WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER
INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE LOGIK UND
GRUNDLAGENFORSCHUNG

Mengenlehre

Vorlesung von

WOLFRAM POHLERS

Sommersemester 1994

Getippt von MARTINA PFEIFER

Vorwort

Der vorliegende Text war die Grundlage einer im Sommersemester 1994 an der Westfälischen Wilhelms-Universität gehaltenen Vorlesung. Es handelt sich hier um eine vorläufige Version, die, um den Abstand zwischen Vorlesung und Erscheinen des Skriptums nicht zu groß werden zu lassen, mit „heißer Nadel“ fertiggestellt wurde. Daher wird der Text sicher noch mit vielen Unzulänglichkeiten behaftet sein. Es ist auch geplant, ihn später noch um einen Abschnitt über das Kontinuum und über große Kardinalzahlen zu ergänzen.
Anregungen, Kritik und Fehlermeldungen sind erwünscht an

pohlers@math.uni-muenster.de

Ich bedanke mich bei allen, die mich bei der Erstellung des Manuskripts unterstützt haben. Insbesondere bei den Hörern der Vorlesung, die wegen der simultanen Erstellung des Skriptums manche Mehrdeutigkeiten in der Bezifferung von Sätzen, Lemmata und Definitionen erdulden mußten.
Mein ganz besonderer Dank gilt aber meiner Sekretärin Frau MARTINA PFEIFER, die das Skript praktisch vorlesungsbegleitend in LaTeX erstellt hat.

Münster, im Juli 1994 W. POHLERS

In der Zwischenzeit liegt eine erste Korrektur und Erweiterung der Vorlesung vor. Hier habe ich insbesondere Herrn stud.math. GYESIK LEE für die Korrektur einer Unzahl kleinerer und größerer Ungenauigkeiten zu danken.

Münster, im November 1994 W. POHLERS

Das Vorlesungsskript hat sich in der Zeit, seit der es verfügbar ist, großen Zuspruchs erfreut und sich offensichtlich als große Hilfe bei Prüfungsvorbereitungen erwiesen. In der nun vorliegenden Form wurde es von Herrn Dipl. Math. INGO LEPPERS nochmals durchgesehen und an etlichen Stellen ergänzt. Für diese sorfältige und mühevolle Arbeit möchte ich mich ganz herzlich bedanken. Darüber hinaus hat er den Text an LaTeX 2_ε angepaßt und so das Layout verbessert.

Münster, im August 1999 W. POHLERS

Inhaltsverzeichnis

1. Vorbemerkungen

Die Mengenlehre hat sich als Sprache der Mathematik in diesem Jahrhundert fest etabliert. Die vorliegende Vorlesung hat es sich zum Ziel gemacht, die in der Mathematik üblicherweise verwendeten mengentheoretischen Begriffe präzise einzuführen und darüber hinaus eine Einführung in das Gebiet der axiomatischen Mengenlehre zu geben.

Die Mengenlehre als eigenständige mathematische Theorie ist noch sehr jung. Zwar hat man seit langem in der Mathematik von Gesamtheiten, Klassen oder ähnlichen Zusammenfassungen gesprochen und auch in Ansätzen versucht, eine Algebra solch abstrakter Gesamtheiten zu entwickeln, die eigentliche Etablierung der Mengenlehre ist jedoch das Werk eines einzelnen Forschers, GEORG CANTOR [*1845, †1918]. Er hat die Mengenlehre als eine Theorie des Unendlichen geschaffen. Das Problem der Unendlichkeit hat Mathematiker (und in vielleicht noch größerem Maße auch Philosophen und Theologen) schon immer beschäftigt. Seit langem hatte man beobachtet, daß im Zusammenhang mit dem Begriff des Unendlichen ein Reihe von Paradoxien auftraten. Eine Zusammenstellung solcher Paradoxien hat BERNARD BOLZANO um 1847 begonnen und 1848 vollendet[1]. Bei aller Tiefe der dort angestellten Beobachtungen wird jedoch klar, daß zu diesem Zeitpunkt keine mathematische Theorie des Unendlichen zur Verfügung stand.

Manche Autoren bezeichnen den 7. Dezember 1873 als den Geburtstag der Mengenlehre. Dieses Datum trägt ein von CANTOR an DEDEKIND gerichteter Brief, in dem er ihm einen Beweis der Tatsache mitteilt, daß es „mehr“ reelle als natürliche Zahlen gibt. Hier wird erstmalig eine präzise Definition des Begriffes „mehr“ im Unendlichen gegeben. Dieser Begriff geisterte schon seit geraumer Zeit herum. Nach LIOUVILLES Entdeckung nicht algebraischer Zahlen hatte man das Gefühl, es gäbe „mehr“ irrationale als rationale Zahlen, wobei der Begriff des Mehrseins kaum zu fassen war, liegen doch die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen. Vorausgegangen waren Untersuchungen CANTORS über die Eindeutigkeit der Darstellbarkeit von Funktionen durch trigonometrische Reihen. Der Ausgangspunkt war ein Theorem von EDWARD HEINE, das besagt, daß sich eine im Intervall $(-\pi, \pi)$ stetige Funktion $f(x)$ in eindeutiger Weise durch eine gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihe

[1] Erschienen 1851 unter dem Titel *Paradoxien des Unendlichen* als nachgelassenes Werk bei Reclam sen. Leipzig.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$

darstellen läßt. Die Frage war, in wie weit sich die Voraussetzungen der Stetigkeit und gleichmäßigen Konvergenz abschwächen ließen. Ohne auf analytische Details einzugehen, wollen wir hier CANTORS Vorgehen kurz skizzieren. Natürlich genügt es, eindeutige Darstellungen der Null

$$0 = C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n + \cdots \tag{1.1}$$

mit $C_0 = \frac{1}{2}d_0$ und $C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx$ zu betrachten. Durch zweimaliges formales gliedweises Integrieren ergibt sich die RIEMANN-Funktion

$$F(x) := C_0 \frac{x \cdot x}{2} - C_1 - \cdots - \frac{C_n}{n^2} - \cdots . \tag{1.2}$$

Bereits RIEMANN hatte in seiner Habilitationsschrift diese Funktion betrachtet und aus deren Eigenschaften Rückschlüsse auf die durch die trigonometrische Reihe dargestellte Funktion gezogen. Insbesondere hängt die Eindeutigkeit der Darstellung in (1.1) von Eigenschaften der in (1.2) definierten Funktion F ab. Ist insbesondere F linear, also $F(x) = cx + c'$, so läßt sich folgern, daß alle Koeffizienten c_n und d_n in den C_n verschwinden müssen.

Man schreibt (1.2) in der Form

$$C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n \sin nx + d_n \cos nx}{n^2} \right) \tag{1.3}$$

und erhält aus Periodizitätsgründen $C_0 = c = 0$. Also ist

$$-c' = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i}{i^2} + R_n \tag{1.4}$$

und man erhält gleichmäßige Konvergenz. Damit durfte man jeden Term in (1.1) mit $\cos n(x-t)dx$ „multiplizieren" und gliedweise integrieren. Daraus ergibt sich $c_n \sin nx + d_n \cos nx = 0$, was endlich $c_n = d_n = 0$ ergibt.

Er erhielt also den folgenden Satz:

Ist eine Funktion f durch eine trigonometrische Reihe gegeben, so gibt es keine weitere trigonometrische Reihe für f, die überall konvergiert.

Mit diesem Ergebnis war CANTOR jedoch nicht zufrieden. In einer im Januar 1871 nachgeschobenen „Notiz" zur Arbeit vom April 1870 stellt er zunächst eine von KRONECKER angeregte Vereinfachung seiner Argumentation vor, daneben bemerkt er, daß endlich viele Ausnahmen in der Konvergenz der Reihe zum Wert $f(x)$ nicht schädlich sind. (Allerdings ergab sich das auch schon aus dem HEINEschen Satz, der nur „fast überall" stetig benötigte). Die entscheidende Verallgemeinerung in der

„Notiz“ bestand jedoch darin, daß er unendlich viele Ausnahmepunkte zulassen durfte, wenn sie nur so verteilt waren, daß in jedem endlichen Intervall immer nur endlich viele dieser Ausnahmepunkte lagen. Obwohl diese Arbeit noch ganz im Stile der damals traditionellen Mathematik lagen, läßt sich hier ein Wendepunkt in CANTORS Denken festmachen. Er betrachtet in dieser Arbeit zum ersten Male Ausnahmemengen. Hier ist eine weitere wesentliche Arbeit zu erwähnen: HERMANN HENKELS 1870 im Universitätsprogramm der Universität Tübingen erschienener Aufsatz „Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen“. In einer 1871 im Zentralblatt publizierten Besprechung dieser Arbeit zeigt sich CANTOR besonders von HENKELS Methode der Kondensation von Singularitäten beeindruckt. Diese eröffnete ihm auch weitere Verallgemeinerungen seines Eindeutigkeitssatzes. Er hatte bereits gezeigt, daß endlich viele Ausnahmepunkte in einem endlichen Intervall nicht störten. Wenn unendlich viele Ausnahmepunkte auftreten, mußten sie sich nach BOLZANO-WEIERSTRASS in einem Punkt x des Intervalles (a, b) häufen. Gibt es nur einen solchen Häufungspunkt, so enthält jedes Teilintervall von (a, x) nur endlich viele Ausnahmepunkte. F mußte also linear auf allen diesen Teilintervallen sein und damit also auch linear auf (a, x). Mit der gleichen Methode lassen sich dann aber auch endlich viele Häufungspunkte der Ausnahmepunkte behandeln. Damit war ebenso der Weg für den Fall offen, daß die Häufungspunkte der Ausnahmepunkte sich einmalig und damit auch endlich oft häuften u.s.f. Doch hier ergaben sich sofort unüberwindliche technische Schwierigkeiten. Die Theorie der transfinit iterierten Prozesse, die hier nötig wurde, war damals eben noch nicht entwickelt. Daneben wurden die zu betrachtenden Punktmengen immer komplexer und CANTOR erkannte, daß nur eine rigorose Theorie der reellen Zahlen weiterhelfen konnte. CANTOR sah ein, daß weitere Fortschritte in der Verallgemeinerung seines Eindeutigkeitssatzes die Bearbeitung grundlegender Probleme in der Theorie der reellen Zahlen voraussetzte.

Er begann mit einer Theorie der Irrationalzahlen. Die rationalen Zahlen setzte er voraus. Er entwickelte den Begriff der Fundamentalfolge (die wir heute oft als CAUCHYfolgen bezeichnen, da sie das CAUCHYsche Konvergenzkriterium erfüllen) und assoziierte mit jeder CAUCHYfolge ihren Grenzwert (den er einfach als ein Zeichen verstand). Er definierte, wann zwei solche Grenzwertzeichen die „Gleichheits“-, „Kleiner-als“- und „Größer-als“-Relation erfüllten und setzte die arithmetischen Operationen auf die Grenzwertsymbole fort. So hat er über dem von ihm A genannten Bereich der rationalen Zahlen einen neuen Bereich B der Grenzwerte geschaffen. In analoger Weise schafft er dann einen neuen Bereich C der Grenzwerte von Fundamentalfolgen von Grenzwerten u.s.f. Er stellt dabei wohl fest, daß zwischen B und C eine eineindeutige Korrespondenz besteht, was zwischen A und B nicht der Fall war. Dennoch legt CANTOR Wert auf die Unterscheidung der neu geschaffenen „Gebiete“ B, C, D,..., die sich durch Iteration seiner Methode ergeben. Er spricht von Zahlengrößen der λ^{ten} Art. Allerdings geht er in dieser Arbeit „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ bewußt nicht weiter auf die Auswirkungen seiner Theorie auf die „Infinitesimalanalysis“ ein. (DEDEKIND bemerkte, daß die reellen Zahlen höherer Arten nichts zur Theorie der reellen Zahlen beitrugen). CANTOR ordnete nun den Punkten der Zahlengeraden die von ihm geschaffenen Zahlengrößen zu, wobei er „axiomatisch“ forderte, daß jeder seiner Zahlengröße auch einem Punkt zu entsprechen habe. Damit stellt er den Bezug zwischen Punkt- und Größenmengen her. Auch hier führt er Mengen höherer Art ein. Dazu definiert er den Begriff des Grenzpunktes (Häufungspunktes). Die Menge P' der Häufungspunkte von P bezeichnet er als deren erste Ableitung. Nun iteriert er die Ableitungen weiter und betrachtete in der zitierten Arbeit nur Fälle, in denen der Ableitungsprozess nach ν-vielen Schnitten zur leeren Menge führt. Solche Mengen nennt er Mengen der ν^{ten} Art und verallgemeinert seinen Eindeutigkeitssatz dann auf Ausnahmemengen ν^{ter} Art. Obwohl diese Arbeit „nur“ endliche Iterationen der Ableitungsprozesse enthält, gilt sie als der Schlüssel zu CANTORS späterer Entwicklung der transfiniten Ordnungszahlen. Diese Entwicklung manifestiert sich in einer Reihe von Artikeln mit dem Titel „Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten“ aus den Jahren 1879 – 1884.

Der Startpunkt zur Mengenlehre war aber die bereits in dem Brief an DEDEKIND angekündigte und 1874 in Crelles Journal erschienene Arbeit „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen“, dessen §2 die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen enthält. Das Problem, das CANTOR für den Rest seines Lebens beschäftigte, war die Frage nach der exakten Größe der Mächtigkeit des Kontinuums der reellen Zahlen. Zunächst war gar nicht klar, daß der Mächtigkeit des Kontinuums überhaupt eine Kardinalzahl – ein Aleph, wie CANTOR es ausdrückte – zukommt. Dies wurde auch mannigfach bezweifelt und wurde erst eigentlich richtig klar, als E. ZERMELO 1904 den Wohlordnungssatz bewies (vgl. Satz 3.6.4). Allerdings wurde dem Beweis mit Skepsis begegnet. Der Grund dafür lag wohl in der Verwendung des Auswahlaxioms (das damals natürlich noch nicht explizit als Axiom formuliert vorlag). Dies und einige Inkonsistenzen (z.B. die RUSSELLsche Klasse), die bereits CANTOR bekannt waren[2], führten zur Notwendigkeit, die Mengenlehre zu axiomatisieren. Eine solche Axiomatisierung wurde zuerst 1908 von ZERMELO angegeben. Später fügten A. FRAEN-

[2]vgl. die Briefe CANTORS an DEDEKIND vom 28. Juli und 28. August 1899

KEL und T. SKOLEM noch das Ersetzungsaxiom hinzu. Doch auch auf der Basis dieser Axiome war (und ist) die Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums nicht zu beantworten. KURT GÖDEL konnte 1938 die relative Konsistenz der Annahme, daß die reellen Zahlen die erste transfinite Kardinalität jenseits der Kardinalität der natürlichen Zahlen besitzen, mit den übrigen Axiomen der Mengenlehre zeigen. Erst 1963 gelang es PAUL COHEN zu zeigen, daß auch die Negation dieser Annahme relativ konsistent zu den übrigen Axiomen der Mengenlehre ist. Damit war klar, daß die Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums auf der Basis des ZERMELO-FRAENKELschen Axiomensystems nicht beantwortet werden kann.

Ziel dieser Vorlesung ist es, neben einer Einführung in die Begriffswelt der Mengenlehre einen Beweis des GÖDELschen Ergebnisses über die relative Konsistenz der Kontinuumshypothese zu geben.

2. Klassen und Mengen

Ziel dieses Kapitels ist es, zu einer Beschreibung der Grundeigenschaften eines idealen mathematischen Universums zu gelangen. Dabei wollen wir zunächst völlig informal vorgehen. Im Verlaufe der Vorlesung wollen wir unsere Betrachtungsweise zunehmend verfeinern.

2.1 Grundbeobachtungen

Wir bezeichnen das mathematische Universum mit $\mathcal{U}$ und vereinbaren die folgenden Redeweisen:

2.1.1 Notationen

(i) Mit $a \in \mathcal{U}$ notieren wir, daß a ein Objekt des Universums ist. Objekte des Universums heißen *Mengen*.

(ii) Gilt $(\forall x)(x \in K \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{U})$, so heißt K eine *Klasse*. Eine Klasse ist also eine „Kollektion" von Mengen. Ist $x \in K$, so heißt x ein *Element* von K.

2.1.2 Definition Sind K_1 und K_2 Klassen, so definieren wir

(Ext) $\quad K_1 = K_2 \;:\Leftrightarrow\; (\forall x)(x \in K_1 \;\Leftrightarrow\; x \in K_2).$

Wir betrachten also die *extensionale Gleichheit* von Klassen.

2.1.3 Transitivität von $\mathcal{U}$ Wir wollen davon ausgehen, daß alle mathematischen Objekte Mengen sind. Gilt also $a \in \mathcal{U}$ und $x \in a$, so soll x wieder eine Menge sein, d.h. wir fordern

(Tran) $\quad a \in \mathcal{U} \wedge x \in a \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{U}.$

In Worten besagt das Transitivitätsaxiom, daß jede Menge auch eine Klasse ist.
Ist Φ eine Eigenschaft, so bilden wir die Klasse

$$\{x \in \mathcal{U} \mid\; \Phi(x)\}.$$

Dabei schreiben wir im allgemeinen kurz

$$\{x \mid\; \Phi(x)\},$$

was ausreichend ist, da alle Objekte Elemente des Universums sind. Wir haben dann das Komprehensionsprinzip

(CA) $a \in \{x|\ \varphi(x)\} \Leftrightarrow a \in \mathcal{U} \wedge \varphi(a).$

Wir wollen an dieser Stelle bemerken, daß nicht jede Klasse auch eine Menge ist. So gilt für die RUSSELLsche Klasse

$$R := \{x|\ x \notin x\}$$

nicht $R \in \mathcal{U}$. Hätten wir nämlich $R \in \mathcal{U}$, so folgte mit *(CA)*

$$R \in R \Leftrightarrow R \notin R,$$

was ein offensichtlicher Widerspruch ist.
Wir führen noch einige Notationen ein:

2.1.4 Notationen

(i) $A \neq B :\Leftrightarrow \neg A = B$

(ii) $\{a_0, \ldots, a_n\} := \{x|\ x = a_0 \vee \cdots \vee x = a_n\}$

(iii) $\emptyset := \{x|\ x \neq x\}$ (leere Klasse)

(iv) $A \cup B := \{x|\ x \in A \vee x \in B\}$ (Vereinigung von A und B)

(v) $A \cap B := \{x|\ x \in A \wedge x \in B\}$ (Durchschnitt von A und B)

(vi) $A \setminus B := \{x|\ x \in A \wedge x \notin B\}$ (Komplement von B in A)

(vii) $\bigcup A := \{x|\ (\exists y \in A)[x \in y]\}$ (Vereinigung über A)

(viii) $\bigcap A := \{x|\ (\forall y \in A)[x \in y]\}$ (Durchschnitt über A)

(ix) $A \subseteq B :\Leftrightarrow (\forall x \in A)[x \in B]$ (Inklusion)

(x) $A \subsetneqq B :\Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$ (echte Inklusion)

2.2 Algebra der Klassen

Für die eben eingeführten Operationen der Vereinigung und des Durchschnittes sowie die Inklusionsrelation lassen sich einfache Rechenregeln entwickeln. Die Klassen bilden eine vollständige „BOOLEsche Algebra“ mit kleinstem Element $\emptyset$ und größtem Element $\mathcal{U}$. Aus den Gesetzen der Aussagenlogik erhalten wir sofort die folgenden Eigenschaften:

2.2.1 Satz

(i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(ii) $A \cup B = B \cup A$

(iii) $A \cup A = A$

Dual dazu erhalten wir

2.2.2 Satz

(i) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(ii) $A \cap B = B \cap A$

(iii) $A \cap A = A$

Alle Behauptungen folgen sofort mit Mitteln der Aussagenlogik.

2.2.3 Satz

(i) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Auch hier ergeben sich die Beweise sofort aus den Gesetzen der Aussagenlogik. Allerdings lassen sich die behaupteten Sachverhalte auch anschaulich gut darstellen.

2.2.4 Satz

(i) $(A \cap B) \cup A = A$

(ii) $(A \cup B) \cap A = A$

2.2.5 Satz

$$A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$$

Beweis:

$\Rightarrow$: $A \cap B = A \cap (A \cup B) = A$ mit den Sätzen 2.2.4 *(ii)* und 2.2.2 *(ii)*

$\Leftarrow$: $A \cup B = (A \cap B) \cup B = B$ mit den Sätzen 2.2.2 *(ii)* und 2.2.4 *(i)*

2.2.6 Satz

(i) $A = B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

(ii) $A \subseteq B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C$

(iii) $A \subseteq A \cup B$

(iv) $A \cap B \subseteq A \wedge A \cap B \subseteq B$

(v) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A \cup B = B \;\Leftrightarrow\; A \cap B = A$

Beweis: *(v)* :

$\Rightarrow$: $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B$

$\Leftarrow$: $x \in A \Rightarrow x \in B.$

2.2.7 Satz

(i) $\emptyset \subseteq A, \ A \subseteq \mathcal{U}$

(ii) $A \cup \emptyset = A, \ A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

(iii) $A \cap \emptyset = \emptyset, \ A \cap \mathcal{U} = A$

(iv) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$

(v) $C \subseteq A \wedge C \subseteq B \Leftrightarrow C \subseteq A \cap B$

2.2.8 Satz

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C \subseteq B \cup C) \wedge (A \cap C \subseteq B \cap C)$$

2.2.9 Definition (Komplement von A)

$$\mathcal{C}(A) := \mathcal{U} \setminus A = \{x | \ x \notin A\}.$$

2.2.10 Satz

(i) $\mathcal{C}(\emptyset) = \mathcal{U}, \ \mathcal{C}(\mathcal{U}) = \emptyset$

(ii) $A \cup \mathcal{C}(A) = \mathcal{U}, \ A \cap \mathcal{C}(A) = \emptyset$

(iii) $\mathcal{C}(\mathcal{C}(A)) = A$ (doppelte Verneinung)

2.2.11 Satz (DE MORGANsche Regeln)

(i) $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$

(ii) $\mathcal{C}(A \cap B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)$

(iii) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$ (Kontraposition)

2.2.12 Satz

(i) $A \setminus B = A \cap \mathcal{C}(B)$

(ii) $A \subsetneqq B \Rightarrow \mathcal{C}(A) \cap B \neq \emptyset$

Die Behauptungen des folgenden Satzes rechnet man einfach nach.

2.2.13 Satz

(i) $(\forall x \in A)[x \subseteq B] \;\Rightarrow\; \bigcup A \subseteq B$

(ii) $(\forall x \in A)[B \subseteq x] \;\Rightarrow\; B \subseteq \bigcap A$

2.3 Relationen und Funktionen

Sind $a, b \in \mathcal{U}$, so können wir die Klasse $\{a, b\}$ bilden. $\{a, b\}$ heißt das *ungeordnete Paar*. Diese Klasse ist so einfach gebildet, daß wir fordern wollen, daß sie wieder eine Menge ist. Dieses Axiom

(Pa) $a \in \mathcal{U} \wedge b \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; \{a, b\} \in \mathcal{U}$

ist als *Paarmengenaxiom* bekannt. Natürlich ist $\{a, b\}$ kein geordnetes Paar, denn nach *(Ext)* ist $\{a, b\} = \{b, a\}$ und $\{a, a\} = \{a\}$. Allerdings sind wir in der Mengenlehre in der glücklichen Lage, das *geordnete Paar* mit Hilfe des ungeordneten Paares definieren zu können. Einem Vorschlag KURATOWSKIS folgend definiert man:

2.3.1 Definition

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Wir zeigen

2.3.2 Lemma

(i) $a \in \mathcal{U} \wedge b \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; (a, b) \in \mathcal{U}$

(ii) $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \;\Leftrightarrow\; a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

Beweis:
(i): ist klar mit *(Pa)*.
(ii): Wir beobachten zunächst

$$\begin{aligned} x = a_i &\Leftrightarrow\; x \in \{a_i\} \;\Leftrightarrow\; x \in \{a_i\} \wedge x \in \{a_i, b_i\} \\ &\Leftrightarrow\; (\forall y)[y \in (a_i, b_i) \;\Rightarrow\; x \in y]. \end{aligned}$$

Gilt $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, so folgt damit

$$\begin{aligned} x = a_1 &\Leftrightarrow\; (\forall y)[y \in (a_1, b_1) \;\Rightarrow\; y \in x] \\ &\Leftrightarrow\; (\forall y)[y \in (a_2, b_2) \;\Rightarrow\; y \in x] \\ &\Leftrightarrow\; x = a_2. \end{aligned}$$

Also ist $a_1 = a_2$, und wir erhalten

$$(a_1, b_1) = (a_1, b_2).$$

Damit gilt

$$\{a_1, b_1\} \in (a_1, b_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, b_2\}\}$$

und analog

$$\{a_1, b_2\} \in \{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\}.$$

Ist $a_1 = b_1$, so folgt $\{a_1, b_2\} \in \{\{a_1\}, \{a_1\}\} = \{\{a_1\}\}$, also $\{a_1, b_2\} = \{a_1\}$, woraus sich $b_2 = a_1 = b_1$ ergibt. Ist $a_1 \neq b_1$, so folgt $\{a_1, b_1\} = \{a_1, b_2\}$ und damit nach (Ext) auch $b_1 = b_2$. $\square$

Ist $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein Term und $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ eine Eigenschaft, so benutzen wir die Notation

$$\{t(\vec{x}\,)|\ \Phi(\vec{x}\,)\} := \{z|\ (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)[z = t(\vec{x}\,) \wedge \Phi(\vec{x}\,)]\}.$$

Ferner verwenden wir

$$\{x \in A|\ \phi(x)\} := \{x|\ x \in A \wedge \phi(x)\}.$$

Für zwei Klassen A und B ist das *kartesische Klassenprodukt* definiert durch:

2.3.3 Definition

$$A \times B := \{(a, b)|\ a \in A \wedge b \in B\}.$$

Natürlich läßt sich dann auch

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U}$$

bilden und es folgt

$$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U},$$

denn für $y \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ist $y = (a, b)$ mit $a, b \in \mathcal{U}$. Dann ist aber $y \in \mathcal{U}$ nach Lemma 2.3.2 *(i)*. Klassen, die Teilklassen von $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ sind, wollen wir als *Klassenrelationen* bezeichnen, rechtseindeutige Klassenrelationen heißen *Klassenfunktionen*. Anstelle von Funktionen sprechen wir oft auch von Abbildungen. Etwas formaler definieren wir:

2.3.4 Definition

(i) $\mathrm{Rel}(R) \;:\Leftrightarrow\; R \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$

(ii) $\mathrm{Fkt}(F) \;:\Leftrightarrow\; \mathrm{Rel}(F) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \Rightarrow y = z]$.

Wir führen die folgenden Notationen ein:

2.3.5 Notationen

(i) $\mathrm{dom}(F) := \{x \mid (\exists y)[(x,y) \in F]\}$ (Definitionsbereich von F)

(ii) $\mathrm{rng}(F) := \{y \mid (\exists x)[(x,y) \in F]\}$ (Bild von F)

(iii) $\mathrm{Feld}(F) := \mathrm{dom}(F) \cup \mathrm{rng}(F)$

(iv) $F \restriction A := F \cap \{(x,y) \mid x \in A\}$

(v) $F[A] := \{y \mid (\exists x \in A)[(x,y) \in F]\}$

(vi) $F \circ G := \{(x,y) \mid (\exists z)[(x,z) \in G \wedge (z,y) \in F]\}$

(vii) $F(a) := \begin{cases} b & \text{falls } a \in \mathrm{dom}(F) \wedge (\forall z)[(a,z) \in F \Rightarrow z = b] \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$

(viii) $F^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in F\}$

(ix) $\mathrm{id}_A := \{(x,x) \mid x \in A\}$

(x) $F\colon A \longrightarrow B \;:\Leftrightarrow\; \mathrm{Fkt}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = A \wedge \mathrm{rng}(F) \subseteq B$

(xi) $F\colon A \xrightarrow{\mathit{auf}} B \;:\Leftrightarrow\; F\colon A \longrightarrow B \wedge \mathrm{rng}(F) = B$ (Surjektion)

(xii) $F\colon A \xrightarrow{1-1} B \;:\Leftrightarrow\; F\colon A \longrightarrow B \wedge \mathrm{Fkt}(F^{-1})$ (Injektion)

(xiii) $F\colon A \longleftrightarrow B \;:\Leftrightarrow\; F\colon A \xrightarrow{\mathit{auf}} B \wedge F\colon A \xrightarrow{1-1} B$ (Bijektion)

2.3.6 Folgerungen *Sei F eine Funktion. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{rng}(F) = \{F(x) \mid x \in \mathrm{dom}(F)\}$

(ii) $F[A] = \{F(x) \mid x \in \mathrm{dom}(F) \wedge x \in A\}$

(iii) $\mathrm{Fkt}(F \restriction A) \wedge \mathrm{dom}(F \restriction A) = A \cap \mathrm{dom}(F)$

(iv) $\mathrm{rng}(F \restriction A) = F[A]$

(v) $(\forall x \in A)[(F \restriction A)(x) = F(x)]$

(vi) $F\colon A \xrightarrow{1-1} B \Rightarrow F\colon A \longleftrightarrow F[A]$

(vii) *Ist $F\colon A \longleftrightarrow B$, so gilt $F^{-1}\colon B \longleftrightarrow A$, $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_B$ und $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_A$*

2.3.7 Lemma *Gilt* $\mathrm{Fkt}(F)$ *und* $\mathrm{Fkt}(G)$*, so folgt*

(i) $\mathrm{Fkt}(F \circ G)$

(ii) $\mathrm{dom}(F \circ G) = \{x \in \mathrm{dom}(G) \mid G(x) \in \mathrm{dom}(F)\}$

(iii) $\mathrm{rng}(F \circ G) = F[\mathrm{rng}(G)]$

(iv) $(F \circ G)(x) = F(G(x))$ *für* $x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$.

2.3.8 Definition Für Klassen $A,\ B$ definieren wir

$$A \sim B \ :\Leftrightarrow\ (\exists F)[F\colon A \longleftrightarrow B].$$

Die Klassen A und B heißen dann *gleichmächtig*. Wir werden sehen, daß der Begriff der Gleichmächtigkeit nur für Mengen sinnvoll wird. Allerdings können wir aus den Axiomen, die wir bisher eingeführt haben, noch gar nicht ersehen, daß es überhaupt Mengen gibt.

2.4 Abschlußaxiome

Wir haben bereits einige Axiome eingeführt, durch die die Ontologie unseres Mengenuniversums festgelegt wird. Dies waren die Axiome der Extensionalität

(Ext) $K_1 = K_2 \ :\Leftrightarrow\ (\forall x)(x \in K_1 \ \Leftrightarrow\ x \in K_2)$,

der Transitivität des Universums

(Tran) $a \in \mathcal{U} \wedge x \in a \ \Rightarrow\ x \in \mathcal{U}$

und die Komprehension

(CA) $a \in \{x \mid \varphi(x)\} \ \Leftrightarrow\ a \in \mathcal{U} \wedge \varphi(a)$.

