bestimmt durch X-rays in vier Richtungen im \mathbb{R}^2 , deren Menge von Steigungen, in aufsteigender Ordnung, ein rationales Doppelverhältnis ungleich $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 2, 3$ oder 4 hat.*

Ohne Beweis.

Dazu ein paar Beispiele für vier Richtungen, die diese Bedingung erfüllen, ebenfalls aus [9].

Beispiel 2.38.

Für $w_1 = (1, 0), w_2 = (2, 1), w_3 = (0, 1)$ und $w_4 = (-1, 2)$ bestimmen X-rays aufgenommen in den Richtungen $u_i = w_i / \|w_i\|$, $i = 1, \dots, 4$, konvexe Körper eindeutig. Weitere Beispiele für die Vektoren w sind die Mengen $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 5)\}$ und $\{(2, 1), (3, 2), (1, 1), (2, 3)\}$.

3. Numerische Implementierung der Rekonstruktion

In diesem Kapitel wollen wir einen konvexen Körper durch Messungen mit Röntgenstrahlen rekonstruieren. Das Vorgehen zur Implementierung wird von T. Schoenemann et al. in [15] beschrieben und die Anpassung zur Rekonstruktion anhand von X-ray-Daten wurde von mir vorgenommen. Um den konvexen Körper, im Rahmen dieser Arbeit das Bild eines konvexen Körpers, zu rekonstruieren, nehmen wir eine Bildsegmentierung in Vorder- und Hintergrund vor.

Unser Problem ist ein gegebenes Bild $I : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$, stellvertretend für den Schnitt eines konvexen Körpers, in zwei Gebiete Ω_1, Ω_2 aufzuteilen, den Vorder- und Hintergrund. Für die gesuchten Gebiete muss gelten $\Omega_1 \subset \Omega$ und $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. Für die Aufteilung wird jedem Punkt $x \in \Omega$ ein Gebiet $u(x) \in \{0, 1\}$ zugeordnet, wobei 0 den Hintergrund und 1 den Vordergrund bezeichnet.

Die gewünschte Segmentierung definieren wir als das globale Optimum eines Energiefunktionals, das aus drei Termen besteht: dem Datenterm und zwei Regularisierungstermen. Der Datenterm beinhaltet das eigentliche Minimierungsproblem, nach dem die X-ray-Messung des Bildes gleich der X-ray-Messung der Rekonstruktion sein soll. Die Regularisierungsterme gleichen hierbei Messfehler aus und sollen auch die Konvexität der Rekonstruktion garantieren. Um das Minimierungsproblem aufzustellen, brauchen wir zuerst die Definition der Radon-Transformation aus [14].

Definition 3.1. *Radon-Transformation*

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte, messbare Funktion, die außerhalb einer beschränkten Menge gleich 0 ist. Die *Radon-Transformation* integriert die Funktion f über Hyperebenen. Sei $H(\theta, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = s\}$ die Hyperebene mit Normalen $\theta \in S^{n-1}$ und (vorzeichenbehaftetem) Abstand $s \in \mathbb{R}$ zum Ursprung. Wir definieren

$$Rf(\theta, s) = \int_{H(\theta, s)} f(x) dx.$$

als die *Radon-Transformation von f* .

Im Fall $n = 2$ ist die Hyperebene H eine Gerade und die Radon-Transformation unterscheidet sich von der X-ray-Transformation nur in der Notation.

Der Datenterm unseres Energiefunktionals besteht nun aus den Funktionen $M = RI$ und Ru , wobei $M \in L^2(S^1 \times \mathbb{R})$ die X-ray-Messung und damit die Radon-Transformation des Bildes I , und $Ru \in L^2(S^1 \times \mathbb{R})$ die Radon-Transformation von u ist. Von den Regularisierungstermen bestraft der erste die Länge des Randes der Segmentierung durch

einen Gewichtungsfaktor $\nu > 0$ und der zweite sorgt für eine Krümmungsregularisierung. Dabei erlaubt die Indikatorfunktion

$$\iota_{\{\kappa_C \geq 0\}}(C) = \begin{cases} 0 & \text{für } C \in \{\kappa_C \geq 0\}, \\ +\infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

nur konvexe Segmentierungen des Randes, mit $\{\kappa_C \geq 0\}$ als die Menge aller Berandungen C von konvexen Teilmengen $B \subset \Omega$. Allgemein gewichten wir die Krümmung des Randes mit einem Faktor $\lambda > 0$. Das Minimierungsproblem lautet nun

$$\min_{u: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \|M - Ru\|_2^2 + \nu|C| + \lambda \int_C |\kappa_C(x)|^2 d\mathcal{H}^1(x) + \iota_{\{\kappa_C \geq 0\}}(C), \quad (3.1)$$

wobei $C = \partial\{x : u(x) = 1\}$ die Menge der Punkte ist, an denen u unstetig ist, also von 1 auf 0 „springt“, und $|C|$ bezeichnet deren eindimensionales Hausdorff-Maß. Mit anderen Worten ist C eine Menge abgeschlossener Linien, die auch Teile des Randes von Ω enthalten kann, und $|C|$ bezeichnet die Summe der Länge all dieser Linien. Das $\kappa_C(x)$ steht für die Krümmung der Kurve C im Punkt x auf der Kurve. Die Notation $d\mathcal{H}^1(x)$ steht für eine Integration bezüglich des eindimensionalen Hausdorff-Maßes.

Wir schreiben das Problem (3.1) um zu

$$\begin{aligned} & \min_{u: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} |M(\theta, s) - Ru(\theta, s)|^2 ds d\theta + \nu|C| + \lambda \int_C |\kappa_C(x)|^2 d\mathcal{H}^1(x) + \iota_{\{\kappa_C \geq 0\}}(C) \\ = & \min_{u: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} M(\theta, s)^2 - 2M(\theta, s)Ru(\theta, s) + (Ru(\theta, s))^2 ds d\theta + \nu|C| \\ & + \lambda \int_C |\kappa_C(x)|^2 d\mathcal{H}^1(x) + \iota_{\{\kappa_C \geq 0\}}(C). \end{aligned}$$

Den von u unabhängigen Term können wir bei der Minimierung vernachlässigen und erhalten

$$\begin{aligned} & \min_{u: \Omega \rightarrow \{0,1\}} \int_{S^1 \times \mathbb{R}} (Ru(\theta, s))^2 - 2M(\theta, s)Ru(\theta, s) ds d\theta + \nu|C| \\ & + \lambda \int_C |\kappa_C(x)|^2 d\mathcal{H}^1(x) + \iota_{\{\kappa_C \geq 0\}}(C). \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.1. Diskretisierung

Wir betrachten diskretisierte Zerlegungsprobleme, bei denen anstatt unendlich viele Werte $\{u(x) : x \in \Omega\}$ zu optimieren, nur endlich viele „Basisregionen“ (engl. basic regions) betrachtet werden. Dabei werden alle Punkte in einer Basisregion gemeinsam dem gleichen Segment, das heißt Vorder- oder Hintergrund, zugeordnet. In der Praxis liegt immer ein diskretes Eingabebild I vor, bei dem die Basisregionen in Form von Pixeln gegeben sind. Folglich nimmt der Datenterm selbst schon eine solche Zuordnung vor, sogar für das stetige Problem. Auf die Regularisierungsterme trifft das nicht zu, was aber durch

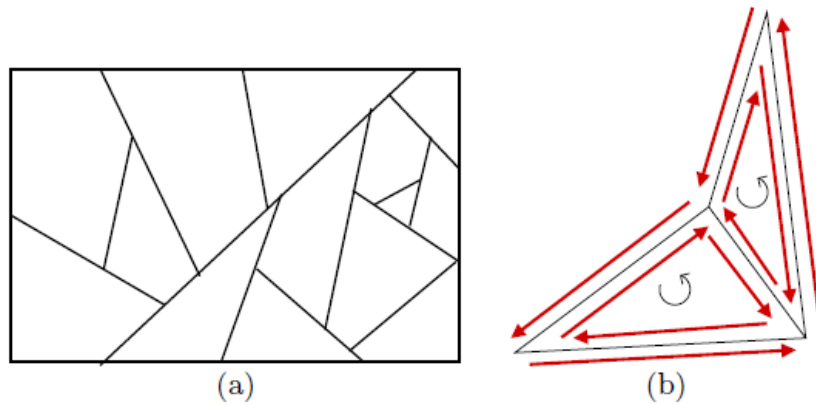


Abbildung 3.1.: Das grundlegende Konzept unserer Methode. (a) Ein Zellkomplex. (b) Die Methode benutzt orientierte Basisregionen und orientierte Randabschnitte.

eine geeignete Diskretisierung des Energiefunktional behoben werden kann.

Wir benötigen, dass die Menge der Basisregionen, bezeichnet mit \mathcal{F} , ein Zellkomplex und eine Unterteilung von Ω ist, also dass (i) sich zwei Gebiete nicht überlappen und (ii) die Vereinigung aller Basisregionen Ω ergibt. Siehe hierzu Abbildung 3.1 (a) aus [15].

Desweiteren benutzen wir Randabschnitte (engl. boundary segments). Das sind die Kanten, die die Ränder der Basisregionen bilden. Normalerweise hat eine Kante zwei benachbarte Gebiete, außer für die Abschnitte am Rand von Ω , wo es nur eins gibt. Die Menge aller Kanten bezeichnen wir mit \mathcal{E} . Nun kann eine Kante in zwei Richtungen durchlaufen werden, womit auf jeden Randabschnitt zwei orientierte Randabschnitte (engl. oriented boundary segments) kommen. Die Menge dieser orientierten Kanten wird mit \mathcal{E}^O bezeichnet und $\ell(e)$ ist die Länge einer orientierten Kante $e \in \mathcal{E}^O$.

Zusammengefasst ist der Datenterm durch Gleichungen der Basisregionen und die Regularisierungsterme sind durch Terme der Randabschnitte definiert. Um das stetige Problem genau genug zu approximieren, sollten die Basisregionen nicht einfach als Pixel gewählt werden, sondern weiter unterteilt werden. Hier teilen wir die Pixel durch Linien in 8 oder 16 verschiedenen Richtungen entweder in 4 oder in 32 Basisregionen auf. Demnach werden die Unterteilungen auch mit 8- oder 16-Konnektivität bezeichnet. Siehe Abbildung 3.2 aus [15].

3.2. Ganzzahlige quadratische Optimierung

Mit der oben vorgestellten Diskretisierung schreiben wir das Problem (3.2) in ein ganzzahliges quadratisches Optimierungsproblem um, das heißt wir minimieren ein quadratisches Kostenfunktional über ganzzahlige Variablen mit linearen Nebenbedingungen. Das Ergebnis der Minimierung sind zwei Mengen von Variablen: Als erstes gibt es zu jeder Basisregion $f \in \mathcal{F}$ eine Gebietsvariable (engl. region variable) $y_R^f \in \{0, 1\}$, wobei 0 angibt, dass das Gebiet zum Hintergrund gehört und 1 zum Vordergrund. Als zwei-

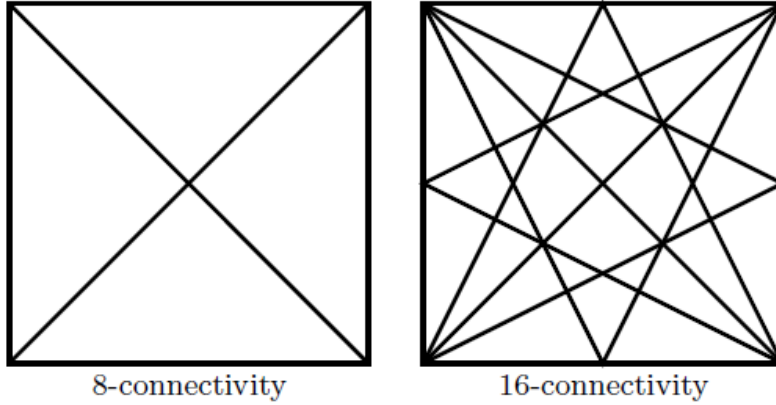


Abbildung 3.2.: Ein Pixel wird in 4 oder in 32 Basisregionen zerteilt durch Linien in 8 oder in 16 verschiedenen Richtungen.

te Menge haben wir eine Randvariable (engl. boundary variable) $y_B^e \in \{0, 1\}$ für jede orientierte Kante $e \in \mathcal{E}^O$. Hier soll y_B^e gleich 1 sein, wenn genau eine benachbarte Basisregion zum Vordergrund gehört, ansonsten 0. Bei allen y_B^e mit Wert 1 handelt es sich also um die Kanten, die Vorder- und Hintergrund des Bildes voneinander trennen. Die Funktion u wird also diskretisiert durch $u(x) = \sum_{f \in \mathcal{F}} y_R^f \chi_f(x)$. Mit der Linearität der Radon-Transformation und weil die Menge \mathcal{F} der Basisregionen endlich ist, ist

$$\begin{aligned}
\int_{S^1 \times \mathbb{R}} (Ru(\theta, s))^2 ds d\theta &= \int_{S^1 \times \mathbb{R}} \left(R \sum_{f \in \mathcal{F}} y_R^f \chi_f(\theta, s) \right)^2 ds d\theta \\
&= \int_{S^1 \times \mathbb{R}} \left(\sum_{f \in \mathcal{F}} y_R^f R\chi_f(\theta, s) \right)^2 ds d\theta \\
&= \int_{S^1 \times \mathbb{R}} \left(\sum_{f \in \mathcal{F}} y_R^f R\chi_f(\theta, s) \right) \left(\sum_{g \in \mathcal{F}} y_R^g R\chi_g(\theta, s) \right) ds d\theta \\
&= \sum_{f \in \mathcal{F}} \sum_{g \in \mathcal{F}} y_R^f y_R^g \int_{S^1 \times \mathbb{R}} R\chi_f(\theta, s) R\chi_g(\theta, s) ds d\theta
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{S^1 \times \mathbb{R}} -2M(\theta, s) Ru(\theta, s) ds d\theta &= \int_{S^1 \times \mathbb{R}} -2M(\theta, s) R \sum_{f \in \mathcal{F}} y_R^f \chi_f(\theta, s) ds d\theta \\
&= \sum_{f \in \mathcal{F}} y_R^f \int_{S^1 \times \mathbb{R}} -2M(\theta, s) R\chi_f(\theta, s) ds d\theta.
\end{aligned}$$

In einem weiteren Schritt müssen wir das Integral über $\theta \in S^1$ diskretisieren, da wir die Radon-Transformation numerisch nur in einer begrenzten Anzahl von Richtungen θ berechnen können. Nach Theorem 2.37 aus Kapitel 2 reichen auch vier spezielle Richtungen aus, um einen konvexen Körper eindeutig zu bestimmen. Allerdings wurde bei

diesem Resultat von exakten X-ray-Messungen ausgegangen, was in der Praxis nie der Fall sein kann. Es lässt sich also nicht eins zu eins auf unsere Rekonstruktion übertragen. Das zu minimierende Kostenfunktional lautet wie folgt:

$$\frac{1}{2}y_R^T H_R y_R + c_R^T y_R + c_B^T y_B, \quad (3.3)$$

wobei H_R aus den Einträgen

$$H_R^{f,g} = \sum_{\theta \in \Theta} \Delta\theta \int_{\mathbb{R}} 2R\chi_f(\theta, s)R\chi_g(\theta, s) ds \quad (3.4)$$

besteht. Dabei ist Θ gleich der Menge der Richtungen, in denen wir die Radon-Transformation berechnen, und es ist $\Delta\theta = \frac{\pi}{|\Theta|}$. Der Vektor c_R besteht aus den Einträgen

$$c_R^f = \sum_{\theta \in \Theta} \Delta\theta \int_{\mathbb{R}} -2M(\theta, s)R\chi_f(\theta, s) ds \quad (3.5)$$

und c_B zunächst nur für die Längenregularisierung aus den Einträgen $c_B^e = \nu\ell(e)$. Die Krümmungsregularisierung fügen wir in den nächsten Kapiteln hinzu, weil sie noch der Einführung von Kantenpaaren bedarf und vor allem die folgenden Nebenbedingungen für Längenregularisierung allein zunächst verständlicher sind.

Weil $\nu > 0$ ist, würde eine Minimierung von (3.3) allein alle Randvariablen auf 0 setzen, deshalb brauchen wir noch Nebenbedingungen. Das folgende System linearer Nebenbedingungen zwingt y_B den korrekten Übergang von Vorder- in Hintergrund zu beschreiben. Wir nennen es

Oberflächenfortführungsbedingung: *Wenn eine Basisregion zum Vordergrund gehört, müssen entweder angrenzende Basisregionen auch zum Vordergrund gehören oder es muss eine geeignete orientierte Kante vorhanden sein. Mit letzterem ist gemeint, dass an Übergängen von Vorder- in Hintergrund die orientierten Kanten in entgegengesetzte Richtungen laufen müssen.*

Damit ergibt sich für jede Kante, die zwei Basisregionen voneinander trennt eine Nebenbedingung, das heißt für alle Kanten bis auf den Rand von Ω . Hierbei benutzen wir das Konzept von Orientierungen für Basisregionen und Kanten, wie in Abbildung 3.1 (b) zu sehen. Wir haben bereits eingeführt, dass Kanten in zwei Richtungen durchlaufen werden können. Wir definieren uns (beliebig) eine als „positive“ und eine als „negative“ Orientierung. In unserer Implementierung ist eine positive Orientierung eine zur Pixelmitte verlaufende beziehungsweise eine von unten nach oben oder von links nach rechts laufende Orientierung für die Randkanten eines Pixels. Eine negative Orientierung ist das Gegenteil.

Basisregionen können mit dem Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn orientiert sein. Wieder ist die Orientierung frei wählbar, allerdings sollten alle Gebiete die gleiche Orientierung haben. Wir wählen in unserer Programmierung Orientierungen gegen den Uhrzeigersinn für die Basisregionen.

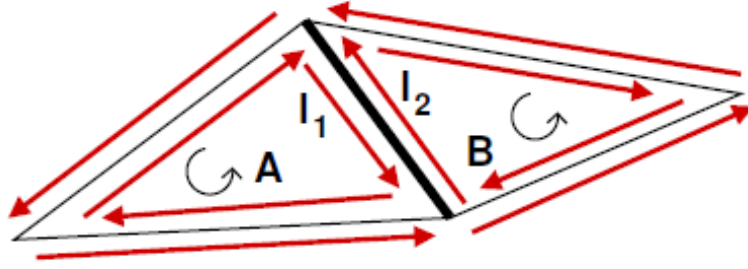


Abbildung 3.3.

Zur Formulierung der Oberflächenfortführungsbedingung definieren wir die Idee eines positiven und negativen Auftretens von Basisregionen $f \in \mathcal{F}$ und orientierten Kanten $l \in \mathcal{E}^O$ im Bezug auf Kanten $e \in \mathcal{E}$. Die Bedingung stellt dann sicher, dass die gewichtete Summe des „aktiven“ Auftretens der Basisregionen gleich der gewichteten Summe des „aktiven“ Auftretens der Kanten ist. Dabei bezieht sich der Ausdruck aktiv auf die Elemente, bei denen y_R beziehungsweise y_B gleich 1 ist.

Das Auftreten einer Basisregion f zu einer Kante e wird mit m_e^f (für „Übereinstimmung“ (engl. match)) bezeichnet und wie folgt definiert:

$$m_e^f = \begin{cases} 0 & \text{wenn die Region } f \text{ die Kante } e \text{ garnicht enthält,} \\ 1 & \text{wenn die Kante } e \text{ bezüglich der Orientierung von } f \text{ in positiver} \\ & \text{Richtung durchlaufen wird,} \\ -1 & \text{für das Durchlaufen in negativer Richtung.} \end{cases}$$

Das Auftreten einer orientierten Kante l zu einer Kante e wird mit m_e^l bezeichnet und definiert als

$$m_e^l = \begin{cases} 0 & \text{wenn } l \text{ nicht zur Kante } e \text{ gehört,} \\ 1 & \text{wenn } l \text{ die positive Orientierung von } e \text{ ist,} \\ -1 & \text{wenn } l \text{ die negative Orientierung von } e \text{ ist.} \end{cases}$$

Damit lauten die Nebenbedingungen wie folgt

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} m_e^f y_R^f = \sum_{l \in \mathcal{E}^O} m_e^l y_B^l \quad \forall e \in \mathcal{E}. \quad (3.6)$$

Wir betrachten als Beispiel die Abbildung 3.3:

Die Bedingung für die fettgedruckte Kante e lautet

$$y_R^A - y_R^B = y_B^{l_2} - y_B^{l_1}.$$

Weitere y -Variablen tauchen nicht auf, weil m_e^f und m_e^l für diese Gebiete und orientierten Kanten gleich 0 sind. Nun gehen wir die vier Fälle der Verteilung von Vorder-

und Hintergrund auf die Gebiete A und B durch und stellen sicher, dass $y_B^{l_1}$ und $y_B^{l_2}$ die passenden Werte annehmen. Gehört die Basisregion A zum Vordergrund und Gebiet B zum Hintergrund, ist $y_R^A = 1$ und $y_R^B = 0$. Das zwingt $y_B^{l_2}$ den Wert 1 anzunehmen, während $y_B^{l_1}$ auf 0 gesetzt wird. Wenn dagegen B zum Vordergrund und A zum Hintergrund gehört, ist $y_B^{l_1} = 1$ und $y_B^{l_2} = 0$. Wenn A und B beide Vorder- oder beide Hintergrund sind, gibt es zwei Möglichkeiten für $y_B^{l_1}$ und $y_B^{l_2}$. Entweder sind sie beide 0 oder beide 1, wobei die zweite Wahl unserer Vorstellung von y_B widersprechen würde. Bei einer Minimierung mit strikt positiver Gewichtung der Länge ist der Wert 0 immer günstiger als 1 und der unerwünschte Fall wird nie eintreten. Beim krümmungsbasierten Zerlegungsproblem brauchen wir hingegen weitere Nebenbedingungen um diesen Fall zu verhindern.

Vorerst lautet das zu lösende ganzzahlige quadratische Programm dann:

$$\begin{aligned} \min_{y_R, y_B} \quad & \frac{1}{2} y_R^T H_R y_R + c_R^T y_R + c_B^T y_B \\ \text{sodass} \quad & \sum_{f \in \mathcal{F}} m_e^f y_R^f = \sum_{l \in \mathcal{E}^O} m_e^l y_B^l \quad \forall e \in \mathcal{E} \\ & y_R^f \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F} \\ & y_B^l \in \{0, 1\} \quad \forall l \in \mathcal{E}^O. \end{aligned}$$

3.3. Diskretisierung mit Krümmungsregularisierung

Wieder basiert die Lösung auf einem Zellkomplex und der Datenterm wird genau wie zuvor behandelt. Das bedeutet wir haben wieder Gebietsvariablen $y_R^f \in \{0, 1\}$ für alle Basisregionen $f \in \mathcal{F}$. Die Längenregularisierung konnten wir mit einzelnen orientierten Kanten ausdrücken, aber Krümmung lässt sich damit nicht beschreiben, weil Geraden überall Krümmung 0 haben. Die einzigen Punkte mit einer Krümmung ungleich 0 sind die Schnittpunkte der Kanten. Deshalb betrachten wir jetzt Paare von orientierten Kanten für die Krümmungsregularisierung.

Für jedes Paar l_1, l_2 von benachbarten orientierten Kanten mit kompatiblen Orientierungen gibt es deshalb eine Randvariable $y_B^{l_1, l_2} \in \{0, 1\}$, die uns wie zuvor die Übergänge von Vorder- in Hintergrund mit dem Wert 1 anzeigt. Die zuerst durchlaufene orientierte Kante eines Paares steht in unserer Notation an erster Stelle. Entgegengesetzt laufende orientierte Kanten bilden keine Paare. Wir erhalten das Kostenfunktional

$$\frac{1}{2} y_R^T H_R y_R + c_R^T y_R + c_B^T y_B \tag{3.7}$$

mit $H_R^{f,g}$ wie in (3.4), c_R^f wie in (3.5) und allen paarweisen Variablen in y_B . Den Kostenvektor c_B^T beschreiben wir im folgenden Kapitel.

3.3.1. Berechnung der Gewichte

Die Krümmung zweier benachbarter orientierter Kanten wird anhand des Winkels α gemessen, der durch den Richtungswechsel der beiden Kanten entsteht. Siehe dazu Abbil-

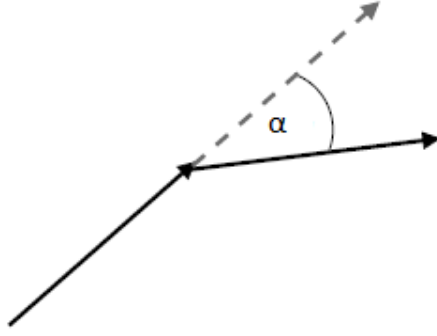


Abbildung 3.4.: Der Winkel α ist die Basis für die Berechnung der Krümmung des schwarzen Kantenpaares.

Abbildung 3.4 aus [15]. Wir berechnen den Winkel α in Bogenmaß mithilfe des Kosinussatzes $\alpha = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}\right)$, wobei a, b die Vektoren der zwei Kanten sind.

Ausgehend von diesem Winkel können wir $|\kappa|^2$ auf zwei Arten berechnen: Wir können einfach α^2 nehmen oder uns an der Arbeit von Bruckstein et al. [6] orientieren und auch die Längen $\ell(l_1)$ und $\ell(l_2)$ mit in die Berechnung einbeziehen:

$$\min\{\ell(l_1), \ell(l_2)\} \left(\frac{\alpha}{\min\{\ell(l_1), \ell(l_2)\}} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\min\{\ell(l_1), \ell(l_2)\}}. \quad (3.8)$$

Die zweite Berechnung ist differenzierter, da unter anderem kurze Kantenpaare stärker als lange Kantenpaare mit derselben Krümmung gewichtet werden. Wir haben uns deshalb in der Programmierung für diese Variante entschieden.

Damit der Rand der Segmentierung einen konvexen Körper beschreibt, erlauben wir Kantenpaaren nur Krümmung in eine Richtung, nach links oder rechts. In unserem Fall ist eine positive Krümmung $\kappa_C \geq 0$ eine Krümmung nach links, betrachtet aus dem Inneren des konvexen Körpers. Der Wert κ_C wird als das Kreuzprodukt der Vektoren der orientierten Kanten berechnet. Gilt $\kappa_C \geq 0$ soll dieses Kantenpaar nur mit dem Wert aus (3.8) gewichtet werden, ansonsten mit $+\infty$ in der Theorie und in unserer Implementierung nutzen wir stellvertretend den Wert 1000000.

Wir bezeichnen das Krümmungsgewicht mit w_{l_1, l_2} . Zusammen mit Längenregularisierung lautet ein Eintrag c_{l_1, l_2} im Kostenvektor folgendermaßen

$$c_{l_1, l_2} = \lambda w_{l_1, l_2} + \nu \frac{1}{2} (\ell(l_1) + \ell(l_2)).$$

Falls sich das zu rekonstruierende Objekt am Bildrand befindet, gäbe es theoretisch noch ein paar Spezialfälle für die Längen der Bildränder und die Krümmung der Bildecken zu betrachten, damit die Nebenbedingungen auch dort zu sinnvollen Ergebnissen führen. Da ein solcher Fall in der Praxis aber selten auftaucht, haben wir dies in unserer Implementierung nicht berücksichtigt.

3.3.2. Nebenbedingungen

Wie bei der rein längenbasierten Segmentierung benötigen wir Nebenbedingungen damit die Minimierung des quadratischen Kostenfunktional (3.7) unser diskretisiertes Modell widerspiegelt. Wir brauchen drei Mengen an Nebenbedingungen um sicherzustellen, dass die Randvariablen auch wirklich den Rand der Gebietsvariablen darstellen.

Zuerst haben wir die Oberflächenfortführungsbedingung analog zur Längenregularisierung, aber nun auf die veränderten Randvariablen angepasst. Dafür definieren wir das Auftreten $m_e^{l_1, l_2} \in \{-1, 0, 1\}$ eines Paares orientierter Kanten zu einer Kante $e \in \mathcal{E}$. Der Wert 0 wird angenommen, wenn l_1 keine Orientierung von e ist. Wir bemerken, dass l_2 für diesen Wert irrelevant ist. Ansonsten ist der Wert wie das zuvor definierte Auftreten von l_1 zu e . Die Bedingungen lauten

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} m_e^f y_R^f = \sum_{l_1, l_2 \in \mathcal{E}^O} m_e^{l_1, l_2} y_B^{l_1, l_2} \quad \forall e \in \mathcal{E}.$$

Diese Bedingung allein lässt noch viel Freiraum, zum Beispiel könnten überall die Kantenpaare ohne Richtungswechsel gewählt werden. Was wir tatsächlich wollen ist, dass für jedes aktive $y_B^{l_1, l_2}$ beide Kanten l_1 und l_2 zum durch die Gebietsvariablen induzierten Übergang von Vorder- in Hintergrund gehören.

Das bewirken wir mit zwei weiteren Nebenbedingungen. Die erste lautet

Randfortführungsbedingung: *Wenn ein Kantenpaar l_1, l_2 aktiv ist, muss auch ein fortführendes Paar l_2, l_3 aktiv sein. Ebenso muss es ein vorheriges aktives Paar l_0, l_1 geben.*

Diese Nebenbedingung stellt sicher, dass die aktiven Kantenpaare tatsächlich geschlossene Pfade darstellen. Sie lautet mathematisch ausgedrückt

$$\sum_{l_0 \in \mathcal{E}^O} y_B^{l_0, l_1} = \sum_{l_2 \in \mathcal{E}^O} y_B^{l_1, l_2} \quad \forall l_1 \in \mathcal{E}^O.$$

Mit diesen geschlossenen Pfaden können wir aber noch nicht garantieren, dass alle Teile der Pfade wirklich den Rand der Segmentierung darstellen. Gehören zwei Gebiete zur gleichen Region (Vorder- oder Hintergrund), dann lässt die Oberflächenfortführungsbedingung Freiraum beide Kantenpaare auf 0 oder 1 zu setzen. Bei der Minimierung mit Längenregularisierung allein, war der Wert 0 immer günstiger. Aber bei zusätzlicher starker Krümmungsregularisierung und geringer Gewichtung der Länge, kann es passieren, dass die Gesamtkosten für den Wert 1 der Kantenpaare niedriger sind. Abbildung 3.5 aus [15] zeigt, dass in diesem Fall eine Kante e in beiden Richtungen durchlaufen wird. Das wird mit der letzten Nebenbedingung ausgeschlossen.

Randkonsistenzbedingung: *Für jede Kante darf nur eine mögliche Orientierung aktiv sein.*

Um die Bedingung mathematisch zu formulieren, bezeichnen wir mit e^{\rightarrow} und e^{\leftarrow} die positive beziehungsweise negative Orientierung einer Kante e . Dann schreiben wir die

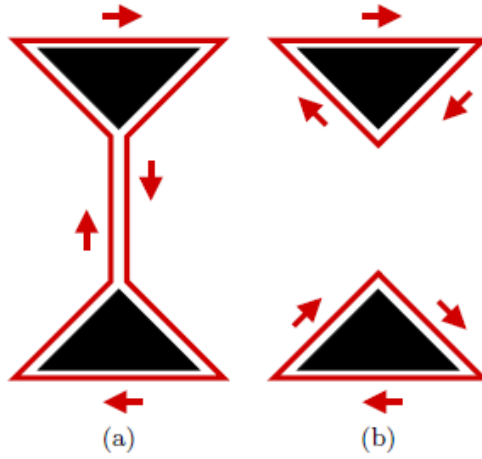


Abbildung 3.5.: Ohne die Randkonsistenzbedingung ist die Konfiguration in (a) erlaubt und bei einer Minimierung mit bestimmten Parametern auch günstiger als die in (b). Mit der Randkonsistenzbedingung schließen wir (a) aus und nur der gewünschte Fall (b) bleibt zulässig.

Randkonsistenzbedingung wie folgt

$$\sum_{l_1} y_B^{l_1, e^\leftarrow} + \sum_{l_2} y_B^{e^\rightarrow, l_2} \leq 1 \quad \forall e \in \mathcal{E}.$$

Es könnten auch ähnliche Mengen dieser Bedingung abgeleitet werden, zum Beispiel $\sum_{l_1} y_B^{e^\leftarrow, l_1} + \sum_{l_2} y_B^{l_2, e^\rightarrow} \leq 1$, aber die Autoren in [15] fanden experimentell heraus, dass diese redundant sind. Wenn $e \in \partial\Omega$ ist, kann e höchstens eine der Orientierungen annehmen, weil am Rand immer nur eine der Orientierungen existiert. Diese Kanten brauchen wir in der Randkonsistenzbedingung deshalb garnicht betrachten.

Zusammenfassend stellen wir das krümmungsbasierte Zerlegungsproblem mit folgendem ganzzahligem quadratischem Programm dar

$$\begin{aligned} & \min_{y_R, y_B} \frac{1}{2} y_R^T H_R y_R + c_R^T y_R + c_B^T y_B & (3.9) \\ \text{sodass} \quad & \sum_{f \in \mathcal{F}} m_e^f y_R^f = \sum_{l_1, l_2 \in \mathcal{E}^O} m_e^{l_1, l_2} y_B^{l_1, l_2} \quad \forall e \in \mathcal{E} \\ & \sum_{l_0} y_B^{l_0, l_1} = \sum_{l_2} y_B^{l_1, l_2} \quad \forall l_1 \in \mathcal{E}^O \\ & \sum_{l_1} y_B^{l_1, e^\leftarrow} + \sum_{l_2} y_B^{e^\rightarrow, l_2} \leq 1 \quad \forall e \in \mathcal{E} \\ & y_R^f \in \{0, 1\} \quad \forall f \in \mathcal{F} \\ & y_B^{l_1, l_2} \in \{0, 1\} \quad \forall l_1, l_2 \in \mathcal{E}^O. \end{aligned}$$

3.4. Implementierung

Ganzzahlige quadratische Optimierungsprobleme sind im Allgemeinen NP-schwer und numerisch nicht lösbar. Wir müssen das Problem (3.9) deshalb relaxieren und lassen nun $y_R^f \in [0, 1]$ für alle $f \in \mathcal{F}$ und $y_B^{l_1, l_2} \in [0, 1]$ für alle $l_1, l_2 \in \mathcal{E}^O$ zu. Jetzt lässt sich ein Minimum berechnen und weil ein konvexes Optimierungsproblem vorliegt, handelt es sich bei der Lösung auch um das globale Minimum, siehe [5]. In unserem mit Matlab geschriebenen Algorithmus benutzen wir als Löser des relaxierten quadratischen Optimierungsproblems die Matlab-Funktion *quadprog*, die ein Innere-Punkte-Verfahren für konvexe Probleme verwendet. Eine genaue Erklärung dieser Funktion befindet sich in der Matlab-Dokumentation.