Neben diesen drei ontologischen Axiomen haben wir bereits ein Abschlußaxiom, nämlich das *Paarmengenaxiom*

(Pa) $a \in \mathcal{U} \wedge b \in \mathcal{U} \ \Rightarrow\ \{a, b\} \in \mathcal{U}$

kennengelernt. Abschlußaxiome garantieren keine Existenz von Mengen in $\mathcal{U}$, sondern beschreiben nur, gegenüber welchen Operationen $\mathcal{U}$ abgeschlossen ist. Neben der Paarbildung kennen wir noch die Klassenoperationen der Vereinigung und des Durchschnittes. Klar ist, daß

$$K \subseteq \mathcal{U} \ \Rightarrow\ \bigcup K \subseteq \mathcal{U} \tag{2.1}$$

gilt. Für $x \in \bigcup K$ haben wir ja ein $y \in K$ mit $x \in y$. Aus $K \subseteq \mathcal{U}$ folgt $x \in \mathcal{U}$ mit *(Tran)*. □

Ebenso gilt

$$K \subseteq \mathcal{U} \ \Rightarrow\ \bigcap K \subseteq \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Nehmen wir nämlich $K = \emptyset$ an, so folgt

$$\begin{aligned} x \in \bigcap K \quad &\Leftrightarrow\; x \in \mathcal{U} \wedge (\forall y \in K)(x \in y) \\ &\Leftrightarrow\; x \in \mathcal{U} \wedge (\forall y)(y \neq y \;\Rightarrow\; x \in y) \\ &\Leftrightarrow\; x \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

d.h. wir haben

$$\bigcap \emptyset = \mathcal{U}. \tag{2.3}$$

Ist $K \neq \emptyset$, so gibt es ein $y \in K$. Für $x \in \bigcap K$ gilt dann aber $x \in y$ und es folgt $x \in \mathcal{U}$ mit *(Tran)*.
Eigentlich müßten wir uns hier klarmachen, daß mit unserer Definition der leeren Klasse jede andere Klasse tatsächlich auch ein Element enthält. Damit überprüfen wir, ob unsere Definition der leeren Klasse auch tatsächlich die intendierte Bedeutung hat. Nun gilt mit dem Extensionaltätsaxiom

$$K \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; (\exists y)(y \in K \wedge y \notin \emptyset) \vee (\exists y)(y \in \emptyset \wedge y \notin K).$$

Da für jedes $y \in \mathcal{U}$ aber $y = y$, d.h. $y \notin \emptyset$ gilt, folgt

$$K \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; (\exists y)(y \in K). \tag{2.4}$$

Übertragen wir (2.1) auf Mengen, so erhalten wir das *Vereinigungsmengenaxiom*

(Vm) $\quad a \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; \bigcup a \in \mathcal{U}.$

Eine Folgerung aus Paar- und Vereinigungsmengenaxiom ist

$$a \in \mathcal{U} \wedge b \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; a \cup b \in \mathcal{U}. \tag{2.5}$$

Zum Beweis überlegen wir uns, daß

$$\begin{aligned} \bigcup \{a, b\} \;&= \{x |\; (\exists y \in \{a, b\})[x \in y]\} \\ &= \{x |\; x \in a \vee x \in b\} \\ &= a \cup b \end{aligned}$$

ist. Dann folgt (2.5) sofort mit *(Pa)* und *(Vm)*. $\square$

Eine weitere Folgerung ist

$$(x, y) \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; x \in \mathcal{U} \wedge y \in \mathcal{U}. \tag{2.6}$$

Der Beweis von (2.6) folgt aus

$$\bigcup (x, y) = \{x\} \cup \{x, y\} = \{x, y\}.$$

Mit $(x, y) \in \mathcal{U}$ ist also nach *(Vm)* $\{x, y\} = \bigcup (x, y) \in \mathcal{U}$ und somit nach *(Tran)* auch $x, y \in \mathcal{U}$.
Allerdings können wir noch nicht einsehen, daß mit $a, b \in \mathcal{U}$ auch deren Durchschnitt $a \cap b \in \mathcal{U}$ ist. Wir wissen zwar, daß $a \cap b \subseteq a$ ist. Teil-

klassen von Mengen sollten sicher auch Mengen sein. Das fordern wir im *Aussonderungsaxiom*

(As) $\quad a \in \mathcal{U} \wedge K \subseteq a \;\Rightarrow\; K \in \mathcal{U}.$

Man beachte, daß für $K = \{x \in a |\; \varphi(x)\}$ das Aussonderungsaxiom die Gestalt

$$a \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; \{x \in a |\; \varphi(x)\} \in \mathcal{U} \tag{2.7}$$

annimmt. Diese Form findet man häufiger. An dieser Stelle ist klar, daß $\mathcal{U}$ selbst keine Menge ist. Wäre dies nämlich der Fall, so erhielten wir mit Aussonderung die RUSSELLsche Klasse

$$R = \{x |\; x \notin x\}$$

als Menge. Wir haben aber schon in Abschnitt 2.1 eingesehen, daß R keine Menge sein kann.
Wenn nun eine Klasse vorliegt, die zu einer Menge gleichmächtig ist, so sollte die Klasse nicht zu kompliziert sein, um selbst als Menge gelten zu können. Dasselbe sollte erst recht gelten, wenn die Mächtigkeit der Klasse in die Mächtigkeit der Menge eingebettet werden kann, d.h. wenn eine Abbildung $F\colon a \xrightarrow{\text{auf}} K$ existiert. Dies läßt sich in der folgenden Form fassen:

(Er) $\quad a \in \mathcal{U} \wedge \mathrm{Fkt}(F) \;\Rightarrow\; F[a] \in \mathcal{U}.$

Dieses Axiom heißt *Ersetzungsaxiom*.
Wir beobachten, daß

$$(Er) \;\Rightarrow\; (As) \tag{2.8}$$

gilt. Ist nämlich $a \in \mathcal{U}$ und $K \subseteq a$, so betrachten wir die Funktion

$$F := \{(x, x) |\; x \in K\}.$$

Mit *(Er)* ist $F[a] \in \mathcal{U}$ und es gilt

$$\begin{aligned} x \in F[a] \;&\Leftrightarrow\; (\exists y \in a \cap \mathrm{dom}(F))[(y, x) \in F] \\ &\Leftrightarrow\; (\exists y \in a \cap K)[(y, x) \in F] \\ &\Leftrightarrow\; x \in K, \end{aligned}$$

d.h. $F[a] = K$. Die Gegenrichtung von (2.8) ist allerdings falsch, wie wir noch einsehen werden (vgl. Korollar 4.2.3).
Jetzt können wir auch zeigen, daß Durchschnitte nicht leerer Klassen immer Mengen sind, d.h.

$$K \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \bigcap K \in \mathcal{U}, \tag{2.9}$$

denn für $y \in K$ ist $\bigcap K \subseteq y$. Mit *(As)* folgt $\bigcap K \in \mathcal{U}$.
Neben dem Ersetzungsaxiom betrachtet man auch das *Kollektionsaxiom*

$$\text{(Kol)}\quad a \in \mathcal{U} \wedge (\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x,y) \Rightarrow (\exists z)(\forall x \in a)(\exists y \in z)\varphi(x,y).$$

Man sieht sofort ein, daß das Ersetzungsaxiom aus dem Kollektionsaxiom zusammen mit dem Aussonderungsaxiom folgt. Ist nämlich $a \in \mathcal{U}$ und F eine Funktion, so bekommen wir mittels *(As)* zuerst $\emptyset \in \mathcal{U}$. Da in 2.3.5 $F(x) = \emptyset$ für alle $x \notin \text{dom}(F)$ gesetzt wurde, ergibt sich

$$a \in \mathcal{U} \wedge (\forall x \in a)(\exists y)[y = F(x)].$$

Mit Kollektion erhalten wir damit ein $z \in \mathcal{U}$ mit

$$(\forall x \in a)(\exists y \in z)[y = F(x)].$$

Mit Aussonderung erhalten wir

$$F[a] = \{y \in z \mid (\exists x \in a \cap \text{dom}(F))[y = F(x)]\} \in \mathcal{U}.$$

Damit haben wir

$$\text{(Kol)} + \text{(As)} \Rightarrow \text{(Er)} \tag{2.10}$$

gezeigt. Die Gegenrichtung scheitert daran, daß wir aus der Voraussetzung

$$(\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x,y)$$

nicht ohne weiteres eine Funktion erhalten. Dazu benötigen wir noch zusätzliche Axiome, die wir erst später bereitstellen werden.
Ein weiteres Abschlußaxiom ist das Potenzmengenaxiom. Dazu definieren wir die Potenzklasse

$$\text{Pow}(K) := \{x \mid x \subseteq K\}$$

und fordern im *Potenzmengenaxiom*

$$\text{(Pm)}\quad a \in \mathcal{U} \Rightarrow \text{Pow}(a) \in \mathcal{U}.$$

Die Potenzmenge $\text{Pow}(a)$ ist „mächtiger" als die Menge a in dem Sinne, daß sich a zwar vermöge $a \mapsto \{a\}$ injektiv in $\text{Pow}(a)$ einbetten läßt, zwischen a und $\text{Pow}(a)$ aber keine Bijektion existieren kann. Nehmen wir nämlich an, wir hätten eine Funktion

$$f\colon a \longleftrightarrow \text{Pow}(a),$$

so sei

$$M := \{x \in a \mid x \notin f(x)\} \in \text{Pow}(a).$$

Für $b := f^{-1}(M)$, das *Urbild von M unter f*, erhalten wir den Widerspruch

$$b \in M \;\Leftrightarrow\; b \notin f(b) = M.$$

Für $x \in a$ und $y \in b$ ist $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \text{Pow}(\text{Pow}(a \cup b))$. Damit folgt

$$a \times b = \{(x, y) \mid\; x \in a \wedge y \in b\} \subseteq \text{Pow}(\text{Pow}(a \cup b)).$$

Mit *(Pm)* und *(As)* erhalten wir daher

$$a, b \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; a \times b \in \mathcal{U}. \tag{2.11}$$

Man kann (2.11) aber auch ohne das Potenzmengenaxiom erhalten (vgl. z.B. [1]).
Wir definieren

$$^{a}b := \{f \mid\; \text{Fkt}(f) \wedge\; \text{dom}(f) = a \wedge\; \text{rng}(f) \subseteq b\}$$

und nennen ^{a}b die *Klasse der Funktionen von a in b*. Mit (2.11) erhalten wir aus dem Aussonderungsaxiom

$$a, b \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; {}^{a}b \in \mathcal{U}, \tag{2.12}$$

denn $^{a}b \subseteq \text{Pow}(a \times b)$. □

Als Folgerung des Ersetzungsaxiomes erhalten wir

$$\text{Fkt}(f) \wedge\; \text{dom}(f) \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{U} \wedge\; \text{rng}(f) \in \mathcal{U}, \tag{2.13}$$

denn mit $\text{dom}(f)$ ist auch

$$\text{rng}(f) = f[\text{dom}(f)] \in \mathcal{U} \text{ und } f \subseteq \text{dom}(f) \times \text{rng}(f). \qquad \square$$

Ebenso haben wir

$$\text{Fkt}(f) \wedge f \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; \text{dom}(f) \in \mathcal{U} \wedge\; \text{rng}(f) \in \mathcal{U}, \tag{2.14}$$

denn wegen $x \in \{x\} \in (x, y)$ und $y \in \{x, y\} \in (x, y)$ haben wir sowohl $\text{dom}(f) \subseteq \bigcup(\bigcup f)$ als auch $\text{rng}(f) \subseteq \bigcup(\bigcup f)$. □

Als Folgerung von (2.13) erhalten wir

$$\text{Fkt}(F) \wedge a \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; F \restriction a \in \mathcal{U}. \tag{2.15}$$

Ganz offensichtlich gilt auch

$$\text{Fkt}(f) \wedge\; \text{Fkt}(g) \wedge f \in \mathcal{U} \wedge g \in \mathcal{U} \;\Rightarrow\; f \circ g \in \mathcal{U}, \tag{2.16}$$

denn wir haben ja $f \circ g \subseteq \text{dom}(g) \times \text{rng}(f)$.

2.5 Mengenexistenzaxiome

Bislang können wir nicht zeigen, daß unser Universum nicht leer ist. Wir haben noch kein Axiom eingeführt, demzufolge eine Menge existiert. Mit dem Aussonderungsaxiom ist jedoch sofort klar, daß, wenn überhaupt eine Menge existiert, die leere Klasse eine Menge ist. Wir haben ja $\emptyset \subseteq K$ für jede Klasse K. Daher wollen wir als einfachstes Mengenexistenzaxiom das *Nullmengenaxiom*

(Nm) $\emptyset \in \mathcal{U}$

einführen. Wir werden sehen, daß damit schon ein gutes Stück Theorie entwickelt werden kann. Ist $\emptyset \in \mathcal{U}$, so haben wir auch $\{\emptyset\} \in \mathcal{U}$, $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{U}$ u.s.f. und sehen, daß wir in die Lage versetzt werden, natürliche Zahlen durch Mengen zu repräsentieren. Wir definieren:

2.5.1 Definition

(i) $\underline{0} := \emptyset$

(ii) $\underline{n+1} := \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$.

Durch Induktion nach der natürlichen Zahl n folgt mit *(Pa)* und *(Vm)*

2.5.2 Lemma *Für alle natürlichen Zahlen n ist $\underline{n} \in \mathcal{U}$.*

Wir erhalten

$$\underline{n} \in \underline{n+1} \tag{2.17}$$

und

$$(\forall n \in \mathbb{N})\mathrm{Tran}(\underline{n}), \tag{2.18}$$

wobei $\mathrm{Tran}(x)$ die Formel $(\forall y \in x)(y \subseteq x)$ abkürzt. Man zeigt (2.18) durch Induktion nach n. Trivialerweise gilt $\mathrm{Tran}(\emptyset)$. Das liefert den Induktionsbeginn. Setzen wir $\mathrm{Tran}(\underline{n})$ voraus und nehmen $x \in y \in \underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$ an, so haben wir $x \in y \in \underline{n}$ oder $x \in y = \underline{n}$. Im ersten Fall folgt $x \in \underline{n} \subseteq \underline{n+1}$ nach Induktionsvoraussetzung, im zweiten Fall direkt. □

Weiter gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\underline{n} \notin \underline{n}). \tag{2.19}$$

Auch (2.19) zeigt man durch Induktion nach n. Den Induktionsbeginn liefert $\emptyset \notin \emptyset$. Setzen wir $\underline{n} \notin \underline{n}$ voraus und nehmen $\underline{n+1} \in \underline{n+1}$ an, so folgt mit (2.17) $\underline{n} \in \underline{n+1} \in \underline{n+1} = \underline{n} \cup \{\underline{n}\}$, d.h. $\underline{n} \in \underline{n+1} \in \underline{n}$

oder $\underline{n} \in \underline{n+1} = \underline{n}$. Mit (2.18) folgt daher aus beiden $\underline{n} \in \underline{n}$, was der Induktionsvoraussetzung widerspricht. $\square$

Durch Induktion nach m erhalten wir aus (2.17) und (2.18) sofort

$$n < m \;\Rightarrow\; \underline{n} \in \underline{m}. \tag{2.20}$$

Um auch die Gegenrichtung von (2.20) zu erhalten, zeigen wir

$$x \in \underline{m} \;\Rightarrow\; (\exists n < m)[x = \underline{n}]. \tag{2.21}$$

durch Induktion nach m.
Für $m = 0$ ist nichts zu zeigen. Ist $x \in \underline{m+1}$, so folgt $x \in \underline{m}$ oder $x = \underline{m}$. Im ersten Fall folgt die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung, im zweiten Fall direkt. $\square$

Gilt nun $\underline{n} \in \underline{m}$ so haben wir ein $k < m$ mit $\underline{n} = \underline{k}$. Mit (2.20) und (2.19) folgt dann aber sofort $k = n$. Also haben wir

$$n < m \;\Leftrightarrow\; \underline{n} \in \underline{m}, \tag{2.22}$$

was zeigt, daß die $<$-Relation auf den natürlichen Zahlen durch die $\in$-Relation auf ihren Repräsentanten repräsentiert wird. Aus (2.22) folgt aber auch

$$n = m \;\Leftrightarrow\; \underline{n} = \underline{m}, \tag{2.23}$$

da die Richtung von links nach rechts trivialerweise gilt und aus $n \neq m$ entweder $\underline{n} \in \underline{m}$ oder $\underline{m} \in \underline{n}$ folgt. Nach (2.19) folgt in beiden Fällen aber $\underline{m} \neq \underline{n}$.
Als Folgerung von (2.23) ergibt sich dann auch

$$\underline{n+1} = \underline{m+1} \;\Rightarrow\; \underline{n} = \underline{m} \tag{2.24}$$

und aus (2.17) folgt auch

$$\emptyset \neq \underline{n+1} \tag{2.25}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist klar, daß die Klasse

$$\underline{\mathbb{N}} = \{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

die PEANOaxiome für die Nachfolgerfunktionen erfüllt. Es ist nun nicht schwer, Repräsentanten für Addition und Multiplikation auf $\underline{\mathbb{N}}$ zu erklären und nachzuweisen, daß die Klasse $\underline{\mathbb{N}}$ dann ein Modell der PEANO-Arithmetik ist. Wir wollen an dieser Stelle aber darauf verzichten, da wir es später in einem allgemeineren Rahmen ausführen werden.

Den Rest des Abschnittes wollen wir der Konstruktion einer Klasse widmen, die sich als Modell der bislang eingeführten Mengenaxiome erweisen wird.

2.5.3 Definition

$$\mathbb{HF}_0 := \emptyset$$
$$\mathbb{HF}_{n+1} := \text{Pow}(\mathbb{HF}_n).$$

Dann gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathbb{HF}_n \in \mathcal{U}), \tag{2.26}$$

was sich sofort durch Induktion nach n ergibt. Weiter beobachten wir, daß

$$\text{Tran}(\mathbb{HF}_n) \Rightarrow \mathbb{HF}_n \subseteq \mathbb{HF}_{n+1} \tag{2.27}$$

gilt. Ist nämlich $x \in \mathbb{HF}_n$, so folgt mit $\text{Tran}(\mathbb{HF}_n)$ auch $x \subseteq \mathbb{HF}_n$, d.h. $x \in \text{Pow}(\mathbb{HF}_n) = \mathbb{HF}_{n+1}$. Mit Hilfe von (2.27) erhalten wir

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\text{Tran}(\mathbb{HF}_n)) \tag{2.28}$$

durch Induktion nach n. $\text{Tran}(\mathbb{HF}_0)$ ist klar. Nehmen wir $\text{Tran}(\mathbb{HF}_n)$ und $x \in y \in \mathbb{HF}_{n+1}$ an, so folgt mit (2.27) $x \in y \subseteq \mathbb{HF}_n \subseteq \mathbb{HF}_{n+1}$. Also ist $x \in \mathbb{HF}_{n+1}$ und wir haben $\text{Tran}(\mathbb{HF}_{n+1})$. $\square$

Aus (2.27) folgt weiter

$$m < n \Rightarrow \mathbb{HF}_m \subseteq \mathbb{HF}_n. \tag{2.29}$$

Man sagt daher, daß die $\mathbb{HF}_n$ eine kumulative Hierarchie bilden. Wir haben sogar etwas mehr, nämlich

$$m < n \Rightarrow \mathbb{HF}_m \in \mathbb{HF}_n. \tag{2.30}$$

Dies ist klar, da wegen $\mathbb{HF}_m \subseteq \mathbb{HF}_m$ bereits $\mathbb{HF}_m \in \text{Pow}(\mathbb{HF}_m) = \mathbb{HF}_{m+1}$ gilt. $\square$

Es sei am Rande bemerkt, daß (2.29) auch aus (2.30) und (2.28) folgt.
Wir wollen nun nachprüfen, daß in der Klasse

$$\mathbb{HF} = \bigcup \{\mathbb{HF}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

der *erblich endlichen Mengen* bereits alle bislang eingeführten Mengenaxiome gelten.
Beginnen wir mit dem *Transitivitätsaxiom*.
Ist $x \in y \in \mathbb{HF}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in y \in \mathbb{HF}_n$. Wegen $\text{Tran}(\mathbb{HF}_n)$ folgt dann $x \in \mathbb{HF}_n$ und damit auch $x \in \mathbb{HF}$.
Zum Nachweis des *Extensionalitätsaxiomes* haben wir

$$K_1 = K_2 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{HF})(x \in K_1 \Leftrightarrow x \in K_2)$$

für $\mathbb{HF}$-Klassen, d.h. für $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{HF}$ zu prüfen. Da K_1 und K_2 beide $\mathbb{HF}$-Klassen sind, folgt sofort

$$(\forall x \in \mathbb{HF})(x \in K_1 \Leftrightarrow x \in K_2) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in K_1 \Leftrightarrow x \in K_2),$$

und dies ist äquivalent zu $K_1 = K_2$ auf Grund des Extensionalitätsaxiomes.

Um die *Komprehension* nachzuprüfen, haben wir für $\{x|\ \varphi(x)\} \subseteq \mathbb{HF}$ die Tatsache

$$a \in \{x|\ \varphi(x)\} \Leftrightarrow a \in \mathbb{HF} \wedge \varphi(a)$$

nachzuweisen. Wegen

$$\{x|\ \varphi(x)\} = \{x|\ x \in \mathbb{HF} \wedge \varphi(x)\}$$

und $\mathbb{HF} \subseteq \mathcal{U}$ folgt aber mit *(CA)*

$$\begin{aligned} a \in \{x|\ \varphi(x)\} &\Leftrightarrow a \in \mathcal{U} \wedge a \in \mathbb{HF} \wedge \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow a \in \mathbb{HF} \wedge \varphi(a). \end{aligned}$$

Zum Nachweis des *Paarmengenaxioms* benötigen wir

$$a, b \in \mathbb{HF} \Rightarrow \{a, b\} \in \mathbb{HF}.$$

Für $a, b \in \mathbb{HF}$ finden wir nach (2.29) aber ein n mit $a, b \in \mathbb{HF}_n$. Damit ist $\{a, b\} \in \mathrm{Pow}(\mathbb{HF}_n)$, d.h. $\{a, b\} \in \mathbb{HF}_{n+1}$.

Ähnlich folgt

$$a \in \mathbb{HF} \Rightarrow \bigcup a \in \mathbb{HF}.$$

Für $a \in \mathbb{HF}_n$ ist $\bigcup a \subseteq \mathbb{HF}_n$, da mit $\mathrm{Tran}(\mathbb{HF}_n)$ jedes $x \in a$ auch Teilmenge von $\mathbb{HF}_n$ ist. Also ist $\bigcup a \in \mathbb{HF}_{n+1}$, und da für alle $x \in \mathbb{HF}$

$$x = \bigcup a \Leftrightarrow \mathbb{HF} \models x = \bigcup a$$

zutrifft, gilt das *Vereinigungsmengenaxiom* in $\mathbb{HF}$.

Wir erhalten auch

$$a \in \mathbb{HF} \Rightarrow \mathrm{Pow}(a) \in \mathbb{HF},$$

denn mit $a \in \mathbb{HF}_n$ folgt $a \subseteq \mathbb{HF}_n$ und damit $\mathrm{Pow}(a) \subseteq \mathbb{HF}_{n+1}$. Damit ist $\mathrm{Pow}(a) \in \mathbb{HF}_{n+2}$ und wir haben die Gültigkeit des *Potenzmengenaxioms* in $\mathbb{HF}$ nachgewiesen.

Anstelle des *Ersetzungsaxioms* prüfen wir etwas allgemeiner die Gültigkeit von Aussonderungs- und Kollektionsaxiom nach.

Das *Aussonderungsaxiom* erhalten wir sofort aus

$$a \in \mathbb{HF}_n \wedge b \subseteq a \Rightarrow b \in \mathbb{HF}_{n+1}.$$

Um das *Kollektionsaxiom* nachzuprüfen benötigen wir einige Vorbemerkungen. Wir definieren:

2.5.4 Definition Eine Menge $a \in \mathcal{U}$ heißt *endlich*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a \sim \underline{n}$ gibt.

Die Endlichkeit einer Menge vererbt sich auf auf deren Teilmengen, d.h. wir haben:

2.5.5 Lemma *Ist $n \in \mathbb{N}$, $a \sim \underline{n}$ und $b \subseteq a$, so ist auch b endlich.*

Beweis: Wir führen Induktion nach n. Für $n = 0$ ist $a = b = \emptyset$. Ist $\underline{n} = \underline{m} \cup \{\underline{m}\}$ und $f \colon a \longleftrightarrow \underline{n}$, so haben wir ein $x \in a$ mit $f(x) = \underline{m}$. Ist $b \subseteq a \setminus \{x\}$, so ist b nach Induktionsvoraussetzung endlich. Anderenfalls ist $b \setminus \{x\}$ nach Induktionsvoraussetzung endlich, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $b \setminus \{x\} \sim \underline{k}$ und wir erhalten sofort $b \sim \underline{k} \cup \{\underline{k}\}$. Also ist b endlich. □

Die Endlichkeit der Potenzmenge einer endlichen Menge ergibt sich aus dem folgenden Lemma.

2.5.6 Lemma *Ist $a \sim \underline{n}$, so ist $\mathrm{Pow}(a) \sim \underline{2^n}$.*

Beweis: Wir führen Induktion nach n. Für $\underline{n} = \emptyset$ ist $a = \emptyset$ und damit $\mathrm{Pow}(a) = \{\emptyset\} = \underline{1}$. Gilt $a \sim \underline{n+1}$, so ist $a \neq \emptyset$ und wir haben ein $y \in a$. Dann ist $a \setminus \{y\} \sim \underline{n}$ und nach Induktionsvoraussetzung $\mathrm{Pow}(a \setminus \{y\}) \sim \underline{2^n}$. Nun ist $\mathrm{Pow}(a) = \mathrm{Pow}(a \setminus \{y\}) \cup \{b \cup \{y\} \mid b \in \mathrm{Pow}(a \setminus \{y\})\}$. D.h. $\mathrm{Pow}(a) = A \cup B$ mit $A \sim B \sim \underline{2^n}$ und $A \cap B = \emptyset$. Damit gilt

$$\mathrm{Pow}(a) \sim \underline{2^n + 2^n} = \underline{2^{n+1}}.$$ □

Definieren wir

$$\mathrm{sexp}(a, 0) := 0$$

und

$$\mathrm{sexp}(a, n+1) := a^{\mathrm{sexp}(a,n)},$$

so erhalten wir:

2.5.7 Lemma *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{HF}_n \sim \underline{\mathrm{sexp}(2, n)}$. Damit ist jedes $a \in \mathbb{HF}$ endlich.*

Beweis: Durch Induktion nach n folgt $\mathbb{HF}_n \sim \underline{\mathrm{sexp}(2, n)}$ sofort aus Lemma 2.5.6. Ist $a \in \mathbb{HF}$, so ist $a \in \mathbb{HF}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und damit $a \subseteq \mathbb{HF}_n$. Nach Lemma 2.5.5 ist aber jede Teilmenge einer endlichen Menge wieder endlich. □

Da $\mathbb{HF}$ eine transitive Klasse ist, sind nach Lemma 2.5.7 auch die Elemente von Elementen von $\mathbb{HF}$ endlich. Daher nennt man $\mathbb{HF}$ die Klasse der *erblich endlichen Mengen*.
Um die Gültigkeit des Kollektionsaxiomes in $\mathbb{HF}$ nachzuweisen, nehmen wir $a \in \mathbb{HF}_n$ und

$$\mathbb{HF} \models (\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x, y)$$

an. Dann haben wir zu jedem $x \in a$ ein $n_x \in \mathbb{N}$ und ein $y_x \in \mathbb{HF}_{n_x}$ mit $\mathbb{HF} \models \varphi(x, y_x)$. Da a endlich ist, können wir $m := \max\{n_x \mid\ x \in a\}$ definieren. Dann gilt

$$(\forall x \in a)(\exists y \in \mathbb{HF}_m)\mathbb{HF} \models \varphi(x, y).$$

Nach (2.30) gilt aber $\mathbb{HF}_m \in \mathbb{HF}$. □

Somit erfüllt $\mathbb{HF}$ alle bisherigen Mengenaxiome. Also ist aus den bisher eingeführten Axiomen auch nicht $\mathbb{HF} \in \mathcal{U}$ abzuleiten. Aus Lemma 2.5.7 folgt aber auch $\mathbb{HF} \sim \underline{\mathbb{N}}$. Damit ist auf der Basis der bisherigen Axiome nicht einzusehen, daß $\underline{\mathbb{N}}$ eine Menge ist. Die Klasse $\mathbb{HF}$ ist also sicherlich zu klein, um dem mathematischen Universum nahekommen zu können. Das Nullmengenaxiom ist daher als Mengenexistenzaxiom nicht ausreichend. Die einfachste Verstärkung ist nun,

$$\underline{\mathbb{N}} \in \mathcal{U} \tag{2.31}$$

zu fordern. Da wir $\underline{\mathbb{N}}$ mit starker Bezugnahme auf unsere intuitive Vorstellung natürlicher Zahlen definiert haben, wollen wir (2.31) eine Form geben, die diesen Bezug überflüssig macht. Wir fordern

(Ue) $\quad (\exists a)[\emptyset \in a \wedge (\forall x \in a)(x \cup \{x\} \in a)]$

und nennen *(Ue)* das *Unendlichkeitsaxiom*, da in ihm die Existenz einer unendlichen Menge gefordert wird.

Wir haben hier ein Beispiel für den Prozeß vorliegen, den wir die „Gewinnung von Axiomen durch Reflexion“ nennen wollen. Dabei gehen wir von der Vorstellung aus, daß das mathematische Universum so groß ist, daß es unbeschreibbar wird. Könnten wir es durch eine Eigenschaft beschreiben, so würde es ja definierbar und damit selbst zum mathematischen Objekt. Also kann es keine Eigenschaft geben, die nur dem Universum zukommt. Jede Eigenschaft des Universums, die wir uns (im Konsens mit unseren Mitmathematikern) vorstellen können, muß daher bereits an einem Objekt des Universums, d.h. an einer Menge reflektiert werden. Da wir davon ausgehen, daß das Universum unbeschränkt ist, ist *(Ue)*, das ja die Existenz einer unbeschränkten Menge fordert, eine Reflexion dieser Vorstellung.

Wir wollen uns nun noch davon überzeugen, daß aus *(Ue)* die Existenz von $\underline{\mathbb{N}}$ folgt. Dazu definieren wir

$$\mathrm{Ind}(K) \;:\Leftrightarrow\; \emptyset \in K \wedge (\forall x \in K)(Sx \in K)$$

wobei wir die Abkürzung

$$Sx := x \cup \{x\}$$

verwendet haben. Wir definieren

$$\omega := \bigcap \{K \mid \ \text{Ind}(K)\}.$$

Dann gilt natürlich

$$(\forall K)(\text{Ind}(K) \ \Rightarrow \ \omega \subseteq K). \tag{2.32}$$

Nach *(Ue)* gibt es aber ein $a \in \mathcal{U}$ mit $\text{Ind}(a)$. Damit haben wir $\omega \subseteq a$ und mit Aussonderung damit auch

$$\omega \in \mathcal{U}. \tag{2.33}$$

Da nach Definition von $\underline{\mathbb{N}}$ schon $\text{Ind}(\underline{\mathbb{N}})$ gilt, haben wir auch

$$\omega \subseteq \underline{\mathbb{N}}. \tag{i}$$

Durch Induktion nach n zeigen wir

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\underline{n} \in \omega).$$

Da wir $\emptyset \in K$ für jedes K mit $\text{Ind}(K)$ haben, folgt $\underline{0} = \emptyset \in \omega$. Aus der Induktionsvoraussetzung $\underline{n} \in \omega$ erhalten wir $\underline{n} \in K$ für jedes K mit $\text{Ind}(K)$. Dann gilt aber auch $S\underline{n} \in K$ für alle solche K und damit auch $\underline{n+1} = S\underline{n} \in \omega$. Also haben wir

$$\underline{\mathbb{N}} \subseteq \omega,$$

woraus mit (i) schließlich

$$\omega = \underline{\mathbb{N}} \tag{2.34}$$

folgt. $\square$

Somit haben wir die Richtung von links nach rechts in

$$\textit{(Ue)} \ \Leftrightarrow \ \underline{\mathbb{N}} \in \mathcal{U} \tag{2.35}$$

gezeigt. Die Gegenrichtung ist klar, da ja $\text{Ind}(\underline{\mathbb{N}})$ nach Definition gilt.
Wir wollen an dieser Stelle anmerken, daß wir das *Prinzip der vollständigen Induktion*, das wir ja bisher von außen in unser Mengenuniversum importiert haben, schon aus den Axiomen der Mengenlehre allein erhalten. Gilt nämlich für eine Klasse K

$$\emptyset \in K \wedge (\forall x)(x \in K \ \Rightarrow \ Sx \in K),$$

so erhalten wir $\text{Ind}(K)$ und damit nach (2.32) $\omega \subseteq K$. D.h. wir haben das Prinzip der ω-Induktion

$$\emptyset \in K \wedge (\forall x \in K)(Sx \in K) \Rightarrow \omega \subseteq K. \tag{2.36}$$

3. Ordinal- und Kardinalzahlen

3.1 Fundierte Relationen

Der besseren Lesbarkeit halber wollen wir für eine Relation R im folgenden oft $x\ R\ y$ anstatt $(x, y) \in R$ schreiben.

3.1.1 Definition Es gelte Rel(R). Wir definieren:

(i) $A \subseteq \mathcal{U}$ heißt R*-transitiv*, falls

$$(\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge y\ R\ x \ \Rightarrow\ y \in A)$$

gilt.

(ii) $\mathrm{TC}_R(A) := \{z \mid (\exists x \in \omega)(\exists f)[f\colon Sx \longrightarrow \mathcal{U} \wedge f(\emptyset) \in A \wedge (\forall y \in x)(f(Sy)\ R\ f(y)) \wedge z = f(x)]\}$

heißt die R*-transitive Hülle von* A.

Man beachte, daß die schon eingeführte Formel Tran(A) besagt, daß A $\in$-transitiv im Sinne von Definition 3.1.1 *(i)* ist. Mit TC(A) bezeichnen wir im allgemeinen die $\in$-transitive Hülle von A. Transitive Hüllen haben interessante Eigenschaften.