Der Algorithmus ist wie folgt aufgebaut. Zuerst lesen wir das zu segmentierende Bild des zu rekonstruierenden Körpers ein und legen fest, ob wir mit 8- oder 16-Konnektivität arbeiten wollen. Darauf aufbauend berechnen wir die Anzahl der Basisregionen, der orientierten Kanten, der Kanten und der Kantenpaare. Wir legen die Seitenlänge h eines Pixels fest, zum Beispiel $h = 1$ (wir rechnen mit quadratischen Pixeln), und berechnen die Start- und Endpunkte aller orientierten Kanten. Mit Hilfe der Start- und Endpunkte können wir am Ende die Kanten, an deren Stelle y_B einen Wert ungleich 0 hat, plotten. Außerdem berechnen wir mit ihnen beim Besetzen des Kostenvektors c_B die Vektoren der orientierten Kanten und mit diesen dann die Länge der Kanten und den Winkel α , den ein Kantenpaar aufspannt. Auch die Kantenpaare berechnen wir mithilfe der Start- und Endpunkte der orientierten Kanten.

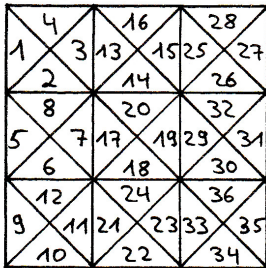
Generell müssen wir die Basisregionen, orientierten Kanten, Kanten und Kantenpaare nummerieren, um ihnen Werte wie Flächen, Längen und Winkel zuzuordnen und auch um sie für die Nebenbedingungen einander zuordnen zu können. Natürlich ist die Nummerierung frei wählbar, solange sie nur den Algorithmus über beibehalten wird. Siehe Abbildung 3.6 und 3.7 für die in unserer Implementierung gewählte Nummerierung.

Nach der Berechnung der Kantenpaare implementieren wir den Datenterm. Dafür berechnen wir die Radon-Transformation $M = RI$ des eingelesenen Bildes mit der Matlab-Funktion *radon* und addieren standard-normalverteiltes Rauschen darauf, das Messfehler simulieren soll. Die Stärke des Rauschens regulieren wir mit dem Faktor β . Jetzt stellen wir die Radon-Matrix R zum Bild I auf, um die Radon-Transformation des gesuchten Vektors y_R berechnen zu können. Für die Berechnungen der Radon-Transformationen geben wir vorher die Richtungsmenge Θ an, die die Richtungen enthält, in denen die Radon-Transformationen berechnet werden sollen. Die Matlab-Funktion *radon* bekommt diese Richtungen allerdings in Winkeln übergeben, sodass die Menge Θ im Algorithmus aus Winkeln stellvertretend für die Richtungen besteht. Gemäß der Theorie aus Kapitel 2 werden wir im nächsten Abschnitt Experimente mit verschiedenen Mengen Θ durchführen. Weiterhin implementieren wir eine Matrix *RegToPix*, damit wir die für Pixel berechnete Radon-Matrix R auf die Basisregionen anwenden können. Jetzt können wir die Matrix H_R und den Kostenvektor c_R berechnen.

Als Nächstes besetzen wir den Kostenvektor c_B , der für die Regularisierung zuständig ist. Dann implementieren wir die Nebenbedingungen und lösen das Problem. Zum Schluss werden graphische Plots der Lösung erzeugt. Dabei werden einmal die Gebietsvariablen

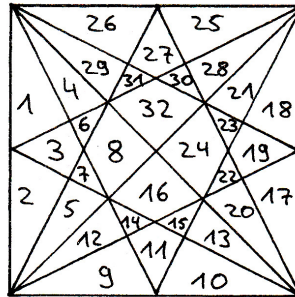
Nummerierung der Basisregionen

8-Konnektivität
(3x3 Pixel)



4 Basisregionen pro Pixel

16-Konnektivität
(1 Pixel)

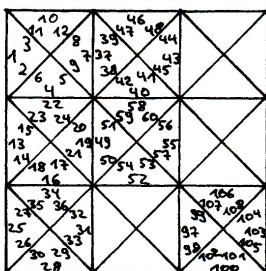


32 Basisregionen pro Pixel

Fortführung
der Nummerierung
wie bei
8-Konnektivität

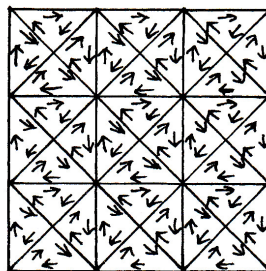
Nummerierung der orientierten Kanten

8-Konnektivität
(3x3 Pixel)



12 orientierte Kanten pro Pixel

Die Orientierungen
(3x3 Pixel)



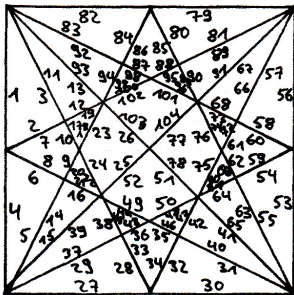
Es bilden sich die Kantenpaare:

- 1 3, 1 10
- 2 1, 2 15, 2 22
- 3 2, 3 5, 3 8
- 4 1, 4 6, 4 15
- 5 4, 5 19, 5 24, 5 37, 5 42, 5 51, 5 58
- 6 5, 6 8, 6 11
- 7 4, 7 9, 7 19, 7 24, 7 42, 7 51, 7 58
- 8 7, 8 39, 8 46
- 9 2, 9 8, 9 11
- 10 7, 10 12, 10 39, 10 46
- 11 10
- 12 2, 12 5, 12 11
- 13 1, 13 6, 13 15, 13 22
- ⋮

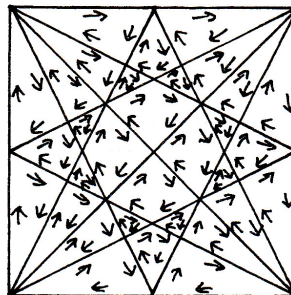
Abbildung 3.6.: Nummerierung der Basisregionen und orientierten Kanten

Nummerierung der orientierten Kanten

16-Konnektivität
(1 Pixel)



Die Orientierungen
(1 Pixel)



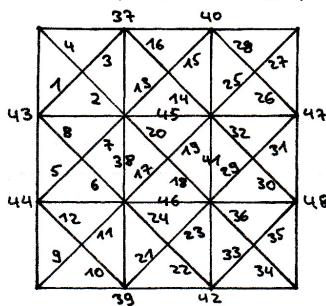
Fortführung
der Nummerierung
wie bei
8-Konnektivität

104 orientierte Kanten pro Pixel

Die Kantenpaare bilden sich wie bei 8-Konnektivität

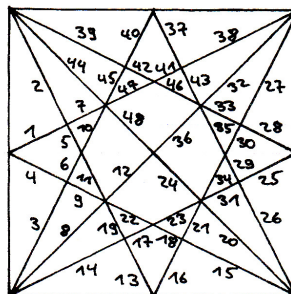
Nummerierung der Kanten

8-Konnektivität
(3x3 Pixel)



4 Kanten pro Pixel

16-Konnektivität
(1 Pixel)



48 Kanten pro Pixel

Fortführung
der Nummerierung
wie bei
8-Konnektivität

Abbildung 3.7.: Nummerierung der orientierten Kanten und Kanten

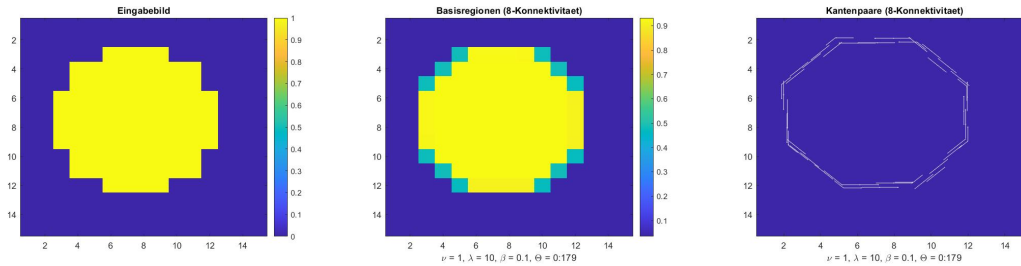


Abbildung 3.8.: Rekonstruktion eines Kreises mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

und dann die Randvariablen durchlaufen.

3.5. Ergebnisse

In diesem Abschnitt stellen wir ein paar Rekonstruktionen vor, die wir mit dem Algorithmus berechnet haben. Die verstellbaren Parameter des Algorithmus sind das Bild des konvexen Körpers, den wir rekonstruieren wollen, die Winkelmeng Θ , in deren Richtungen wir die Radon-Transformation aufnehmen, und das Rauschen β , das wir zur Radon-Transformation addieren. Dazu kommt noch die Gewichtung der Längen- und Krümmungsregularisierung, ν und λ , und die Wahl zwischen 8- oder 16-Konnektivität. Der Algorithmus ist leider auf eine gewisse Bildgröße begrenzt, da die Vektoren und Matrizen unseres Minimierungsproblems sonst zu viel Speicherplatz brauchen und nicht mehr erstellt werden können. Dies tritt auf, obwohl die Matrizen in dünnbesetzter Form (engl. sparse) implementiert wurden. Deswegen beschränken wir uns im Rahmen dieser Arbeit auf Rekonstruktionen von sehr einfachen und kleinen (15×15) Beispielbildern. Je größer die Vektoren und Matrizen unseres Minimierungsproblems werden, desto länger dauert das Aufstellen und vor allem das Lösen des Problems. Deshalb verursachen größere Bilder (mehr Pixel), eine größere Menge von Winkeln (mehr Daten) und besonders die höhere Konnektivität von 16 im Gegensatz zu 8 eine höhere Berechnungsdauer. Im letzten Fall vervielfachen sich die Basisregionen, die orientierten Kanten, die Kanten und die Kantenpaare enorm, sodass die Berechnungen der Rekonstruktionen in dieser Arbeit für 8-Konnektivität nur wenige Sekunden und für 16-Konnektivität zwischen 30 und 90 Minuten dauerten. Als Maximalbeispiel konnte ein 60×60 Bild eines Kreises mit 8-Konnektivität, 180 Winkeln, $\beta = 0.1, \nu = 1$ und $\lambda = 10$ in 8 Stunden berechnet werden.

Kommen wir zu ersten Ergebnissen des Programms und betrachten als Eingabebild einen Kreis. In Abbildung 3.8 sehen wir links den Kreis als Eingabebild, in der Mitte die Rekonstruktion der Basisregionen und rechts die Rekonstruktion der Kantenpaare. Alle zu rekonstruierenden Körper sollen homogene Körper darstellen und deshalb haben die Pixel in ihrem Inneren den Wert 1 und außerhalb des Körpers hat das Bild den Wert 0, was auch der Farbanzeige rechts vom Eingabebild entnommen werden kann. Für diese Rekonstruktion benutzten wir 8-Konnektivität mit den Parametern

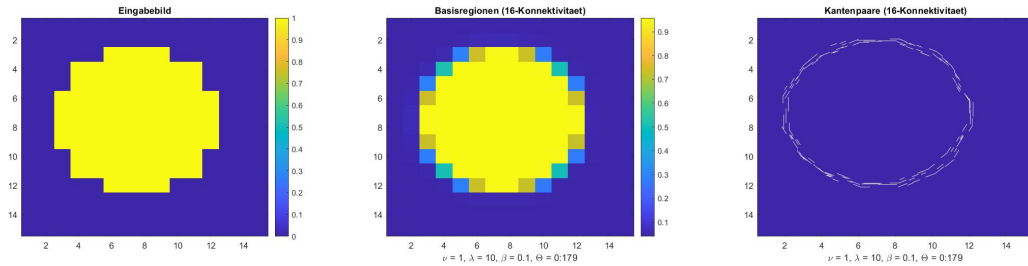


Abbildung 3.9.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

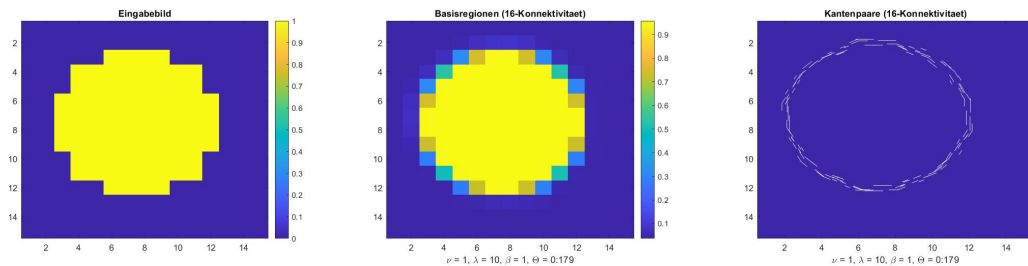


Abbildung 3.10.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

$\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$. Aufgrund der 8-Konnektivität, die den Kantenpaaren nur Krümmungen von $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ und 135° erlaubt, ist das Ergebnis noch etwas kantig, aber ansonsten ist es eine gute Rekonstruktion mit einer Lösung nahe der zulässigen Lösungsmenge $y_R, y_B \in \{0, 1\}$ unseres ganzzahligen Minimierungsproblems. Denn die Farbanzeige des mittleren Bildes zeigt, dass der hohe Kontrast zwischen dem Körper und seinem Hintergrund bewahrt wurde und auch der Wert der eingezeichneten Kantenpaare ist nahe 1, was uns die weiße Farbe der Kanten anzeigt.

Abbildung 3.9 zeigt die Rekonstruktion des Kreises unter den gleichen Parametern wie bei der Rekonstruktion in Abbildung 3.8, allerdings mit 16-Konnektivität. Jetzt erhalten wir einen schönen Kreis, da 16-Konnektivität deutlich mehr Winkel für die Krümmung der Kantenpaare ermöglicht. Auch der Kontrast der Lösung hat sich nochmal ein wenig verbessert.

Die Abbildungen 3.10 und 3.11 zeigen die Auswirkungen von verschieden starkem Rauschen auf die Rekonstruktion. Wir sehen, dass die Rekonstruktion der Basisregionen verschwommener wird je stärker das Rauschen ist und bei den Kantenpaaren tauchen schließlich schwarze Kanten mit auf. Diese Kantenpaare haben Werte „nahe“ 0, allerdings schon größer oder gleich 0.1. Diesen Schwellenwert habe ich zum Plotten der Kanten festgesetzt, damit Kantenpaare nahe 0 nicht eingezeichnet werden. Natürlich könnten wir diesen Wert für starkes Rauschen auch erhöhen, sodass wir trotzdem noch eine saubere Rekonstruktion der Kantenpaare erhalten. Zum Vergleich habe ich ihn bei diesen Versuchen nicht verändert. Wir können festhalten, dass der Kreis trotz des starken Rauschens

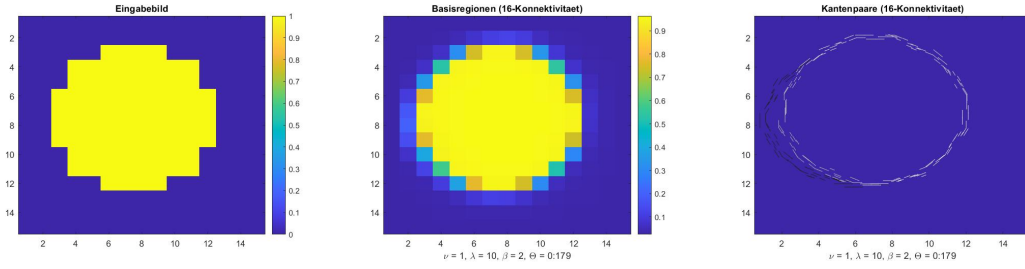


Abbildung 3.11.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 2$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

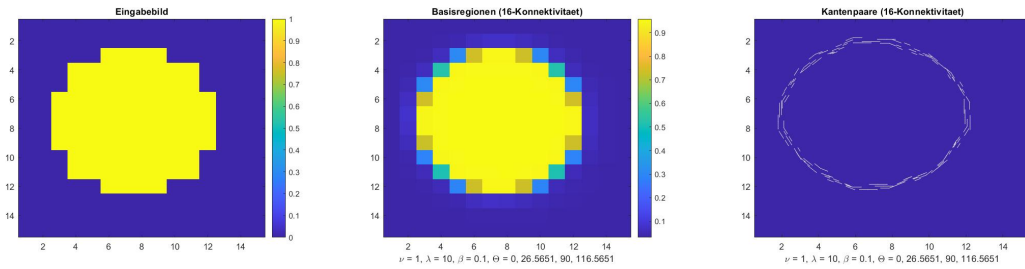


Abbildung 3.12.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

gut erkennbar rekonstruiert wurde, was an der großen Datenmenge liegt, die wir durch die Radon-Transformation mit 180 verschiedenen Winkeln erhalten.

Nach Theorem 2.37 reichen schon vier Richtungen aus, um konvexe Körper eindeutig zu bestimmen, wenn die Steigungen der Richtungen, in aufsteigender Ordnung, ein rationales Doppelverhältnis ungleich $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, 2, 3$ oder 4 haben. In Beispiel 2.38 geben wir drei Richtungsmengen an, die diese Bedingung erfüllen. Daraus ergeben sich die Mengen $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$, $\Theta = \{0, 45, 63.4349, 78.6901\}$ und $\Theta = \{26.5651, 33.6901, 45, 56.3099\}$ an Winkeln. Als erstes wollen wir den Kreis mit den Winkeln $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$ rekonstruieren. Wir benutzen 16-Konnektivität und

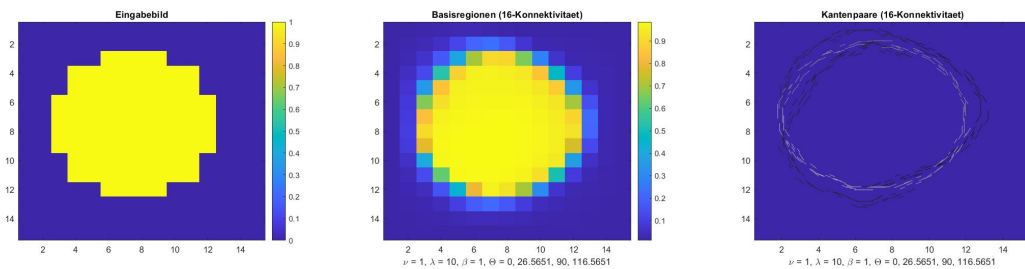


Abbildung 3.13.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 1$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

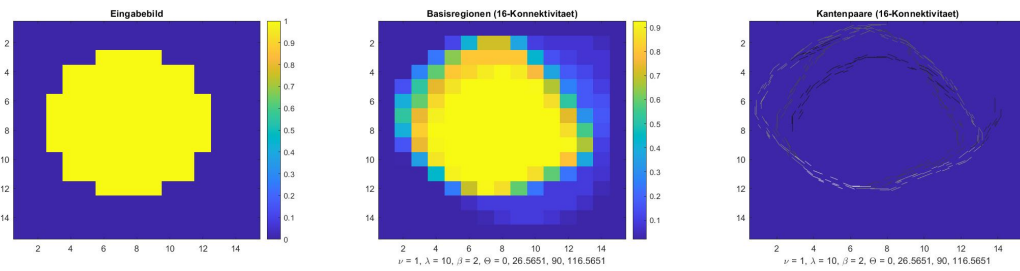


Abbildung 3.14.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 2$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

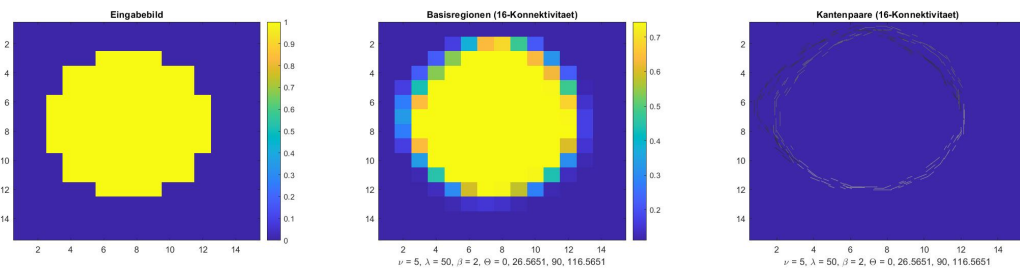


Abbildung 3.15.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 5, \lambda = 50, \beta = 2$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

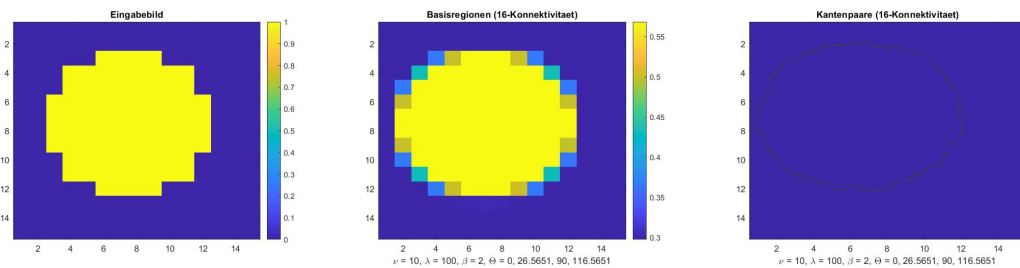


Abbildung 3.16.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 10, \lambda = 100, \beta = 2$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

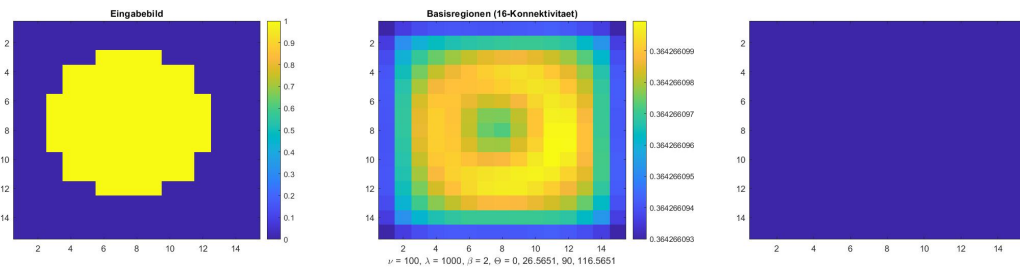


Abbildung 3.17.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 100, \lambda = 1000, \beta = 2$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

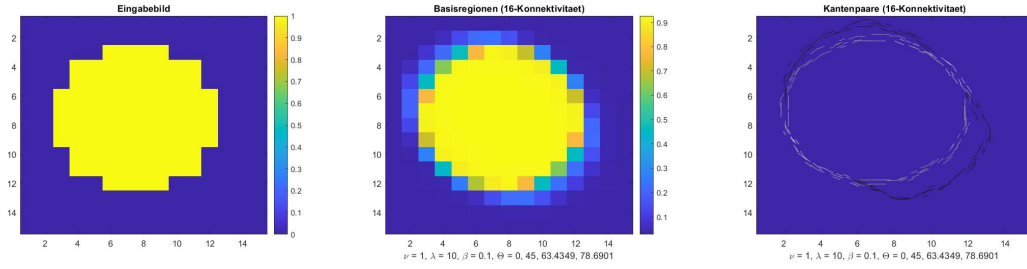


Abbildung 3.18.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, 45, 63.4349, 78.6901\}$.

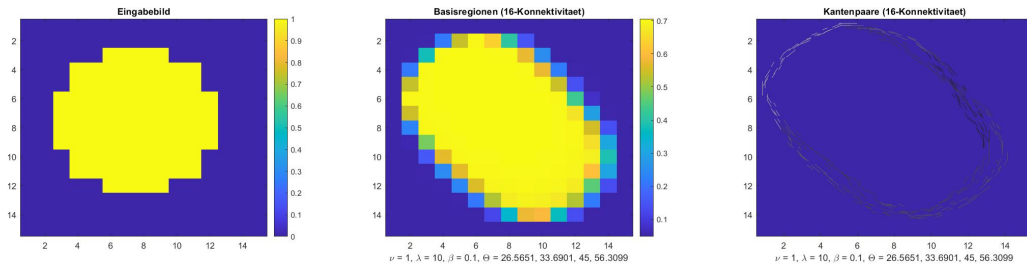


Abbildung 3.19.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{26.5651, 33.6901, 45, 56.3099\}$.

$\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$. Dann erhöhen wir die Stärke des Rauschens auf $\beta = 1$ und $\beta = 2$. Bei geringem Rauschen erhalten wir eine gute Rekonstruktion des Kreises, wenn auch nicht so scharf wie bei 180 Winkeln (Abbildung 3.12). Der Nachteil einer geringen Datenmenge zeigt sich uns deutlich bei starkem Rauschen in den Abbildungen 3.13 und 3.14. In diesem Fall können wir einer verschwommenen Rekonstruktion aber auch entgegenwirken, indem wir die Gewichtungen der Regularisierungen erhöhen. In den Abbildungen 3.15 und 3.16 sehen wir die so erzielten Ergebnisse. Der Kreis lässt sich wieder besser bis gut erkennen, aber die Lösung verliert auch mehr und mehr an Kontrast und aktive Basisregionen und Kantenpaare haben eher den Wert 0,5 als 1, wie dem abgesunkenen Wert der Farbanzeige für die Basisregionen und dem Grau der Kantenpaare zu entnehmen ist. Für $\nu = 100$ und $\lambda = 1000$ scheitert die Rekonstruktion aber, wie Abbildung 3.17 zeigt.

Die Rekonstruktionen mit den Winkeln $\Theta = \{0, 45, 63.4349, 78.6901\}$ und $\Theta = \{26.5651, 33.6901, 45, 56.3099\}$ in den Abbildungen 3.18 und 3.19 sind gegenüber den Ergebnissen mit den vorherigen vier Winkeln verrauschter beziehungsweise wird der Kreis selbst bei geringem Rauschen nicht korrekt rekonstruiert. Wir erklären uns dies mit der immer geringer werdenden Spannweite der Winkel, sodass jede Radon-Transformation weniger neue nützliche Informationen über den Körper liefert. Denn die Radon-Transformation der Rekonstruktion weicht nach Überprüfung kaum von der Radon-Transformation des Eingabebildes ab. Das Minimierungsproblem scheint demnach korrekt gelöst worden zu sein. Ein Test mit den vier Winkeln $\Theta = \{0, 45, 90, 135\}$, die die Voraussetzungen von

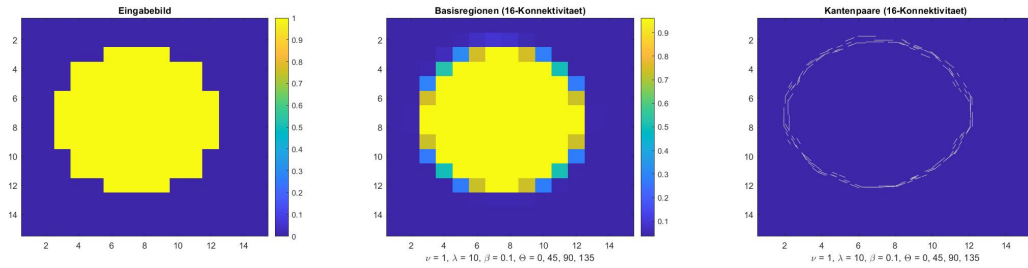


Abbildung 3.20.: Rekonstruktion eines Kreises mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, 45, 90, 135\}$.

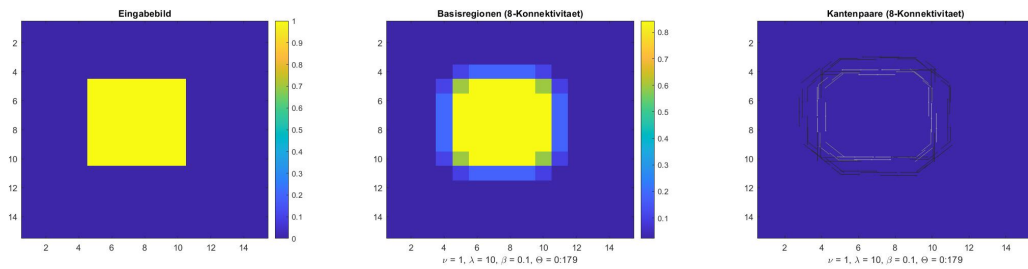


Abbildung 3.21.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

Theorem 2.37 nicht erfüllen, aber größeren Abstand zueinander haben, liefern hingegen eine gute Rekonstruktion (Abbildung 3.20). Dies steht jedoch nicht im Widerspruch zum Theorem, weil diese Winkel durchaus in der Lage sein können bestimmte konvexe Körper zu bestimmen, aber nicht jeden beliebigen konvexen Körper.

Als nächstes haben wir ein Quadrat rekonstruiert. Wir wählten unsere Parameter analog zur ersten Rekonstruktion des Kreises und zwar haben wir mit 8-Konnektivität, 180 Winkeln, $\nu = 1, \lambda = 10$ und $\beta = 0.1$ gearbeitet. Allerdings waren die Ergebnisse, die in Abbildung 3.21 zu sehen sind, nicht so genau wie für diese große Datenmenge erwartet. Die Lösung ist leicht verschwommen, es gibt einen Kontrastverlust von 0,2 und es sind

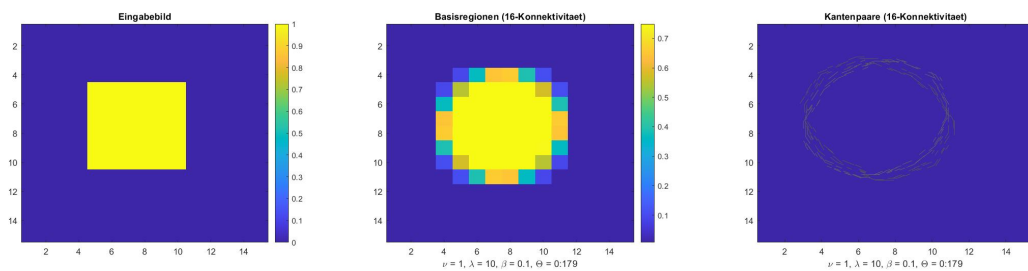


Abbildung 3.22.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

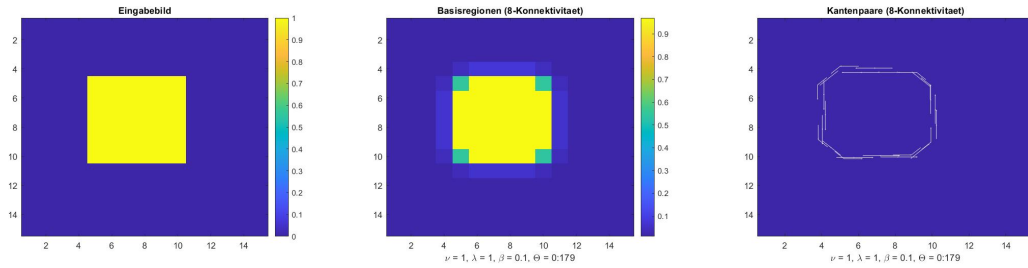


Abbildung 3.23.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

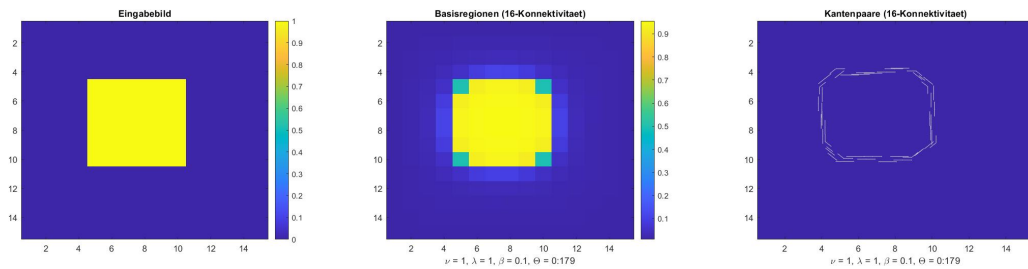


Abbildung 3.24.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

viele schwarze Kantenpaare zu sehen und nur ein Quadrat aus grauen Kantenpaaren, was den Kontrastverlust erneut verdeutlicht. An der Rekonstruktion mit 16-Konnektivität in Abbildung 3.22 lässt sich die Ursache des Problems erahnen. Betrachten wir nur die Lösung, scheint es eher als hätten wir einen Kreis statt eines Quadrats rekonstruiert. Für die nächsten zwei Rekonstruktionen haben wir λ deshalb auf 1 gesetzt und erhalten deutlich bessere Ergebnisse (Abbildungen 3.23 und 3.24). Die Basisregionen und Kantenpaare lassen deutlich ein Quadrat erkennen und nur die Ecken des Quadrats werden noch leicht abgerundet.