3.1.2 Satz *Sei R eine Relation. Dann gilt:*

(i) $A \subseteq \mathrm{TC}_R(A)$ *und* $\mathrm{Tran}_R(\mathrm{TC}_R(A))$*, wobei* $\mathrm{Tran}_R(K)$ *bedeute, daß K eine R-transitive Klasse ist.*

(ii) *Gilt $A \subseteq B$ und* $\mathrm{Tran}_R(B)$*, so ist* $\mathrm{TC}_R(A) \subseteq B$*,*

(iii) $A \in \mathcal{U} \wedge (\forall x)(\{y \mid y\ R\ x\} \in \mathcal{U}) \ \Rightarrow\ \mathrm{TC}_R(A) \in \mathcal{U}$*.*

Beweis: *(i)*: Betrachten wir die Formel

$$\varphi(f, x)\ :\Leftrightarrow\ f\colon Sx \longrightarrow \mathcal{U} \wedge f(\emptyset) \in A \wedge (\forall y \in x)[f(Sy)\ R\ f(y)]$$

und die Klassen

$$B_u := \{f(u) \mid \varphi(f, u)\}.$$

Dann gilt

$$\mathrm{TC}_R(A) = \bigcup_{u \in \omega} B_u \tag{i}$$

und

$$B_\emptyset = A, \tag{ii}$$

denn $B_\emptyset = \{f(\emptyset)|\ f\colon\{\emptyset\} \longrightarrow \mathcal{U} \wedge f(\emptyset) \in A\} \subseteq A$ und für $x \in A$ definieren wir $f := \{(\emptyset, x)\}$. Weiter folgt

$$B_{Su} = \{y|\ (\exists x \in B_u)[y\ R\ x]\}. \tag{iii}$$

Gilt nämlich $a \in B_{Su}$, so ist $a = f(Su)$ mit $\varphi(f, Su)$. Wir haben also $a = f(Su)\ R\ f(u)$ und $(\forall y \in Su)[(f(Sy)\ R\ y) \wedge f(\emptyset) \in A]$. Damit gilt aber sofort $\varphi(f \restriction Su, u)$. Also ist $f(u) = (f \restriction Su)(u) \in B_u$ und wir haben $B_{Su} \subseteq \{y|\ (\exists x \in B_u)[y\ R\ x]\}$.
Für die umgekehrte Inklusion gelte $a\ R\ x$ für ein $x = f(u)$. Wir definieren $g := f \cup \{(Su, a)\}$ und erhalten so $\varphi(g, Su)$ und $g(Su) = a$. Also ist $a \in B_{Su}$. Damit ist (iii) bewiesen.
Ist nun $x\ R\ y \in \mathrm{TC}_R(A)$, so gibt es nach (i) ein $u \in \omega$ mit $x\ R\ y \in B_u$. Nach (iii) ist dann $x \in B_{Su}$ und wieder nach (i) $x \in \mathrm{TC}_R(A)$. Also ist $\mathrm{TC}_R(A)$ R-transitiv.
(ii): Sei $\mathrm{Tran}_R(B)$ und $A \subseteq B$. Durch ω-Induktion nach u zeigen wir

$$B_u \subseteq B. \tag{iv}$$

Für $u = \emptyset$ folgt dies aus (ii) und der Voraussetzung $A \subseteq B$. Zum Induktionsschritt nehmen wir $B_u \subseteq B$ an. Zu $a \in B_{Su}$ gibt es nach (iii) ein $x \in B_u \subseteq B$ mit $a\ R\ x$. Wegen der R-Transitivität von B erhalten wir somit auch $a \in B$.
Nach (i) folgt aus (iv) aber $\mathrm{TC}_R(A) \subseteq B$.
(iii): Wir folgern

$$B_u \in \mathcal{U} \tag{v}$$

durch ω-Induktion nach u. Für $u = \emptyset$ ist $B_\emptyset = A \in \mathcal{U}$. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir $B_u \in \mathcal{U}$. Setzen wir

$$B_{R,x} := \{y|\ y\ R\ x\},$$

so gilt $B_{R,x} \in \mathcal{U}$ für jedes x nach Voraussetzung. Nach (iii) ist $B_{Su} = \bigcup\{B_{R,x}|\ x \in B_u\}$. Mit *(Er)* ist $\{B_{R,x}|\ x \in B_u\} \in \mathcal{U}$, und mit *(Vm)* folgt $B_{Su} \in \mathcal{U}$.
Nach (v) ist nun

$$F := \{(u, B_u)|\ u \in \omega\}$$

eine Funktion mit $\mathrm{dom}(F) = \omega$. Mit *(Er)* ist dann $\{B_u|\ u \in \omega\} \in \mathcal{U}$, und mit (i) und *(Vm)* folgt $\mathrm{TC}_R(A) \in \mathcal{U}$. □

3.1.3 Definition Sei R eine Relation.

(i) Gilt

$$(\forall z)[z \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (\exists x \in z)(\forall y \in z)(\neg y\ R\ x)],$$

so heißt R *fundiert*. Wir notieren dies durch $\mathrm{Fund}(R)$.

(ii) Ist R fundiert und gilt darüber hinaus

$$(\forall x)[\{y|\ y\ R\ x\} \in \mathcal{U}],$$

so heißt R *wohlfundiert*. Wir notieren dies durch $\mathrm{Wf}(R)$.

3.1.4 Satz *Gilt* $\mathrm{Wf}(R)$*, so haben wir das Prinzip der transfiniten Induktion über* R*, d.h. gilt*

$$(\forall x)[(\forall y)(y\ R\ x \;\Rightarrow\; \varphi(y)) \;\Rightarrow\; \varphi(x)],$$

so folgt

$$(\forall x)\varphi(x).$$

Beweis: Sei $a \in \mathcal{U}$. Wir haben $\varphi(a)$ zu zeigen und tun dies indirekt, indem wir $\neg\varphi(a)$ annehmen. Dann betrachten wir die Klasse

$$\overline{a} := \{x|\ x \in \mathrm{TC}_R(\{a\}) \wedge \neg\varphi(x)\}.$$

Wegen $a \in \mathcal{U}$ folgt mit *(Pa)* und Satz 3.1.2 *(iii)* auch $\mathrm{TC}_R(\{a\}) \in \mathcal{U}$. Also ist $\overline{a} \in \mathcal{U}$ mit *(As)*. Wegen $\{a\} \subseteq \mathrm{TC}_R(\{a\})$ ist $a \in \mathrm{TC}_R(\{a\})$. Aus der Annahme $\neg\varphi(a)$ erhalten wir daher $\overline{a} \neq \emptyset$. Wegen $\mathrm{Wf}(R)$ haben wir damit ein $x \in \overline{a}$ so, daß $\neg(y\ R\ x)$ für alle $y \in \overline{a}$ gilt. D.h. wir haben

$$(\forall y)(y\ R\ x \;\Rightarrow\; y \notin \overline{a}).$$

Wegen $x \in \overline{a} \subseteq \mathrm{TC}_R(\{a\})$ folgt aus $y\ R\ x$ ebenfalls $y \in \mathrm{TC}_R(\{a\})$. Wegen $y \notin \overline{a}$ muß daher $\varphi(y)$ gelten. Also haben wir

$$(\forall y)(y\ R\ x \;\Rightarrow\; \varphi(y)).$$

Mit der Voraussetzung des Satzes erhalten wir daher $\varphi(x)$, d.h.

$$x \in \mathrm{TC}_R(\{a\}) \wedge \varphi(x),$$

was aber $x \in \overline{a}$ widerspricht. □

3.1.5 Satz (Rekursion entlang wohlfundierter Relationen) *Seien eine Relation* R *mit* $\mathrm{Wf}(R)$ *und* $G\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ *gegeben. Dann gibt es genau eine Funktion* $F\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ *mit*

$$F(x) = G(F \restriction \{y|\ y\ R\ x\}).$$

Beweis: Zur Abkürzung setzen wir

$$\hat{x} := \{y|\ y\,R\,x\}.$$

Wegen Wf(R) haben wir $\hat{x} \in \mathcal{U}$ für alle $x \in \mathcal{U}$. Um die Existenz der Funktion F zu zeigen, definieren wir die Klasse

$$\begin{aligned} A := \{f|\text{Fkt}(f) \wedge \text{Tran}_R(\text{dom}(f)) \\ \wedge (\forall x \in \text{dom}(f))[f(x) = G(f \restriction \hat{x})]\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Wir setzen

$$F := \bigcup A \tag{3.2}$$

und weisen nach, daß F den Bedingungen des Satzes genügt. Im ersten Schritt zeigen wir

$$f_1, f_2 \in A \wedge x \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2) \ \Rightarrow\ f_1(x) = f_2(x). \tag{i}$$

Zum Nachweis von (i) benutzen wir R-Induktion. Wegen $f_1, f_2 \in A$ haben wir Tran$_R$(dom(f_i)) für $i = 1, 2$. Aus $x \in$ dom$(f_1) \cap$ dom(f_2) folgt daher $\hat{x} \subseteq$ dom$(f_1) \cap$ dom(f_2). Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann aber $f_1 \restriction \hat{x} = f_2 \restriction \hat{x}$. Mit $f_1, f_2 \in A$ folgt daraus

$$f_1(x) = G(f_1 \restriction \hat{x}) = G(f_2 \restriction \hat{x}) = f_2(x).$$

Nun zeigen wir

$$\begin{aligned} \text{Fkt}(F) \wedge\ \text{dom}(F) = \bigcup\{\text{dom}(f)|\ f \in A\} \wedge \text{Tran}_R(\text{dom}(F)) \\ \wedge\ (f \in A \ \Rightarrow\ f = F \restriction \text{dom}(f)). \end{aligned} \tag{ii}$$

Gilt $a \in F$, so gibt es ein $f \in A$ mit $a \in f$. Also ist $a = (x, y)$ und wir haben Rel(F). Ist $(x, y) \in F$ und $(x, z) \in F$, so haben wir $f, g \in A$ mit $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in g$. Nach (i) ist dann aber $y = f(x) = g(x) = z$. Also gilt Fkt(F). Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \text{dom}(F) &\Leftrightarrow\ (\exists y)((x, y) \in F) \\ &\Leftrightarrow\ (\exists y)(\exists f \in A)((x, y) \in f) \\ &\Leftrightarrow\ (\exists f \in A)(x \in \text{dom}(f)) \\ &\Leftrightarrow\ x \in \bigcup\{\text{dom}(f)|\ f \in A\}. \end{aligned}$$

Haben wir $x\ R\ y \in$ dom(F), so gibt es ein $f \in A$ mit $x\ R\ y \in$ dom(f). Wegen Tran$_R$(dom(f)) gilt dann aber auch $x \in$ dom$(f) \subseteq$ dom(F). Also gilt Tran$_R$(dom(F)). Ist schließlich $f \in A$ und $x \in$ dom(f), so ist $F(x) = g(x)$ für ein $g \in A$ mit $x \in$ dom(g). Nach (i) folgt wieder $F(x) = g(x) = f(x)$. Also ist $f = F \restriction$ dom(f).
Als nächstes zeigen wir

$$(\forall x \in \text{dom}(F))[F(x) = G(F \restriction \hat{x})]. \tag{iii}$$

Zu $x \in \mathrm{dom}(F)$ gibt es ein $f \in A$ mit $F(x) = f(x) = G(f \restriction \hat{x}) = G(F \restriction \hat{x})$ nach (ii).
Nun fehlt nur noch

$$\mathrm{dom}(F) = \mathcal{U}. \tag{iv}$$

Dazu zeigen wir

$$(\forall x)[x \in \mathrm{dom}(F)] \tag{v}$$

durch R-Induktion. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir $\hat{x} \subseteq \mathrm{dom}(F)$. Wegen $\mathrm{Tran}_R(\mathrm{dom}(F))$ gilt $TC_R(\hat{x}) \subseteq \mathrm{dom}(F)$. Gilt $x \in TC_R(\hat{x})$, so sind wir fertig. (Man überlegt sich jedoch leicht, daß wegen der Fundiertheit von R dieser Fall gar nicht eintreten kann.) Sei also $x \notin TC_R(\hat{x})$. Wir definieren dann unter Verwendung von *(Er)* $f := F \restriction TC_R(\hat{x}) \cup \{(x, G(F \restriction \hat{x}))\}$ und behaupten

$$f \in A. \tag{vi}$$

Wegen $x \notin TC_R(\hat{x})$ haben wir $\mathrm{Fkt}(f)$. Weiter ist $\mathrm{dom}(f) = TC_R(\hat{x}) \cup \{x\}$. Aus $z \; R \; y \in TC_R(\hat{x}) \cup \{x\}$ folgt aber $z \in TC_R(\hat{x})$. Also ist $\mathrm{dom}(f)$ R-transitiv. Für $y \in \mathrm{dom}(f)$ gilt $\hat{y} \subseteq TC_R(\hat{x})$. Also ist $f \restriction \hat{y} = F \restriction \hat{y}$. Damit folgt für $y \in TC_R(\hat{x})$ schon $f(y) = G(F \restriction \hat{y}) = G(f \restriction \hat{y})$ und für $y = x$ nach Definition $f(x) = G(F \restriction \hat{y}) = G(f \restriction \hat{y})$.
Aus (vi) folgt aber sofort $x \in \mathrm{dom}(F)$. Also folgt (v) und damit (iv).
Mit (ii), (iii) und (iv) haben wir die Existenz der behaupteten Funktion gezeigt.
Zum Eindeutigkeitsbeweis nehmen wir an, daß wir eine weitere Funktion H hätten, die den Bedingungen des Satzes genügt. Wir zeigen dann

$$(\forall x)[F(x) = H(x)]. \tag{vii}$$

durch R-Induktion. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$F \restriction \hat{x} = H \restriction \hat{x} \tag{viii}$$

und damit sofort

$$F(x) = G(F \restriction \hat{x}) = G(H \restriction \hat{x}) = H(x). \qquad \square$$

Von besonderem Interesse sind Wohlordnungen, d.h. wohlfundierte Relationen, die es erlauben, zwei beliebige Elemente ihres Feldes zu vergleichen. Wir führen daher die folgenden Begriffsbildungen ein.

3.1.6 Definition Eine Relation R heißt eine *(lineare) Ordnung*, wenn gilt:

(i) $(\forall x)(\neg x \; R \; x)$ (Irreflexivität)

(ii) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x\ R\ y \wedge y\ R\ z\ \Rightarrow\ x\ R\ z]$ (Transitivität)

(iii) $(\forall x)(\forall y)[x, y \in \text{Feld}(R)\ \Rightarrow\ x\ R\ y \vee x = y \vee y\ R\ x]$ (Linearität).

Ist R eine lineare Ordnung mit $\text{Feld}(R) = A$, so heißt R eine lineare Ordnung auf A.
R heißt eine *Wohlordnung* von A, wenn R eine lineare wohlfundierte Ordnung auf A ist. Wir notieren dies durch $\text{WO}(R)$. Eine Relation R *ordnet* eine Klasse A *wohl*, wenn $R \cap (A \times A)$ eine Wohlordnung von A ist.

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir das folgende Lemma.

3.1.7 Lemma *Wird A durch R wohlgeordnet und ist $B \subseteq A$, so wird auch B durch R wohlgeordnet.*

Beweis: Da $R \cap (A \times A)$ eine lineare Ordnung auf A ist, ist $R \cap (B \times B)$ lineare Ordnung auf B. Ebenso ist klar, daß für $x \in B$ wegen

$$\{y \in B \mid\ y\ R\ x\} \subseteq \{y \in A \mid\ y\ R\ x\} \in \mathcal{U}$$

auch $\{y \in B \mid\ y\ R\ x\} \in \mathcal{U}$ ist. Zum Nachweis der Fundiertheit sei $z \in \mathcal{U}$ mit $z \neq \emptyset$. Wir setzen $\tilde{R} := R \cap (B \times B)$. Ist $z \cap B = \emptyset$, so gilt $\neg y\ \tilde{R}\ x$ für alle $x, y \in z$. Ist $z \cap B \neq \emptyset$, so finden wir wegen $\text{Fund}(R)$ ein $x \in z \cap B$ mit $\neg y\ R\ x$ für alle $y \in z \cap B$. Also gilt $\neg y\ \tilde{R}\ x$ für alle $y \in z$ und wir haben

$$(\exists x \in z)(\forall y \in z)[\neg y\ \tilde{R}\ x]$$

gezeigt. $\square$

3.2 Ordinalzahlen

Wir haben bereits in Abschnitt 2.5 bemerkt, daß sich natürliche Zahlen als Mengen repräsentieren lassen, wobei die $<$-Relation zwischen natürlichen Zahlen durch die $\in$-Relation auf den repräsentierenden Mengen dargestellt wurde. Wir wollen, nachdem wir ω durch das Unendlichkeitsaxiom als Menge zur Verfügung haben, diesen Prozeß ins Unendliche fortsetzen. Wir wollen also über ω hinaus zählen. Eine Menge zu zählen bedeutet, ihre Elemente zu ordnen. Dabei muß die Ordnung so beschaffen sein, daß sie sich zum Zählen eignet. D.h. daß wir, nachdem wir beliebig viele Elemente gezählt haben, genau wissen, welches in der Ordnung das nächste Element ist. Zum Zählen eignen sich daher nur

Wohlordnungen[1]. Wir wollen daher Klassen betrachten, die, ähnlich wie ω, durch die $\in$-Relation wohlgeordnet werden.

3.2.1 Definition

(i) $\mathrm{On} := \{x \mid \mathrm{Tran}(x) \wedge \mathrm{WO}(\{(u,v) \mid u,v \in x \wedge u \in v\})\}$.

(ii) $< := \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \mathrm{On} \wedge \alpha \in \beta\}$.

On heißt die Klasse der *Ordinalzahlen*.
Ordinalzahlen werden **das** Hilfsmittel unserer weiteren Untersuchungen sein. Zunächst studieren wir deren elementare Eigenschaften.

3.2.2 Lemma

(i) $(\forall\alpha\in\mathrm{On})[\alpha = \{x \mid x < \alpha\}]$

(ii) $\mathrm{Tran}(\mathrm{On})$

(iii) $\alpha,\beta \in \mathrm{On} \Rightarrow (\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta)$

(iv) $(\forall\alpha\in\mathrm{On})[\alpha \notin \alpha]$.

Beweis: *(i)*: Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. $\{x \mid x < \alpha\} \subseteq \alpha$ gilt nach Definition der Relation $<$. Ist umgekehrt $x \in \alpha$, so folgt wegen $\mathrm{Tran}(\alpha)$ auch $x \subseteq \alpha$. Somit wird x durch $\in$ wohlgeordnet. Ist $u \in v \in x$, so ist $u, v, x \in \alpha$ und mit der Transitivität von $\in$ auf α folgt $u \in x$. Also gilt auch $\mathrm{Tran}(x)$. Damit ist $x \in \mathrm{On}$ und wir haben $x < \alpha$.
(ii): Ist $x \in \beta \in \mathrm{On}$, so folgt mit *(i)* $x < \beta$ und somit $x \in \mathrm{On}$.
(iii): Seien $\alpha,\beta \in \mathrm{On}$. Wir zeigen zunächst $\Leftarrow$. Für $\alpha = \beta$ gilt $\alpha \subseteq \beta$ und für $a < \beta$ folgt wegen $\mathrm{Tran}(\beta)$ ebenfalls $\alpha \subseteq \beta$.
Für die Gegenrichtung sei $\alpha \subsetneqq \beta$. Dann ist $\emptyset \neq \beta \setminus \alpha \subseteq \beta$. Also besitzt $\beta \setminus \alpha$ ein $\in$-minimales Element γ. Damit ist $\gamma \subseteq \alpha$. Für $\xi \in \alpha$ ist $\xi \neq \gamma \in \beta$. Die Annahme $\gamma \in \xi \in \alpha$ führt zum Widerspruch $\gamma \in \alpha$. Also ist $\xi \in \gamma$ und wir haben auch $\alpha \subseteq \gamma$. Damit ist $\alpha = \gamma \in \beta$, d.h. $\alpha < \beta$.
(iv): Die Annahme $\alpha \in \alpha$ führt mit der Irreflexivität von $\in \cap(\alpha \times \alpha)$ sofort zu dem Widerspruch $\alpha \notin \alpha$. $\square$

3.2.3 Lemma *Ist $K \subseteq \mathrm{On}$ und $K \neq \emptyset$, so ist $\bigcap K \in K$. Insbesondere ist dann $\bigcap K \in \mathrm{On}$.*

Beweis: Wegen $K \neq \emptyset$ gibt es ein $\alpha \in K$. Dann ist $\bigcap K \subseteq \alpha$. Nach Lemma 3.1.7 wird daher $\bigcap K$ durch $\in$ wohlgeordnet. Ist $x \in y \in \bigcap K$, so ist $x \in y \in \alpha$ für alle $\alpha \in K$. Wegen $\mathrm{Tran}(\alpha)$ gilt daher auch

[1] Für eine weitergehende Motivation der Ordinalzahlen siehe z.B. [6].

$x \in \alpha$ für alle $\alpha \in K$, d.h. $x \in \bigcap K$. Damit ist $\bigcap K \in \mathrm{On}$. Wegen $\bigcap K \subseteq \alpha$ für alle $\alpha \in K$ haben wir nach Lemma 3.2.2 (iii) $\bigcap K \leq \alpha$. Nehmen wir $\bigcap K < \alpha$ für alle $\alpha \in K$ an, so erhalten wir $\bigcap K \in \bigcap K$ im Widerspruch zu Lemma 3.2.2 (iv). Also gibt es ein $\alpha \in K$ mit $\bigcap K = \alpha$. □

3.2.4 Satz *Die Klasse* On *wird durch die Relation* $<$ *wohlgeordnet.*

Beweis: Wegen $\alpha \notin \alpha$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ ist $<$ eine irreflexive Ordnung. Aus $\alpha < \beta < \gamma$ folgt wegen $\mathrm{Tran}(\gamma)$ auch $\alpha < \gamma$ und wir sehen, daß $<$ transitiv ist. Zum Nachweis der Linearität wählen wir $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$. Nach Lemma 3.2.3 ist dann $\alpha \cap \beta \in \mathrm{On}$. Sei $\gamma := \alpha \cap \beta$. Wegen $\gamma \subseteq \alpha$ und $\gamma \subseteq \beta$ haben wir $\gamma \leq \alpha$ und $\gamma \leq \beta$ nach Lemma 3.2.2 (iii). Die Annahme $\gamma < \alpha \wedge \gamma < \beta$ führt zu dem Widerspruch $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$. Also ist $\alpha = \gamma \leq \beta$ oder $\beta = \gamma \leq \alpha$.
Es bleibt die Wohlfundiertheit der Relation $<$ zu zeigen. Für $\alpha \in \mathrm{On}$ ist nach Lemma 3.2.2 (i) $\{\beta |\ \beta < \alpha\} = \alpha$. Also ist $\{\beta |\ \beta < \alpha\} \in \mathcal{U}$. Sei nun z eine Menge mit $z \neq \emptyset$. Gilt $z \not\subseteq \mathrm{On}$, so finden wir ein $x \in z$ mit $x \notin \mathrm{On}$. Dann gilt aber für alle $y \in z$ schon $\neg y < x$. Sei daher $z \subseteq \mathrm{On}$. Wegen $z \neq \emptyset$ gilt $\bigcap z \in z$ nach Lemma 3.2.3. Sei $\gamma := \bigcap z$. Für alle $\alpha \in z$ gilt dann $\gamma \subseteq \alpha$, d.h. $\neg \alpha < \gamma$. □

Im Beweis der Fundiertheit der Relation $<$ in Satz 3.2.4, der ja auf Lemma 3.2.3 basierte, spielte es offenbar keine Rolle, daß z eine Menge war. Wir erhalten daher das folgende Korollar.

3.2.5 Korollar *Jede nicht leere Klasse K von Ordinalzahlen enthält eine kleinste Ordinalzahl. Gemäß Lemma 3.2.3 ist diese $\bigcap K$.*

3.2.6 Lemma *Es gilt*

$$K \subseteq \mathrm{On} \wedge \mathrm{Tran}(K) \;\Leftrightarrow\; K = \mathrm{On} \vee K \in \mathrm{On}.$$

Beweis: Nach Lemma 3.2.2 gilt $\mathrm{Tran}(\mathrm{On})$. Damit folgt die Richtung von rechts nach links der obigen Äquivalenz. Für die Gegenrichtung sei K eine transitive Klasse von Ordinalzahlen. Nach Satz 3.2.4 und Lemma 3.1.7 wird K durch $\in$ wohlgeordnet. Nehmen wir $K \neq \mathrm{On}$ an, so erhalten wir ein $\alpha \in \mathrm{On}$ das nicht in K liegt. Für $\xi \in K$ gilt dann $\xi \neq \alpha$ und, da K transitiv ist, auch $\neg \alpha \in \xi$. Also ist $\xi \in \alpha$ und wir haben $K \subseteq \alpha$. Mit *(As)* ist daher $K \in \mathcal{U}$ und damit gilt $K \in \mathrm{On}$. □

3.2.7 Satz *Die Klasse* On *ist keine Menge.*

Beweis: Aus der Annahme $\mathrm{On} \in \mathcal{U}$ folgt mittels Lemma 3.2.2 (ii) und Satz 3.2.4 zu $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$. Dies widerspricht aber Lemma 3.2.2 (iv). □

Als unmittelbare Folgerung ergibt sich nun

3.2.8 Korollar

$$a \in \mathcal{U} \wedge \mathrm{Tran}(a) \wedge a \subseteq \mathrm{On} \;\Rightarrow\; a \in \mathrm{On}.$$

Wir formulieren nun die Sätze 3.1.4 und 3.1.5 für Ordinalzahlen.

3.2.9 Satz (Transfinite Induktion) *Gilt* $(\forall\alpha)[(\forall\eta<\alpha)\psi(\eta) \;\Rightarrow\; \psi(\alpha)]$, *so folgt* $\psi(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \mathrm{On}$.

Zum Beweis wenden wir Satz 3.1.4 auf die Formel

$$\varphi(x) \;:\Leftrightarrow\; x \notin \mathrm{On} \vee \psi(x)$$

an. □

3.2.10 Satz (Transfinite Rekursion) *Zu einer Funktion* $G\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ *gibt es genau eine Funktion* $F\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathcal{U}$*, die der Rekursionsgleichung*

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ *genügt.*

Beweis: Wir wenden Satz 3.1.5 an und erhalten eine Funktion

$$\tilde{F}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$$

mit $\tilde{F}(x) = G(\tilde{F} \restriction \{y \mid\; y < x\})$. Setzen wir $F := \tilde{F} \restriction \mathrm{On}$, so gilt wegen Lemma 3.2.2 (i) $F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$. Die Eindeutigkeit der Funktion F folgt wieder sofort durch transfinite Induktion. □

3.3 Der MOSTOWSKI–Kollaps

3.3.1 Definition Es seien R_1, R_2 Relationen und A, B Klassen. Eine Abbildung $F\colon A \longrightarrow B$ heißt ein R_1–R_2–*Homomorphismus* von A in B, wenn

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)[x \; R_1 \; y \;\Rightarrow\; F(x) \; R_2 \; F(y)]$$

gilt.
Eine Bijektion $F\colon A \longleftrightarrow B$ heißt ein R_1–R_2–*Isomorphismus* von A auf B, wenn F ein R_1–R_2–Homomorphismus von A in B und F^{-1} ein R_2–R_1–Homomorphismus von B in A ist.

Unser Ziel ist es, fundierte Relationen zu kollabieren, wobei eine Kollabierungsfunktion ein R–$\in$–Homomorphismus auf eine lückenlose, d.h. transitive Menge ist. Wir definieren daher:

3.3.2 Definition Sei R eine wohlfundierte Relation. Durch R-Rekursion erhalten wir eine Funktion π_R mit

$$\pi_R(x) := \{\pi_R(y) \mid\ y\ R\ x\}.$$

Die Funktion π_R heißt die *Kollabierungsfunktion* von R. Die wichtigsten Anwendungen haben Kollabierungsfunktionen in der Situation, daß die $\in$–Relation auf einer Klasse A wohlfundiert ist. In diesem Fall schreiben wir kurz π_A anstatt $\pi_{\in\cap(A\times A)}$ und nennen $\pi[A] := \pi_A[A]$ den MOSTOWSKI-*Kollaps* der Klasse A.
Wir wollen nun die Eigenschaft der Kollabierungsfunktion im einzelnen studieren.

3.3.3 Lemma *Sei R eine wohlfundierte Relation mit $A = \mathrm{Feld}(R)$. Es gelten*

(i) $\pi_R\colon A \longrightarrow \pi_R[A]$ *ist ein R–$\in$–Homomorphismus von A auf $\pi_R[A]$. Die Klasse $\pi_R[A]$ ist transitiv und für alle $a \in \pi_R[A]$ gilt $a \notin a$.*

(ii) *Ist R transitiv, so ist $\pi_R[A] \in \mathrm{On}$ oder $\pi_R[A] = \mathrm{On}$.*

(iii) *Ist B transitiv und $\tau\colon A \longrightarrow B$ ein R–$\in$–Isomorphismus, so ist $\tau = \pi_R$.*

(iv) *Ist R extensional, d.h. gilt*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)[\{u \mid\ u\ R\ x\} = \{u \mid\ u\ R\ y\} \ \Rightarrow\ x = y],$$

so ist π_R ein R–$\in$–Isomorphismus.

Beweis: *(i)*: Nach Definition von π_R gilt $\pi_R(x) \in \pi_R(y)$ für $x\ R\ y$. Also liegt ein R–$\in$–Homomorphismus vor, der per definitionem surjektiv ist. Wir zeigen nun die Transitivität von $\pi_R[A]$. Ist $u \in v \in \pi_R[A]$, so haben wir ein $x \in A$ mit $u \in v = \pi_R(x) = \{\pi_R(y) \mid\ y\ R\ x\}$. Also ist $u \in \pi_R[A]$. Um $a \notin a$ für $a \in \pi_R[A]$ zu erhalten, zeigen wir zunächst

$$x\ R\ y \ \Rightarrow\ \pi_R(x) \neq \pi_R(y) \tag{i}$$

durch R-Induktion nach y. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\pi_R(z) \neq \pi_R(x)$ für alle $z\ R\ x$. Also ist $\pi_R(x) \notin \pi_R(x)$, wohl aber $\pi_R(x) \in \pi_R(y)$. Damit gilt $\pi_R(x) \neq \pi_R(y)$. Wäre nun $a \in a$ für ein $a \in \pi_R[A]$, so erhielten wir $a = \pi_R(y)$ für ein $y \in A$ sowie $a = \pi_R(x)$ für ein $x \in A$ mit $x\ R\ y$, was aber (i) widerspräche.
(ii): Wir zeigen

$$a \in A \ \Rightarrow\ \pi_R(a) \in \mathrm{On} \tag{ii}$$

durch R-Induktion. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $\pi_R[\hat{a}] \subseteq \mathrm{On}$, wobei wieder $\hat{a} := \{y|\ y\ R\ a\}$ sei. Ist $u \in v \in \pi_R[\hat{a}]$, so haben wir ein $y\ R\ a$ mit $v = \pi_R(y)$ und somit $u \in \pi_R(y) = \{\pi_R(z)|\ z\ R\ y\}$. Also ist $u = \pi_R(z)$ für ein $z\ R\ a$ und somit $u \in \pi_R[\hat{a}]$. Damit gilt $\mathrm{Tran}(\pi_R[\hat{a}])$ und nach Korollar 3.2.8 dann $\pi_R[\hat{a}] \in \mathrm{On}$. Wegen $\pi_R(a) = \pi_R[\hat{a}]$ ist also $\pi_R(a) \in \mathrm{On}$.
(iii): Sei $a \in A$ und $x \in \tau(a)$. Wegen $\mathrm{Tran}(B)$ folgt $x \in B$ und somit gibt es ein $u \in A$ mit $\tau(u) = x \in \tau(a)$. Da τ^{-1} ein $\in$–R–Homomorphismus ist, folgt $u\ R\ a$. Also ist $\tau(a) \subseteq \tau[\hat{a}]$. Ist $x \in \tau[\hat{a}]$, so gibt es ein $v\ R\ a$ mit $x = \tau(v)$. Dann ist aber $x = \tau(v) \in \tau(a)$. Also ist $\tau(a) = \tau[\hat{a}]$ und τ gehorcht den Rekursionsgleichungen für π_R.
(iv): $\pi_R \colon A \longrightarrow \pi_R[A]$ ist ein surjektiver R–$\in$–Homomorphismus nach *(i)*. Um auch die Injektivität zu erhalten, zeigen wir

$$\pi_R(a) = \pi_R(b) \ \Rightarrow\ a = b$$

durch R-Induktion. Wir haben $\pi_R(a) = \pi_R(b) \ \Leftrightarrow\ \pi_R[\hat{a}] = \pi_R[\hat{b}]$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann aber $\hat{a} = \hat{b}$ und mit der Extensionalität von R schließlich $a = b$. Damit ist π_R eine Bijektion und wir haben uns nur noch davon zu überzeugen, daß π_R^{-1} ein $\in$–R–Homomorphismus ist. Gilt aber $\pi_R(u) \in \pi_R(v)$, so gibt es ein $a\ R\ v$ mit $\pi_R(u) = \pi_R(a)$. Mit der Injektivität von π_R folgt dann aber $u = a$ und damit auch $u\ R\ v$. $\square$

Ist R eine Wohlordnung und gilt $\hat{x} = \hat{y}$, so folgt $x = y$, denn sowohl $x\ R\ y$ als auch $y\ R\ x$ führen zu dem Widerspruch $x \in \hat{y} = \hat{x}$, d.h. $x\ R\ x$ bzw. $y \in \hat{x} = \hat{y}$, d.h. $y\ R\ y$. Also sind Wohlordnungen immer extensional, und wir erhalten aus den Lemmata 3.3.3 und 3.2.6 den folgenden Satz.