Die Abbildungen 3.25 und 3.26 zeigen die Auswirkungen von Rauschen auf die Rekon-

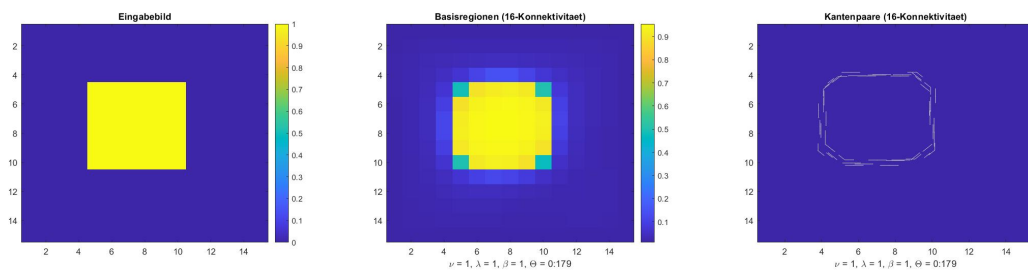


Abbildung 3.25.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

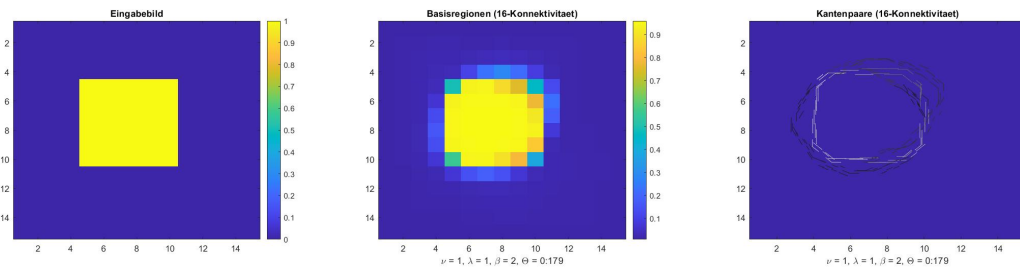


Abbildung 3.26.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 2$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

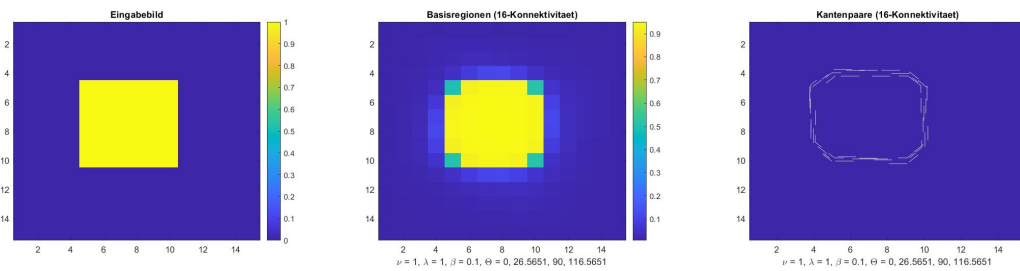


Abbildung 3.27.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

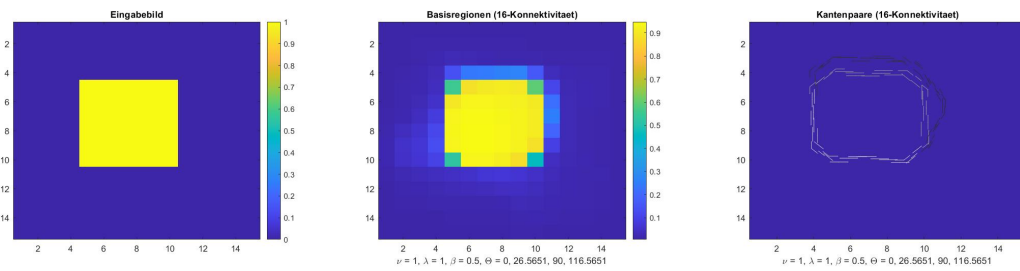


Abbildung 3.28.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.5$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

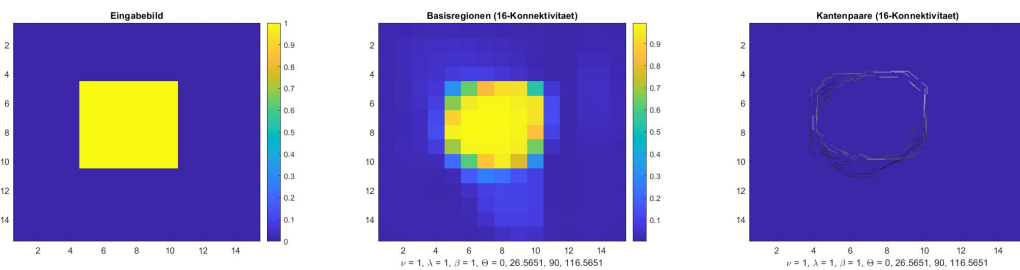


Abbildung 3.29.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 1$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

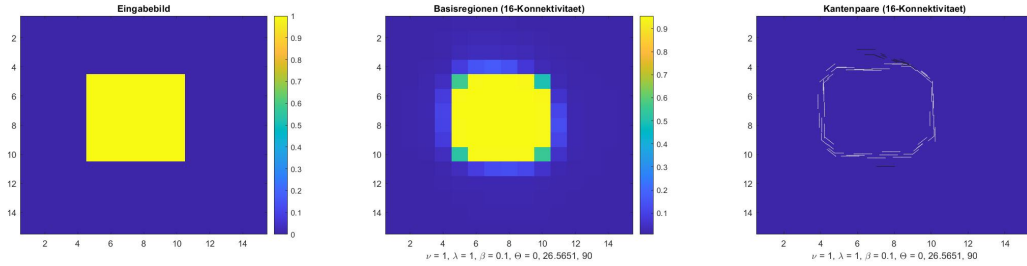


Abbildung 3.30.: Rekonstruktion eines Quadrats mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90\}$.

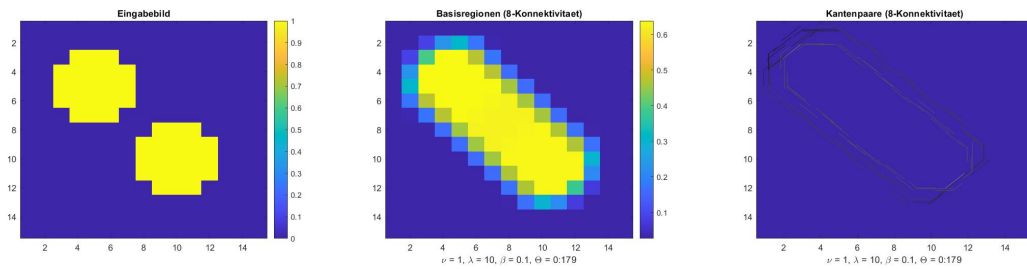


Abbildung 3.31.: Rekonstruktion zweier Kreise mit geringem Abstand zueinander mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

struktion. In den Abbildungen 3.27, 3.28 und 3.29 ist die Rekonstruktion mit vier Winkeln zu sehen. Wie beim Kreis ist eine Rekonstruktion mit nur vier Winkeln anfälliger für Rauschen als eine mit 180 Winkeln. Die Rekonstruktion des Quadrats scheint aber auch im Allgemeinen etwas anfälliger für Rauschen zu sein als die Rekonstruktion des Kreises.

In Kapitel 2 haben wir desweiteren gezeigt, dass 3 Winkel einen konvexen Körper nicht eindeutig rekonstruieren (Theorem 2.36). Deshalb haben wir auch dazu einen Versuch gemacht. Auch die Rekonstruktion mit drei Winkeln in Abbildung 3.30 lässt das Quadrat erkennen, aber das Rauschen von $\beta = 0.1$ beeinträchtigt eine Rekonstruktion schon deutlich stärker als bei vier Winkeln.

Zuletzt stellen wir noch die Rekonstruktion zweier Kreise vor, einmal nah aneinander und einmal mit größerem Abstand zueinander. Die Kreise sollen zwei konvexe Löcher in einem Körper symbolisieren. Wir beginnen mit der Rekonstruktion zweier Kreise mit geringem Abstand zueinander mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 10, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$, siehe Abbildung 3.31. Die Kreise werden bei der Rekonstruktion zu einem Objekt verschmolzen, was aufgrund des Rauschens und der Regularisierungen auch zu erwarten war. Allerdings sind die Kantenpaare relativ dunkel und bilden mehrere Formen und die aktiven Basisregionen haben auch höchstens einen Wert von knapp über 0,6. Die gleiche Rekonstruktion mit $\lambda = 1$ in Abbildung 3.32 lässt zwei Kreise erkennen mit einer verschwommeneren Verbindung zueinander. Die Kantenpaare zeigen in diesem Fall auch deutlich zwei Kreise und dunkel das Objekt, das die Kreise zusammen bilden.

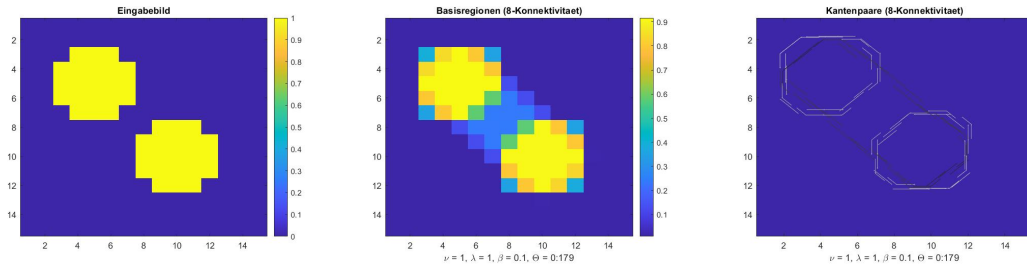


Abbildung 3.32.: Rekonstruktion zweier Kreise mit geringem Abstand zueinander mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

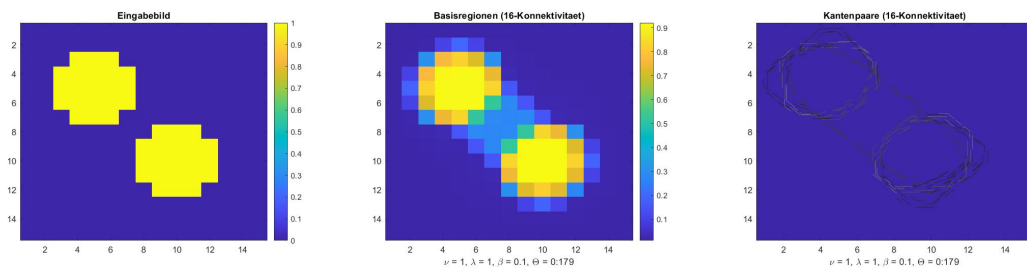


Abbildung 3.33.: Rekonstruktion zweier Kreise mit geringem Abstand zueinander mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

Ein Test mit 16-Konnektivität lässt keine Verbesserungen bei der Rekonstruktion erkennen. Im Gegenteil, die Kantenpaare zeigen die Kreise undeutlicher (siehe Abbildung 3.33). Selbst wenn Löcher mit geringem Abstand als ein einziges Loch rekonstruiert werden, sollte das bei einer Werkstoffprüfung eines Gussteils das Ergebnis nicht verfälschen. Möchte man nur wissen, ob es Luft einschließt, reicht das Nachweisen eines einzelnen aus. Und möchte man vermeiden einen Luft einschluss bei der Bearbeitung des Gussteils freizulegen, so sollte auch der schmale Bereich zwischen den beiden Löchern gemieden werden.

Bei zwei Löchern mit größerem Abstand zueinander möchten wir auch in der Rekonstruk-

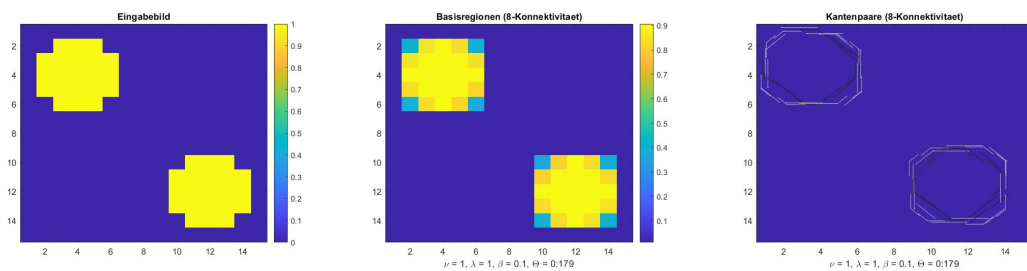


Abbildung 3.34.: Rekonstruktion zweier Kreise mit größerem Abstand zueinander mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

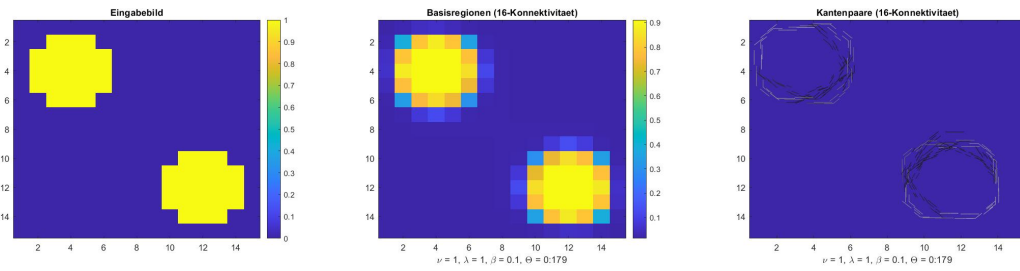


Abbildung 3.35.: Rekonstruktion zweier Kreise mit größerem Abstand zueinander mit 16-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, \dots, 179\}$.

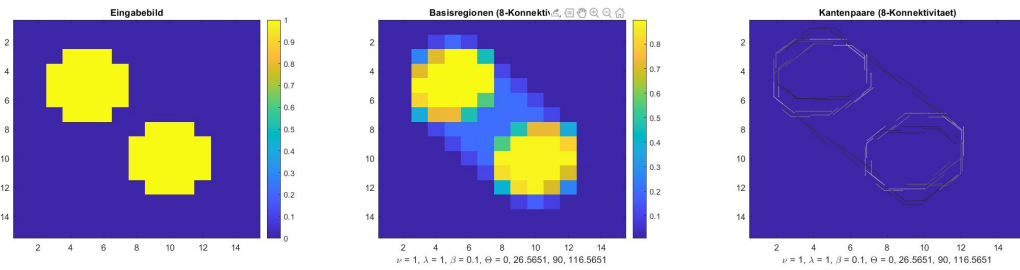


Abbildung 3.36.: Rekonstruktion zweier Kreise mit geringem Abstand zueinander mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

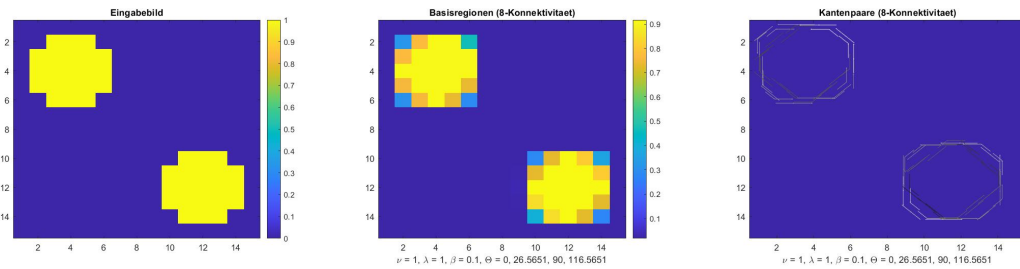


Abbildung 3.37.: Rekonstruktion zweier Kreise mit größerem Abstand zueinander mit 8-Konnektivität und den Parametern $\nu = 1, \lambda = 1, \beta = 0.1$ und $\Theta = \{0, 26.5651, 90, 116.5651\}$.

tion deutlich zwei getrennte Löcher erkennen. Wie in den Abbildungen 3.34 und 3.35 zu sehen, ist dies der Fall. Bei der Rekonstruktion mit 16-Konnektivität sind die Kantenpaare wieder undeutlicher als bei einer mit 8-Konnektivität. Die Abbildungen 3.36 und 3.37 zeigen die Rekonstruktionen der Kreise, einmal nah bei einander und einmal weiter entfernt, mit nur vier Winkeln. Die Ergebnisse sind lediglich etwas verrauschter als bei 180 Winkeln.

4. Eindeutigkeit der Rekonstruktion konvexer Körper mit Löchern

Aufbauend auf Theorem 2.32 von Gardner und McMullen zur Rekonstruktion ebener konvexer Körper aus dem zweiten Kapitel möchten wir das Theorem für ebene konvexe Körper mit Löchern erweitern. Wir orientieren uns in diesem Kapitel an dem Artikel von Bianchi und Longinetti [2], die gezeigt haben, dass ein ebener konvexer Körper mit disjunkten kreisrunden Löchern eindeutig durch X-rays bestimmt werden kann. Dazu zeigen wir, dass die Anzahl der Löcher kleiner oder gleich der Anzahl der Richtungen sein muss, entlang derer die X-rays aufgenommen werden, und die Richtungen wie bei Gardner und McMullen keine Teilmenge der Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons sein müssen. Wenn wir von Richtungen sprechen, meinen wir immer paarweise nicht parallele Richtungen.

Zunächst beschäftigen wir uns mit dem Problem die Schwerpunkte der Löcher zu bestimmen:

Problem 4.1. *Die Rekonstruktion einer endlichen, sich in einer Ebene befindenden Punktmenge C , wenn deren X-rays entlang der vollständigen Menge von Geraden parallel zu m gegebenen Richtungen u_1, \dots, u_m bekannt sind.*

Hier gibt der X-ray von C entlang der Geraden l in Richtung u_i die Anzahl der Punkte von C an, die auf der Geraden l liegen.

Mit Hilfe der Lösung von Problem 4.1, lösen wir das eigentliche Problem:

Problem 4.2. *Die Rekonstruktion eines homogenen ebenen Körpers K , den wir erhalten, indem wir aus dem Inneren eines konvexen Körpers endlich viele disjunkte Kreise herausschneiden, wenn wir dessen X-rays in m Richtungen u_1, \dots, u_m kennen.*

Wir beginnen mit Problem 4.1 und beweisen, dass die Menge C eindeutig bestimmt ist, wenn die Anzahl $|C|$ der Punkte in C kleiner als die Anzahl m der Richtungen ist.

Proposition 4.3. *Seien $u_1, u_2, \dots, u_m \in S^1$ gegebene m Richtungen in einer Ebene und sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine in der Ebene liegende endliche Menge von n Punkten. Wenn $n < m$ ist, dann bestimmen die X-rays in den Richtungen $u_i, i = 1, \dots, m$, die Menge C eindeutig.*

Wir geben zwei verschiedene Beweise. Der erste zeigt die Aussage elegant und schnell per Widerspruch.

Beweis 1. Angenommen A und B sind zwei verschiedene Mengen mit weniger als m Punkten und mit denselben X-rays in den Richtungen $u_i, i = 1, \dots, m$. Sei nun $x \in A \setminus B$. Dann existiert für jede Richtung u_i ein Punkt $y_i \in B$, sodass der Richtungsvektor $y_i - x$

parallel zu u_i ist für jedes $i = 1, \dots, m$, weil beide Mengen dieselben X-rays entlang dieser Richtungen haben.

Da x fest gewählt ist, müssen die Punkte y_i verschieden sein. Damit enthält die Menge B mindestens m Punkte, was der Annahme $n < m$ widerspricht. \square

Der zweite Beweis ist konstruktiv und auf die benutzte Konstruktion kommen wir in einem späteren Beweis zurück.

Beweis 2. Für jede Richtung u_i bezeichnen wir mit $u_i(C) = \{tu_i + c : c \in C, t \in \mathbb{R}\}$ die Menge der Geraden in Richtung u_i , die durch die Punkte von C verlaufen. Seien r_i und s_i die beiden Geraden in $u_i(C)$ die „extremal“ sind in dem Sinne, dass sie einen abgeschlossenen Streifen S_i zwischen sich begrenzen, der die Menge C enthält. Den Schnitt dieser Streifen bezeichnen wir mit

$$P = \bigcap_{i=1}^m S_i. \quad (4.1)$$

Es ist $P \neq \emptyset$, da $C \subset S_i$ für alle i gilt. Außerdem ist P ein konvexes Polygon, weil jeder Innenwinkel kleiner als 180° ist, was beim Schneiden zweier Geraden gegeben ist, und P kein überschlagenes Polygon ist. Jede Seite von P enthält mindestens einen Punkt von C und es gilt $C \subset P$. Da C aus n Punkten besteht und $n < m$ gilt, muss P weniger als $2m$ Seiten haben. Von den extremalen Geraden r_i und s_i , $i = 1, \dots, m$, existieren $2m$, was bei weniger als $2m$ Seiten von P bedeutet, dass manche Geraden nur einen Eckpunkt des Polygons P schneiden ohne eine neue Seite entstehen zu lassen. Schneiden sich also drei extremale Geraden, dann in einem Eckpunkt z von P . Jede extremale Gerade verläuft durch mindestens einen Punkt von C und da $C \subset P$ gilt, folgt, dass $z \in C$ ist. Daher ist z eindeutig durch die X-rays von C bestimmt. Durch das Löschen von z und jeder Geraden der Menge $u_i(C)$, die z enthält, können wir die Menge C eindeutig rekonstruieren, wenn wir nun das gesamte Vorgehen wiederholen. \square

Für den Fall $|C| = m$ zeigen wir, wann genau die Menge C durch X-rays nicht eindeutig bestimmt ist. Wir erhalten Eindeutigkeit, wenn C nicht die Menge der Eckpunkte eines affinen regelmäßigen Polygons ist oder die Menge der Richtungen keine Teilmenge der Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. Bevor wir die entsprechende Proposition dazu beweisen, brauchen wir noch einige Lemmata zu Kegelschnitten und den Satz von Pascal. Die Definition eines nicht ausgeartetem Kegelschnitts und das Lemma mit seinem Beweis danach stützen sich auf [16].

Definition 4.4. *Nicht ausgearteteter Kegelschnitt*

Ein Kegelschnitt ist eine Kurve, die wir erhalten, wenn wir die Oberfläche eines Doppelkegels mit einer Ebene schneiden. Ist die Kegelspitze in der Schnittebene nicht enthalten, so entstehen die *nicht ausgearteten Kegelschnitte* Ellipse, Parabel oder Hyperbel, siehe Abbildungen 4.1.

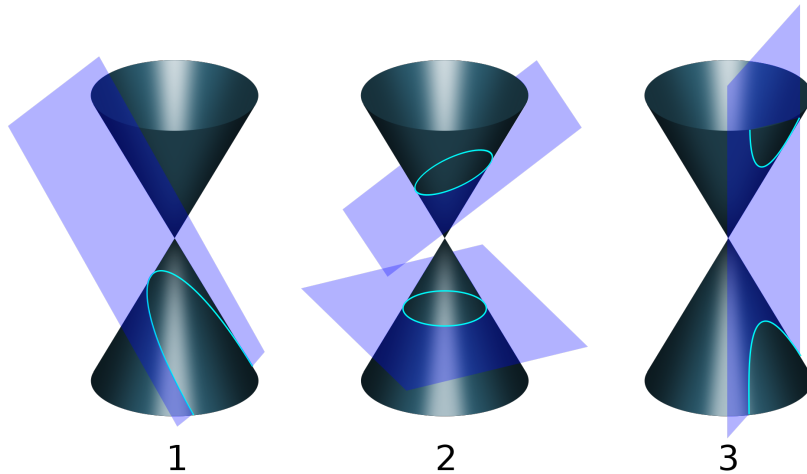


Abbildung 4.1.: Die drei nicht ausgearteten Kegelschnitte: 1) Parabel. 2) Kreis und Ellipse. 3) Hyperbel. (Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt#/media/Datei:Conic_sections_with_plane.svg)

Lemma 4.5. *Fünf paarweise verschiedene, nicht kollineare Punkte legen einen nicht ausgearteten Kegelschnitt eindeutig fest. Dabei ist mit kollinear gemeint, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen.*

Beweis. Einen Kegelschnitt können wir durch die allgemeine Kegelschnittgleichung beschreiben, die lautet:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{mit } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

Es ist zu zeigen, dass zu gegebenen paarweise verschiedenen, nicht kollinearen Punkten $(x_1, y_1), \dots, (x_5, y_5)$ eindeutige a, b, c, d, e mit $ax_i^2 + bx_iy_i + cy_i^2 + dx_i + ey_i + 1 = 0$ existieren, wobei wir $f = 1$ festgelegt haben. Die Koeffizienten a, b, c, d, e sind durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bestimmt. Dieses ist invertierbar, wenn die Determinante der Matrix ungleich 0 ist. Dies ist der Fall, wenn die Punkte paarweise verschieden und nicht kollinear sind. \square

Als nächstes geben wir den Satz von Pascal für die reelle affine Ebene an. Für einen Beweis des Satzes für die projektive Ebene siehe [17].

Theorem 4.6 (Satz von Pascal). *Für ein Hexagon z_1, \dots, z_6 auf einem nicht ausgearteten Kegelschnitt, bei dem zwei Paare gegenüberliegender Seiten parallel sind, ist auch das dritte Paar gegenüberliegender Seiten parallel.*

Wir benötigen allerdings die Umkehrung des Satzes.

Lemma 4.7. *Sind gegenüberliegende Seiten eines Hexagons mit paarweise verschiedenen, nicht kollinearen Ecken z_1, \dots, z_6 parallel, so liegen die Eckpunkte des Hexagons auf einem nicht ausgearteten Kegelschnitt.*

Beweis. Die Eckpunkte z_1, \dots, z_5 legen nach Lemma 4.5 eindeutig einen nicht ausgearteten Kegelschnitt fest. Zeichnen wir von z_5 aus eine Gerade parallel zur Seite z_2z_3 , so schneidet diese den Kegelschnitt in z_5 und maximal einem weiteren Punkt z . Falls die Gerade tangential an den Kegelschnitt ist, setze $z = z_5$. Die Punkte z_1, \dots, z_5, z bilden somit per Konstruktion ein Pascal-Hexagon (ein Hexagon mit Ecken auf einem nicht ausgearteten Kegelschnitt). Nach dem Satz von Pascal ist wegen der Parallelität von z_5z zu z_2z_3 (nach Konstruktion von z) und von z_1z_2 zu z_4z_5 (nach Voraussetzung) ebenfalls z_1z parallel zu z_3z_4 . Laut Annahme ist jedoch auch z_5z_6 parallel zu z_2z_3 und z_1z_6 parallel zu z_3z_4 , das heißt z_6 und z sind beide der Schnittpunkt der Geraden durch z_5 parallel zu z_2z_3 und der Geraden durch z_1 parallel zu z_3z_4 . Wegen der Eindeutigkeit des Schnittpunkts, da die Ecken nicht kollinear sind, ist $z = z_6$, und das Hexagon lag somit auf einem nicht ausgearteten Kegelschnitt. Wäre der Kegelschnitt ausgeartet, also ein Punkt oder eine Gerade oder ein sich schneidendes Geradenpaar, wären die Ecken kollinear gewesen. \square

Wie die zwei Lemmata zuvor brauchen wir auch die nächsten beiden für den Beweis von Lemma 4.10.

Lemma 4.8. *Seien a, b zwei parallele Geraden, von denen a einen Kreis in den Punkten A, C und b denselben Kreis in den Punkten B, D schneidet, dann ist der Abstand auf dem Kreis von A zu B gleich dem von C zu D .*

Beweis. Durch eine Koordinatentransformation dürfen wir annehmen, dass die Geraden parallel zur x -Achse sind und der Kreismittelpunkt im Ursprung liegt. Dann ist die Figur jedoch symmetrisch bezüglich der y -Achse, woraus die Gleichheit der Abstände folgt. \square

Lemma 4.9. *Seien z_1, \dots, z_{2m} Punkte auf einem Kreis (gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert), sodass $d(z_i, z_{i+1}) = d(z_{i+2}, z_{i+3})$ für alle $i = 1, \dots, 2m$ (periodisch gezählt mit i modulo $2m$) gilt. Dann bilden z_1, z_3, z_5, \dots und z_2, z_4, z_6, \dots regelmäßige Polygone mit gleichem Mittelpunkt.*

Beweis. Sei d die sphärische Metrik also die minimale Kreisbogenlänge, die man braucht um zwei Punkte zu verbinden. Dann ist $d(z_i, z_{i+2}) = d(z_i, z_{i+1}) + d(z_{i+1}, z_{i+2})$ für alle $i = 1, \dots, 2m$. Damit ist

$$d(z_3, z_5) = d(z_3, z_4) + d(z_4, z_5) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) = d(z_1, z_3).$$

Analog erhalten wir $d(z_5, z_7) = d(z_3, z_5) = d(z_1, z_3)$. Ebenfalls folgt mit $d(z_3, z_4) = d(z_1, z_2)$, dass

$$d(z_2, z_4) = d(z_2, z_3) + d(z_3, z_4) = d(z_2, z_3) + d(z_1, z_2) = d(z_1, z_3)$$

gilt und damit ist

$$d(z_4, z_6) = d(z_4, z_5) + d(z_5, z_6) = d(z_2, z_3) + d(z_3, z_4) = d(z_2, z_4) = d(z_1, z_3).$$

Allgemein erhält man $d(z_i, z_{i+2}) = d(z_1, z_3)$ für alle i , das heißt der Abstand zweier benachbarter Punkte in z_1, z_3, z_5, \dots und in z_2, z_4, z_6, \dots ist immer identisch. Da die Eckpunkte der Polygone z_1, z_3, z_5, \dots und z_2, z_4, z_6, \dots alle auf demselben Kreis liegen, müssen z_1, z_3, z_5, \dots und z_2, z_4, z_6, \dots regelmäßige Polygone mit gleichem Mittelpunkt sein. \square

Lemma 4.10. *Sei P ein konvexes Polygon mit $2m$ Ecken z_j , $j = 1, \dots, 2m$, gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert. Seien W und V die konvexen Polygone mit den Eckpunkten z_{2i} beziehungsweise z_{2i-1} , $i = 1, \dots, m$. Wenn für alle j , $j = 1, \dots, 2m$, die folgende Bedingung der Parallelität folgender Strecken gilt*

$$z_j z_{j+1} \parallel z_{j-1} z_{j+2} \parallel z_{j-2} z_{j+3}, \quad (4.2)$$

wobei \parallel Parallelismus bezeichnet, dann existiert eine affine Abbildung T , sodass $T(W)$ und $T(V)$ die Eckpunkte zweier kongruenter, regelmäßiger m -Ecke mit gleichem Mittelpunkt sind.

Beweis. Nach den Voraussetzungen gilt für die Fälle $j = i + 2$, $j = i + 3$ und $j = i + 4$ Folgendes

$$z_{i+2} z_{i+3} \parallel z_{i+1} z_{i+4}, \quad z_{i+2} z_{i+5} \parallel z_{i+1} z_{i+6}, \quad z_{i+4} z_{i+5} \parallel z_{i+3} z_{i+6}.$$

Damit sind für das überschlagene Hexagon $z_{i+5} z_{i+4} z_{i+1} z_{i+6} z_{i+3} z_{i+2}$ alle Paare gegenüberliegender Seiten parallel zueinander und das Hexagon ist nach Lemma 4.7 ein Pascal-Hexagon für jedes i . Demnach gehören die Punkte z_1, \dots, z_6 zu einem nicht ausgearteten Kegelschnitt δ , das heißt keine drei Punkte liegen auf einer Geraden. Gleichmaßen gehören die Punkte z_2, \dots, z_7 zu einem Kegelschnitt, der mit dem Kegelschnitt δ übereinstimmen muss, weil z_2, \dots, z_6 zu δ gehören und 5 Punkte mit Lemma 4.5 einen nicht ausgearteten Kegelschnitt eindeutig bestimmen. Es folgt, dass z_i für jedes i zu δ gehört. Wir gehen nun die möglichen nicht ausgearteten Kegelschnitte durch. Wenn δ eine Parabel ist, dann existiert ein j , sodass $z_j, z_{j+1}, \dots, z_{2m}, z_1, \dots, z_{j-1}$ auf δ angeordnet sind. Dann sind die Strecken $z_j z_{j-3}$ und $z_{j-1} z_{j-2}$ aber nicht parallel zueinander (denn für eine mögliche Parallelität müsste sich die Strecke $z_{j-1} z_{j-2}$ zwischen $z_j z_{j-3}$ befinden), was unseren Voraussetzungen widerspricht. Ähnlich verläuft es, wenn δ eine Hyperbel ist. Dann folgt mit der Konvexität von P , dass die Eckpunkte von P alle auf dem gleichen Ast der Hyperbel liegen und das obige Argument für die Parabel lässt sich wiederholen. Also ist δ eine Ellipse gleich $\{(ax, by) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ für $a, b \neq 0$.

Damit existiert eine affine Abbildung $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$, sodass $T(\delta)$ ein Kreis D ist. Durch die Voraussetzungen erhalten wir

$$T(z_j)T(z_{j+1}) \parallel T(z_{j-1})T(z_{j+2}),$$

da die Abbildung T die Parallelität erhält. Weil die Punkte $T(z_i)$, $i = 1, \dots, 2m$, zum selben Kreis D wie die $T(z_j)$ gehören, folgt mit Lemma 4.8,

$$d(T(z_{i-1}), T(z_i)) = d(T(z_{i+1}), T(z_{i+2})),$$

wobei d die sphärische Metrik ist. Es folgt mit Lemma 4.9, dass $T(W)$ und $T(V)$ zwei kongruente regelmäßige m -Ecke mit gleichem Mittelpunkt sind. \square

Jetzt können wir die Proposition für den Fall $|C| = m$ beweisen.