3.3.4 Satz *Ist R eine Wohlordnung mit* $\mathrm{Feld}(R) = A$, *so ist π_R ein R–$\in$–Isomorphismus und es gilt entweder* $\pi_R[A] = \mathrm{On}$ *oder* $\pi_R[A] \in \mathrm{On}$. *Es ist* $\pi_R[A] \in \mathrm{On}$ *genau dann, wenn A eine Menge ist.*

Wir nennen $\pi_R[A]$ den *Ordnungstyp* von R und bezeichnen ihn gerne mit $\mathrm{otyp}(R)$. Die Umkehrfunktion $\pi_R^{-1} \colon \mathrm{otyp}(R) \longrightarrow A$ heißt die R-Aufzählungsfunktion von A. Wir bezeichnen sie mit en_R.
Wir werden sehr oft mit der Aufzählungsfunktion arbeiten müssen. Daher ist es nützlich, die folgende Rekursionsformel zur Hand zu haben

$$\mathrm{en}_R(\alpha) = \min{}_R\{x|\ (\forall\beta{<}\alpha)[\mathrm{en}_R(\beta)\ R\ x]\} \ \text{ für } \alpha \in \mathrm{otyp}(R), \quad (3.3)$$

wobei $\min_R$ das Minimum bezüglich der Wohlordnung R bedeutet. Um (3.3) zu beweisen, beobachtet man, daß für $\beta < \alpha$ natürlich $\mathrm{en}_R(\beta)\ R\ \mathrm{en}_R(\alpha)$ gilt. Ist $b \in \mathrm{Feld}(R)$ mit $(\forall\beta{<}\alpha)[\mathrm{en}_R(\beta)\ R\ b]$ und nehmen wir $b\ R\ \mathrm{en}_R(\alpha)$ an, so ist $\pi_R(b) < \alpha$ und daher $b = \mathrm{en}_R(\pi_R(b))\ R\ b$ im Widerspruch zur Irreflexivität von R. $\square$

Ein wichtiger Spezialfall sind Klassen $K \subseteq \mathrm{On}$, die ja durch $<$ wohlgeordnet werden. Gemäß unserer Vereinbarung bezeichnen wir die Kollabierungsfunktion von $< \cap (K \times K)$ kurz mit π_K, den Ordnungstypen mit $\mathrm{otyp}(K)$ und die Aufzählungsfunktion mit en_K. Es ist nach unseren bisherigen Überlegungen klar, daß *echte* Klassen $K \subseteq \mathrm{On}$ den Ordnungstyp On haben, während Mengen $K \subseteq \mathrm{On}$ Ordinalzahlen als Ordnungstyp besitzen.

3.3.5 Lemma *Sei* $A \subseteq \mathrm{On}$ *und* $\mathrm{Tran}(A)$. *Ist* $f\colon A \longrightarrow \mathrm{On}$ *ordnungstreu, d.h. ein* $<$*–*$<$*–Homomorphismus, so gilt* $\alpha \le f(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in A$.

Beweis: Nehmen wir $\{\alpha \in A \mid f(\alpha) < \alpha\} \neq \emptyset$ an. Sei α_0 das minimale Element. Dann gilt $f(\alpha_0) < \alpha_0 \in A$. Also auch $f(\alpha_0) \in A$ und es folgt $f(f(\alpha_0)) < f(\alpha_0)$ im Widerspruch zur Minimalität von α_0. □

Als Korollar zu Lemma 3.3.5 erhalten wir

3.3.6 Korollar *Ist* $K \subseteq \mathrm{On}$ *transitiv, so gilt* $\alpha \le \mathrm{en}_K(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \mathrm{otyp}(K)$.

3.4 Grundzüge der Theorie der Ordinalzahlen

Offenbar ist die leere Menge eine transitive, durch $\in$ wohlgeordnete Menge. Somit gibt es mindestens eine Ordinalzahl. Ziel dieses Abschnittes ist es, die elementaren Eigenschaften von Ordinalzahlen zu untersuchen.

3.4.1 Lemma

(i) $\emptyset \in \mathrm{On}$

(ii) $\alpha \in \mathrm{On} \Rightarrow S\alpha \in \mathrm{On}$

(iii) $\alpha \in \mathrm{On} \land \alpha < \beta \Rightarrow S\alpha \le \beta$

Beweis: *(i)*: Wir haben bereits bemerkt, daß $\emptyset \in \mathrm{On}$ gilt. In Zukunft schreiben wir kurz 0 statt $\emptyset$, wenn wir die Ordinalzahl meinen.
(ii): Aus $\alpha \in \mathrm{On}$ folgt $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \mathrm{On}$. Da $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathcal{U}$ gilt, folgt $S\alpha \in \mathrm{On}$ wegen $\mathrm{Tran}(S\alpha)$ aus Korollar 3.2.8.
(iii): Ist $\alpha \in \mathrm{On}$ und $\alpha < \beta$, so ist $S\alpha \subseteq \beta$. Nach Lemma 3.2.2 *(iii)* folgt daher $S\alpha \le \beta$. □

Wegen $\alpha < S\alpha$ ist nach Lemma 3.4.1 *(iii)* $S\alpha$ die kleinste Ordinalzahl, die größer als α ist. Wir nennen $S\alpha$ den *Nachfolger* von α. Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß es außer 0 noch andere Ordinalzahlen gibt, die nicht Nachfolger einer Ordinalzahl sind.

3.4.2 Satz $\omega \in \mathrm{On}$.

Beweis: Aus Lemma 3.4.1 *(i)* und *(ii)* folgt mit (2.36), d.h. ω-Induktion, $\omega \subseteq \mathrm{On}$. Wegen (2.33) haben wir $\omega \in \mathcal{U}$. Es bleibt $\mathrm{Tran}(\omega)$ zu zeigen. Dazu zeigen wir

$$x \in y \in \omega \;\Rightarrow\; x \in \omega$$

durch ω-Induktion nach y. Für $y = 0$ ist nichts zu zeigen. Gilt $x \in Sy \in \omega$, so haben wir entweder $x \in y \in \omega$ und $x \in \omega$ nach Induktionsvoraussetzung oder $x = y \in \omega$. Also gilt $\mathrm{Tran}(\omega)$ und mit Korollar 3.2.8 folgt $\omega \in \mathrm{On}$. $\square$

3.4.3 Definition Sei $\alpha \in \mathrm{On}$.

(i) Gibt es ein $\beta \in \mathrm{On}$ mit $\alpha = S\beta$, so heißt α eine *Nachfolgerzahl*.

(ii) Ist $\alpha \neq 0$ und α keine Nachfolgerzahl, so heißt α eine *Limeszahl*.

Wir definieren

$$\mathrm{Lim} := \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \ \alpha \text{ ist Limeszahl}\}.$$

3.4.4 Lemma *Wir haben* $\alpha \in \mathrm{Lim}$ *genau dann, wenn* $\alpha \neq 0$ *ist und* $(\forall \beta < \alpha)(S\beta < \alpha)$ *gilt.*

Beweis: Sei $\alpha \in \mathrm{Lim}$ und $\beta < \alpha$. Dann ist $S\beta < \alpha$. Die Gegenrichtung folgt unmittelbar aus der Definition. $\square$

3.4.5 Satz $\omega \in \mathrm{Lim}$ *und für alle* $\beta < \omega$ *gilt* $\beta \notin \mathrm{Lim}$.

Beweis: Es ist $\omega \neq 0$ und für $\alpha < \omega$ gilt $S\alpha < \omega$. Also ist $\omega \in \mathrm{Lim}$ nach Lemma 3.4.4. Für $\beta \in \mathrm{Lim}$ gilt nach 3.4.4 $\mathrm{Ind}(\beta)$. Also ist $\omega \subseteq \beta$, d.h. $\omega \leq \beta$. $\square$

Ist nun $a \subseteq \mathrm{On}$ mit $a \in \mathcal{U}$, so gilt offenbar $\bigcup a \subseteq \mathrm{On}$ und $\mathrm{Tran}(\bigcup a)$, denn für $x \in y \in \bigcup a$ gibt es ein $\xi \in a$ mit $x \in y \in \xi \in a$. Also ist $x \in \xi \in a$, d.h. $x \in \bigcup a$. Damit ist nach Korollar 3.2.8 $\bigcup a \in \mathrm{On}$. Wegen $\alpha \subseteq \bigcup a$ für alle $\alpha \in a$ haben wir $\alpha \leq \bigcup a$, d.h. $\bigcup a$ ist eine obere Schranke für alle $\alpha \in a$. Gilt andererseits $\alpha \subseteq \beta$ für alle $\alpha \in a$, so folgt sofort $\bigcup a \subseteq \beta$, d.h. $\bigcup a \leq \beta$. Damit ist $\bigcup a$ ist die kleinste obere Schranke für alle Ordinalzahlen in a. Dies ist die duale Beobachtung zu Korollar 3.2.5, in dem wir festgehalten haben, daß die größte untere Schranke einer Klasse K von Ordinalzahlen durch $\bigcap K$ definiert wird. Wir definieren daher:

3.4.6 Definition Sei $K \subseteq \mathrm{On}$.

(i) $\sup K := \bigcup K$

(ii) $\inf K := \bigcap K$

Anstelle von $\inf K$ verwenden wir oft synonym $\min K$.
Wie wir bereits gesehen haben gilt:

3.4.7 Lemma *Sei* $K \subseteq \mathrm{On}$.
Ist $K \in \mathcal{U}$*, so ist* $\sup K \in \mathrm{On}$ *und es gilt*

(i) $(\forall \alpha \in K)(\alpha \leq \sup K)$

(ii) $(\forall \alpha \in K)(\alpha \leq \beta) \Rightarrow \sup K \leq \beta$

Ist $K \neq \emptyset$*, so ist* $\inf K \in \mathrm{On}$ *und es gilt*

(iii) $(\forall \alpha \in K)(\inf K \leq \alpha)$

(iv) $(\forall \alpha \in K)(\beta \leq \alpha) \Rightarrow \beta \leq \inf K$.

Eine Umformulierung der Definition von $\sup K$ liefert

$$\alpha < \sup K \Leftrightarrow (\exists \beta \in K)(\alpha < \beta). \tag{3.4}$$

3.4.8 Lemma *Es gelten:*

(i) α *ist Nachfolgerzahl* $\Leftrightarrow \alpha = S(\sup \alpha)$.

(ii) $\alpha \in \mathrm{Lim} \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \wedge \alpha = \sup \alpha$.

(iii) $a \in \mathcal{U} \wedge a \subseteq \mathrm{On} \wedge a \neq \emptyset \wedge \sup a \notin a \Rightarrow \sup a \in \mathrm{Lim}$.

Beweis: *(i)*: Ist $\alpha = S\beta$, so ist

$$\begin{aligned}\bigcup \alpha &= \bigcup(\beta \cup \{\beta\}) \\ &= \{y \mid (\exists \xi \in \beta)[y \in \xi] \vee y \in \beta\} = \bigcup \beta \cup \beta = \beta,\end{aligned}$$

da wegen $\mathrm{Tran}(\beta)$ bereits $\bigcup \beta \subseteq \beta$ gilt. Also $\alpha = S(\sup \alpha)$. Die Gegenrichtung ist trivial.
(ii): Sei zunächst $\alpha \in \mathrm{Lim}$. Dann ist $\alpha \neq \emptyset$ und α keine Nachfolgerzahl. Nun ist wegen $\mathrm{Tran}(\alpha)$ aber $\sup \alpha = \bigcup \alpha \subseteq \alpha$, d.h. wir haben mit Lemma 3.4.7 $\sup \alpha \leq \alpha$. Wegen $\alpha \in \mathrm{Lim}$ zieht die Annahme $\sup \alpha < \alpha$ daher $S(\sup \alpha) < \alpha$ nach sich, was zu dem Widerspruch $\sup \alpha < \sup \alpha$ führt.
Sei nun $\alpha \neq 0$ und $\alpha = \sup \alpha$. Zu $\beta < \alpha$ gibt es dann ein $\xi < \alpha$ mit $\beta < \xi$. Also ist $S\beta \leq \xi < \alpha$ und es gilt $\alpha \in \mathrm{Lim}$ nach Lemma 3.4.4.
(iii): Sei $a \in \mathcal{U}$, $a \subseteq \mathrm{On}$, $a \neq 0$ und $\sup a \notin a$. Nach Lemma 3.4.7 haben wir $\sup a \in \mathrm{On}$. Also gilt $\sup(\sup a) \subseteq \sup a$. Ist $\xi \in \sup a$,

so finden wir ein $\eta \in a$ mit $\xi < \eta$. Dann ist $\eta \leq \sup a$ und wegen $\sup a \notin a$ sogar $\eta \in \sup a$ und es folgt $\xi \in \bigcup(\sup a) = \sup(\sup a)$. Also ist $\sup(\sup a) = \sup a$ und wir erhalten $\sup a \in \mathrm{Lim}$ nach *(ii)*. □

Damit kennen wir nun drei Typen von Ordinalzahlen

- Die Ordinalzahl 0
- Nachfolgerordinalzahlen
- Limeszahlen

Gemäß dieser Unterscheidung lassen sich die Prinzipien der transfiniten Induktion und Rekursion umformulieren.

3.4.9 Satz (Transfinite Induktion) *Gelten* $\varphi(0)$, $(\forall\alpha)(\varphi(\alpha) \to \varphi(S\alpha))$ *und* $(\forall\lambda \in \mathrm{Lim})[(\forall\xi < \lambda)(\varphi(\xi) \to \varphi(\lambda))]$, *so gilt auch* $(\forall\alpha)\varphi(\alpha)$.

Beweis: Nehmen wir $\{\alpha \mid \neg\varphi(\alpha)\} \neq \emptyset$ an, so gibt es laut Korollar 3.2.5 ein kleinstes α mit $\neg\varphi(\alpha)$. Dann ist $\alpha \neq 0$ und α keine Nachfolgerzahl. Aber auch $\alpha \in \mathrm{Lim}$ führt zum Widerspruch, da dann $(\forall\xi < \alpha)\varphi(\xi)$ und somit nach Voraussetzung auch $\varphi(\alpha)$ gilt. □

3.4.10 Satz (Transfinite Rekursion) *Zu* $a \in \mathcal{U}$ *und* $G, H\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ *gibt es genau eine Funktion* $F\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathcal{U}$ *mit*

$$\begin{aligned} &F(0) = a \\ &F(S\alpha) = G(F(\alpha)) \\ &F(\lambda) = H(F \restriction \lambda) \qquad \textit{für } \lambda \in \mathrm{Lim}. \end{aligned}$$

Beweis: Sei

$$\tilde{G}(f) := \begin{cases} G(f(\alpha)) & \text{falls } \mathrm{dom}(f) = S\alpha \\ H(f) & \text{falls } \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{Lim} \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch transfinite Rekursion (alter Art) erhalten wir eine Funktion

$$F\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathcal{U}$$

mit $F(\alpha) = \tilde{G}(F \restriction \alpha)$. Ist also $\alpha = 0$, so gilt $F(0) = \tilde{G}(F \restriction 0) = a$. Im Nachfolgerfall ist $F(S\alpha) = \tilde{G}(F \restriction S\alpha) = G(F(\alpha))$, und im Limesfall ist schließlich $F(\lambda) = \tilde{G}(F \restriction \lambda) = H(F \restriction \lambda)$.
Die Eindeutigkeit der Funktion F zeigt man leicht durch transfinite Induktion. □

Der wichtigste Spezialfall der in Satz 3.4.10 eingeführten Form der transfiniten Rekursion ist der, daß im Limesfall $F(\lambda) = \sup\{F(\xi) \mid \xi < \lambda\}$ gefordert wird.

Als Beispiele für Definitionen durch transfinite Rekursion wollen wir die Grundfunktionen der Ordinalzahlarithmetik, Addition, Multiplikation und Exponentiation, einführen. Allerdings wollen wir uns hier nicht tiefer auf Ordinalzahlarithmetik einlassen. Einige ihrer Grundzüge werden in den Übungen dargestellt.

3.4.11 Definition Wir definieren $\alpha+\beta$ durch die Rekursionsgleichungen

$$\begin{aligned}
&\alpha + 0 := \alpha\\
&\alpha + S\beta := S(\alpha + \beta)\\
&\alpha + \lambda := \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \lambda\} \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim}.
\end{aligned}$$

3.4.12 Definition Die Multiplikation $\alpha \cdot \beta$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot 0 := 0\\
&\alpha \cdot S\beta := (\alpha \cdot \beta) + \alpha\\
&\alpha \cdot \lambda := \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \lambda\} \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim}.
\end{aligned}$$

3.4.13 Definition Die Ordinalzahlexponentiation ist definiert durch

$$\begin{aligned}
&\alpha^0 := S0\\
&\alpha^{S\beta} := \alpha^\beta \cdot \alpha\\
&\alpha^\lambda := \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \lambda\} \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim}.
\end{aligned}$$

Man sieht, daß wir im Prinzip die aus der Zahlentheorie (d.h. auf ω) bekannten Funktionen nur „stetig“ fortgesetzt haben.

Stetig heißt hier stetig im Sinne der Ordnungstopologie auf den Ordinalzahlen, die von den offenen Ordinalzahlintervallen $(\alpha, \beta) = \{\xi \mid \alpha < \xi < \beta\} \cup \{0\}$ erzeugt wird.

Allerdings muß man dabei beachten, daß einige der gewohnten Eigenschaften dieser Funktionen im Unendlichen verloren gehen. So ist beispielsweise die Addition ebenso wie die Multiplikation nicht mehr kommutativ. Um dies einzusehen, zeigt man durch ω-Induktion die Aussage

$$n < \omega \wedge m < \omega \;\Rightarrow\; n + m < \omega. \tag{3.5}$$

Daraus folgt z.B. mit $1 := S0$

$$1 + \omega = \sup\{1 + n \mid n < \omega\} = \omega,$$

wohingegen

$$\omega < S\omega = \omega + 1$$

gilt. Damit ist auch klar, daß die Addition nicht linksmonoton sein kann, denn aus $0 < 1$ folgt mitnichten $0 + \omega < 1 + \omega$, da $0 + \omega = 1 + \omega = \omega$ ist. Was jedoch gilt, ist die strikte Rechtsmonotonie, d.h.

$$\beta < \gamma \ \Rightarrow \ \alpha + \beta < \alpha + \gamma. \tag{3.6}$$

Dies läßt sich recht einfach durch Induktion nach γ einsehen. Wir wollen – einfach um die Methode zu demonstrieren – hier einen anderen Weg einschlagen, um (3.6) einzusehen.

3.4.14 Lemma *Die Funktion* $\lambda\xi\,.\,\alpha + \xi := \{(\xi, \alpha + \xi) \mid \xi \in \mathrm{On}\}$ *ist die Aufzählungsfunktion der Klasse* $\{\beta \in \mathrm{On} \mid \alpha \leq \beta\}$.

Beweis: Die Aufzählungsfunktion von $\{\beta \in \mathrm{On} \mid \alpha \leq \beta\}$ bezeichnen wir für diesen Beweis mit f und zeigen

$$f(\xi) = \alpha + \xi \tag{i}$$

durch Induktion nach ξ.
Es ist $f(0) = \alpha = \alpha + 0$. Mit (3.3) folgt $f(S\eta) = \min\{\zeta \mid f(\eta) < \zeta\} = S(f(\eta)) = S(\alpha + \eta) = \alpha + S\eta$. Für $\lambda \in \mathrm{Lim}$ erhalten wir schließlich $f(\lambda) = \min\{\zeta \mid (\forall \mu < \lambda)[f(\mu) < \zeta]\}$. Damit ist $\sup\{f(\mu) \mid \mu < \lambda\} \leq f(\lambda)$ und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$f(\lambda) \geq \sup\{\alpha + \mu \mid \mu < \lambda\} = \alpha + \lambda. \tag{ii}$$

Andererseits gilt aber

$$\alpha + \lambda > \alpha + \mu = f(\mu)$$

für alle $\mu < \lambda$, woraus

$$f(\lambda) \leq \alpha + \lambda \tag{iii}$$

folgt. Mit (ii) und (iii) ist $\alpha + \lambda = f(\lambda)$. □

Da die Aufzählungsfunktion ein $<$–$<$-Isomorphismus ist, sie somit eine ordnungstreue Funktion ist, folgt (3.6) sofort aus Lemma 3.4.14.
Eine weitere Folgerung ist

3.4.15 Korollar *Zu* $\alpha \leq \beta$ *gibt es genau eine Ordinalzahl* η *mit* $\alpha + \eta = \beta$. *Man bezeichnet diese Ordinalzahl manchmal mit* $-\alpha + \beta$.

3.5 Kardinalzahlen

Wir haben bereits in Definition 2.3.8 die Gleichmächtigkeit von Klassen eingeführt. Wir wollen nun versuchen, Mächtigkeiten durch Ordinalzahlen zu messen. Dazu definieren wir

3.5.1 Definition

$$|A| := \inf\{\alpha \in \mathrm{On} \mid A \sim \alpha\}.$$

Wir wollen natürlich gerne einsehen, daß die Funktion $|\ |$ für alle $a \in \mathcal{U}$ eine Ordinalzahl ergibt. Allein, das kann auf der Basis der bisher eingeführten Axiome noch nicht gezeigt werden. Klar ist hingegen, daß $|\ |$ auf allen Ordinalzahlen definiert ist. Die Fixpunkte der Funktion $|\ |\restriction \mathrm{On}$ heißen *Kardinalzahlen*. Wir bezeichnen die Klasse der Kardinalzahlen mit Card. Wir setzen also:

$$\mathrm{Card} := \{\alpha \in \mathrm{On} \mid\ |\alpha| = \alpha\}.$$

Eine Kardinalzahl wird durch die Eigenschaft charakterisiert, daß sie sich nicht bijektiv auf kleinere Ordinalzahlen abbilden läßt. Offensichtlich gilt immer

$$|\alpha| \leq \alpha. \tag{3.7}$$

Die Funktion $|\ |\restriction \mathrm{On}$ ist schwach monoton, d.h. wir haben

$$\alpha \leq \beta \ \Rightarrow\ |\alpha| \leq |\beta|. \tag{3.8}$$

Aus $\alpha \leq \beta$ folgt nämlich $\alpha \subseteq \beta$, und haben wir eine Bijektion

$$f\colon \beta \longleftrightarrow |\beta|,$$

so ist $f[\alpha] \subseteq |\beta|$. Für $\xi \in \mathrm{otyp}(f[\alpha])$ ist $\xi \leq \mathrm{en}_{f[\alpha]}(\xi) < |\beta|$. Also ist $\mathrm{otyp}(f[\alpha]) \leq |\beta|$ und es gilt $\alpha \sim \mathrm{otyp}(f[\alpha])$. Damit folgt $|\alpha| \leq \mathrm{otyp}(f[\alpha]) \leq |\beta|$. □

Als weitere Folgerung erhalten wir

$$\kappa \in \mathrm{Card} \ \Rightarrow\ (\alpha < \kappa \ \Leftrightarrow\ |\alpha| < \kappa). \tag{3.9}$$

Die Richtung von links nach rechts folgt dabei unmittelbar aus (3.7). Aus $\kappa \leq \alpha$ folgt aber mit $\kappa \in \mathrm{Card}$ und (3.8) $\kappa = |\kappa| \leq |\alpha|$, womit wir auch die Gegenrichtung gezeigt haben. □

Da die Komposition von Bijektionen wieder eine Bijektion ergibt, haben wir auch

$$|a| = \alpha \wedge a \sim b \ \Rightarrow\ |b| = \alpha. \tag{3.10}$$

Anstatt der Aussage $(\exists f)(f\colon a \xrightarrow{1-1} b)$ schreiben wir kurz $a \hookrightarrow b$. Wir können dann die Beweisidee von (3.8) benutzen, um

$$a \hookrightarrow b \wedge |b| = \beta \ \Rightarrow\ |a| \in \mathrm{On} \wedge |a| \leq \beta \tag{3.11}$$

zu erhalten. Dazu gehen wir von einer Bijektion $g\colon b \longleftrightarrow \beta$ und einer Injektion $f\colon a \xrightarrow{1-1} b$ aus. Wir bilden $g \circ f$ und erhalten $(g \circ f)[a] \subseteq \beta$. Damit ist $a \sim \mathrm{otyp}((g \circ f)[a]) \leq \beta$ und es folgt sowohl $|a| \in \mathrm{On}$ als auch $|a| \leq |\beta|$. □

Wenn wir jetzt davon ausgehen, daß $|a| \in \mathrm{On}$ und $|b| \in \mathrm{On}$ sind, so erhalten wir aus (3.11)

$$a \hookrightarrow b \wedge b \hookrightarrow a \;\Rightarrow\; a \sim b. \tag{3.12}$$

Diese Aussage ist als Satz von CANTOR und BERNSTEIN bekannt. Es sei hier nur bemerkt, daß (3.12) in der zitierten Form richtig ist, d.h. man kann auf die Voraussetzung $|a| \in \mathrm{On}$ und $|b| \in \mathrm{On}$ verzichten. Diese Aussage wurde in den Übungen gezeigt und soll daher hier nicht nochmals wiederholt werden.
Offenbar gilt auch

$$|a| < |b| \;\Rightarrow\; a \hookrightarrow b. \tag{3.13}$$

Wir wollen nun feststellen, unter welchen Bedingungen $|a| \in \mathrm{On}$ ist.

3.5.2 Lemma *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) $|a| \in \mathrm{On}$

(ii) $(\exists \alpha \in \mathrm{On})[a \sim \alpha]$

(iii) $(\exists r)[\mathrm{WO}(r) \wedge \ \mathrm{Feld}(r) = a]$

(iv) $(\exists \gamma \in \mathrm{On})(\exists f)[f\colon \gamma \xrightarrow{\text{auf}} a]$

(v) $(\exists f)[f\colon a \xrightarrow{1-1} \mathrm{On}]$.

Beweis: *(i)* $\Leftrightarrow$ *(ii)* folgt sofort aus der Definition von $|a|$.
(iii) $\Rightarrow$ *(ii)* erhalten wir sofort aus Satz 3.3.4, da π_r eine Bijektion von a auf $\mathrm{otyp}(r)$ ist.
Um *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* zu erhalten, nehmen wir $f\colon a \longleftrightarrow \alpha$ an und definieren $r := \{(x,y) |\ x \in a \wedge y \in a \wedge f(x) < f(y)\}$. Man rechnet mühelos nach, daß r eine Wohlordnung mit $\mathrm{Feld}(r) = a$ ist. Wegen $r \subseteq a \times a$ ist $r \in \mathcal{U}$.
(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*: Ist r eine Wohlordnung mit $\mathrm{Feld}(r) = a$, so haben wir die Bijektion $\mathrm{en}_r\colon \mathrm{otyp}(r) \longleftrightarrow a$.
(iv) $\Rightarrow$ *(v)*: Sei $f\colon \gamma \xrightarrow{\text{auf}} a$ wir definieren $g\colon a \longrightarrow \mathrm{On}$ durch $g(x) := \inf\{\xi \in \gamma |\ f(\xi) = x\}$. Offenbar ist g injektiv.
(v) $\Rightarrow$ *(iii)*: Wir definieren wieder

$$r := \{(x,y) |\ x \in a \wedge y \in a \wedge f(x) < f(y)\}. \qquad \square$$

Um jeder Menge eine Kardinalzahl als Mächtigkeit zuordnen zu können, wird es nach Lemma 3.5.2 notwendig sein, jede Menge wohlzuordnen. Wir werden sehen, daß dies aus dem Auswahlaxiom folgt.

Vorher bemerken wir aber noch die folgenden Tatsachen.

3.5.3 Lemma *Sei F eine Funktion. Ist* $|\operatorname{dom}(F)| \in \mathrm{On}$*, so ist*

$$|\operatorname{rng}(F)| \leq |\operatorname{dom}(F)|.$$

Beweis: Sei $g\colon |\operatorname{dom}(F)| \longleftrightarrow \operatorname{dom}(F)$. Wir definieren

$$h\colon \operatorname{rng}(F) \longrightarrow |\operatorname{dom}(F)|$$

durch

$$h(x) := \inf\{\xi \in |\operatorname{dom}(F)| \mid F(g(\xi)) = x\}.$$

Dann ist h injektiv, d.h. wir haben $\operatorname{rng}(F) \hookrightarrow |\operatorname{dom}(F)|$ und erhalten nach (3.11) $|\operatorname{rng}(F)| \leq |\operatorname{dom}(F)|$. □

Wir wollen zunächst endliche Kardinalzahlen untersuchen, d.h. Ordinalzahlen α mit $\alpha = |\alpha| < \omega$. Zur Vorbereitung zeigen wir das folgende Lemma.

3.5.4 Lemma *Ist $\alpha < \omega$ und $\beta < \alpha$, so ist $S(\operatorname{otyp}(\alpha \setminus \{\beta\})) = \alpha$.*

Beweis: Wir führen Induktion nach α. Für $\alpha = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei daher $\alpha = S\gamma$ und $\beta < \alpha$. Ist $\beta = \gamma$, so ist $\alpha \setminus \{\beta\} = \gamma$ und $\operatorname{otyp}(\alpha \setminus \{\beta\}) = \gamma$. Also ist $S(\operatorname{otyp}(\alpha \setminus \{\beta\})) = \alpha$. Ist $\beta < \gamma$, so setzen wir

$$\delta := \operatorname{otyp}(\gamma \setminus \{\beta\})$$

und erhalten aus der Induktionsvoraussetzung

$$S\delta = S(\operatorname{otyp}(\gamma \setminus \{\beta\})) = \gamma. \tag{i}$$

Offenbar gilt für $\xi \in \gamma \setminus \{\beta\}$ immer

$$\pi_{(S\gamma\setminus\{\beta\})}(\xi) = \pi_{(\gamma\setminus\{\beta\})}(\xi)$$

und somit

$$\begin{aligned} \pi_{(S\gamma\setminus\{\beta\})}(\gamma) &= \{\pi_{(S\gamma\setminus\{\beta\})}(\xi) \mid \xi \in \gamma \setminus \{\beta\}\} \\ &= \{\pi_{(\gamma\setminus\{\beta\})}(\xi) \mid \xi \in \gamma \setminus \{\beta\}\} \\ &= \delta. \end{aligned} \tag{ii}$$

Mit (i) und (ii) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \operatorname{otyp}(S\gamma \setminus \{\beta\}) &= \pi_{(S\gamma\setminus\{\beta\})}[S\gamma \setminus \{\beta\}] \\ &= \pi_{(\gamma\setminus\{\beta\})}[\gamma \setminus \{\beta\}] \cup \{\pi_{S\gamma\setminus\{\beta\}}(\gamma)\} \\ &= \delta \cup \{\delta\} \\ &= S\delta = \gamma. \end{aligned}$$

Also folgt $\alpha = S\gamma = S(\operatorname{otyp}(\alpha \setminus \{\beta\}))$. □

Mit Hilfe von Lemma 3.5.4 erhalten wir die folgende Aussage:

3.5.5 Lemma *Ist $\alpha < \omega$ und $\alpha \sim \beta$, so ist $\alpha = \beta$.*

Beweis: Induktion nach α. Ist $\alpha = 0$ und $\alpha \sim \beta$, so ist $\beta = \emptyset$.
Sei daher $\alpha = S\gamma$ und $f\colon \alpha \longleftrightarrow \beta$. Dann ist

$$f \restriction \gamma\colon \gamma \longleftrightarrow \beta \setminus \{f(\gamma)\} \sim \text{otyp}(\beta \setminus \{f(\gamma)\}).$$

Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$\gamma = \text{otyp}(\beta \setminus \{f(\gamma)\})$$

und mit Lemma 3.5.4 daraus

$$\alpha = S\gamma = S(\text{otyp}(\beta \setminus \{f(\gamma)\})) = \beta. \qquad \square$$

Lemma 3.5.5 verhilft uns dazu, eine Reihe von Kardinalzahlen zu erkennen. Ist nämlich $\alpha < \omega$, so ist wegen $\alpha \sim |\alpha|$ nach Lemma 3.5.5 schon $\alpha = |\alpha|$. Damit sind alle endlichen Ordinalzahlen bereits Kardinalzahlen. Weiter haben wir $|\omega| \leq \omega$ nach (3.7). Die Annahme $|\omega| < \omega$ führt aber nach Lemma 3.5.5 zu dem Widerspruch $\omega = |\omega| < \omega$. Zusammenfassend erhalten wir daher den folgenden Satz:

3.5.6 Satz $\omega + 1 \subseteq \text{Card}$*, d.h. ω und alle endlichen Ordinalzahlen sind Kardinalzahlen.*

3.5.7 Definition Eine Menge $a \in \mathcal{U}$ heißt *abzählbar*, wenn $|a| \leq \omega$ gilt. Anderenfalls heißt a *überabzählbar*.

Eine einfache Beobachtung ist

$$\omega \leq \alpha \;\Rightarrow\; \alpha \sim S\alpha. \tag{3.14}$$

Dazu definieren wir eine Funktion

$$f\colon S\alpha \longleftrightarrow \alpha$$

durch

$$f(\xi) := \begin{cases} S\xi & \text{falls } \xi < \omega \\ \xi & \text{falls } \omega \leq \xi < \alpha \\ 0 & \text{falls } \xi = \alpha. \end{cases}$$

Man überzeugt sich sofort, daß f eine Bijektion ist.
Bezeichnen wir mit

$$\mathbb{K} := \{\kappa \in \text{Card} \mid \omega \leq \kappa\} \tag{3.15}$$

die Klasse der *unendlichen Kardinalzahlen*, so erhalten wir aus (3.14)

$$\mathbb{K} \subseteq \text{Lim}. \tag{3.16}$$

Wir wollen eine Klasse $K \subseteq \mathrm{On}$ *unbeschränkt* nennen, wenn

$$(\forall \xi)(\exists \eta \in K)[\xi \leq \eta]$$

gilt. Ist K eine unbeschränkte Klasse, so ist offenbar $\mathrm{otyp}(K) = \mathrm{On}$. Damit sind unbeschränkte Klassen keine Mengen. Umgekehrt sind beschränkte Klassen $K \subseteq \mathrm{On}$ nach dem Aussonderungsaxiom Mengen. Wir wollen uns nun davon überzeugen, daß die Klasse der Kardinalzahlen unbeschränkt ist. Dazu benötigen wir die folgende Begriffsbildung.

3.5.8 Definition Sei $a \in \mathcal{U}$. Wir definieren

$$\mathsf{H}(a) := \inf\{\xi \in \mathrm{On} \mid \neg(\exists f)[f\colon \xi \xrightarrow{1-1} a]\}$$

und nennen $\mathsf{H}(a)$ die HARTOGSzahl der Menge a.

Offensichtlich haben wir $\alpha < \mathsf{H}(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathrm{On}$. Wir wollen nun einsehen, daß für jede Menge a die HARTOGSzahl $\mathsf{H}(a)$ eine Kardinalzahl ist, d.h. wir zeigen:

3.5.9 Lemma *Ist $a \in \mathcal{U}$, so ist $\mathsf{H}(a) \in \mathrm{Card}$.*

Beweis: Sei $a \in \mathcal{U}$. Wir betrachten die Klassen

$$A := \{\xi \mid (\exists f)[f\colon \xi \xrightarrow{1-1} a]\}$$

und

$$W := \{(b, r) \mid b \subseteq a \wedge \mathrm{WO}(r) \wedge \mathrm{Feld}(r) = b\}.$$

Wegen $W \subseteq \mathrm{Pow}(a) \times \mathrm{Pow}(a \times a)$ ist

$$W \in \mathcal{U}. \tag{i}$$

Nun gilt aber

$$A = \{\mathrm{otyp}(r) \mid (b, r) \in W\}. \tag{ii}$$

Für $(b, r) \in W$ haben wir nämlich

$$\mathrm{otyp}(r) \hookrightarrow b \subseteq a.$$

Dies liefert die Inklusion „$\supseteq$“ in (ii). Für die Gegenrichtung sei $\xi \in A$. Dann haben wir $f\colon \xi \xrightarrow{1-1} a$ und wir definieren $b := f[\xi] \subseteq a$ und $r := \{(f(\alpha), f(\beta)) \mid \alpha < \beta\}$. Dann gilt $\mathrm{WO}(r)$ und $\mathrm{otyp}(r) = \xi$.
Aus (ii) und (i) erhalten wir

$$A \in \mathcal{U}$$

mit Ersetzung. Also ist

$$\alpha := \sup A \in \mathrm{On}.$$

Wegen $S\alpha \notin A$ gilt

$$\neg(\exists f)[f\colon S\alpha \xrightarrow{1-1} a],$$

und wir erhalten

$$\mathsf{H}(a) \in \mathrm{On}.$$

Gilt nun $\xi \longleftrightarrow \mathsf{H}(a) \not\hookrightarrow a$ für eine Ordinalzahl ξ, so ist $\xi \not\hookrightarrow a$ und daher $\mathsf{H}(a) \leq \xi$. Damit haben wir

$$|\,\mathsf{H}(a)| \leq \mathsf{H}(a) \leq |\,\mathsf{H}(a)|$$

und somit $\mathsf{H}(a) \in \mathrm{Card}$. $\square$

Wegen $\alpha < \mathsf{H}(\alpha)$ erhalten wir den folgenden Satz:

3.5.10 Satz *Die Kardinalzahlen sind eine unbeschränkte Klasse.*

Aus Satz 3.5.10 folgt, daß die Klasse $\mathbb{K}$ und wegen $\mathbb{K} \subseteq \mathrm{Lim}$ auch die Klasse der Limeszahlen unbeschränkt ist. Also ist $\mathrm{otyp}(\mathbb{K}) = \mathrm{On}$ und wir definieren

$$\aleph_\alpha := \mathrm{en}_{\mathbb{K}}(\alpha).$$

Da $\mathrm{otyp}(\mathbb{K}) = \mathrm{On}$ ist, ist $\aleph_\alpha$ für alle Ordinalzahlen α definiert. Es gilt $\aleph_0 = \omega$. Für eine Menge a sei

$$a^+ := \min\{\kappa \in \mathbb{K} |\ |a| < \kappa\}.$$

Für Ordinalzahlen ist α^+ immer definiert und es gilt

$$\omega \leq \alpha \ \Rightarrow\ \alpha^+ = \mathsf{H}(\alpha). \tag{3.17}$$

Wegen $|\alpha| < \mathsf{H}(\alpha)$ haben wir nämlich $\alpha^+ \leq \mathsf{H}(\alpha)$. Wäre nun $\alpha^+ < \mathsf{H}(\alpha)$, so hätten wir $\alpha^+ \hookrightarrow \alpha$ und erhielten nach (3.11) den Widerspruch $\alpha^+ = |\alpha^+| \leq |\alpha| < \alpha^+$.

3.6 Das Auswahlaxiom

Wir sind bislang nicht in der Lage, jeder Menge eine Ordinalzahl als Kardinalität zuzuordnen. In Lemma 3.5.2 haben wir eingesehen, daß dies äquivalent zu der Forderung ist, jede Menge wohlordnen zu können. Dies erscheint auf den ersten Blick eine gewagte Forderung zu sein. Wie sollte wohl eine Wohlordnung auf den reellen Zahlen oder noch komplexeren Mengen aussehen? Es gibt jedoch ein Prinzip, das Mathematikern wohlvertraut ist und das sich als dazu äquivalent herausstellt. Haben wir eine Familie

$$\{A_\iota \mid \iota \in I\}$$

von Mengen mit einer Indexmenge I, so bildet man das *Produkt*

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota := \{f \mid f\colon I \longrightarrow \bigcup_{\iota \in I} A_\iota \wedge f(\iota) \in A_\iota\},$$

das eine natürliche Verallgemeinerung des endlichen Produktes

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

darstellt. Gilt $A_\iota \neq \emptyset$ für alle $\iota \in I$, so möchte man natürlich gerne auch $\prod_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset$ haben. Dies können wir auf der Grundlage unserer bisherigen Axiome aber nicht zeigen. Wir müssen dies daher axiomatisch fordern. Dazu definieren wir:

3.6.1 Definition Sei $a \in \mathcal{U}$. Eine Funktion f mit $\operatorname{dom}(f) \supseteq a$ heißt *Auswahlfunktion* für a, wenn für jedes $x \in a$ mit $x \neq \emptyset$ schon $f(x) \in x$ gilt. Das Auswahlaxiom besagt nun:

(AC) Zu jedem $a \in \mathcal{U}$ existiert eine Auswahlfunktion.

Ganz offensichtlich haben wir dann den folgenden Satz:

3.6.2 Satz *Das Auswahlaxiom ist äquivalent zu der Forderung, daß jede Mengenfamilie nicht leerer Mengen ein nicht leeres Produkt besitzt. D.h.*

$$(AC) \Leftrightarrow (\forall I)(\forall A)\{[\mathrm{Fkt}(A) \wedge \operatorname{dom}(A) = I \wedge (\forall \iota \in I)(A_\iota \neq \emptyset)] \Rightarrow \prod_{\iota \in I} A_\iota \neq \emptyset\}$$

Ein weiteres in der Algebra oft benutztes Prinzip ist das ZORNsche Lemma, das wir wie folgt formulieren:

3.6.3 Lemma (ZORNsches Lemma) *Sei $a \in \mathcal{U}$, $a \neq 0$ und $\prec$ eine transitive irreflexive Relation. $b \subseteq a$ heißt $\prec$-Kette in a, wenn $\prec \cap (b \times b)$ eine lineare Relation ist. Ein Element $y \in a$ heißt eine obere Schranke für $b \subseteq a$, wenn $(\forall x \in b)[x \preceq y]$ gilt. Besitzt nun jede $\prec$-Kette in a eine obere Schranke, so besitzt a $\prec$-maximale Elemente, d.h. Elemente z für die*

$$(\forall y \in a)[\neg z \prec y \vee z = y]$$

gilt.

Beweis: Sei $a \in \mathcal{U},\ a \neq \emptyset$ und $\prec$ eine transitive irreflexive Relation, die die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Dann ist $\mathrm{Pow}(a) \in \mathcal{U}$ und besitzt demnach nach (AC) eine Auswahlfunktion f. Durch transfinite Rekursion definieren wir eine Funktion

$$F\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathcal{U}$$

mit

$$F(\alpha) := f(\{x \in a|\ (\forall y \in F[\alpha])[y \prec x]\}). \tag{i}$$

Setzen wir

$$A_\alpha := \{x \in a|\ (\forall y \in F[\alpha])[y \prec x]\},$$

so folgt aus (i)

$$A_\alpha \neq \emptyset \ \Rightarrow\ F(\alpha) \in A_\alpha \wedge (\forall y \in F[\alpha])[y \prec F(\alpha)].$$

Weiter folgt

$$\alpha \leq \beta \ \Rightarrow\ A_\beta \subseteq A_\alpha, \tag{ii}$$

denn mit $x \in A_\beta$ gilt $(\forall y \in F[\beta])[y \prec x]$ und damit auch $y \prec x$ für alle $y \in F[\alpha]$. Als Folgerung von (ii) erhalten wir

$$\alpha < \beta \wedge A_\beta \neq \emptyset \ \Rightarrow\ A_\alpha \neq \emptyset \wedge F(\alpha) \prec F(\beta), \tag{iii}$$

denn es ist $A_\beta \subseteq A_\alpha$ und $F(\alpha) \in F[\beta]$.
Definieren wir nun

$$\Gamma := \{\beta|\ A_\beta \neq \emptyset\} \subseteq \mathrm{On}$$

so gilt

$$\mathrm{Tran}(\Gamma)$$

nach (iii). Da $F[\Gamma] \subseteq a$ folgt (mit der sich aus der Irreflexivität von $\prec$ ergebenden Injektivität von $F \restriction \Gamma$) $\Gamma \in \mathcal{U}$ und wir erhalten

$$\Gamma \in \mathrm{On}. \tag{iv}$$

Für $x, y \in F[\Gamma]$ haben wir aber $\alpha, \beta \in \Gamma$ mit $x = F(\alpha)$ und $y = F(\beta)$. Nach (iii) folgt $F(\alpha) \preceq F(\beta)$ oder $F(\beta) \preceq F(\alpha)$. Damit ist $F[\Gamma]$ eine $\prec$-Kette in a und besitzt daher eine obere Schranke $z \in a$. Wir behaupten, daß z ein $\prec$-maximales Element ist. Nehmen wir nämlich $z \prec x$ für ein $x \in a$ an, so folgt

$$(\forall y \in F[\Gamma])(y \preceq z \prec x).$$

Wegen der Transitivität von $\prec$ ist damit $A_\Gamma \neq \emptyset$. Also folgt $\Gamma \in \Gamma$ im Widerspruch zu (iv). $\square$

Fehlt bei den Voraussetzungen des ZORNschen Lemmas die Irreflexivität von $\prec$, so kann man $x \prec z$ durch die irreflexive und transitive Ordnung $\underline{x} \prec \underline{z} \;:\Leftrightarrow\; x \prec z \land \underline{x} \neq \underline{z}$ auf den durch $\underline{x} := \{y|\; y \preceq x \land x \preceq y\}$ definierten Äquivalenzklassen ersetzen. Man bekommt dann „maximale" Elemente $z \in a$ mit der Eigenschaft

$$(\forall y \in a)[\neg z \prec y \lor \underline{z} = \underline{y}].$$

Als nächstes wollen wir zeigen, daß mit Hilfe des Auswahlaxiomes jede Menge wohlgeordnet werden kann. Dies werden wir jedoch so tun, daß wir uns lediglich auf das ZORNsche Lemma beziehen. Da wir dann aus der Wohlordenbarkeit jeder Menge das Auswahlaxiom erhalten, werden wir dann die Äquivalenz von Auswahlaxiom, ZORNschem Lemma und Wohlordnungssatz gezeigt haben.

3.6.4 Satz (Wohlordnungssatz) *Jede Menge läßt sich wohlordnen.*

Beweis: Sei $a \in \mathcal{U}$. Wir definieren die Klasse

$$H := \{f|\; (\exists \xi)[f\colon \xi \xrightarrow{1-1} a]\}.$$

Dann gilt $H \subseteq \mathrm{Pow}(\mathsf{H}(a) \times a)$, wobei $\mathsf{H}(a)$ die in Definition 3.5.8 definierte HARTOGSzahl der Menge a ist. Also ist

$$H \in \mathcal{U}.$$

Wir definieren auf H eine Relation

$$\prec \;:= \{(f,g)|\; f,g \in H \land f \subsetneqq g\}.$$

Dann ist $\prec$ eine transitive irreflexive Relation auf H. Ist $A \subseteq H$ eine $\prec$-Kette, so ist $\bigcup A \in H$ eine obere Schranke von A. Nach dem ZORNschen Lemma besitzt H maximale Elemente. Sei h maximal und $\alpha := \mathrm{dom}(h)$. Wir behaupten

$$h\colon \alpha \longleftrightarrow a. \tag{i}$$

Dazu ist nur noch $h\colon \alpha \xrightarrow{auf} a$ zu zeigen. Zu $x \in a$ mit $x \notin \mathrm{rng}(h)$ könnten wir aber

$$h' := h \cup \{(\alpha, x)\}$$

bilden. Dann hätten wir $h' \in H$ und $h \prec h'$ im Widerspruch zur Maximalität von h. Also folgt (i). Nach Lemma 3.5.2 ist dies aber äquivalent zur Wohlordenbarkeit von a. $\square$

Zuletzt wollen wir uns klarmachen, das der Wohlordnungssatz seinerseits das Auswahlaxiom impliziert. D.h. wir zeigen:

3.6.5 Satz *Läßt sich jede Menge wohlordnen, so gilt (AC).*

Beweis: Sei $a \in \mathcal{U}$. Dann ist auch $\bigcup a \in \mathcal{U}$ und wir haben aus der Annahme der Wohlordenbarkeit mit Lemma 3.5.2 eine Bijektion

$$h\colon |\bigcup a| \longleftrightarrow \bigcup a.$$

Wir definieren

$$f(x) := \begin{cases} h(\inf\{\xi \mid \; h(\xi) \in x\}) & \text{falls } x \in a \wedge x \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $x \in a$ und $x \neq \emptyset$, so gilt $f(x) \in x$. Offenbar ist f eine Funktion. $\square$

Wir haben in Lemma 3.6.3 vor dem Hintergrund der übrigen Axiome der Mengenlehre

(AC) $\Rightarrow$ *(ZL)*

gezeigt, wobei wir mit *(ZL)* die Aussage des ZORNschen Lemmas abkürzen.
Im Wohlordnungssatz (Satz 3.6.4) haben wir hingegen

(ZL) $\Rightarrow$ *(WS)*

gezeigt, wobei jetzt *(WS)* die Aussage des Wohlordnungssatzes abkürzt.
Schließlich haben wir in Satz 3.6.5

(WS) $\Rightarrow$ *(AC)*

nachgewiesen.
Zusammenfassend erhalten wir daher als Korollar des Beweisganges den folgenden Satz:

3.6.6 Satz *Vor dem Hintergrund der übrigen Axiome der Mengenlehre sind Auswahlaxiom, ZORNsches Lemma und Wohlordnungssatz paarweise äquivalent.*

Wir wollen im folgenden immer das Auswahlaxiom zugrundelegen. Als Korollar zum Wohlordnungssatz (Satz 3.6.4) erhalten wir:

3.6.7 Korollar *Für alle $a \in \mathcal{U}$ ist $|a| \in \mathrm{On}$, d.h. jede Menge besitzt eine Kardinalität.*

Darüber hinaus erhalten wir

3.6.8 Lemma *Ist a unendlich, d.h. $\omega \leq |a|$, so ist $\mathsf{H}(a) = a^+$.*

Beweis: Es ist $|a| < \mathsf{H}(a)$, also $a^+ \leq \mathsf{H}(a)$. Wegen $\neg(\exists f)(f\colon a^+ \xrightarrow{1-1} a)$ gilt aber auch $\mathsf{H}(a) \leq a^+$. $\square$

3.7 DEDEKIND–endliche Mengen

Eine der überraschendsten Eigenschaften unendlicher Mengen ist die Tatsache, daß sie gleichmächtig zu einer ihrer echten Teilmengen sein können. R. DEDEKIND verwendete diese Eigenschaft zur Definition von Unendlichkeit.

3.7.1 Definition Eine Menge K heißt D-unendlich, wenn es eine Menge $A \subsetneqq K$ mit $A \sim K$ gibt.
Ist K nicht D-unendlich, so heißt K D-endlich.

3.7.2 Lemma *Ist K D-endlich und $K \sim M$, so ist M ebenfalls D-endlich.*

Beweis: Ist $f\colon M \longleftrightarrow K$ und $A \subsetneqq M$, so ist $f[A] \subsetneqq K$. Nehmen wir $g\colon A \longleftrightarrow M$ an, so folgt $f \circ g \circ f^{-1}\colon f[A] \longleftrightarrow K$. Das widerspricht jedoch der D-Endlichkeit von K. □

Als unmittelbare Folgerung erhält man

3.7.3 Lemma *Eine Menge a ist genau dann D-endlich, wenn ihre Kardinalität $|a|$ ebenfalls D-endlich ist.*

Es sei angemerkt, daß eine Richtung in Lemma 3.7.3 das Auswahlaxiom erfordert. Nur mit dem Auswahlaxiom wissen wir, daß jede Menge eine Kardinalität besitzt.

3.7.4 Lemma *Ist a D-endlich, so ist auch Sa D-endlich.*

Beweis: Nehmen wir an, Sa wäre nicht D-endlich. Dann haben wir ein $A \subsetneqq Sa = a \cup \{a\}$ und ein $f\colon Sa \longleftrightarrow A$. Ist $f(a) = a$ oder $A \subseteq a$, so ist $f \restriction a\colon a \longleftrightarrow A \setminus \{f(a)\}$, wobei $A \setminus \{f(a)\} \subsetneqq a$ ist. Dies ist unmöglich. Ist $f(a) \neq a$ und $a \in A$, so gibt es ein $b \in a$ mit $f(b) = a$ und wir definieren

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in a \text{ und } x \neq b \\ f(a) & \text{falls } x = b \\ a & \text{falls } x = a. \end{cases}$$

Dann ist $g\colon Sa \longleftrightarrow A$ mit $g(a) = a$ und wir sind im ersten Fall. □

Da die leere Menge trivialerweise D-endlich ist, folgt mit Lemma 3.7.4 durch ω-Induktion:

3.7.5 Lemma *Ist $\alpha < \omega$, so ist α D-endlich.*

Als Korollar von Lemma 3.7.5 und Lemma 3.7.3 erhalten wir:

3.7.6 Lemma *Jede endliche Menge ist D-endlich.*

Beweis: Ist a endlich, so ist $|a| < \omega$, also $|a|$ D-endlich. Mit Lemma 3.7.3 ist dann aber auch a D-endlich. $\square$

Man beachte, daß Lemma 3.7.6 kein Auswahlaxiom benötigt. Die Gegenrichtung erfordert jedoch Lemma 3.7.3 und damit das Auswahlaxiom.

3.7.7 Satz *Eine Menge a ist genau dann D-endlich, wenn $|a| < \omega$ ist, d.h. a endlich ist.*

Beweis: Ist $|a| < \omega$, so ist nach Lemma 3.7.6 a D-endlich. Ist $\omega \leq |a|$, so ist nach (3.14) $a \sim Sa$. Damit kann Sa nicht D-endlich sein. Mit Lemma 3.7.4 folgt daraus, daß dann auch a D-unendlich ist. $\square$

Auch hier sollte man beachten, daß das Auswahlaxiom in der Form benutzt wurde, daß zu jeder Menge a die Ordinalzahl $|a|$ existiert.

3.8 Kardinalzahlarithmetik

Nachdem wir – unter Zuhilfenahme des Auswahlaxiomes – in der Lage sind, jede Menge wohlzuordnen, können wir die Grundzüge der Kardinalzahlarithmetik einführen. Allerdings werden wir diese in dieser Vorlesung nicht weiter vertiefen.
Wir hatten bereits kurz angedeutet, daß die offenen Intervalle zusammen mit dem Singleton $\{0\}$ die Basis einer Topologie auf den Ordinalzahlen bilden. Haben wir eine ordnungstreue Abbildung $F\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathrm{On}$, so bemerkt man, daß diese Abbildung genau dann stetig ist, wenn sie Suprema erhält. Daher definieren wir

3.8.1 Definition Sei $A \subseteq \mathrm{On}$ oder $A = \mathrm{On}$. Ein $F\colon A \longrightarrow \mathrm{On}$ heißt *stetig auf* A, wenn für alle $B \subseteq A$ mit $\sup B \in A$ schon

$$\sup F[B] = F(\sup B)$$

gilt.

3.8.2 Lemma *Sei $B \subseteq \mathrm{On}$. Die Aufzählungsfunktion en_B ist genau dann stetig, wenn B abgeschlossen gegenüber Suprema ist, d.h. wenn für jede in B beschränkte Menge $A \subseteq B$ auch $\sup A \in B$ ist.*

Beweis: Nehmen wir zuerst an, daß en_B stetig ist. Sei $A \subseteq B$ eine in B beschränkte Menge, d.h. es gibt ein $\beta \in B$ so, daß $(\forall \alpha \in A)[\alpha \leq \beta]$ gilt. Wir betrachten $\mathrm{en}_B^{-1}[A] = \{\xi \in \mathrm{otyp}(B) \mid \mathrm{en}_B(\xi) \in A\}$. Dann gilt

$$\sup(\mathrm{en}_B^{-1}[A]) \leq \mathrm{en}_B^{-1}(\beta) \in \mathrm{otyp}(B)$$

und damit ist

$$\sup(\mathrm{en}_B^{-1}[A]) \in \mathrm{otyp}(B).$$

Mit der Stetigkeit von en_B folgt

$$\mathrm{en}_B(\sup(\mathrm{en}_B^{-1}[A])) = \sup(\mathrm{en}_B[\mathrm{en}_B^{-1}[A]]) = \sup A.$$

Also ist $\sup(A) \in B$ und B ist abgeschlossen gegenüber Suprema.
Ist umgekehrt B abgeschlossen gegenüber Suprema und $X \subseteq \mathrm{otyp}(B)$ mit $\sup X \in \mathrm{otyp}(B)$, so betrachten wir $\{\mathrm{en}_B(\xi) \mid \xi \in X\}$. Dann gilt

$$\sup(\mathrm{en}_B[X]) \leq \mathrm{en}_B(\sup(X)). \tag{i}$$

Zu $\eta < \sup(X)$ gibt es aber ein $\xi \in X$ mit $\eta < \xi$ und wir erhalten mit (3.3)

$$\begin{aligned} \mathrm{en}_B(\sup(X)) &= \min\{\xi \in B \mid (\forall \eta < \sup X)[\mathrm{en}_B(\eta) < \xi]\} \\ &\leq \sup(\mathrm{en}_B[X]). \end{aligned} \tag{ii}$$

Aus (i) und (ii) folgt aber $\sup(\mathrm{en}_B[X]) = \mathrm{en}_B(\sup(X))$. □

Wir benutzen Lemma 3.8.2, um zu zeigen, daß die Funktion $\lambda\xi\,.\,\aleph_\xi$ stetig ist. Wir haben

3.8.3 Satz *Es gilt* $\aleph_0 = \omega$*,* $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ *und* $\aleph_\lambda = \sup\{\aleph_\xi \mid \xi < \lambda\}$ *für* $\lambda \in \mathrm{Lim}$.

Beweis: $\aleph_0 = \omega$ haben wir im Anschluß an Satz 3.5.10 bereits gezeigt. $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$ folgt sofort aus (3.3), da ja $\aleph_\alpha = \mathrm{en}_{\mathbb{K}}(\alpha)$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{en}_{\mathbb{K}}$ stetig ist. Nach Lemma 3.8.2 genügt es dafür, den Abschluß der Kardinalzahlen unter Suprema zu haben. Sei dazu $X \subseteq \mathbb{K}$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Dann ist $X \in \mathcal{U}$ und wir setzen $\lambda := \sup X$. Nehmen wir $\lambda \notin \mathrm{Card}$ an, so ist $|\lambda| < \lambda$ und es gibt ein $\mu \in X$ mit $|\lambda| < \mu$. Sei $f\colon \lambda \longleftrightarrow |\lambda|$. Dann erhalten wir den Widerspruch

$$\mu = |\mu| = |f[\mu]| \leq |\lambda| < \mu.$$ □

Wir führen nun die „arithmetischen" Operationen $\oplus$, $\odot$ und Exponentiation auf den Kardinalzahlen ein. Für zwei Mengen $a, b \in \mathcal{U}$ definieren wir die *disjunkte Vereinigung*

$$a \sqcup b := (a \times \{0\}) \cup (b \times \{1\}).$$

3.8.4 Definition Seien κ und λ Kardinalzahlen. Wir definieren

(i) $\kappa \oplus \lambda := |\kappa \sqcup \lambda|$

(ii) $\kappa \odot \lambda := |\kappa \times \lambda|$

(iii) $\kappa^\lambda := |{}^\lambda\kappa|$.

3.8.5 Satz *Für endliche Kardinalzahlen sind die arithmetischen Kardinal - und Ordinalzahloperationen gleich.*

Beweis: Wir definieren eine Relation $\prec_{\text{rlex}}$ auf On $\times$ On durch

$$(\xi, \gamma) \prec_{\text{rlex}} (\eta, \delta) \;:\Leftrightarrow\; \gamma < \delta \vee (\gamma = \delta \wedge \xi < \eta).$$

$\prec_{\text{rlex}}$ ist die *lexikographische Ordnung von rechts*. Dann ist

$$\alpha + \beta = \text{otyp}(\prec_{\text{rlex}} \restriction \alpha \sqcup \beta)$$

und

$$\alpha \cdot \beta = \text{otyp}(\prec_{\text{rlex}} \restriction \alpha \times \beta),$$

wobei für eine Relation R die Notation $R \restriction A$ die Relation $R \cap (A \times A)$ bezeichnet. Daraus ergibt sich

$$|\alpha + \beta| = |\alpha \sqcup \beta| = \alpha \oplus \beta \tag{i}$$

und

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha \times \beta| = \alpha \odot \beta. \tag{ii}$$

Da wir für endliche Ordinalzahlen α immer $|\alpha| = \alpha$ haben (Satz 3.5.6), folgt aus (i) und (ii)

$$\alpha + \beta = \alpha \oplus \beta,$$

sowie

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \odot \beta.$$

Da wir für endliches n immer

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \cdots \alpha}_{n\text{-fach}}$$

haben, folgt aus (ii)

$$\alpha^n = |\underbrace{\alpha \times \cdots \times \alpha}_{n\text{-fach}}|.$$

Damit sind Ordinal- und Kardinalzahloperationen im Endlichen identisch. □

Für $\alpha \in$ On ist die eben definierte Relation $\prec_{\text{rlex}} \restriction \alpha$ stets eine Wohlordnung. Sie ist sogar auf On fundiert, dort aber keine Wohlordnung, da z.B. $\{(\xi, \eta) |\; (\xi, \eta) \prec_{\text{rlex}} (0, 1)\}$ schon den Ordnungstyp On hat. Wir führen daher eine Wohlordnung auf On $\times$ On ein, die uns helfen wird, die Kardinalzahlarithmetik transfiniter Ordinalzahlen zu studieren.

3.8.6 Definition Seien $(\alpha_1, \beta_1) \in \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ und $(\alpha_2, \beta_2) \in \mathrm{On} \times \mathrm{On}$. Wir definieren

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \beta_1) \prec_\times (\alpha_2, \beta_2) \ :\Leftrightarrow\ & (\alpha_1 \cup \beta_1 < \alpha_2 \cup \beta_2) \vee \\ & (\alpha_1 \cup \beta_1 = \alpha_2 \cup \beta_2 \wedge \alpha_1 < \alpha_2) \vee \\ & (\alpha_1 \cup \beta_1 = \alpha_2 \cup \beta_2 \wedge \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 < \beta_2).\end{aligned}$$

Dann gilt:

3.8.7 Lemma $\prec_\times$ *ordnet* On $\times$ On *wohl.*

Beweis: Wir sehen sofort, daß $\prec_\times$ eine lineare und fundierte Ordnung ist. Weiter ist für $(\alpha, \beta) \in \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ die Klasse

$$\{(\xi, \eta) |\ (\xi, \eta) \prec_\times (\alpha, \beta)\} \subseteq S(\alpha \cup \beta) \times S(\alpha \cup \beta)$$

und damit eine Menge. Also ist $\prec_\times$ eine Wohlordnung auf On $\times$ On. □

Wir wollen im folgenden die Kollabierungsfunktion $\pi_{\prec_\times}$ mit Γ bezeichnen.

3.8.8 Lemma *Es gelten*

(i) $\alpha \leq \Gamma[\alpha \times \alpha] \in \mathrm{On}$

(ii) $\Gamma[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] = \aleph_\alpha$.

Beweis: *(i)*: Wir haben $\Gamma[\alpha \times \alpha] \subseteq \mathrm{On}$ und $\Gamma[\alpha \times \alpha] \in \mathcal{U}$. Da Γ eine Kollabierungsfunktion ist, gilt aber auch $\mathrm{Tran}(\Gamma[\alpha \times \alpha])$. Also haben wir $\Gamma[\alpha \times \alpha] \in \mathrm{On}$. Für $\alpha < \beta$ ist $\Gamma[\alpha \times \alpha] \subsetneq \Gamma[\beta \times \beta]$. Damit ist $\Gamma[\alpha \times \alpha] < \Gamma[\beta \times \beta]$ und die Abbildung $\Gamma^\Delta(\alpha) := \Gamma[\alpha \times \alpha]$ ist ordnungstreu mit $\mathrm{dom}(\Gamma^\Delta) = \mathrm{On}$. Nach Lemma 3.3.5 ist dann $\alpha \leq \Gamma^\Delta(\alpha) = \Gamma[\alpha \times \alpha]$.
(ii): Wir zeigen die Behauptung durch transfinite Induktion nach α. Die Richtung

$$\aleph_\alpha \subseteq \Gamma[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha]$$

gilt dabei bereits nach *(i)*. Es bleibt daher

$$\Gamma[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha] \subseteq \aleph_\alpha$$

zu zeigen. Sei daher $\xi \in \Gamma[\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha]$. Dann gibt es $(\mu, \nu) \in \aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ mit $\xi = \Gamma[\mu, \nu]$. Sei $\delta := \sup\{\mu, \nu\} + 1$. Dann ist $\xi \in \Gamma[\delta \times \delta]$ und wegen $\aleph_\alpha \in \mathrm{Lim}$ auch $\delta < \aleph_\alpha$. Daneben gilt $|\xi| \leq |\delta \times \delta|$. Ist $\delta < \omega$, so ist $|\delta \times \delta| < \omega$, und es folgt

$$\xi = |\xi| \leq |\delta \times \delta| < \omega \leq \aleph_\alpha.$$

Sei $\omega \leq \delta$. Dann ist $|\delta| = \aleph_{\alpha_0}$ für ein $\alpha_0 < \alpha$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann

$$|\delta| = \Gamma[\aleph_{\alpha_0} \times \aleph_{\alpha_0}].$$

und wir erhalten mit (3.11)

$$|\xi| \leq |\delta \times \delta| \leq |\aleph_{\alpha_0} \times \aleph_{\alpha_0}| \leq \Gamma[\aleph_{\alpha_0} \times \aleph_{\alpha_0}] = \aleph_{\alpha_0} < \aleph_\alpha.$$

Damit ist nach (3.9) $\xi < \aleph_\alpha$. □

Die in Definition 3.8.4 eingeführten Kardinalzahloperationen $\oplus$ und $\odot$ sind wegen $\kappa \times \lambda \sim \lambda \times \kappa$ kommutativ und trivialerweise schwach monoton, d.h. wir haben

$$\aleph_\alpha \oplus \aleph_\beta = \aleph_\beta \oplus \aleph_\alpha \tag{3.18}$$

$$\aleph_\alpha \odot \aleph_\beta = \aleph_\beta \odot \aleph_\alpha \tag{3.19}$$

und

$$\alpha \leq \beta \;\Rightarrow\; \aleph_\gamma \oplus \aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma \oplus \aleph_\beta \wedge \aleph_\gamma \odot \aleph_\alpha \leq \aleph_\gamma \odot \aleph_\beta. \tag{3.20}$$

Aus Satz 3.8.5 folgt, daß (3.18) – (3.20) auch im Endlichen gelten.
Als Korollar zu Lemma 3.8.8 erhalten wir den folgenden Satz:

3.8.9 Satz *Es gelten*

(i) $\aleph_\alpha \odot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$

(ii) $\aleph_\alpha \oplus \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$

(iii) $a \in \mathcal{U} \wedge |a| \in \mathbb{K} \;\Rightarrow\; a \sim a \times a.$

Beweis:
(i): $\aleph_\alpha \odot \aleph_\alpha = |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| \leq |\Gamma^\Delta(\aleph_\alpha)| = \aleph_\alpha$.
(ii): Wegen $\aleph_\alpha \sqcup \aleph_\alpha \hookrightarrow \aleph_\alpha \times 2$ erhalten wir

$$\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \oplus \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \odot 2 \leq \aleph_\alpha \odot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

(iii): Das folgt sofort aus *(i)*. □

Als Korollar aus Satz 3.8.9 und der schwachen Monotonie von $\oplus$ und $\odot$ erhalten wir sofort

3.8.10 Satz *Es ist* $\aleph_\alpha \oplus \aleph_\beta = \aleph_\alpha \odot \aleph_\beta = \sup\{\aleph_\alpha, \aleph_\beta\}$.