Proposition 4.11. *Seien $u_1, u_2, \dots, u_m \in S^1$ gegebene m Richtungen (gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert) und sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine aus m Punkten bestehende Menge. Die X-rays in den Richtungen u_i , $i = 1, \dots, m$, bestimmen C nicht eindeutig genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) *Es existiert eine affine Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass $T(C)$ die Eckpunkte eines regelmäßigen Polygons repräsentiert.*
- (ii) *Die Richtungen $T(u_i)$ unterscheiden sich von den Richtungen der Seiten von $T(C)$.*
- (iii) *Die Richtungen $T(u_i)$ sind abstandsgleich, das heißt der Winkel zwischen jedem Paar benachbarter Richtungen ist gleich.*

Beweis. Sei P das Polygon definiert durch (4.1). Der Rand von P besteht aus höchstens $2m$ Seiten. Wenn die Anzahl der Seiten von P weniger als $2m$ beträgt, erhalten wir durch Wiederholen des Arguments in Beweis 2 von Proposition 4.3, dass C eindeutig bestimmt ist. Wenn C also nicht eindeutig bestimmt ist, dann hat P genau $2m$ Seiten. Seien z_j , $j = 1, \dots, 2m$, die Eckpunkte von P (gegen den Uhrzeigersinn durchnummeriert) und seien W und V die Polygone mit den Eckpunkten z_{2i} beziehungsweise z_{2i-1} , $i = 1, \dots, m$. Weil $|C| = m$ ist und jede Seite von P mindestens einen Punkt von C enthält, folgt, dass C entweder gleich der Eckpunkte von W oder derer von V ist. Da C nicht eindeutig bestimmt ist, haben W und V die gleichen X-rays in den Richtungen u_i . Also existiert für jede Richtung u_i eine Seite $z_j z_{j+1}$, sodass $z_j z_{j+1} \parallel u_i$ ist und Bedingung (4.2) gilt. Lemma 4.10 besagt, dass eine affine Abbildung T in der Ebene existiert, sodass $T(W)$ und $T(V)$ kongruente regelmäßige m -Ecke mit gleichem Mittelpunkt sind. Da entweder $C = W$ oder $C = V$ gilt, erhalten wir (i). Die Richtungen der Seiten von $T(P)$ sind die Richtungen $T(u_i)$, da $z_j z_{j+1} \parallel u_i$ ist. Wie im Beweis von Lemma 4.10 gesehen, liegen die Eckpunkte von $T(P)$ alle auf einem Kreis und die Seiten sind gleichlang. Damit schließen sie alle den gleichen Winkel zwischen sich ein und die Richtungen der Seiten sind abstandsgleich. Sie sind auch verschieden zu den Richtungen der Seiten von $T(C)$. Das zeigt (ii) und (iii). Andersherum ist es leicht zu sehen, dass, wenn die Bedingungen (i), (ii) und (iii) gelten, C nicht eindeutig bestimmt ist. Siehe Abbildung 4.2 aus [2]. \square

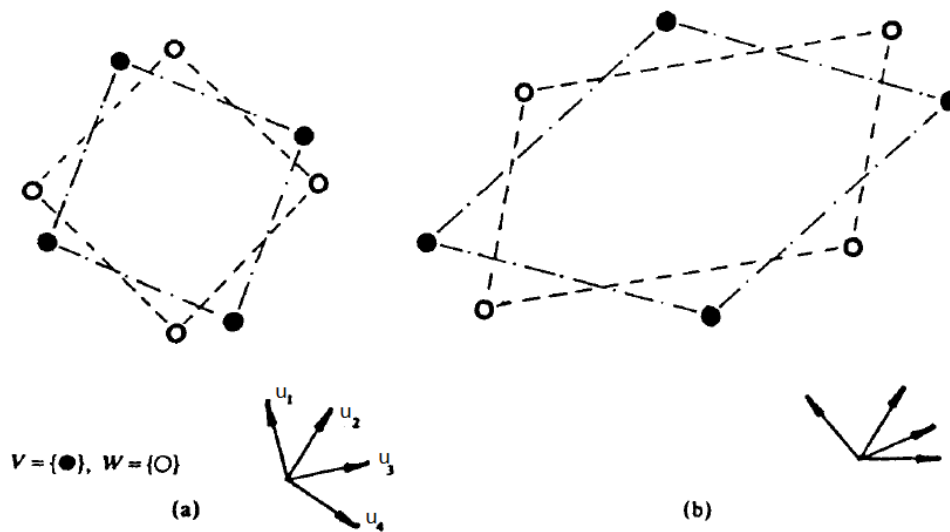


Abbildung 4.2.: (a) Die Eckpunkte zweier kongruenter regelmäßiger n -Ecke mit gleichem Schwerpunkt, die in den Richtungen der Seiten von $\text{conv}(V \cup W)$ die gleichen X-rays haben. (b) Die Eckpunkte zweier affiner regelmäßiger Polygone mit der gleichen Eigenschaft.

Problem 4.1 ist damit gelöst. Die nächste Proposition zeigt, dass, wenn wir keine *a priori* Grenze an $|C|$ haben, dann gilt für beliebige endliche Mengen von Richtungen $\{u_i\}$ die Eindeutigkeit des Problems 4.1 nicht.

Proposition 4.12. *Sei $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ eine beliebige endliche Menge von Richtungen in einer Ebene. Dann existieren zwei verschiedene endliche Punktmengen $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mit den gleichen X-rays in den Richtungen u_i .*

Beweis. Für den Fall $m = 1$ ist die Behauptung klar. Für $m > 1$ argumentieren wir per Induktion. Seien A und B zwei unterschiedliche endliche Mengen mit den gleichen X-rays in den Richtungen $u_i, i = 1, \dots, m - 1$, und sei r ein fester Vektor mit Richtung u_m . Es ist leicht zu sehen, dass die Mengen

$$\bar{A} = A \cup \{B + r\}, \quad \bar{B} = B \cup \{A + r\}$$

die gleichen X-rays in den Richtungen $u_i, i = 1, \dots, m$, haben. Siehe Abbildung 4.3 aus [2]. \square

Wir erhalten ein nützliches Korollar für Problem 4.2, was Mengen von kreisrunden Löchern betrifft.

Korollar 4.13. *Sei $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ eine beliebige endliche Menge von Richtungen in einer Ebene. Dann existieren zwei verschiedene Mengen mit nichtleerem Inneren und mit den gleichen X-rays in den Richtungen u_i .*

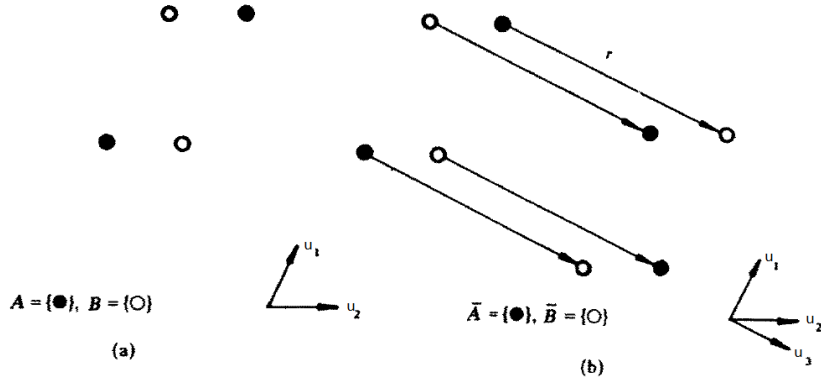


Abbildung 4.3.

Beweis. Seien A und B wie in Proposition 4.12. Wir betrachten zwei Familien Γ_1 und Γ_2 von disjunkten, homogenen und kongruenten Scheiben C_j , deren Mittelpunkte die Punkte von A beziehungsweise B sind. Seien

$$F = \bigcup_{C_j \in \Gamma_1} C_j \quad \text{und} \quad G = \bigcup_{C_j \in \Gamma_2} C_j.$$

Analog zum Beweis von Proposition 4.12 können wir per Induktion beweisen, dass F und G die gleichen X-rays in den Richtungen u_i haben. \square

Zum Schluss dieser Arbeit wenden wir uns Problem 4.2 zu. Wir suchen Bedingungen für die Rekonstruktion eines homogenen ebenen Körpers K , den wir erhalten, indem wir aus dem Inneren eines konvexen Körpers endlich viele disjunkte Kreise ausschneiden. Wir beginnen mit der mathematischen Definition dieser Körper.

Definition 4.14.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei K_n die Klasse der ebenen konvexen Körper mit höchstens n disjunkten kreisförmigen Löchern. Genauer sei

$$K_n = \left\{ M \setminus \bigcup_{h=1}^t Q_h : M \text{ ist ein ebener konvexer Körper, } t \leq n, \right. \\ \left. Q_h \text{ ist eine Scheibe und } Q_h \subset M \text{ für } h = 1, \dots, t, Q_h \cap Q_k = \emptyset \text{ für } h \neq k \right\}.$$

Ähnlich definieren wir \tilde{K}_n die Klasse der ebenen konvexen Körper mit höchstens n disjunkten kreisförmigen Löchern im Inneren des konvexen Körpers,

$$\tilde{K}_n = \left\{ H \setminus \bigcup_{i=1}^s C_i : H \text{ ist ein ebener konvexer Körper, } s \leq n, \right. \\ \left. C_i \text{ ist eine Scheibe und } C_i \subset \text{int } H \text{ für } i = 1, \dots, s, C_i \cap C_j = \emptyset \text{ für } i \neq j \right\}.$$

Die beiden Definitionen benötigen wir für das folgende Lemma, was uns die Eindeutigkeit der Löcher liefert. Danach betrachten wir nur noch Körper aus \tilde{K}_n . Für den Beweis des nächsten Lemmas brauchen wir zusätzlich das Schubfachprinzip, vergleiche [1].

Theorem 4.15 (Schubfachprinzip). *Werden n Objekte auf r Fächer verteilt, wobei $r < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.*

Lemma 4.16. *Seien $K \in \tilde{K}_n$ und $W \in K_n$. Wir nehmen an, dass K und W die gleichen X-rays in den Richtungen u_i , $i = 1, \dots, m$, haben. Dann stimmen die Löcher von W mit denen von K überein, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

- (i) *Es gilt $m > n$.*
- (ii) *Es gilt $m = n$ und die Menge $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ ist keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons.*

Beweis. Es sind

$$K = H \setminus \bigcup_{i=1}^s C_i \quad \text{und} \quad W = M \setminus \bigcup_{h=1}^t Q_h$$

mit M und H ebene konvexe Körper, C_i und Q_h Scheiben, $t \leq n$ und $s \leq n$. Sei u_j eine fest gewählte Richtung. Wir nehmen an, dass u_j orthogonal zur x -Achse ist. Der X-ray des konvexen Körpers H in Richtung u_j ist eine konkave Funktion $h_j(x)$, definiert auf einem kompakten Intervall $[m_j, d_j]$ mit m_j kleinste und d_j größte x -Koordinate von H . Der X-ray einer Scheibe C_i in Richtung u_j ist gegeben durch die Funktion $g_{i,j}(x)$ mit

$$g_{i,j}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{r_i^2 - (x - a_i)^2} & \text{wenn } a_i - r_i \leq x \leq a_i + r_i, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei a_i die x -Koordinate des Mittelpunkts und r_i den Radius von C_i bezeichnet. Zur Herleitung der Funktion $g_{i,j}(x)$ siehe Abbildung 4.4: Nach dem Satz des Pythagoras gilt $(\frac{1}{2}g_{i,j}(x))^2 + (x - a_i)^2 = r_i^2$ und wir erhalten $g_{i,j}(x) = 2\sqrt{r_i^2 - (x - a_i)^2}$. Demnach ist der X-ray $f_j(x)$ von K in Richtung u_j

$$f_j(x) = h_j(x) - \sum_{i=1}^s g_{i,j}(x), \quad x \in [m_j, d_j]. \quad (4.3)$$

Analog ist der X-ray von W , der nach Voraussetzung mit dem von K übereinstimmt,

$$f_j(x) = v_j(x) - \sum_{h=1}^t u_{h,j}(x), \quad x \in [m_j, d_j], \quad (4.4)$$

wobei $v_j(x)$ der X-ray des konvexen Körpers M in Richtung u_j ist und

$$u_{h,j}(x) = \begin{cases} 2\sqrt{p_h^2 - (x - b_h)^2} & \text{wenn } b_h - p_h \leq x \leq b_h + p_h, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

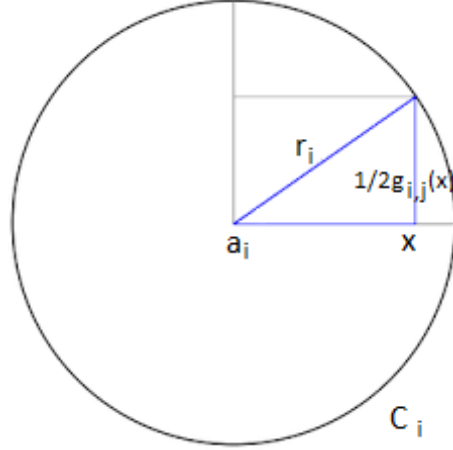


Abbildung 4.4.

wobei b_h die x -Koordinate des Mittelpunkts der Scheibe Q_h und p_h deren Radius bezeichnet.

Weil $h_j(x)$ und $v_j(x)$ konkave Funktionen in (m_j, d_j) sind, folgt aus (4.3) und (4.4), dass f_j eine unbeschränkte einseitige Ableitung in (m_j, d_j) in den Punkten $a_i \pm r_i$, $i = 1, \dots, s$, und in den Punkten $b_h \pm p_h$, $h = 1, \dots, t$, hat. Das heißt wir können mit Hilfe des X-rays von K in Richtung u_j die Mengen L_j und R_j bestimmen, die die Parallelen von u_j beinhalten, die von links beziehungsweise von rechts Tangenten einer Scheibe C_i und einer Scheibe Q_h sind. Siehe Abbildung 4.5 aus [2].

Sei nun $l \in L_j$ und sei $E(l)$ die Familie von Scheiben C_i tangential zur Rechten von l und sei $F(l)$ die entsprechende Familie von Scheiben Q_h . Weil $K \in \tilde{K}_n$ ist, schneidet l die x -Achse in einem Punkt mit x -Koordinate $a_i - r_i = x \in (m_j, d_j)$. Durch das Ableiten von (4.3) erhalten wir

$$\begin{aligned}
D^+ f_j(x + \varepsilon) &= D^+ h_j(x + \varepsilon) - D^+ \sum_{i: a_i - r_i = x} 2\sqrt{r_i^2 - (x + \varepsilon - a_i)^2} \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \sum_{i: a_i - r_i = x} (r_i^2 - (x + \varepsilon - a_i)^2)^{-\frac{1}{2}} (-2)(x + \varepsilon - a_i) \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \sum_{i: a_i - r_i = x} (r_i^2 - (a_i - r_i + \varepsilon - a_i)^2)^{-\frac{1}{2}} (-2)(a_i - r_i + \varepsilon - a_i) \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \sum_{i: a_i - r_i = x} (r_i^2 - (\varepsilon - r_i)^2)^{-\frac{1}{2}} (-2)(\varepsilon - r_i) \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \sum_{i: a_i - r_i = x} (r_i^2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon r_i - r_i^2)^{-\frac{1}{2}} 2(r_i - \varepsilon) \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \sum_{i: a_i - r_i = x} \frac{2(r_i - \varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon r_i - \varepsilon^2}}
\end{aligned}$$

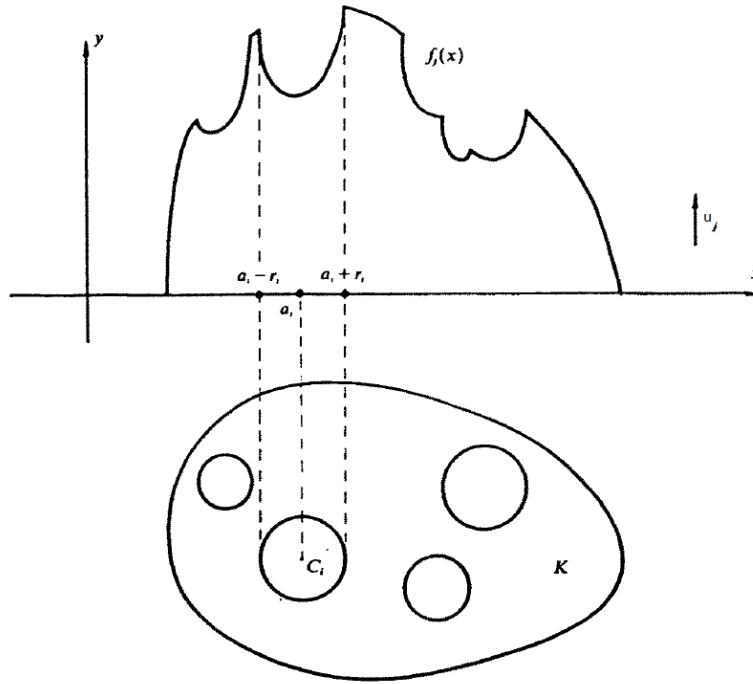


Abbildung 4.5.

$$\begin{aligned}
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \sum_{i: a_i - r_i = x} \frac{2(r_i - \varepsilon)}{\sqrt{2\varepsilon(r_i - \frac{1}{2}\varepsilon)}} \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \sum_{i: a_i - r_i = x} \frac{2(r_i - \varepsilon)}{\sqrt{r_i - \frac{1}{2}\varepsilon}} \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \sum_{i: a_i - r_i = x} \frac{2r_i}{\sqrt{r_i}} + O(\sqrt{\varepsilon}) \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \sum_{i: a_i - r_i = x} 2\sqrt{r_i} + O(\sqrt{\varepsilon}) \\
&= D^+ h_j(x + \varepsilon) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i: a_i - r_i = x} \sqrt{r_i} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0,
\end{aligned}$$

wobei $O(\sqrt{\varepsilon})$ gegen null geht für $\varepsilon \rightarrow 0$ und D^+ bezeichnet die rechtsseitige Ableitung. Die Gleichheit $\frac{2(r_i - \varepsilon)}{\sqrt{r_i - \frac{\varepsilon}{2}}} = \frac{2r_i}{\sqrt{r_i}} + O(\sqrt{\varepsilon})$ erhalten wir mit der Taylorentwicklung um $\varepsilon = 0$. Durch das Ableiten von (4.4) erhalten wir analog

$$D^+ f_j(x + \varepsilon) = D^+ v_j(x + \varepsilon) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{h: b_h - p_h = x} \sqrt{p_h} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0.$$

Aus den beiden Ableitungen können wir folgern, dass

$$\sum_{i: a_i - r_i = x} \sqrt{r_i} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} D^+ h_j(x + \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}) = \sum_{h: b_h - p_h = x} \sqrt{p_h} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} D^+ v_j(x + \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

mit $\varepsilon > 0$ gilt und für $\varepsilon \rightarrow 0$ folgt

$$\sum_{i: C_i \in E(l)} \sqrt{r_i} = \sum_{h: Q_h \in F(l)} \sqrt{p_h}, \quad (4.5)$$

da die beiden Ableitungen $D^+ h_j(x + \varepsilon)$ und $D^+ v_j(x + \varepsilon)$ beschränkt sind.