Damit stellt sich die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen als im wesentlichen trivial heraus. Etwas interessanter sind jedoch unendliche Summen und Produkte. Wir definieren dazu

3.8.11 Definition Es sei

(i) $\sum\limits_{\iota \in I} \kappa_\iota := |\bigcup\{\{\iota\} \times \kappa_\iota \mid \iota \in I\}|$

(ii) $\prod_{\iota\in I}\kappa_\iota := |\prod_{\iota\in I}\kappa_\iota|$, wobei die rechte Seite das in Abschnitt 3.6 definierte Produkt bedeutet.

Zunächst erhalten wir

3.8.12 Lemma *Für* $\kappa \in \mathrm{Card}$ *gilt*

$$\sum_{\iota\in I}\kappa = |I| \odot \kappa$$

Beweis: Es ist

$$\sum_{\iota\in I}\kappa = |\bigcup\{\{\iota\}\times\kappa|\ \ \iota\in I\}| = |I\times\kappa| = |I|\odot\kappa. \qquad \square$$

Eine weitere Beobachtung ist

3.8.13 Lemma *Es gelten*

(i) $|\bigcup_{\iota\in I}A_\iota| \le \sum_{\iota\in I}|A_\iota|$

(ii) $|\prod_{\iota\in I}A_\iota| = \prod_{\iota\in I}|A_\iota|$

Sind alle A_ι paarweise disjunkt (d.h. gilt $A_\iota\cap A_\sigma=\emptyset$ für $\iota\neq\sigma$), so steht in (i) das Gleichheitszeichen.

Beweis: Zu $\iota\in I$ sei

$$f_\iota\colon |A_\iota| \longleftrightarrow A_\iota.$$

(i): Wir definieren (mit *(AC)*) für $\xi\in|A_\iota|$

$$F(\iota,\xi) := f_\iota(\xi).$$

Dann ist

$$F\colon \bigcup_{\iota\in I}(\{\iota\}\times|A_\iota|) \longrightarrow \bigcup_{\iota\in I}A_\iota.$$

Da wir zu jedem $x\in\bigcup_{\iota\in I}A_\iota$ ein $\iota\in I$ und ein $\xi\in|A_\iota|$ mit $x=f_\iota(\xi)$ haben, ist F surjektiv. Sind die A_ι paarweise disjunkt, so ist F darüberhinaus auch injektiv. Damit folgt

$$|\bigcup_{\iota\in I}A_\iota| \le |\bigcup_{\iota\in I}(\{\iota\}\times|A_\iota|)| = \sum_{\iota\in I}|A_\iota|.$$

Für bijektives F gilt Gleichheit.
(ii): Sei $x\in\prod_{\iota\in I}|A_\iota|$. Wir definieren

$$F(x)\colon I \longrightarrow \bigcup_{\iota\in I} A_\iota$$

vermöge

$$F(x)(\iota) := f_\iota(x(\iota)).$$

Also ist

$$F\colon \prod_{\iota\in I} |A_\iota| \longrightarrow \prod_{\iota\in I} A_\iota.$$

Ist $y \in \prod_{\iota\in I} A_\iota$, so ist für $\iota \in I$ auch $y(\iota) \in A_\iota$ und damit $f_\iota^{-1}(y(\iota)) \in |A_\iota|$. Also ist

$$x = \{(\iota, f_\iota^{-1}(y(\iota)))|\ \iota \in I\} \in \prod_{\iota\in I} |A_\iota|$$

und

$$\begin{aligned} F(x) &= \{(\iota, f_\iota(f_\iota^{-1}(y(\iota))))|\ \iota \in I\} \\ &= \{(\iota, y(\iota))|\ \iota \in I\} = y. \end{aligned}$$

Damit ist F surjektiv. F ist aber auch injektiv, denn für $x, y \in \prod_{\iota\in I} |A_\iota|$ mit $x \neq y$ haben wir ein $\iota \in I$ mit $x(\iota) \neq y(\iota)$. Dann ist aber $f_\iota(x(\iota)) \neq f_\iota(y(\iota))$ und somit auch $F(x) \neq F(y)$. Somit haben wir

$$F\colon \prod_{\iota\in I} |A_\iota| \longleftrightarrow \prod_{\iota\in I} A_\iota,$$

und es folgt

$$|\prod_{\iota\in I} A_\iota| = |\prod_{\iota\in I} |A_\iota|| = \prod_{\iota\in I} |A_\iota|. \qquad \square$$

3.8.14 Lemma *Gilt $\kappa_\iota \leq \sigma_\iota$ für alle $\iota \in I$, so ist $\sum_{\iota\in I} \kappa_\iota \leq \sum_{\iota\in I} \sigma_\iota$ und $\prod_{\iota\in I} \kappa_\iota \leq \prod_{\iota\in I} \sigma_\iota$.*

Beweis: Trivial, wegen

$$\bigcup_{\iota\in I} (\{\iota\} \times \kappa_\iota) \hookrightarrow \bigcup_{\iota\in I} (\{\iota\} \times \sigma_\iota)$$

und

$$\prod_{\iota\in I} \kappa_\iota \subseteq \prod_{\iota\in I} \sigma_\iota. \qquad \square$$

3.8.15 Lemma *Sei $\{\kappa_\iota|\ \iota \in I\} \subseteq \mathrm{Card}$ und $I \in \mathcal{U}$. Dann gilt:*

(i) $\sup\{\kappa_\iota \mid \iota \in I\} \leq \sum_{\iota \in I} \kappa_\iota \leq |I| \odot \sup\{\kappa_\iota \mid \iota \in I\}$

(ii) $\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota = |I| \odot \sup\{\kappa_\iota \mid \iota \in I\}$, *falls* $\aleph_0 \leq |I|$ *und* $(\forall \iota \in I)\kappa_\iota \neq 0$.

(iii) $\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota = \sup\{\kappa_\iota \mid \iota \in I\}$, *falls* $\aleph_0 \cup |I| \leq \sup_{\iota \in I} \kappa_\iota$.

(iv) $(\prod_{\iota \in I} \kappa_\iota)^\lambda = \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota^\lambda$.

Beweis: *(i)*: Wir haben $\kappa_\iota \hookrightarrow \bigcup_{\iota \in I}(\{\iota\} \times \kappa_\iota)$ und damit $\kappa_\iota \leq \sum_{\iota \in I} \kappa_\iota$ für alle $\iota \in I$. Also $\sup_{\iota \in I} \kappa_\iota \leq \sum_{\iota \in I} \kappa_\iota$. Setzen wir $\sigma := \sup_{\iota \in I} \kappa_\iota$, so gilt mit Lemma 3.8.14

$$\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota \leq \sum_{\iota \in I} \sigma = |I| \odot \sigma.$$

(ii): Sei nun $\aleph_0 \leq |I|$ und $\kappa_\iota \neq 0$ für alle $\iota \in I$. Dann folgt wegen $1 \leq \kappa_\iota$ für alle $\iota \in I$

$$|I| = \sum_{\iota \in I} 1 \leq \sum_{\iota \in I} \kappa_\iota =: \kappa.$$

Mit $\sigma := \sup_{\iota \in I} \kappa_\iota$ haben wir wegen $\aleph_0 \leq |I|$

$$|I| \odot \sigma \leq |I| \odot \kappa = \kappa \leq \sum_{\iota \in I} \sigma = |I| \odot \sigma.$$

(iii): Ist $\aleph_0 \cup |I| \leq \sigma := \sup_{\iota \in I} \kappa_\iota$, so folgt

$$\sigma \leq \sum_{\iota \in I} \kappa_\iota \leq |I| \odot \sigma = \sigma.$$

(iv): Zu $F \in ({}^\lambda \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota)$ sei $\tilde{F} \in \prod_{\iota \in I}({}^\lambda \kappa_\iota)$ definiert durch $\tilde{F}(\iota) := \lambda x \,.\, F(x)(\iota)$. Dann ist $\tilde{\ }: {}^\lambda \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota \longleftrightarrow \prod_{\iota \in I}({}^\lambda \kappa_\iota)$. □

3.8.16 Lemma *Ist* $2 \leq \kappa_\iota$ *für alle* $\iota \in I$*, so gilt*

$$\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota \leq \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota.$$

Beweis: Für endliches I folgt dies aus

$$\kappa_0 \times \{0\} \cup \cdots \cup \kappa_n \times \{n\} \hookrightarrow \kappa_0 \times \cdots \times \kappa_n.$$

Sei daher I eine unendliche Menge. Dann gilt

$$|I| \leq 2^{|I|} = \prod_{\iota \in I} 2 \leq \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota.$$

Damit ist

$$|I| \odot \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota = \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota. \tag{i}$$

Sei nun

$$F \colon I \times \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota \longrightarrow \bigcup \{\{\iota\} \times \kappa_\iota | \ \iota \in I\}$$

definiert durch

$$F(\iota, f) := (\iota, f(\iota)).$$

Zu $(\iota, y) \in \bigcup \{\{\iota\} \times \kappa_\iota | \ \iota \in I\}$ ist jedes $f \colon I \longrightarrow \bigcup \{\kappa_\iota | \ \iota \in I\}$ mit $f(\iota) = y$ ein Urbild unter F. Damit ist F surjektiv und es folgt mit (i)

$$\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota = |\bigcup \{\{\iota\} \times \kappa_\iota | \ \iota \in I\}| \leq |I| \odot \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota = \prod_{\iota \in I} \kappa_\iota. \qquad \square$$

Deutlich interessanter ist die Potenzierung von Kardinalzahlen. Bevor wir hier einige exemplarische Ergebnisse vorstellen können, benötigen wir den Begriff der Kofinalität einer Ordinalzahl.

3.9 Kofinalität

3.9.1 Definition Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. Eine Menge X heißt *kofinal* in α, wenn $X \subseteq \alpha$ und X unbeschränkt in α ist, d.h.

$$(\forall \xi < \alpha)(\exists \eta \in X)[\xi \leq \eta]$$

gilt. Wir definieren

$$\mathrm{cf}(\alpha) := \inf \{|X| | \ X \text{ ist kofinal in } \alpha\}$$

und nennen $\mathrm{cf}(\alpha)$ die *Kofinalität* von α.

Gilt $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$, so heißt die Ordinalzahl α *regulär*, anderenfalls nennen wir α *singulär*.
Da α immer kofinal in α ist, haben wir

$$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha. \tag{3.21}$$

Die einzige Menge, die in 0 kofinal ist, ist die leere Menge. Also ist

$$\operatorname{cf}(0) = 0. \tag{3.22}$$

Ist $\alpha = S\beta$ und $\gamma < \alpha$, so ist $\gamma \leq \beta$ und damit ist $\{\beta\} \subseteq \alpha$ kofinal in α. Also haben wir

$$\operatorname{cf}(S\beta) = 1. \tag{3.23}$$

Ganz allgemein gilt

$$X \text{ kofinal in } \alpha \;\Rightarrow\; \sup X = \sup \alpha. \tag{3.24}$$

Wegen $X \subseteq \alpha$ ist ja $\sup X \leq \sup \alpha$ und für $\xi < \sup \alpha$ haben wir ein $\mu < \alpha$ mit $\xi < \mu$. Also gibt es auch ein $\eta \in X$ mit $\xi < \mu \leq \eta$ und damit ist auch $\sup \alpha \leq \sup X$.
Aus (3.22) und (3.23) folgt, daß die Kofinalität nur für Limeszahlen wirklich interessant wird. Dazu beobachten wir zuerst

$$\alpha \in \mathrm{Lim} \;\Rightarrow\; (X \text{ kofinal in } \alpha \;\Leftrightarrow\; \sup X = \alpha). \tag{3.25}$$

Ist nämlich X kofinal in $\alpha \in \mathrm{Lim}$, so haben wir nach (3.24) $\alpha = \sup \alpha = \sup X$. Ist umgekehrt $\sup X = \alpha$, so gilt für alle $\xi \in X$ zunächst $\xi \subseteq \alpha$ und wegen $\alpha \in \mathrm{Lim}$ daher $\xi < \alpha$, d.h. $X \subseteq \alpha$ und zu jedem $\xi < \alpha$ gibt es ein $\eta \in X$ mit $\xi < \eta$. Also ist X kofinal in α.
Wir haben nach Definition $\operatorname{cf}(\alpha) \in$ Card. Wir behaupten

$$\alpha \in \mathrm{Lim} \;\Rightarrow\; \operatorname{cf}(\alpha) \in \mathbb{K} \tag{3.26}$$

und haben dazu nur $\omega \leq \operatorname{cf}(\alpha)$ zu zeigen. Nehmen wir $\operatorname{cf}(\alpha) < \omega$ an, so haben wir eine Menge $X \subseteq \alpha$ die kofinal in α ist mit $|X| < \omega$. Dann ist aber $\sup X \in X$ und damit $\sup X < \alpha$. Dies widerspricht aber (3.25).
Wir wollen daher die trivialen Fälle 0 und 1, für die $\operatorname{cf}(0) = 0$ bzw. $\operatorname{cf}(1) = 1$ gilt, ausschließen und nur noch strikt reguläre Ordinalzahlen betrachten, d.h. reguläre Ordinalzahlen $\geq \omega$. Sei daher

$$\mathbb{R} := \{\kappa \mid\ \omega \leq \kappa \wedge \kappa \text{ regulär}\}.$$

Für $\kappa \in \mathbb{R}$ ist wegen $\omega \leq \kappa$ und $\kappa = \operatorname{cf}(\kappa)$ sowohl $\kappa \neq 0$ als auch $\kappa \neq S\beta$. Also ist $\kappa \in \mathrm{Lim}$ und mit (3.26) folgt

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{K}. \tag{3.27}$$

Für $\alpha \in \mathrm{Lim}$ gilt nach (3.26) speziell $\operatorname{cf}(\alpha) \in \mathrm{Lim}$. Damit erhalten wir $\operatorname{cf}(\omega) \leq \omega \leq \operatorname{cf}(\omega)$. Also gilt

$$\omega \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

Ist $f\colon \gamma \longrightarrow \alpha$ mit $\sup f[\gamma] = \alpha \in \mathrm{Lim}$, so ist $|f[\gamma]| \leq |\gamma| \leq \gamma$. Nach (3.25) ist $f[\gamma]$ kofinal in α. Wir nennen $f\colon \gamma \longrightarrow \alpha$ daher eine in α

kofinale Abbildung. Natürlich ist dann $\mathrm{cf}(\alpha) \le \gamma$. Wir haben also

$$f\colon \gamma \longrightarrow \alpha \wedge \sup f[\gamma] = \alpha \in \mathrm{Lim} \Rightarrow \mathrm{cf}(\alpha) \le \gamma. \tag{3.29}$$

Eine Charakterisierung der regulären Ordinalzahlen liefert das folgende Lemma.

3.9.2 Lemma *Es ist* $\kappa \in \mathbb{R}$ *genau dann, wenn* $\kappa \in \mathrm{Lim}$ *ist und*

$$(\forall \gamma < \kappa)(\forall f)[f\colon \gamma \longrightarrow \kappa \Rightarrow \sup f[\gamma] < \kappa]$$

gilt.

Lemma 3.9.2 besagt, daß reguläre Kardinalzahlen das Ersetzungsaxiom reflektieren. Ist nämlich $f\colon \kappa \longrightarrow \kappa$ eine Funktion und $\gamma < \kappa$, so ist $f[\gamma]$ in κ durch $\sup f[\gamma]$ beschränkt, d.h. $f[\gamma]$ ist „eine Menge relativ zu κ“.

Beweis: Sei zunächst $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann ist $\kappa \in \mathbb{K} \subseteq \mathrm{Lim}$. Gäbe es ein $\gamma < \kappa$ und ein $f\colon \gamma \longrightarrow \kappa$ mit $\kappa = \sup f[\gamma]$, so hätten wir $\mathrm{cf}(\kappa) \le \gamma < \kappa$ im Widerspruch zu $\kappa \in \mathbb{R}$.
Für die Gegenrichtung nehmen wir $\kappa \in \mathrm{Lim}$ und $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ an. Sei $X \subseteq \kappa$ kofinal in κ mit $|X| < \kappa$. Dann ist nach (3.25) $\sup X = \kappa$. Damit haben wir $f\colon |X| \longleftrightarrow X \subseteq \kappa$ mit $\sup(f[|X|]) = \sup X = \kappa$. □

Eine analoge Charakterisierung liefert:

3.9.3 Lemma *Es ist* $\kappa \in \mathbb{R}$ *genau dann, wenn* $\kappa \in \mathrm{Lim}$ *ist und*

$$(\forall X)[X \subseteq \kappa \wedge |X| < \kappa \Rightarrow \sup X < \kappa]$$

gilt.

Beweis: Gilt $\kappa \in \mathbb{R}$, so ist $\kappa \in \mathrm{Lim}$. Ist $X \subseteq \kappa$ mit $|X| < \kappa$, so ist X nicht kofinal in κ. Mit (3.25) folgt daraus $\sup X < \kappa$.
Ist umgekehrt $\kappa \in \mathrm{Lim}$ und $\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, so gibt es ein $X \subseteq \kappa$ das kofinal in X ist mit $|X| < \kappa$. Nach (3.25) folgt dann aber $\sup X = \kappa$. □

Zuletzt wollen wir einsehen, daß die Kofinalitäten von Limeszahlen immer schon regulär sind. Dann zeigen wir zuerst

3.9.4 Lemma *Es gibt eine kofinale ordnungstreue Funktion*

$$f\colon \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha.$$

Beweis: Da die Behauptung für $\alpha = 0$ oder Nachfolgerzahlen trivial ist, nehmen wir $\alpha \in \mathrm{Lim}$ an. Sei $X \subseteq \alpha$, X kofinal in α mit $|X| = \mathrm{cf}(\alpha)$ und $g\colon |X| \longleftrightarrow X$. Wir definieren

$$f(\eta) := \sup\{g(\eta), \sup\{f(\xi) + 1 \mid \xi < \eta\}\}.$$

für alle $\eta < |X|$ durch Rekursion nach η. Dann ist f ordnungstreu mit $g(\eta) \leq f(\eta)$. Zu $\mu < \alpha$ gibt es aber ein $\eta < |X|$ mit $\mu \leq g(\eta) \leq f(\eta)$. Also ist $f[|X|]$ unbeschränkt in α. Wir zeigen $f(\eta) < \alpha$ für alle $\eta < |X|$ durch Induktion nach η. Nach Induktionsvoraussetzung haben wir wegen $\alpha \in \mathrm{Lim}$

$$(\forall \xi < \eta)[f(\xi) + 1 < \alpha].$$

Also ist $\gamma := \sup\{f(\xi) + 1 |\ \xi < \eta\} \leq \alpha$. Hätten wir Gleichheit, so folgte $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \eta < |X| = \mathrm{cf}(\alpha)$. Also gilt $\gamma < \alpha$. Nun ist $f(\eta) = \sup\{g(\eta), \gamma\} < \alpha$, da $g(\eta) \in X \subseteq \alpha$ ist. $\square$

3.9.5 Lemma *Ist* $\alpha \in \mathrm{Lim}$ *und* $f : \alpha \longrightarrow \beta$ *ordnungstreu und* $f[\alpha]$ *kofinal in* β*, so ist* $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$.

Beweis: Ist $g : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ eine kofinale Abbildung, so ist $(f \circ g)[\mathrm{cf}(\alpha)]$ kofinal in β. Also ist $\mathrm{cf}(\beta) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$. Um $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$ zu sehen, sei $g : \mathrm{cf}(\beta) \longrightarrow \beta$ kofinal. Definiere $h(\xi) := \min\{\eta |\ f(\eta) > g(\xi)\}$. Ist $\mu < \alpha$, so ist $f(\mu) < \beta$ und es gibt ein $\xi < \mathrm{cf}(\beta)$ mit $f(\mu) \leq g(\xi) < f(h(\xi))$. Damit ist $\mu < h(\xi)$ und somit ist $h[\mathrm{cf}(\beta)]$ kofinal in α. Also $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\beta)$. $\square$

3.9.6 Satz *Für* $\alpha \in \mathrm{On}$ *ist* $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$.

Beweis: Für $\alpha = 0$ und Nachfolgerzahlen α ist die Behauptung klar. Sei also $\alpha \in \mathrm{Lim}$. Nach Lemma 3.9.4 gibt es eine ordnungstreue Funktion $f : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \alpha$ mit $f[\mathrm{cf}(\alpha)]$ kofinal in α. Mit Lemma 3.9.5 folgt dann $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$. $\square$

Ist $\alpha \in \mathrm{Lim}$, so haben wir nach Satz 3.9.6

$$\omega \leq \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha).$$

Damit erhalten wir als Korollar:

$$\alpha \in \mathrm{Lim} \ \Rightarrow\ \mathrm{cf}(\alpha) \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Durch (3.30) wird uns bestätigt, daß die Klasse $\mathbb{R}$ nicht leer ist, was wir allerdings bereits nach (3.28) wissen. Wir haben tatsächlich bisher noch nicht nachgewiesen, daß $\mathbb{R}$ außer ω weitere Elemente beinhaltet. Wir zeigen daher

3.9.7 Satz *Für alle* $\alpha \in \mathrm{On}$ *ist* $\aleph_{\alpha+1} \in \mathbb{R}$.

Beweis: Um einen Widerspruch zu erhalten, nehmen wir $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) \leq \aleph_\alpha$ an. Sei $f : \mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) \longrightarrow \aleph_{\alpha+1}$ eine in $\aleph_{\alpha+1}$ kofinale Abbildung. Dann gilt mit $\kappa := \mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1})$

$$(\forall \xi < \kappa)[|f(\xi)| \le \aleph_\alpha]$$

und

$$\sup_{\xi<\kappa} f(\xi) = \aleph_{\alpha+1}.$$

Mit den Lemmata 3.8.13 und 3.8.12 erhalten wir dann den Widerspruch

$$\begin{aligned} \aleph_{\alpha+1} &= |\sup_{\xi<\kappa} f(\xi)| \le \textstyle\sum_{\xi<\kappa} |f(\xi)| \\ &\le \textstyle\sum_{\xi<\kappa} \aleph_\alpha \le \kappa \odot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}. \end{aligned} \qquad \square$$

Wir nennen Kardinalzahlen der Form $\aleph_{\alpha+1}$ *Nachfolgerkardinalzahlen* und solche der Form $\aleph_\lambda$ mit $\lambda \in \mathrm{Lim}$ *Limeskardinalzahlen*. Wie wir eben gesehen haben, sind alle Nachfolgerkardinalzahlen regulär. Limeskardinalzahlen können durchaus singulär sein. So ist beispielsweise $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0$. Reguläre Limeskardinalzahlen heißen *schwach unerreichbar*. Wir können auf der Basis unserer bisherigen Axiome die Existenz schwach unerreichbarer Kardinalzahlen nicht beweisen.
Wegen $a \hookrightarrow \mathrm{Pow}(a)$ und $\neg(a \sim \mathrm{Pow}(a))$ gilt offenbar

$$|a| < |\mathrm{Pow}(a)|.$$

Damit erhalten wir

$$a^+ \le |\mathrm{Pow}(a)|. \tag{3.31}$$

Die Annahme, daß hier immer Gleichheit gilt, heißt die *allgemeine Kontinuumshypothese*. Um (3.31) besser schreiben zu können, bemerken wir, daß

$$\mathrm{Pow}(a) \sim {}^a2 \tag{3.32}$$

gilt. Die Zuordnung der charakteristischen Funktion

$$\chi_b(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in b \\ 0 & \text{falls } x \notin b \end{cases}$$

zu jeder Menge $b \in \mathrm{Pow}(a)$ liefert offensichtlich

$$\mathrm{Pow}(a) \longleftrightarrow {}^a2\,.$$

Also gilt

$$|\mathrm{Pow}(a)| = |{}^a2| = 2^{|a|}. \tag{3.33}$$

Damit läßt sich (3.31) schreiben als

$$\aleph_{\alpha+1} \le 2^{\aleph_\alpha}. \tag{3.34}$$

Man definiert die Beth-Funktion durch

$$\begin{aligned}
&\beth_0 := \aleph_0 \\
&\beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha} \\
&\beth_\lambda := \sup\{\beth_\xi \mid \xi < \lambda\} \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim}.
\end{aligned}$$

Die Abbildung

$$\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha}$$

nennt man oft auch die *Kontinuumsfunktion*. Reguläre Limeskardinalzahlen, die gegenüber der Kontinuumsfunktion abgeschlossen sind, heißen *(stark) unerreichbar*. Für unerreichbare Kardinalzahlen μ gilt

$$\beth_\mu = \mu, \tag{3.35}$$

denn wir haben $\mu \leq \beth_\mu$ und zeigen $\beth_\xi < \mu$ für alle $\xi < \mu$ durch Induktion nach ξ, wobei im Nachfolgerfall der Abschluß unter der Kontinuumsfunktion und im Limesfall die Regularität von μ zum Tragen kommt.

3.10 Grundeigenschaften der Kardinalzahlexponentiation

Wir haben in Abschnitt 3.8 bereits eingesehen, daß Kardinal- und Ordinalzahlexponentiation auf endlichen Kardinal- und Ordinalzahlen übereinstimmen. Die noch offene Frage ist daher

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = ?. \tag{3.36}$$

Wir werden diese schwierige Frage in dieser Vorlesung nicht vollständig beantworten (auf Grund der üblichen Axiome für das Mengenuniversum läßt sie sich gar nicht vollständig beantworten), sondern nur einige der Grundeigenschaften der Kardinalzahlexponentiation studieren.
Sind $\mu, \nu \in$ Card mit $\mu \leq \nu$, so gilt wegen ${}^\kappa\mu \subseteq {}^\kappa\nu$ und ${}^\mu\kappa \hookrightarrow {}^\nu\kappa$ sofort $\mu^\kappa \leq \nu^\kappa$ und $\kappa^\mu \leq \kappa^\nu$, d.h. wir haben die schwache Monotonie

$$\mu \leq \nu \Rightarrow \mu^\kappa \leq \nu^\kappa \text{ und } \kappa^\mu \leq \kappa^\nu. \tag{3.37}$$

Aus der Definition der Kardinalzahlpotenz erhalten wir weiter

$$|{}^b a| = |a|^{|b|}. \tag{3.38}$$

Weitere grundlegende Eigenschaften der Kardinalzahlpotenz stellen wir im folgenden Lemma bereit.

3.10.1 Lemma *Sind κ, λ Kardinalzahlen. Dann gilt:*

(i) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \odot \mu}$

(ii) $\kappa^{\sum_{\iota \in I} \kappa_\iota} = \prod_{\iota \in I} \kappa^{\kappa_\iota}$ *und damit* $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \odot \kappa^\mu$

(iii) $\prod\limits_{\iota \in I} \kappa = \kappa^{|I|}$

(iv) *Für* $\lambda \neq 0$ *ist* $0^\lambda = 0$ *und* $1^\lambda = 1$*.*

(v) *Für* $2 \leq \kappa \leq \lambda$ *und* $\lambda \in \mathbb{K}$ *ist* $\kappa^\lambda = 2^\lambda$*.*

(vi) *Für endliches* λ *und* $\kappa \in \mathbb{K}$ *ist* $\kappa^\lambda = \kappa$*.*

(vii) *Für* $\kappa > 1$ *ist* $\lambda < \kappa^\lambda$*.*

(viii) *Für* $\lambda \geq 1$ *ist* $\kappa \leq \kappa^\lambda$*.*

(ix) *Für* $\lambda \leq \kappa \in \mathbb{K}$ *ist* $\kappa^\lambda \leq 2^\kappa$*.*

Beweis: *(i)*: Zu $f \in {}^\mu({}^\lambda\kappa)$ und $x \in \mu, y \in \lambda$ sei $F_f(x, y) := (f(x))(y)$. Die Abbildung $F\colon {}^\mu({}^\lambda\kappa) \longrightarrow {}^{\mu\times\lambda}\kappa$ mit $F(f) := F_f$ ist offenbar injektiv. Zu jedem $g \in {}^{\mu\times\lambda}\kappa$ erhalten wir ein Urbild $G = \lambda x\,.\,(\lambda y\,.\,g(x, y)) \in {}^\mu({}^\lambda\kappa)$. Also ist $F\colon {}^\mu({}^\lambda\kappa) \longleftrightarrow {}^{\mu\times\lambda}\kappa$ und damit nach (3.38)

$$(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\odot\mu}$$

(ii): Ist $f\colon I \longrightarrow \bigcup_{\iota \in I} \kappa^{\kappa_\iota}$, so definieren wir für $\iota \in I$ und $x \in \kappa_\iota$

$$F_f(\iota, x) := f(\iota)(x).$$

Dann ist

$$F_f\colon \bigcup \{\{\iota\} \times \kappa_\iota |\ \iota \in I\} \longrightarrow \kappa.$$

Die Zuordnung $f \longmapsto F_f$ ist offenbar injektiv und zu

$$g\colon \bigcup \{\{\iota\} \times \kappa_\iota |\ \iota \in I\} \longrightarrow \kappa$$

ist die durch

$$h(\iota) := \lambda x\,.\,g(\iota, x)$$

definierte Funktion ein Urbild.
(iii): Wir haben mit (3.38)

$$\prod_{\iota \in I} \kappa = |\prod_{\iota \in I} \kappa| = |{}^I\kappa| = \kappa^{|I|}.$$

(iv): Für $\lambda \neq 0$ ist ${}^\lambda\emptyset = \emptyset$ und ${}^\lambda 1 = \{f\}$, wobei f die konstante Funktion mit $f(x) = \emptyset$ für alle $x \in \lambda$ ist.

(v): Es ist $\kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \odot \lambda} = 2^\lambda \leq \kappa^\lambda$.
(vi): $\kappa^\lambda = \prod_{n<\lambda} \kappa = \underbrace{\kappa \odot \cdots \odot \kappa}_{\lambda\text{-fach}} = \kappa$.
(vii): Ist $2 \leq \kappa$, so gilt $\lambda < 2^\lambda \leq \kappa^\lambda$.
(viii): Dies ist ein Spezialfall von (3.37).
(ix): Mit *(v)* folgt $\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$. $\square$

Für $\kappa \in \mathbb{R}$ und $\lambda < \kappa$ ist

$$^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\lambda\alpha, \tag{3.39}$$

denn $\supseteq$ gilt trivialerweise und zu jedem $f\colon \lambda \longrightarrow \kappa$ gibt es ein $\alpha \in \kappa$, das $f[\lambda]$ beschränkt. Also gilt

$$\kappa^\lambda = \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda \tag{3.40}$$

wegen

$$\kappa^\lambda = |\bigcup_{\alpha<\kappa} {}^\lambda\alpha| \leq \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda \leq \kappa \odot \kappa^\lambda = \kappa^\lambda.$$

Ist insbesondere $\kappa = \aleph_{\eta+1}$, so erhalten wir für $\lambda < \kappa$

$$\aleph_{\eta+1}^\lambda = \sum_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda \leq \sum_{\alpha<\kappa} \aleph_\eta^\lambda = \kappa \odot \aleph_\eta^\lambda. \tag{3.41}$$

Wir bemerken, daß (3.41) auch für $\aleph_{\eta+1} = \kappa \leq \lambda$ gilt, denn dann ist $\kappa^\lambda = 2^\lambda = \kappa \odot 2^\lambda = \kappa \odot \aleph_\eta^\lambda$. D.h. es gilt die HAUSDORFFsche Formel

$$\aleph_{\eta+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\eta^{\aleph_\beta} \odot \aleph_{\eta+1}. \tag{3.42}$$

Um wenigstens zu einer groben Charakterisierung von $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ zu gelangen, zeigen wir das folgende Lemma.

3.10.2 Lemma *Sei $\alpha \in \mathrm{Lim}$ und $\kappa \in \mathbb{K}$. Dann gilt*

$$\aleph_\alpha^\kappa = \begin{cases} \sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^\kappa & \textit{falls } \kappa < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \\ (\sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^\kappa)^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} & \textit{falls } \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \kappa. \end{cases}$$

Beweis: Sei zunächst $\kappa < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$. Dann ist

$$^\kappa\aleph_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} {}^\kappa\aleph_\xi,$$

denn $\supseteq$ ist klar und zu $f\colon \kappa \longrightarrow \aleph_\alpha$ gibt es wegen $\kappa < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ ein $\xi < \alpha$ mit $\sup f[\kappa] < \aleph_\xi$. Also ist

$$\begin{aligned}\aleph_\alpha^\kappa &= |\bigcup_{\xi<\alpha} {}^\kappa\aleph_\xi| \le \sum_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^\kappa \\ &\le |\alpha| \odot \sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^\kappa = \sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^\kappa \\ &\le \aleph_\alpha^\kappa.\end{aligned}$$

Sei nun $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \le \kappa$. Sei $\lambda := \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$ und $f\colon \lambda \longrightarrow \aleph_\alpha$ eine kofinale ordnungstreue Funktion. Dann gilt $\sup_{\xi<\lambda} f(\xi) = \aleph_\alpha$. Also folgt

$$\aleph_\alpha = \sup_{\xi<\lambda} f(\xi) \le \sum_{\xi<\lambda} |f(\xi)| \le \prod_{\xi<\lambda} |f(\xi)|.$$

Also ist wegen $\lambda \le \kappa$:

$$\begin{aligned}\aleph_\alpha^\kappa &\le (\prod_{\xi<\lambda} |f(\xi)|)^\kappa = \prod_{\xi<\lambda} |f(\xi)|^\kappa \\ &\le \prod_{\xi<\lambda} (\sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^\kappa) = (\sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^\kappa)^\lambda \le (\aleph_\alpha^\kappa)^\lambda \\ &= \aleph_\alpha^{\kappa\odot\lambda} = \aleph_\alpha^\kappa.\end{aligned}$$ □

Mit Hilfe von Lemma 3.10.2 zeigen wir den nun folgenden Charakterisierungssatz für die Kardinalzahlexponentiation.

3.10.3 Satz *Es gelten*

(i) $\alpha \le \beta \Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$

(ii) $(\forall \gamma < \alpha)[\aleph_\alpha \le \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}]$

(iii) $\beta < \alpha \wedge (\forall \gamma < \alpha)[\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha] \Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \textit{falls } \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \\ \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} & \textit{falls } \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \le \aleph_\beta \end{cases}$

Beweis: *(i)*: Lemma 3.10.1 *(v)*.
(ii): $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \le (\aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta\odot\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$.
(iii): Sei zunächst $\alpha = \delta + 1$. Nach der HAUSDORFFschen Formel (3.42) gilt dann

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\delta^{\aleph_\beta} \odot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha,$$

denn nach Voraussetzung ist $\aleph_\delta^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$.
Sei nun $\alpha \in \mathrm{Lim}$. Ist $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha)$, so folgt mit Lemma 3.10.2

$$\aleph_\alpha \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sup_{\xi<\alpha}(\aleph_\xi^{\aleph_\beta}) \le \aleph_\alpha.$$

Ist $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \le \aleph_\beta$, so folgt mit Lemma 3.10.2

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = (\sup_{\xi<\alpha} \aleph_\xi^{\aleph_\beta})^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} \le \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)} \le \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}.$$

□

Als Korollar zu Satz 3.10.3 erhalten wir

3.10.4 Korollar *Für Ordinalzahlen α und β ist $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$*

(i) $2^{\aleph_\beta}$ *oder*

(ii) $\aleph_\alpha$ *oder*

(iii) $\aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}$ *für ein $\gamma \le \alpha$ derart, daß $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \le \aleph_\beta < \aleph_\gamma$ ist.*

Beweis: Ist $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq 2^{\aleph_\beta}$ und $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \neq \aleph_\alpha$, so ist $\beta < \alpha$ und wir definieren

$$\kappa := \inf\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\}.$$

Dann ist $\kappa \le \aleph_\alpha$ und es gibt ein γ mit $\kappa = \aleph_\gamma$. Nehmen wir $\aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\gamma)$ an, so ist $\beta < \gamma$ und für jedes $\xi < \gamma$ auch $\aleph_\xi^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Gilt $\aleph_\xi^{\aleph_\beta} < \aleph_\gamma$ für alle $\xi < \gamma$, so folgt mit Satz 3.10.3 *(iii)* der Widerspruch

$$\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma \le \aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

Gilt $\aleph_\gamma \le \aleph_\xi^{\aleph_\beta}$ für ein $\xi < \gamma$, so folgt mit Satz 3.10.3 *(ii)* $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\xi^{\aleph_\beta}$ im Widerspruch zur Minimalität von $\aleph_\gamma$.
Damit muß $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \le \aleph_\beta$ sein. Nehmen wir $\aleph_\gamma \le \aleph_\beta$ an, so erhalten wir

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$$

im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. Demnach gilt

$$\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \le \aleph_\beta < \aleph_\gamma$$

und es folgt mit Satz 3.10.3 *(iii)*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}. \qquad \square$$

Wir erkennen aus Korollar 3.10.4, daß die Gimel-Funktion

$$\gimel(\kappa) := \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \tag{3.43}$$

für die Kardinalzahlexponentiation eine wesentliche Rolle spielt.
Um die Gimel-Funktion etwas besser kennenzulernen, definieren wir

$$2^{<\kappa} := \sup\{2^\xi \mid \xi < \kappa \wedge \xi \in \mathrm{Card}\}.$$

3.10.5 Lemma *Ist κ eine Limeskardinalzahl, so ist $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.*

Beweis: Ist $f\colon \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ eine kofinale Abbildung, so ist, da κ eine Limeskardinalzahl ist, auch $\tilde{f}\colon \mathrm{cf}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ mit $\tilde{f}(\xi) := f(\xi)^+ =: \kappa_\xi$ kofinal. Damit ist $\kappa = \sup_{\iota<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\iota$. Nach Lemma 3.8.15 *(iii)* gilt dann $\kappa = \sum_{\iota<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\iota$ und es folgt

$$\begin{aligned} 2^\kappa &= 2^{\sum_{\iota<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\iota} = \prod_{\iota<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_\iota} \leq \prod_{\iota<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{<\kappa} \\ &= (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\kappa. \end{aligned} \qquad \square$$

Ist nun $\kappa \in \mathbb{R}$, so ist

$$\beth(\kappa) = \kappa^\kappa = 2^\kappa.$$

Ist κ singulär und gibt es $\lambda \in \mathbb{K} \cap \kappa$, so daß $2^\gamma = 2^\lambda$ für alle $\gamma < \kappa$ mit $\gamma \in \mathbb{K}$ gilt, so ist

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (2^\sigma)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\sigma$$

für ein $\sigma < \kappa$ mit $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \sigma$. Das heißt aber

$$2^\kappa = 2^{<\kappa}.$$

Ist schließlich κ singulär und ist $\{2^\gamma \mid \gamma < \kappa\}$ unbeschränkt in 2^κ, so ist nach Lemma 3.9.5 $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa)$. Damit folgt $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \beth(2^{<\kappa})$. Zusammenfassend erhalten wir

3.10.6 Satz *Es ist*

$$2^\kappa = \begin{cases} \beth(\kappa) & \textit{falls } \kappa \in \mathbb{R} \\ 2^{<\kappa} & \textit{falls } 2^\gamma \textit{ unterhalb } \kappa \textit{ schließlich konstant wird} \\ \beth(2^{<\kappa}) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Nehmen wir

(GCH) $\quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$

an, so ist $2^{<\kappa} = \kappa$ und die Kontinuumsfunktion wird niemals konstant, d.h. wir haben:

3.10.7 Korollar *Gilt (GCH), so ist* $\beth(\kappa) = 2^\kappa = \kappa^+$.

Zusammen mit Satz 3.10.4 folgt dann

3.10.8 Satz *Gilt (GCH), so ist*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \textit{falls } \aleph_\beta < \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1} & \textit{falls } \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1} & \textit{falls } \aleph_\alpha \leq \aleph_\beta. \end{cases}$$

4. Axiomatische Mengenlehre

4.1 Das fundierte Universum

Wir haben in Abschnitt 2.5 die Hierarchie der erblich endlichen Mengen eingeführt. Unter Zuhilfenahme transfiniter Rekursion läßt sich diese ins Unendliche fortsetzen. Wir definieren

4.1.1 Definition

$$\begin{array}{lcl} V_0 & := & \emptyset \\ V_{\alpha+1} & := & \mathrm{Pow}(V_\alpha) \\ V_\lambda & := & \bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim}. \end{array}$$

Durch transfinite Induktion nach α ergibt sich dann sofort

$$(\forall\alpha\in\mathrm{On})[V_\alpha \in \mathcal{U}]. \tag{4.1}$$

Wir definieren

$$\mathbb{V} := \bigcup_{\xi\in\mathrm{On}} V_\xi$$

und nennen $\mathbb{V}$ das *fundierte Universum*. Wie in (2.27) erhalten wir

$$\mathrm{Tran}(V_\alpha) \;\Rightarrow\; V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1} \tag{4.2}$$

und zeigen

$$(\forall\alpha\in\mathrm{On})[\mathrm{Tran}(V_\alpha)] \tag{4.3}$$

durch transfinite Induktion nach α. Dabei haben wir nur noch den Limesfall zu ergänzen. Für $x \in y \in V_\lambda$ und $\lambda \in \mathrm{Lim}$ folgt aber sofort $x \in y \in V_\xi$ für ein $\xi < \lambda$ und damit nach Induktionsvoraussetzung $x \in V_\xi \subseteq V_\lambda$.

Aus (4.2) und (4.3) ergibt sich mit der Tatsache, daß für $\xi < \lambda \in \mathrm{Lim}$ per definitionem $V_\xi \subseteq V_\lambda$ gilt,

$$\alpha \leq \beta \;\Rightarrow\; V_\alpha \subseteq V_\beta. \tag{4.4}$$

Die auf J. von Neumann zurückgehende Hierarchie der V_α ist somit kumulativ.

Wegen $V_\alpha \in V_{\alpha+1}$ folgt durch Induktion nach β sofort

$$\alpha < \beta \;\Rightarrow\; V_\alpha \in V_\beta. \tag{4.5}$$

Analog zu Abschnitt 2.5 zeigen wir, daß im fundierten Universum die Axiome der Transitivität, Extensionalität und der Komprehension erfüllt sind. Ebenso sehen wir ein, daß das Paar- und Vereinigungsmengenaxiom gilt.
Es ist $\emptyset \in V_\omega$, und für $x \in V_\omega$ ist $x \in V_n$ für ein $n < \omega$ und daher $x \cup \{x\} \subseteq V_n$. Also ist $Sx \in V_{n+1} \subseteq V_\omega$, und wegen $V_\omega \in \mathbb{V}$ gilt somit das Unendlichkeitsaxiom in $\mathbb{V}$.
Für $a \in V_\alpha$ und $b \subseteq a$ ist $b \in V_{\alpha+1}$. Also gilt das Aussonderungsaxiom in $\mathbb{V}$. Hier bemerken wir, daß das Aussonderungsaxiom bereits in jedem V_λ mit $\lambda \in \mathrm{Lim}$ gilt. Dies ist offenbar auch für das Potenzmengenaxiom richtig.

Fassen wir diese Beobachtungen zusammen, so erhalten wir

4.1.2 Satz *Ist $\lambda \in \mathrm{Lim}$ und $\omega < \lambda$, so gelten in V_λ alle ontologischen Axiome, das Paar-, Vereinigungs-, Potenzmengen- und Aussonderungsaxiom sowie das Unendlichkeitsaxiom.*

Wir haben also bei $V_{\omega+\omega}$ zum erstenmal ein Universum vorliegen, in dem die in Satz 4.1.2 genannten Axiome richtig sind. Wir wollen uns kurz überlegen, daß in $V_{\omega+\omega}$ weder Kollektions- noch Ersetzungsaxiom gelten können. Dazu zeigen wir

$$V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha \tag{4.6}$$

durch Induktion nach α. Für $\alpha = 0$ ist dies klar. Ist $x \in V_{\alpha+1} \cap \mathrm{On}$, so ist wegen $\mathrm{Tran}(\mathrm{On})$ auch $x \subseteq V_\alpha \cap \mathrm{On}$. Also ist nach Induktionsvoraussetzung $x \subseteq \alpha$ und damit $x < \alpha + 1$.
Ist $\alpha \in \mathrm{Lim}$ und $x \in V_\alpha \cap \mathrm{On}$, so ist $x \in V_\xi \cap \mathrm{On}$ für ein $\xi < \lambda$ und damit nach Induktionsvoraussetzung $x < \xi < \alpha$. Damit haben wir

$$V_\alpha \cap \mathrm{On} \subseteq \alpha. \tag{i}$$

Für die umgekehrte Inklusion gilt

$$\xi = V_\xi \cap \mathrm{On} \in V_\alpha \cap \mathrm{On}$$

für alle $\xi < \alpha$. Also ist

$$\alpha \subseteq V_\alpha \cap \mathrm{On}. \tag{ii}$$

Aus (i) und (ii) folgt aber (4.6). ☐

4.1.3 Definition Zu $a \in \mathbb{V}$ definieren wir

$$\mathrm{rk}(a) := \inf\{\alpha \mid a \in V_\alpha\}$$

und nennen $\mathrm{rk}(a)$ den *Rang* der Menge $a \in \mathbb{V}$.

Offensichtlich ist $\text{rk}(a)$ immer eine Nachfolgerzahl.
Es gilt

$$b \in a \in \mathbb{V} \;\Rightarrow\; \text{rk}(b) < \text{rk}(a), \tag{4.7}$$

denn für $\alpha := \text{rk}(a)$ gilt $a \in V_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi$. Wegen $b \in a \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi$ folgt aber $\text{rk}(b) < \text{rk}(a)$. □

Als unmittelbare Folgerung von (4.7) haben wir

$$(\forall a \in \mathbb{V})[a \notin a]. \tag{4.8}$$

Nun ist nach (4.6)

$$\omega \in V_{\omega+\omega}. \tag{4.9}$$

Wir definieren nun eine Funktion

$$f\colon \omega \longrightarrow V_{\omega+\omega}$$

vermöge

$$f(n) := V_{\omega+n}.$$

Dann ist $\text{dom}(f) = \omega \in V_{\omega+\omega}$ und für jedes $n \in \text{dom}(f)$ auch $f(n) = V_{\omega+n} \in V_{\omega+\omega}$. Die Annahme

$$\text{rng}(f) \in V_{\omega+\omega}$$

führt aber zu

$$V_{\omega+\omega} = \bigcup \text{rng}(f) \in V_{\omega+w},$$

was (4.8) widerspricht. Also haben wir:

4.1.4 Lemma *Es gibt eine Funktion f mit $\text{dom}(f) \in V_{\omega+\omega}$ und $\text{rng}(f) \notin V_{\omega+\omega}$. Damit kann in $V_{\omega+\omega}$ weder das Ersetzungsaxiom noch das Kollektionsaxiom gelten.*

Andererseits ist klar, daß in $\mathbb{V}$ das Kollektionsaxiom und damit auch das Ersetzungsaxiom gelten, falls dies in $\mathcal{U}$ der Fall ist. Ist nämlich $a \in \mathbb{V}$ und gilt

$$(\forall x \in a)(\exists y \in \mathbb{V})[\mathbb{V} \models \varphi(x, y)],$$

so gibt es ein $z \in \mathcal{U}$ mit

$$(\forall x \in a)(\exists y \in (z \cap \mathbb{V}))[\mathbb{V} \models \varphi(x, y)].$$

Setzen wir

$$\alpha := \sup \{\text{rk}(y) \mid \; y \in z \cap \mathbb{V}\},$$

so ist $z \cap \mathbb{V} \subseteq V_\alpha$ und damit $z \cap \mathbb{V} \in \mathbb{V}$.

Als Folgerung von Lemma 4.1.4 erhalten wir, daß weder das Kollektions- noch das Ersetzungsaxiom aus dem Aussonderungsaxiom gefolgert werden können. Um diese Folgerung stichhaltig zu machen, werden wir im folgenden Abschnitt den logischen Rahmen fixieren und so zur sogenannten axiomatischen Mengenlehre vordringen.

Zunächst wollen wir aber noch einige Beobachtungen über das fundierte Universum machen. Als erstes soll der Name begründet werden. Dazu zeigen wir

4.1.5 Satz *Die Relation* $\in \restriction \mathbb{V}$ *ist wohlfundiert.*

Beweis: Beginnen wir mit der Fundiertheit. Ist $A \subseteq \mathbb{V}$ und $A \neq \emptyset$, so ist auch $A^0 := \{\text{rk}(a) \mid a \in A\} \neq \emptyset$. Wir setzen $\alpha := \inf A^0$ und wählen ein $a \in A$ mit $\text{rk}(a) = \alpha$. Für jedes $b \in a$ gilt dann nach (4.7) $\text{rk}(b) < \text{rk}(a)$. Also gilt $(\forall b \in A)[b \notin a]$.

Wir konnten hier direkt zeigen, daß nicht nur jede nichtleere Menge, sondern sogar jede nichtleere Teilklasse von $\mathbb{V}$ ein $\in$-minimales Element besitzt. Auf Grund der folgenden Eigenschaft und Satz 3.1.4 hätte es aber genügt, nur $A \in \mathbb{V}$ vorauszusetzen.

Wegen $\{x \in \mathbb{V} \mid x \in a\} = a \in \mathcal{U}$ für alle $a \in \mathbb{V}$ ist $\in \restriction \mathbb{V}$ auch wohlfundiert. $\square$

Als Folgerung aus Satz 4.1.5 erhalten wir das Prinzip der $\in$-Induktion für Teilklassen von $\mathbb{V}$, d.h. wir haben

4.1.6 Satz *Gilt* $(\forall x \in \mathbb{V})[(\forall y \in x)(y \in A) \to x \in A)]$ *für* $A \subseteq \mathbb{V}$*, so ist* $A = \mathbb{V}$.

Eine oft benutzte Formulierung von Satz 4.1.6 erhalten wir, wenn wir $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ setzen. Dann erhalten wir für $\mathbb{V}$ das Schema

$$(\forall x)[(\forall y \in x)\varphi(y) \to \varphi(x)] \to (\forall x)\varphi(x). \tag{4.10}$$

der $\in$-*Induktion*. Durch Kontraposition erhalten wir aus (4.10)

$$(\exists x)\varphi(x) \to (\exists x)[\varphi(x) \wedge (\forall y \in x)\neg\varphi(y)]. \tag{4.11}$$

Wir kürzen (4.10) (bzw. das dazu logisch äquivalente (4.11)) oft mit *(Fund)* ab und sprechen vom *Fundierungsschema*.

4.1.7 Satz *Das Mengenuniversum* $\mathcal{U}$ *erfüllt genau dann das Fundierungsschema, wenn* $\mathbb{V} = \mathcal{U}$ *ist.*

Beweis: Ist $\mathbb{V} = \mathcal{U}$, so folgt mit Satz 4.1.6, daß in $\mathcal{U}$ das Fundierungsschema gilt. Gilt umgekehrt das Fundierungsschema in $\mathcal{U}$, so ist $\in$ eine wohlfundierte Relation. Wir zeigen $(\forall x \in \mathcal{U})[x \in \mathbb{V}]$ durch $\in$-Induktion nach x. Die Induktionsvoraussetzung liefert

$$(\forall y \in x)[y \in \mathbb{V}]. \tag{i}$$

Wir definieren

$$\beta := \sup \{\mathrm{rk}(y) \mid y \in x\}.$$

Dann gilt $x \subseteq V_\beta$ und damit $x \in V_{\beta+1} \subseteq \mathbb{V}$. Also erhalten wir aus (i)

$$x \in \mathbb{V}$$

und mit $\in$-Induktion schließlich

$$(\forall x \in \mathcal{U})[x \in \mathbb{V}]. \tag{ii}$$

Da trivialerweise $\mathbb{V} \subseteq \mathcal{U}$ ist, erhalten wir aus (ii) dann $\mathcal{U} = \mathbb{V}$. $\square$

Wie wir in Abschnitt 3.1 über fundierte Relationen gesehen haben, genügt es, anstelle des Fundierungsschemas das *Fundierungsaxiom*

(Fu) $\quad a \in \mathcal{U} \wedge a \neq 0 \to (\exists x \in a)(\forall y \in x)[y \notin a]$

zu betrachten. Gilt nämlich *(Fu)* in $\mathcal{U}$, d.h. $\mathrm{Wf}(\in)$, so folgt aus Satz 3.1.4 bereits

$$A \neq 0 \;\Rightarrow\; (\exists x \in A)(\forall y \in x)[y \notin A],$$

was die Klassenschreibweise von (4.11) ist. Wir wollen im folgenden immer von einem fundierten Universum ausgehen. Wir können dies tun, da das Fundierungsaxiom, relativ zu den übrigen Axiomen, in dem Sinne unproblematisch ist, daß dessen Hinzunahme nicht zu Widersprüchen führen kann. Wir sagen, daß das Fundierungsaxiom *relativ konsistent* zu den übrigen Axiomen ist. Im folgenden Abschnitt werden wir darauf genauer eingehen.
Im fundierten Universum ist die Rangfunktion für jede Menge definiert. Es gilt

$$\mathrm{rk}(x) = \sup \{\mathrm{rk}(y) \mid y \in x\} + 1. \tag{4.12}$$

Setzen wir nämlich $\sigma := \sup \{\mathrm{rk}(y) \mid y \in x\}$, so gilt $x \subseteq V_\sigma$ und damit $\mathrm{rk}(x) \leq \sigma + 1$. Um die entgegengesetzte Ungleichung zu erhalten, beobachten wir zunächst, daß immer

$$\mathrm{rk}(x) \notin \mathrm{Lim} \tag{4.13}$$

gilt. Anderenfalls könnte ja nicht $x \in V_{\mathrm{rk}(x)} \setminus \bigcup_{\xi < \mathrm{rk}(x)} V_\xi$ gelten. Ist $\mathrm{rk}(x) = \delta + 1$, so ist wegen (4.7) $\sigma \leq \delta$ und damit $\sigma + 1 \leq \mathrm{rk}(x)$. $\square$

Man überlegt sich leicht, daß mit (4.12) auch

$$\mathrm{rk}(x) = \sup \{\mathrm{rk}(y) \mid y \in \mathrm{TC}(x)\} + 1$$

gilt.

Im fundierten Universum lassen sich Klassen „lokalisieren“. D.h. es läßt sich eine Funktion τ so angeben, daß für $A \subseteq \mathbb{V}$

$$\tau(A) \subseteq A \text{ und } [A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \tau(A) \in \mathbb{V} \wedge \tau(A) \neq \emptyset] \tag{4.14}$$

gilt. Dazu definieren wir einfach

$$\tau(A) := \{x \in A \mid\ (\forall y \in A)[\mathrm{rk}(x) \leq \mathrm{rk}(y)]\}.$$

Für $A = \emptyset$ ist $\tau(A) = \emptyset \in \mathbb{V}$, und für $A \neq \emptyset$ setzen wir $\alpha := \inf\{\mathrm{rk}(x) \mid\ x \in A\}$. Dann ist $\tau(A) \subseteq V_\alpha$ und damit sowohl $\tau(A) \in \mathbb{V}$ als auch $\tau(A) \neq \emptyset$.

Als eine Anwendung des *Lokalisierungsprinzips* (das auf TARSKI zurückgeht) zeigen wir

4.1.8 Satz *Sei $R \subseteq \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ eine fundierte Relation. Dann gilt das Prinzip der transfiniten Induktion entlang R, d.h. aus*

$$(\forall x)[(\forall y)[y\ R\ x \to \varphi(y)] \to \varphi(x)]$$

erhalten wir

$$(\forall x)\varphi(x).$$

Analog dazu besitzt jede nichtleere Klasse ein R-minimales Element.

Beweis: Sei A eine nichtleere Klasse. Zu allen $x \in \mathbb{V}$ definieren wir die Klassen $\hat{x}_A := \{y \in A \mid\ y\ R\ x\}$ und dann die Relation

$$\begin{aligned} S := &\{(y,x) \mid\ y\ R\ x \wedge y \in \tau(\hat{x}_A)\} \\ = &\{(y,x) \mid\ y\ R\ x \wedge y \in A \wedge (\forall z \in A)[z\ R\ x \;\Rightarrow\; \mathrm{rk}(y) \leq \mathrm{rk}(z)]\}. \end{aligned}$$

Als Teilrelation von R ist S fundiert, und wegen

$$\{y \mid\ y\ S\ x\} = \tau(\hat{x}_A) \in \mathbb{V}$$

ist S sogar wohlfundiert. Nach Satz 3.1.4 besitzt A ein S-minimales Element $x \in A$. Gäbe es ein $y \in A$ mit $y\ R\ x$, so gäbe es ein solches mit minimalem Rang. Für dieses hätten wir aber $y\ S\ x$ im Widerspruch zur S-Minimalität von x. Also ist x auch R-minimal. □

Als eine weitere Anwendung des Lokalisierungsprinzips zeigen wir, daß im fundierten Universum das Ersetzungsaxiom äquivalent zu Kollektion zusammen mit Aussonderung ist, d.h. wir zeigen

4.1.9 Satz *Ist $\mathbb{V}$ auf der Basis des Ersetzungsaxioms konstruiert (d.h. $\mathbb{V}$ ist in einem Universum $\mathcal{U}$ definiert, in dem das Ersetzungsaxiom gilt), so gilt in $\mathbb{V}$ auch das Kollektionsaxiom.*

Erfüllt $\mathcal{U}$ das Aussonderungs- und das Auswahlaxiom, so gilt das Auswahlaxiom auch in $\mathbb{V}$.

Beweis: Wir haben bereits gezeigt, daß das Aussonderungsaxiom aus dem Ersetzungsaxiom folgt, also können wir $\mathbb{V}$ konstruieren und seine Eigenschaften nachweisen (für die wir nie mehr als nur Aussonderung gebraucht haben).
Ist $a \in \mathbb{V}$ mit $a \neq \emptyset$ und gilt

$$(\forall x \in a)(\exists y \in \mathbb{V})[\mathbb{V} \models \varphi(x, y)],$$

so bilden wir für jedes $x \in a$ die Klasse

$$\{y \in \mathbb{V} |\ \mathbb{V} \models \varphi(x, y)\}.$$

Dann betrachten wir deren Lokalisierung

$$x_l := \tau(\{y \in \mathbb{V} |\ \mathbb{V} \models \varphi(x, y)\}).$$

Nun ist $x \mapsto x_l$ eine Funktion mit Definitionsbereich a, und wir erhalten

$$b := \bigcup_{x \in a} x_l \in \mathbb{V}.$$

Damit gilt

$$(\forall x \in a)(\exists y \in b)[\mathbb{V} \models \varphi(x, y)].$$

Wir wollen nun das Auswahlaxiom behandeln. Zu $a \in \mathbb{V}$ existiert eine Auswahlfunktion f, für die wir mittels Aussonderung und Paarmengenaxiom $\mathrm{dom}(f) = a \cup \{\emptyset\}$ und $f(\emptyset) = \emptyset$ annehmen dürfen. Damit gilt $\mathrm{rng}(f) \in \mathbb{V}$. Wegen $f \subseteq \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{rng}(f) \in \mathbb{V}$ bekommen wir $f \in \mathbb{V}$. $\square$

4.2 Das Axiomensystem von ZERMELO und FRAENKEL

Um mit Methoden der Prädikatenlogik, insbesondere mit der Modelltheorie arbeiten zu können, wollen wir versuchen, die bisher recht informal eingeführten Axiome logisch exakt zu fassen. Dabei ist es wichtig, eine Axiomatisierung in der ersten Stufe anzugeben, da uns hier eine einfach zu handhabende Modelltheorie zur Verfügung steht. Daher fixieren wir zunächst die Sprache.

4.2.1 Definition Die Sprache der Mengenlehre ist die Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe mit Identität, deren einziges nichtlogisches Zeichen die zweistellige Relationskonstante $\in$ ist, d.h. $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\in)$.

Unsere Intention ist, das Mengenuniversum als den Individuenbereich unserer Sprache zu erhalten. Das bedeutet, daß alle Quantoren über Mengen laufen. Wir können daher nicht explizit über Klassen sprechen. Das macht Schwierigkeiten bei dem ontologischen Axiom *(Tran)*, in dem wir ja fordern, daß jede Menge eine Klasse ist. Wir werden uns später damit behelfen, daß wir uns nur mit transitiven Modellen des noch einzuführenden Axiomensystems beschäftigen. Wir verdrängen das ontologische Axiom *(Tran)* damit auf die Metaebene.
Ebenso macht es keinen Sinn mehr, die Klassenkomprehension *(CA)* zu fordern. Hier werden wir uns später dadurch helfen, daß wir Ausdrücke der Gestalt

$$y \in \{x| \ \varphi(x)\}$$

für $\mathcal{L}(\in)$-Formeln $\varphi(x)$ einfach als „Abkürzungen" für die Formel $\varphi(y)$ lesen.
Von den ontologischen Axiomen, können wir damit nur noch das Extensionalitätsaxiom explizit formulieren. Es lautet

(Ext) $\quad (\forall x)(\forall y)[x = y \leftrightarrow (\forall u)(u \in x \leftrightarrow u \in y)].$

Einfacher zu formulieren sind die Abschlußaxiome

(Pa) $\quad (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)[u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y].$

(Vm) $\quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow (\exists u)(u \in x \wedge z \in u)].$

(Pm) $\quad (\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow (\forall u)(u \in z \rightarrow u \in x)].$

(As) $\quad (\forall \vec{u})\{(\forall x)(\exists y)(\forall z)[z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z, \vec{u})]\}.$

(Kol) $\quad (\forall \vec{u})(\forall v)\{(\forall x)[x \in v \rightarrow (\exists y)\varphi(x, y, \vec{u})] \\ \qquad \rightarrow (\exists z)(\forall x)[x \in v \rightarrow (\exists y)(y \in z \wedge \varphi(x, y, \vec{u}))]\}.$

(Er) $\quad (\forall \vec{u})\{(\forall x)(\forall y)(\forall z)[\varphi(x, \vec{u}, y) \wedge \varphi(x, \vec{u}, z) \rightarrow y = z] \\ \qquad \rightarrow (\forall v)(\exists w)(\forall z)[z \in w \leftrightarrow (\exists p)(p \in v \wedge \varphi(p, \vec{u}, z))]\}.$

Als zusätzliches ontologisches Axiom wollen wir noch das Fundierungsaxiom

(Fu) $\quad (\forall a)\{(\exists x)(x \in a) \rightarrow (\exists x)[x \in a \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow \neg y \in a)]\}.$

hinzunehmen.

Natürlich wird es unmöglich sein, immer nur in $\mathcal{L}(\in)$ zu arbeiten. Wir werden daher definitorische Erweiterungen der Sprache betrachten.

So definieren wir Paar, geordnetes Paar, Relation und Funktion durch die folgenden definierenden Axiome

$$
\begin{aligned}
&(\forall z)(z \in \{x, y\} \leftrightarrow z = x \vee z = y)\\
&(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}\\
&\mathrm{Rel}(x) \leftrightarrow (\forall z)[z \in x \leftrightarrow (\exists u)(\exists v)(z = (u, v))]\\
&\mathrm{Fkt}(f) \leftrightarrow \mathrm{Rel}(f) \wedge \mathrm{Reind}(f),
\end{aligned}
$$

wobei $(x, y) \in f$ für die Formel

$$(\exists v)[v = (x, y) \wedge v \in f]$$

und Reind(f) für

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \to y = z]$$

stehen. Der Leser möge sich selbst davon überzeugen, daß wir alle bislang eingeführten Begriffe wie z.B. dom(f), rng(f), $a \subseteq b$, … – zumindest für Mengen – in $\mathcal{L}(\in)$ definieren können.

Zur Formulierung des Auswahlaxioms benutzen wir schon definitorische Erweiterungen.

(AC) $\quad (\forall a)(\exists f)\{\mathrm{Fkt}(f) \wedge (\forall x \in a)[x \neq \emptyset \to f(x) \in x]\}.$

Dabei steht $(\forall x \in a)[\ldots]$ für $(\forall x)(x \in a \to \ldots)$. Ebenso schreiben wir $(\exists x \in a)[\ldots]$ für $(\exists x)(x \in a \wedge \ldots)$. Wir wollen sogar so weit gehen, *beschränkte Quantoren* der Form $(\mathsf{Q}x \in a)$ von *unbeschränkten* zu unterscheiden.
Schließlich formulieren wir das Unendlichkeitsaxiom

(Ue) $\quad (\exists x)[\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)]$

als einziges Mengenexistenzaxiom.