Wenn ein Kreis D existiert, sodass $D \in \{C_i\} \cap \{Q_h\}$ ist, dann erfüllen $K \cup D$ und $W \cup D$ die Bedingungen von Lemma 4.16 und (i).

Wir argumentieren per Widerspruch und nehmen an, dass $\{C_i\} \neq \{Q_h\}$ gilt. Mit der Bemerkung oben folgt, dass wir

$$\{C_i\} \cap \{Q_h\} = \emptyset \quad (4.6)$$

annehmen können. Sei C ein fester Kreis von $\{C_i\}$ mit Radius r . Sei

$$L(C) = \left\{ l \in \bigcup_{j=1}^m L_j, l \text{ tangential zu } C \right\} \quad \text{und}$$

$$R(C) = \left\{ l \in \bigcup_{j=1}^m R_j, l \text{ tangential zu } C \right\}.$$

Es gilt

$$|L(C)| = |R(C)| = m. \quad (4.7)$$

Nehmen wir an, dass (i) gilt, also $m > n$ ist. Die Geraden in L_j , $j = 1, \dots, m$ sind auch alle tangential an die n Kreise Q_h . Insbesondere sind somit die m Geraden in $L(C)$ auch alle tangential an Kreise Q_h und zwar von der gleichen Seite wie bei C . Mit dem gleichen Argument sind die m Geraden in $R(C)$ auch alle tangential an Kreise Q_h , die auf der gleichen Seite wie C von den Geraden aus liegen. Insgesamt sind also $2m$ viele Geraden tangential an eine Teilmenge von n Kreisen Q_h . Da $m > n$ ist, erhalten wir mittels Schubfachprinzip:

Es existiert wenigstens ein Kreis $Q \in \{Q_h\}$ von den n Kreisen, sodass Q drei der $2m$ Tangenten mit C gemeinsam hat und jede der Tangenten stützt Q und C von der gleichen Seite.

Denn angenommen, jeder der n Kreise wäre maximal an zwei der Geraden tangential, dann könnte es höchstens $2n$ viele Geraden geben, was im Widerspruch zu $m > n$ steht. Von den drei gemeinsamen Tangenten müssen sich mindestens zwei schneiden. Die Mittelpunkte der Kreise müssen auf der Winkelhalbierenden liegen. Auf der Winkelhalbierenden gibt es genau einen Punkt, der gleichweit von allen drei Tangenten entfernt

ist. Damit erhalten wir, dass $Q = C$ ist, was unserer Annahme (4.6) widerspricht. Das beendet den Beweis, wenn (i) gilt.

Wir nehmen nun an, dass (ii) gilt, also $m = n$ und die Menge $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. Aus der obigen mit dem Schubfachprinzip erhaltenen Aussage würde $Q = C$ folgen, was Annahme (4.6) widerspricht. Diese Aussage gilt demnach nicht, sodass jeder Kreis Q_h höchstens zwei Tangenten aus $L(C) \cup R(C)$ mit C gemeinsam hat. Es folgt, dass die Anzahl der Kreise Q_h größer gleich der Hälfte der Anzahl an Tangenten in $L(C) \cup R(C)$, also größer gleich m ist. Da die Anzahl t an Kreisen jedoch per Voraussetzung und Annahme kleiner gleich $n = m$ ist, muss $t = m$ sein. Analog erhalten wir $s = m$ und mit dem Schubfachprinzip folgt:

Jeder der m Kreise Q_h hat exakt zwei von den insgesamt $2m$ Tangenten mit C gemeinsam für jeden Kreis $C \in \{C_i\}$; umgekehrt hat jeder der m Kreise C_i exakt zwei Tangenten mit Q gemeinsam, für jeden Kreis $Q \in \{Q_h\}$.

Denn hätte ein Kreis weniger Tangenten, dann wäre die Anzahl an Tangenten zwangsläufig kleiner als zweimal die Anzahl an Kreisen, also kleiner $2m$, was ein Widerspruch ist. Daraus folgt, dass jede Gerade $l \in L_j$ genau zu einem Kreis $Q \in \{Q_h\}$ und genau einem Kreis $C \in \{C_i\}$ von links tangential ist. Die Summen in (4.5) bestehen damit jeweils nur aus einem Summanden und wir leiten her, dass der Radius von Q gleich dem Radius von C ist. Es ergibt sich, dass alle Kreise C_i und Q_h den gleichen Radius haben.

Sei A die Menge der Mittelpunkte von $\{C_i\}$ und B die von $\{Q_h\}$. Wir wissen, dass für jede Gerade $l \in L_j$ genau ein Punkt aus A und ein Punkt aus B auf der gleichen Seite von l und mit gleichem Abstand zu l existiert. Daraus folgern wir, dass A und B die gleichen X-rays in den Richtungen u_j , $j = 1, \dots, m$, haben. Somit wurde das Problem auf das Problem 4.1 reduziert. Weil die Menge $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist, können wir die Punktmenge eindeutig bestimmen und es folgt, dass $A = B$ gilt. \square

Mit Lemma 4.16 und Theorem 2.32 aus dem zweiten Kapitel erhalten wir das gewünschte Theorem.

Theorem 4.17. *Jede Menge $K \in \tilde{K}_n$ ist eindeutig bestimmt durch ihre X-rays in m Richtungen $u_1, u_2, \dots, u_m \in S^1$, wenn $m \geq n$ ist und die Menge $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist.*

Beweis. Nach Lemma 4.16 sind die Mittelpunkte und Radien der Löcher des Körpers $K \in \tilde{K}_n$ eindeutig bestimmt, wenn $m > n$ ist oder im Fall $m = n$ zusätzlich gilt, dass die Menge $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. Ein konvexer Körper ist nach Theorem 2.32 eindeutig bestimmt, wenn die Menge der Richtungen keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. Zusammen ergeben die Aussagen die Behauptung. \square

Auch für Problem 4.2 verlieren wir die Eindeutigkeit, wenn wir keine *a priori* Grenze für die Anzahl der Löcher haben.

Proposition 4.18. *Sei $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ eine beliebige endliche Menge von Richtungen in einer Ebene. Dann existieren zwei (sich durch ihre Löcher unterscheidenden) verschiedene Mengen $K_1, K_2 \in \tilde{K}_n$, n groß genug, mit den gleichen X-rays in den Richtungen u_i .*

Beweis. Seien F und G wie im Beweis von Korollar 4.13. Es genügt die Mengen K_1 und K_2 zu betrachten, die definiert sind durch

$$K_1 = H \setminus F, \quad K_2 = H \setminus G,$$

wobei H ein konvexer Körper ist, der in seinem Inneren F und G enthält. Dann haben K_1 und K_2 die gleichen X-rays in den Richtungen u_i . \square

Bemerkung 4.19.

Mit dem Vorgehen aus Lemma 2.33 lässt sich auch im Fall von ebenen konvexen Körpern mit disjunkten kreisrunden Löchern eine Eindeutigkeitsaussage für den \mathbb{R}^n zeigen. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper und $B \subset \text{int } K$ eine Menge von disjunkten Kugeln im \mathbb{R}^n , dann ist $K \setminus B$ eindeutig durch die X-rays in den Richtungen $u_1, u_2, \dots, u_m \subset S^1$ bestimmt, wenn $|B| \leq m$ gilt und die Menge $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons ist. Denn schneiden wir $K \setminus B$ mit Ebenen parallel zur linearen Hülle der $u_i, i = 1, \dots, m$, dann erhalten wir konvexe Körper mit kreisrunden disjunkten Löchern, die nach Theorem 4.17 eindeutig bestimmt sind.

Nach den Aussagen dieses Kapitels ist es theoretisch möglich ebene konvexe Körper mit disjunkten kreisrunden Löchern mittels X-rays zu rekonstruieren. In Kapitel 3 haben wir einen Algorithmus implementiert der das Bild eines konvexen Körpers anhand von X-ray-Daten rekonstruiert und auch erste Tests mit zwei konvexen Körpern durchgeführt. Die konvexen Körper in unseren Versuchen stehen in der Praxis für konvexe Löcher in einem Körper. Eine weiterführende Aufgabe wäre die Erweiterung des Algorithmus, sodass sich die konvexen Löcher zusammen mit dem konvexen Körper rekonstruieren lassen.

5. Fazit und Ausblick

Diese Arbeit hatte die numerische Rekonstruktion eines konvexen Körpers zum Ziel, wobei die Daten zur Rekonstruktion mit Röntgenstrahlen (engl. X-rays) ermittelt wurden. Im zweiten Kapitel wurde sich mit der Theorie beschäftigt unter welchen Umständen ein homogener konvexer Körper eindeutig durch parallele X-rays bestimmt ist. Dabei suchten wir nach Richtungen, entlang denen die X-rays aufgenommen wurden und aus denen die Eindeutigkeit eines konvexen Körpers folgt. Um konvexe Körper im \mathbb{R}^n eindeutig zu bestimmen, dürfen die Richtungen keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons sein. Damit diese Eigenschaft erfüllt ist, braucht es mindestens vier Richtungen.

Im dritten Kapitel nutzten wir die theoretischen Erkenntnisse zur numerischen Implementierung. Das Rekonstruktionsproblem ist ein schlecht gestelltes Inverses Problem und wurde in ein Minimierungsproblem mit Regularisierung umgeschrieben, damit sich kleine Messfehler nicht stark auf die Lösung auswirken. Da wir konvexe Körper rekonstruieren wollen, nutzen wir Krümmungsregularisierung, weil Konvexität anhand der Krümmung des Körperandes überprüft werden kann. Schließlich haben wir in Matlab einen Algorithmus geschrieben, um die Rekonstruktionen verschiedener konvexer Körper mit unterschiedlicher Parameterwahl zu berechnen. Die Parameter der Regularisierung im Algorithmus waren nach der Beschaffenheit des Körpers und der Stärke der Messfehler leicht anders zu wählen. Mit wenigen Tests konnten wir die passenden Werte für eine gute Rekonstruktion finden. Selbst bei Daten gewonnen aus nur vier Richtungen, die die theoretische Eindeutigkeitsbedingung erfüllten, zeigten die Ergebnisse den zu rekonstruierenden konvexen Körper recht klar.

Als praktische Anwendung steht hinter der Rekonstruktion konvexer homogener Körper zum Beispiel die Rekonstruktion konvexer Lufteinschlüsse in einem Gussteil. Wollen wir die innere Beschaffenheit des Gussteils überprüfen ohne es dabei zu zerstören, bietet sich eine Röntgendurchstrahlung an. Es könnten sich durchaus mehrere zu rekonstruierende Lufteinschlüsse in einem Gussteil befinden und auch die Rekonstruktion des Gussteils zusammen mit seinen Löchern kann gewünscht sein. Deshalb betrachteten wir nach dem Algorithmus im letzten Kapitel die Theorie zur Rekonstruktion eines ebenen konvexen Körpers mit mehreren disjunkten kreisrunden Löchern an. Die Resultate bauen auf dem zweiten Kapitel auf und wir haben festgestellt: Ein ebener konvexer Körper mit disjunkten kreisrunden Löchern ist eindeutig durch X-rays bestimmt, wenn die Anzahl der Löcher kleiner oder gleich der Anzahl der Richtungen ist, entlang denen die X-rays aufgenommen werden, und die Richtungen keine Teilmenge von Richtungen der Seiten eines affinen regelmäßigen Polygons sind.

Eine weiterführende Aufgabe ist die Erweiterung des Algorithmus aus Kapitel 3, sodass sich auch die im letzten Kapitel vorgestellten konvexen Körper rekonstruieren lassen.

Auch eine Erweiterung auf allgemeinere Körper wäre von Interesse. Es wäre auch spannend den Algorithmus nicht nur an X-ray-Daten und Körpern zu testen, die am Computer erzeugt wurden, sondern Versuche mit Original-Bauteilen durchzuführen. Die Performance des Algorithmus müsste dafür allerdings noch verbessert werden und einzelne 2D-Rekonstruktionen müssten zu einer 3D-Rekonstruktion zusammengefügt werden.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Aigner, G. M. Ziegler, Das BUCH der Beweise, Springer, Berlin 2002.
- [2] G. Bianchi, M. Longinetti, Reconstructing plane sets from projections, *Discrete Comput. Geom.* 5 (1990), 223-242.
- [3] T. Bonnesen, W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Springer, 1934.
- [4] K. Borsuk, Multidimensional Analytic Geometry, Polish Scientific Publishers, Warschau, 1969.
- [5] S. Boyd, L. Vandenberghe, Convex Optimization, Cambridge University Press, 2004.
- [6] A. M. Bruckstein, A. N. Netravali, T. J. Richardson, Epi-convergence of discrete elastica, *Applicable Analysis*, Bob Carroll Special Issue, 79:137-171, 2001.
- [7] H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes, MacMillan, New York, 1963.
- [8] R. J. Gardner, Geometric Tomography, Cambridge Univ. Press, New York, 1995, second ed., 2006.
- [9] R. J. Gardner, P. Gritzmann, Discrete tomography: Determination of finite sets by X-rays, *Trans. Amer. Math. Soc.* 349 (1997), 2271-2295.
- [10] R. J. Gardner, M. Kiderlen, A solution to Hammer's X-ray reconstruction problem, *Adv. Math.* 214 (2007), 323-343.
- [11] R. J. Gardner, P. McMullen, On Hammer's X-ray problem, *J. London Math. Soc.* (2) 21 (1980), 171-175.
- [12] R. M. Gray, Toeplitz and Circulant Matrices: A review, Now Publishers (Neuaufgabe), 2006.
- [13] P. C. Hammer, Problem 2, in: *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. VII: Convexity, Providence, RI, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, pp. 498-499.
- [14] F. Natterer, F. Wübbeling, *Mathematical Methods in Image Reconstruction*, SIAM, Philadelphia, 2001.
- [15] T. Schoenemann, F. Kahl, S. Masnou et al., A linear framework for region-based image segmentation and inpainting involving curvature penalization, *Int. J. Comput. Vis.* 99 (2012), 53-68.

[16] <https://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt> (zuletzt besucht am 03.08.2020)

[17] https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Pascal (zuletzt besucht am 03.08.2020)

A. Algorithmus

Nach dem in Kapitel 3 beschriebenen Vorgehen wurde in Matlab ein Algorithmus geschrieben, der das Bild eines konvexen Körpers anhand von X-ray-Daten mittels Krümmungsregularisierung rekonstruiert. Alle für den Algorithmus benötigten Dateien befinden sich auf der CD, die der Arbeit beigelegt ist, oder sind auf Anfrage verfügbar. Die Datei `Rekonstruktion.m` ist die Hauptdatei, in der sich die veränderbaren Parameter für eine Rekonstruktion festlegen lassen. Diese sind das Bild des zu rekonstruierenden Objekts (`Image`), die Konnektivität der Segmentierung (`konnekt`), die Winkel der Radon-Transformation (`Theta`), die Stärke des Rauschens (`beta`) und die Gewichtung der Längen- und Krümmungsregularisierung (`nu` und `lambda`). Mit den gewählten Werten wird dann die Funktion `Xray_Rekonstruktion.m` aufgerufen. Diese Funktion ruft sieben weitere Funktionen auf, die aufgrund der Übersichtlichkeit ausgelagert wurden. In `Xray_Rekonstruktion.m` erfolgt das Aufstellen des Minimierungsproblems und dessen Nebenbedingungen sowie das Lösen des Problems und das Plotten der Lösung. Die von `Xray_Rekonstruktion.m` in der genannten Reihenfolge aufgerufenen Funktionen sind: Zur Berechnung der Start- und Endpunkte der orientierten Kanten die Funktion `Start_und_Endpunkte.m`, für die Zuordnung welche orientierten Kanten miteinander Kantenpaare bilden und das Abspeichern der Kantenpaare in der richtigen Reihenfolge die Funktion `Kantenpaare.m`, zur Berechnung des Flächeninhalts der Basisregionen die Funktion `Flaeche_Basisregionen.m` und um die Kanten den zugehörigen orientierten Kanten und Basisregionen für die Nebenbedingungen zuzuordnen die Funktionen `Zuordnung_Basisregionen_orientierte_Kanten_Pixel.m`, `Zuordnung_Basisregionen_orientierte_Kanten_Spalten.m`, `Zuordnung_Basisregionen_orientierte_Kanten_Zeilen.m` und `Zuordnung_orientierte_Kanten_Pixel.m`. Als Ausgabe von `Xray_Rekonstruktion.m` erhalten wir drei Bilder: Das Eingabebild, die Rekonstruktion der Basisregionen und die Rekonstruktion der Kantenpaare.

Der CD ist auch das Programm `Xray_Segmentierung.m` beigelegt, das lediglich `Rekonstruktion.m` und `Xray_Rekonstruktion.m` in einer Datei darstellt. Zur leichteren Bedienung wurde `Xray_Segmentierung.m` in die genannten zwei Dateien geteilt, aber die Werte aller Variablen des Algorithmus, bekommen wir nur ausgegeben, wenn wir mit `Xray_Segmentierung.m` arbeiten. Die Implementierung von `Xray_Segmentierung.m` und damit `Xray_Rekonstruktion.m` ist in Kapitel 3.4 noch einmal genauer beschrieben.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit mit dem Titel *Numerische Implementierung geometrischer Tomographie mit Krümmungsregularisierung* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, 3. August 2020

(Farina Bolte)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, 3. August 2020

(Farina Bolte)