Es hat sich eingebürgert, die Axiome ***(Ext), (Fu), (Pa), (Vm), (Pm), (As), (Ue)*** als das ZERMELOsche Axiomensystem Z zu bezeichnen. Das ZERMELO-FRAENKELsche Axiomensystem ZF erhält man, indem in Z das Schema ***(As)*** durch ***(Er)*** ersetzt wird. Nimmt man jeweils noch das Auswahlaxiom hinzu, so spricht man von ZC bzw. ZFC. Manchmal will man diese Systeme auch ohne das Potenzmengenaxiom betrachten. Man bezeichnet diese Abschwächungen oft als Z^0, ZC^0, ZF^0 bzw. ZFC^0, wiewohl diese Notation in der Literatur nicht ganz einheitlich gehandhabt wird. Mit Z^-, ZF^-, ZC^- und ZFC^- bezeichnen wir die entsprechenden Axiomensysteme ohne das Fundierungsaxiom.

Wir werden im Folgenden davon ausgehen, daß in unserem Mengenuniversum das Auswahlaxiom gilt.

Versehen mit der kanonischen Elementrelation ist jede Klasse eine $\mathcal{L}(\in)$-Struktur. Wir können daher Satz 4.1.2 und Lemma 4.1.4 umformulieren zu:

4.2.2 Satz *Für $\omega < \lambda \in \mathrm{Lim}$ ist V_λ ein transitives ZC Modell. $V_{\omega+\omega}$ ist aber kein ZFC-Modell.*

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir daraus

4.2.3 Korollar *Es gelten*

(i) *(As) $\not\Rightarrow$ (Er)*

(ii) $ZC \nvdash$ *(Kol)*

Beweis: Nehmen wir $ZC \vdash$ *(Kol)* an, so folgt mit (2.10) $ZC \vdash$ *(Er)*. Dies widerspricht Satz 4.2.2 $\square$

Als eine Folgerung (des Beweises) von Satz 4.1.9 erhalten wir

4.2.4 Satz *Es gilt $ZFC \vdash$ (Kol) und damit $ZFC = ZC +$ (Kol).*

Beweis: Nach (2.10) gilt $ZC +$ *(Kol)* $\vdash ZFC$. Ist andererseits $\mathcal{U} \models ZFC$, so gilt nach Satz 4.1.7 $\mathcal{U} = \mathbb{V}$. Nach Satz 4.1.9 haben wir $\mathbb{V} \models$ *(Kol)*. Da wir zur Konstruktion von $\mathbb{V}$ innerhalb von $\mathcal{U}$ außer den Axiomen von ZFC keine weiteren Eigenschaften benutzt haben, können wir $\mathbb{V}$ in *jedem* Modell $\mathcal{U}$ von ZFC konstruieren. Also gilt $\mathcal{M} \models ZFC \Rightarrow \mathcal{M} \models$ *(Kol)* für jedes Modell $\mathcal{M}$. D.h. $ZFC \vdash$ *(Kol)*. $\square$

Ein Satz φ von $\mathcal{L}(\in)$ heißt *relativ konsistent* zu einer Satzmenge Σ, wenn aus der Konsistenz von Σ auch die Konsistenz von $\Sigma \cup \{\varphi\}$ folgt.
Wir erhalten wir den folgenden Satz:

4.2.5 Satz *(Fu) und (Fund) sind relativ konsistent zu ZF^- und ZFC^-.*

Beweis: Da wir zur Konstruktion von $\mathbb{V}$ nur transfinite Rekursion (in die das Ersetzungsaxiom einging), das Potenz- und das Vereinigungsaxiom benötigen, können wir $\mathbb{V}$ in jedem ZF^- Modell konstruieren. Wegen $\mathbb{V} \models$ *(Fu)* und $\mathbb{V} \models$ *(Fund)* sind dann auch $ZF^- \cup \{$*(Fu)*$\}$ etc. konsistent. $\square$

4.3 Persistenz und Absolutheit

4.3.1 Definition Sei $\mathcal{M}$ eine transitive Klasse. Ein $\mathcal{L}(\in)$-Satz φ mit Parametern aus $\mathcal{M}$ (d.h. $\varphi \equiv \varphi(\underline{m}_1, \ldots, \underline{m}_n)$, wobei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ aus $\mathcal{L}(\in)$, $m_i \in \mathcal{M}$ und die $\underline{m}_i$ Konstanten für die m_i sind) heißt $\mathcal{M}$-*aufwärts persistent*, wenn

$$\mathcal{M} \models \varphi \;\Rightarrow\; \mathcal{N} \models \varphi,$$

$\mathcal{M}$*-abwärts persistent*, wenn

$$\mathcal{N} \models \varphi \;\Rightarrow\; \mathcal{M} \models \varphi$$

und $\mathcal{M}$*-absolut*, wenn

$$\mathcal{M} \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{N} \models \varphi$$

für jede transitive Oberklasse $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ gilt.

Eine Formel $\varphi \in \mathcal{L}(\in)$ heißt eine Δ_0-Formel, wenn sie nur beschränkte Quantoren (vgl. Seite 87) enthält, d.h. die Δ_0-Formeln bilden die kleinste Formelklasse, die alle Primformeln $x \in y$, $x = y$ enthält und abgeschlossen ist gegenüber den booleschen Operationen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ sowie den beschränkten Quantifikationen $(\forall x \in y)$ und $(\exists x \in y)$.

4.3.2 Satz *Ist φ ein Δ_0-Satz mit Parametern aus $\mathcal{M}$ und ist $\mathcal{M}$ transitiv, so ist φ $\mathcal{M}$-absolut.*

Wir wollen nochmals daran erinnern, daß ein Satz eine Formel ohne freie Variablen ist. Nur für Sätze φ ist die Erfüllbarkeitsrelation $\mathcal{M} \models \varphi$ sinnvoll.

Beweis: Sei $\varphi(\vec{x}\,)$ eine Δ_0-Formel und $\vec{a}$ ein Tupel von Elementen aus $\mathcal{M}$ so, daß $\varphi(\vec{a})$ ein Satz ist. Sei $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ transitiv. Wir zeigen

$$\mathcal{M} \models \varphi(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{N} \models \varphi(\vec{a})$$

durch Induktion nach dem Aufbau von $\varphi(\vec{x}\,)$. Ist $\varphi(\vec{a}) \equiv a_i \in a_j$, so gilt wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$

$$\mathcal{M} \models a_i \in a_j \;\Leftrightarrow\; \mathcal{N} \models a_i \in a_j.$$

Ebenso haben wir

$$\mathcal{M} \models a_i = a_j \;\Leftrightarrow\; \mathcal{N} \models a_i = a_j.$$

Ist $\varphi \equiv \varphi_1 \overset{\wedge}{\vee} \varphi_2$ bzw. $\varphi \equiv \neg\psi$, so folgt die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung.
Erwähnenswert ist eigentlich nur der Fall beschränkter Quantifikation. Sei also $\varphi(\vec{a}) \equiv (\forall x \in a_i)\psi(x, \vec{a})$. Da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ und $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ transitiv sind, ist für $a_i \in \mathcal{M}$ stets $a_i \cap \mathcal{M} = a_i \cap \mathcal{N}$. Nun gilt

$$\mathcal{M} \models (\forall x \in a_i)\psi(x, \vec{a})$$

genau dann, wenn

$$\mathcal{M} \models \psi(b, \vec{a})$$

für alle $b \in a_i \cap \mathcal{M}$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\mathcal{N} \models \psi(b, \vec{a}) \tag{i}$$

für alle $b \in a_i \cap \mathcal{M}$ gilt. Wegen $a_i \cap \mathcal{M} = a_i \cap \mathcal{N}$ bedeutet (i) aber

$$\mathcal{N} \models (\forall x \in a_i)\psi(x, \vec{a}). \qquad \square$$

Eine Formel φ heißt eine Σ_1-Formel, wenn

$$\varphi \equiv (\exists u)\psi(u)$$

für eine Δ_0-Formel $\psi(u)$ ist.
Dual heißt φ eine Π_1-Formel, wenn $\neg\varphi$ eine Σ_1-Formel ist. Es ist klar, wie Σ_n- (bzw. Π_n-) Formeln zu definieren sind, obwohl wir diese Begriffe in dieser Vorlesung nicht benötigen werden.
Die Klasse der Σ-Formeln ist die kleinste Formelklasse, die alle Δ_0-Formeln umfaßt und abgeschlossen ist gegenüber den positiven booleschen Operationen $\wedge$, $\vee$, beschränkter Quantifikation sowie unbeschränkter $\exists$-Quantifikation.
Dual heißt φ eine Π-Formel, wenn $\neg\varphi$ eine Σ-Formel ist.
Es ist klar, daß jede Σ_1-Formel auch eine Σ-Formel ist. Die umgekehrte Tatsache gilt im allgemeinen nicht.
Ist $\mathcal{M}$ eine transitive Klasse und φ ein Satz mit Parametern aus $\mathcal{M}$, so nennen wir φ einen $\mathcal{M}$-Δ_0- ($\mathcal{M}$-Σ_1-, $\mathcal{M}$-Π_1-, $\mathcal{M}$-Σ-, $\mathcal{M}$-Π-) Satz, wenn es einen Δ_0- (Σ_1-, Π_1-, Σ-, Π-) Satz ψ mit Parametern aus $\mathcal{M}$ gibt, so daß

$$\mathcal{N} \models \varphi \leftrightarrow \psi$$

für alle transitiven $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ gilt. Ein Satz φ heißt $\mathcal{M}$-Δ_1, ($\mathcal{M}$-Δ), wenn er sowohl $\mathcal{M}$-Σ_1 ($\mathcal{M}$-Σ), als auch $\mathcal{M}$-Π_1 ($\mathcal{M}$-Π) ist.
Dies ist eine gegenüber der üblichen Literatur restriktive Definition, die für unsere Zwecke im wesentlichen ausreicht. Allgemeiner definiert man für eine Theorie T die T-Σ- (T-Σ_1-, T-Π-, T-Π_1-, $\dots$) Sätze dadurch, daß die Äquivalenz zu einem Σ- (Σ_1-, Π-, Π_1-, $\dots$) Satz in allen Modellen von T zu gelten hat. Ein in unserem Sinne $\mathcal{M}$-Δ-Satz muß daher bereits in einer sehr schwachen Theorie erkennbar sein, für die jede genügend große transitive Menge bereits ein Modell ist. Üblicherweise kann man davon ausgehen, daß die Äquivalenz zu sowohl einem Σ- als auch einem Π-Satz bereits in der reinen Logik erkennbar ist. Alle nun folgenden Betrachtungen übertragen sich natürlich sinngemäß auf T-Σ-, (T-Π-, $\dots$) Sätze, wobei beispielsweise die Persistenzaussagen nur noch für solche transitive Mengen gelten, die Modelle von T sind.

4.3.3 Satz *Sei $\mathcal{M}$ transitiv. Dann sind $\mathcal{M}$-Σ-Sätze $\mathcal{M}$-aufwärts, $\mathcal{M}$-Π-Sätze $\mathcal{M}$-abwärts persistent. Damit sind $\mathcal{M}$-Δ-Sätze $\mathcal{M}$-absolut.*

Beweis: (Man kann sogar zeigen, daß ein Satz φ genau dann $\mathcal{M}$-absolut ist, wenn er ein $\mathcal{M}$-Δ-Satz ist. Wir wollen uns hier aber mit der einen Richtung begnügen.)
Sei ψ ein Σ-Satz mit Parametern aus $\mathcal{M}$. Wir wollen zeigen, daß ψ $\mathcal{M}$-aufwärts persistent ist und führen dazu eine Induktion nach dem Aufbau von ψ.
Ist ψ ein Δ_0-Satz, so folgt die Behauptung aus Satz 4.3.2.
Ist $\psi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ und gilt $\mathcal{M} \models \psi$, so folgt $\mathcal{M} \models \psi_1$ und $\mathcal{M} \models \psi_2$. Für ein transitives $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $\mathcal{N} \models \psi_i$ für $i = 1, 2$ und damit auch $\mathcal{N} \models \psi_1 \wedge \psi_2$. Analog behandelt man den Fall $\psi \equiv \psi_1 \vee \psi_2$.
Ist $\psi \equiv (\forall x \in \underline{a})\chi(x)$ und gilt $\mathcal{M} \models \psi$, so ist für transitives $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ auch $a \in \mathcal{N}$. Für $b \in a \cap \mathcal{N}$ ist wegen $\mathrm{Tran}(\mathcal{M})$ und $a \in \mathcal{M}$ aber auch $b \in \mathcal{M}$. Also gilt $\mathcal{M} \models \chi(\underline{b})$, und nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathcal{N} \models \chi(\underline{b})$. Somit gilt $\mathcal{N} \models (\forall x \in \underline{a})\chi(x)$.
Ist $\psi \equiv (\exists x)\chi(x)$ und gilt $\mathcal{M} \models (\exists x)\chi(x)$, so gibt es ein $b \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ mit $\mathcal{M} \models \chi(\underline{b})$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt $\mathcal{N} \models \chi(\underline{b})$ und wegen $b \in \mathcal{N}$ damit auch $\mathcal{N} \models (\exists x)\chi(x)$.
Die übrigen Behauptungen des Satzes folgen jetzt sofort. $\square$

Ist φ eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel und A eine Klasse oder Menge, so bezeichnen wir mit φ^A die Formel, die aus φ entsteht, wenn wir in ihr alle unbeschränkten Quantoren $(\mathsf{Q}x)$ durch $(\mathsf{Q}x \in A)$ ersetzen. Für Mengen A lesen wir $(\mathsf{Q}x \in A)$ als $(\mathsf{Q}x \in \underline{A})$, wobei $\underline{A}$ eine Konstante für A ist. Ist A die Klasse $\{x \mid \chi(x)\}$, so lesen wir $(\forall x \in A)[\ldots]$ jedoch als $(\forall x)[\chi(x) \to \ldots]$ und $(\exists x \in A)[\ldots]$ als $(\exists x)[\chi(x) \wedge \ldots]$.
Es ist klar, daß für Mengen a die Formel φ^a eine Δ_0-Formel ist. Für Klassen A ist φ^A im allgemeinen jedoch komplizierter als φ.

4.3.4 Lemma *Sei $A \subseteq \mathbb{V}$ und φ ein Satz, der höchstens Parameter aus A enthält. Dann gilt:*

$$A \models \varphi \Leftrightarrow \mathbb{V} \models \varphi^A.$$

Beweis: Sei $\varphi \equiv \varphi(\vec{a})$, wobei $\vec{a}$ eine Liste aller in φ auftretender Parameter ist. Wir führen Induktion nach dem Aufbau von φ und dürfen uns auf die logischen Zeichen $\neg$, $\wedge$, $\exists$ beschränken.
Ist $\varphi \equiv (a_i \in a_j)$ oder $\varphi \equiv (a_i = a_j)$, so ist die Behauptung klar.
Sei $\varphi \equiv \neg\psi$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$A \models \varphi \Leftrightarrow A \not\models \psi \Leftrightarrow \mathbb{V} \not\models \psi^A \Leftrightarrow \mathbb{V} \models \varphi^A.$$

Für $\varphi \equiv \psi_1 \wedge \psi_2$ folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} A \models \varphi &\Leftrightarrow A \models \psi_1 \text{ und } A \models \psi_2 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{V} \models \psi_1^A \text{ und } \mathbb{V} \models \psi_2^A \Leftrightarrow \mathbb{V} \models \varphi^A. \end{aligned}$$

Ist schließlich $\varphi \equiv (\exists x)\chi(x)$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} A \models (\exists x)\chi(x) \quad &\Leftrightarrow \quad (\exists a \in A)[A \models \chi(\underline{a})] \\ &\Leftrightarrow \quad (\exists a \in A)[\mathbb{V} \models \chi(\underline{a})^A] \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{V} \models (\exists x \in A)[\chi(x)^A] \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{V} \models \varphi^A. \quad \square \end{aligned}$$

4.4 Kumulative Hierarchien und das Reflexionsprinzip

4.4.1 Definition Eine Familie $\{\mathbb{H}_\alpha |\ \alpha \in \mathrm{On}\}$ bezeichnen wir als *kumulative Hierarchie*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$(\mathbb{H}_1)$ $(\forall \alpha \in \mathrm{On})[\mathbb{H}_\alpha \subseteq \mathbb{H}_{\alpha+1} \subseteq \mathrm{Pow}(\mathbb{H}_\alpha)]$

$(\mathbb{H}_2)$ $(\forall \alpha \in \mathrm{Lim})[\mathbb{H}_\alpha = \bigcup\limits_{\xi < \alpha} \mathbb{H}_\xi]$.

Es sei $\mathbb{H} := \bigcup_{\xi \in \mathrm{On}} \mathbb{H}_\xi$.

Ein Beispiel für eine kumulative Hierarchie sind die VON NEUMANNschen Stufen $\{V_\alpha |\ \alpha \in \mathrm{On}\}$ des fundierten Universums. (Wobei wir daran erinnern wollen, daß wir jetzt und im folgenden immer *(Fu)* voraussetzen und daher innerhalb des fundierten Universums argumentieren).

4.4.2 Lemma *Ist* $\{\mathbb{H}_\alpha |\ \alpha \in \mathrm{On}\}$ *eine kumulative Hierarchie, so gilt*

(i) $\alpha \le \beta \Rightarrow \mathbb{H}_\alpha \subseteq \mathbb{H}_\beta$

(ii) $(\forall \alpha \in \mathrm{On})[\mathrm{Tran}(\mathbb{H}_\alpha)] \wedge \mathrm{Tran}(\mathbb{H})$

(iii) $K \in \mathbb{V} \wedge K \subseteq \mathbb{H} \Rightarrow (\exists \alpha \in \mathrm{On})[K \subseteq \mathbb{H}_\alpha]$

Beweis: *(i)* folgt sofort durch Induktion nach β.
(ii) Gilt $x \in \mathbb{H}_\alpha \subseteq \mathbb{H}_{\alpha+1} \subseteq \mathrm{Pow}(\mathbb{H}_\alpha)$, so folgt $x \in \mathrm{Pow}(\mathbb{H}_\alpha)$, d.h. $x \subseteq \mathbb{H}_\alpha$ und somit $\mathrm{Tran}(\mathbb{H}_\alpha)$.
(iii) Für $x \in \mathbb{H}$ definieren wir

$$\mathrm{rk}_{\mathbb{H}}(x) := \inf \{\alpha |\ x \in \mathbb{H}_\alpha\}. \tag{4.15}$$

Sei $\alpha := \sup \{\mathrm{rk}_{\mathbb{H}}(x) |\ x \in K\}$. Wegen $K \in \mathbb{V}$ ist $\alpha \in \mathrm{On}$ und es folgt mit *(i)* $K \subseteq \mathbb{H}_\alpha$. $\square$

Wir haben in Lemma 3.8.2 erklärt, wann eine Klasse abgeschlossen gegenüber Suprema ist. Wir wollen solche Klassen kurz *abgeschlossen* nennen. Eine Klasse $K \subseteq \mathrm{On}$ heißt *club* (*cl*osed *unb*ounded), wenn K abgeschlossen und unbeschränkt ist. Ist $K \subseteq \kappa$ abgeschlossen und unbeschränkt in κ, so heißt K *club in* κ.

4.4.3 Lemma *Ist* $\kappa \in \mathbb{R}$ *und* K *club in* κ*, so gilt* $\sup X \in K$ *für alle* $X \subseteq K$ *mit* $|X| < \kappa$.

Beweis: Ist $|X| < \kappa$, so ist wegen $\kappa \in \mathbb{R}$ auch $\sup X < \kappa$. Da K unbeschränkt in κ ist, gibt es ein $\eta \in K$, das X beschränkt. Da K abgeschlossen ist, folgt $\sup X \in K$. □

Wir wollen hier nur zwei Eigenschaften von club Mengen angeben, die für das Folgende von Bedeutung sein werden.

4.4.4 Lemma *Ist* κ *eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl,* $\alpha < \kappa$ *und* $\{K_\iota \mid \iota < \alpha\}$ *eine Familie von clubs in* κ*, so ist* $\bigcap_{\iota < \alpha} K_\iota$ *club in* κ.

Beweis: Sei

$$K := \bigcap_{\iota < \alpha} K_\iota.$$

Wir zeigen zunächst die Abgeschlossenheit von K. Sei dazu $X \subseteq K$ eine in K beschränkte Menge. Dann ist X aber in jedem der K_ι beschränkt und damit gilt $\sup X \in K_\iota$ für alle $\iota < \alpha$. Also ist $\sup X \in K$.
Zum Nachweis der Unbeschränktheit sei $\beta < \kappa$. Wir definieren für $\mu < \alpha$ und $n < \omega$ Ordinalzahlen $\beta_{\mu,n} \in K_\mu$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\beta_{0,0} \geq \beta \\
&\mu < \nu < \alpha \ \Rightarrow\ \beta_{\mu,n} < \beta_{\nu,n} \\
&\beta_{0,n+1} > \sup\nolimits_{\nu < \alpha} \beta_{\nu,n}.
\end{aligned}$$

Da alle die K_μ unbeschränkt in κ sind und $\alpha < \kappa \in \mathbb{R}$ ist, lassen sich die $\beta_{\mu,n}$ in der angegebenen Weise finden. Nun gilt

$$\beta_{\mu,\omega} := \sup_{n < \omega} \beta_{\mu,n} \in K_\mu$$

für alle $\mu < \alpha$, und nach Konstruktion gilt

$$\mu < \nu < \alpha \ \Rightarrow\ \beta_{\mu,\omega} \leq \beta_{\nu,\omega}.$$

Ist $\xi < \beta_{\nu,\omega}$ so gibt es ein $n < \omega$ mit $\xi < \beta_{\nu,n} < \beta_{0,n+1} \leq \beta_{\mu,n+1} \leq \beta_{\mu,\omega}$, und damit gilt auch

$$\beta_{\nu,\omega} \leq \beta_{\mu,\omega}.$$

D.h. wir haben

$$\beta_{\mu,\omega} = \beta_{\nu,\omega}$$

für alle $\mu, \nu < \alpha$. Damit folgt aber

$$\beta < \beta_{0,\omega} \in \bigcap_{\mu < \alpha} K_\mu,$$

und K ist unbeschränkt in κ. $\square$

Wir können den eben geführten Beweis sofort auf die Situation übertragen, daß wir eine Familie $\{K_\iota|\ \iota < \alpha\}$ von clubs und eine Ordinalzahl α haben. Wir erhalten daher als Korollar des Beweises von Lemma 4.4.4

4.4.5 Korollar *Ist $\alpha \in \mathrm{On}$ und $\{K_\iota|\ \iota < \alpha\}$ eine Familie von clubs, so ist auch $\bigcap_{\iota<\alpha} K_\iota$ club.*

Eine weitere wichtige Begriffsbildung im Zusammenhang mit clubs ist der sogenannte *diagonale Durchschnitt*, der folgendermaßen definiert ist:

4.4.6 Definition Ist $\{K_\iota|\ \iota < \kappa\}$ eine Familie von clubs in κ, so sei

$$\Delta_{\iota<\kappa} K_\iota := \{\xi \in \kappa|\ \xi \in \bigcap_{\eta<\xi} K_\eta\}.$$

Analog definieren wir für eine Familie $\{K_\iota|\ \iota \in \mathrm{On}\}$ von clubs

$$\Delta_\iota K_\iota := \{\xi|\ \xi \in \bigcap_{\eta<\xi} K_\eta\}.$$

Wir nennen $\Delta_{\iota<\kappa} K_\iota$ bzw. $\Delta_\iota K_\iota$ den *diagonalen Durchschnitt* oder die *Diagonalisierung* der K_ι.

4.4.7 Lemma *Es sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl und $\{K_\iota|\ \iota < \kappa\}$ eine Familie von clubs in κ. Dann ist auch $\Delta_{\iota<\kappa} K_\iota$ club in κ.*

Beweis: Setzen wir

$$K^{\cap\xi} := \bigcap_{\eta<\xi} K_\eta,$$

so ist nach Lemma 4.4.4 jedes der $K^{\cap\xi}$ club in κ und

$$\Delta_{\iota<\kappa} K_\iota = \Delta_{\iota<\kappa} K^{\cap\iota}.$$

Daher dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$K_0 \supseteq K_1 \supseteq \cdots \supseteq K_\iota \supseteq \cdots$$

gilt. Sei $K := \Delta_{\iota<\kappa} K_\iota$ und $X \subseteq K$ eine in K beschränkte Menge mit $\sup X =: \delta$. Wir haben $\delta \in K_\xi$ für alle $\xi < \delta$ nachzuweisen. Zu $\xi < \delta$ sei

$$X_\xi := \{\eta \in K|\ \xi < \eta \le \delta\}.$$

Dann ist $X_\xi \subseteq K_\xi$ und $\sup X_\xi = \delta$. Also ist $\delta \in K_\xi$.
Zum Nachweis der Unbeschränktheit sei $\beta < \kappa$. Wir definieren eine Folge

$$\begin{aligned}&\beta < \beta_0 \in K_0\\ &\beta_n < \beta_{n+1} \in K_{\beta_n}.\end{aligned}$$

Sei $\delta := \sup_{n<\omega} \beta_n$. Zu $\xi < \delta$ gibt es ein $n < \omega$ mit $\xi < \beta_n$. Dann ist

$$\{\beta_k \mid n < k\} \subseteq K_{\beta_n} \subseteq K_\xi.$$

Also ist $\delta = \sup_{n<k<\omega} \beta_k \in K_\xi$. Damit folgt

$$\delta \in \bigcap_{\xi<\delta} K_\xi$$

und wir haben $\beta < \delta \in K$. □

Auch hier überträgt sich der Beweis mühelos auf die Situation, daß eine Familie $\{K_\iota \mid \iota \in \mathrm{On}\}$ von clubs vorliegt. Wir haben also wieder als Korollar des Beweises:

4.4.8 Korollar *Ist $\{K_\iota \mid \iota \in \mathrm{On}\}$ eine Familie von clubs, so ist auch deren Diagonalisierung $\Delta_\iota K_\iota$ club.*

Man sieht an beiden Korollaren, daß sich On in gewisser Weise wie eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl verhält. Diese Betrachtungsweise stellt jedoch die wirklichen Verhältnisse auf den Kopf. Reguläre Kardinalzahlen wurden ja gerade so eingeführt, daß sie gewisse Eigenschaften von On reflektieren. Dieses Reflexionsverhalten soll nun genauer studiert werden.

4.4.9 Lemma *Sei eine kumulative Hierarchie $\{\mathbb{H}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$ gegeben und $\varphi(x, u_1, \dots, u_n)$ eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel, deren freie Variablen alle in der Liste $(x, u_1, \dots, u_n)$ auftreten. Definieren wir*

$$\begin{aligned}K_\varphi := \{\alpha \in \mathrm{On} \mid (\forall a_1 \in \mathbb{H}_\alpha)\dots(\forall a_n \in \mathbb{H}_\alpha)[\mathbb{H} \models (\exists y)\varphi(y, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)\\ \Leftrightarrow (\exists b \in \mathbb{H}_\alpha)\mathbb{H} \models \varphi(\underline{b}, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)]\},\end{aligned}$$

so ist K_φ club.

Beweis: Für $\vec{a} \in \mathbb{H}^n$ sei

$$k(\vec{a}) := \begin{cases}\inf\{\alpha \mid (\exists b \in \mathbb{H}_\alpha)[\mathbb{H} \models \varphi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})]\} & \text{falls dies existiert}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Dann gilt

$$\vec{a} \in \mathbb{H}^n \wedge \mathbb{H} \models (\exists y)\varphi(y, \underline{\vec{a}}) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{H}_{k(\vec{a})})[\mathbb{H} \models \varphi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})]. \qquad \text{(i)}$$

Wir zeigen zunächst die Unbeschränktheit der Klasse K_φ. Sei dazu $\beta \in$ On. Wir definieren:

$$\alpha_0 := \beta$$

$$\alpha_{m+1} := \sup\{\alpha_m + 1, \sup\{k(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \mathbb{H}^n_{\alpha_m}\}\}$$

und

$$\alpha := \sup_{m<\omega} \alpha_m.$$

Dann gilt nach Definition

$$\alpha_m < \alpha_{m+1} \tag{ii}$$

und

$$\vec{a} \in \mathbb{H}^n_\alpha \Rightarrow k(\vec{a}) < \alpha, \tag{iii}$$

denn für $\vec{a} \in \mathbb{H}^n_\alpha = \bigcup_{m<\omega} \mathbb{H}^n_{\alpha_m}$ gibt es ein $m < \omega$ mit $\vec{a} \in \mathbb{H}^n_{\alpha_m}$. Also ist $k(\vec{a}) \le \alpha_{m+1} < \alpha$.
Aus (iii) und (i) erhalten wir aber sofort

$$\vec{a} \in \mathbb{H}^n_\alpha \wedge \mathbb{H} \models (\exists y)\varphi(y, \underline{\vec{a}}) \Rightarrow (\exists b \in \mathbb{H}_\alpha)[\mathbb{H} \models \varphi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})]. \tag{iv}$$

Da aus $\mathbb{H} \models \varphi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})$ für $b \in \mathbb{H}_\alpha \subseteq \mathbb{H}$ aber sofort auch $\mathbb{H} \models (\exists y)\varphi(y, \underline{\vec{a}})$ folgt, erhalten wir aus (iv)

$$\alpha \in K_\varphi. \tag{v}$$

Damit ist K_φ unbeschränkt.
Um die Abgeschlossenheit von K_φ zu zeigen, sei $U \subseteq K_\varphi$ eine in K_φ beschränkte Menge. Sei $\alpha := \sup U$. Wir sind fertig, falls $\alpha \in U$ ist. Anderenfalls ist nach Lemma 3.4.8 $\alpha \in$ Lim. Ist $\vec{a} \in \mathbb{H}^n_\alpha$, so gibt es demnach ein $\beta \in \alpha \cap U$ mit $\vec{a} \in \mathbb{H}^n_\beta$. Gilt $\mathbb{H} \models (\exists y)\varphi(y, \underline{\vec{a}})$, so folgt wegen $\beta \in U \subseteq K_\varphi$ die Existenz eines $b \in \mathbb{H}_\beta \subseteq \mathbb{H}_\alpha$ mit $\mathbb{H} \models \varphi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})$. Da aus $\mathbb{H} \models \varphi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})$ für $b \in \mathbb{H}_\alpha$ sofort $\mathbb{H} \models (\exists y)\varphi(y, \underline{\vec{a}})$ folgt, ist $\alpha \in K_\varphi$. □

4.4.10 Satz (Reflexionsprinzip für $\mathcal{L}(\in)$-Formeln) *Sei eine kumulative Hierarchie $\{\mathbb{H}_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$ gegeben. Zu jeder $\mathcal{L}(\in)$-Formel φ, die höchstens die freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ enthält, existiert eine unbeschränkte und abgeschlossene Klasse* $\mathrm{Ref}(\varphi) \subseteq \mathrm{On}$*, für die gilt:*

$$(\forall \alpha \in \mathrm{Ref}(\varphi))(\forall a_1 \in \mathbb{H}_\alpha) \ldots (\forall a_n \in \mathbb{H}_\alpha)[\mathbb{H} \models \varphi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) \Leftrightarrow \mathbb{H}_\alpha \models \varphi(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)].$$

$\mathrm{Ref}(\varphi)$ *heißt dann eine reflektierende Klasse für* φ.

Beweis: Wir führen Induktion nach dem Aufbau der Formel $\varphi(\vec{x}\,)$, wobei wir uns auf die logischen Zeichen $\neg$, $\wedge$, $\exists$ beschränken können.
Ist $\varphi(\vec{x}\,) \equiv (x_i \in x_j)$ oder $\varphi(\vec{x}\,) \equiv (x_i = x_j)$, so können wir $\mathrm{Ref}(\varphi) := \mathrm{On}$ setzen.
Ist $\varphi(\vec{x}\,) \equiv \neg\chi(\vec{x}\,)$ und $\alpha \in \mathrm{Ref}(\chi)$, so gilt für $\vec{a} \in \mathbb{H}_\alpha$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \models \varphi(\underline{\vec{a}}) \ &\Leftrightarrow\ \mathbb{H} \not\models \chi(\underline{\vec{a}}) \\ &\Leftrightarrow\ \mathbb{H}_\alpha \not\models \chi(\underline{\vec{a}}) \\ &\Leftrightarrow\ \mathbb{H}_\alpha \models \neg\chi(\underline{\vec{a}}) \ \Leftrightarrow\ \mathbb{H}_\alpha \models \varphi(\underline{\vec{a}}) \end{aligned}$$

und wir können $\mathrm{Ref}(\varphi) := \mathrm{Ref}(\chi)$ setzen. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathrm{Ref}(\chi)$ club.
Ist $\varphi(\vec{x}\,) = \varphi_1(\vec{x}\,) \wedge \varphi_2(\vec{x}\,)$, so setzen wir $\mathrm{Ref}(\varphi) := \mathrm{Ref}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ref}(\varphi_2)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathrm{Ref}(\varphi_i)$ club für $i \in \{1, 2\}$. In Korollar 4.4.5 haben wir aber gezeigt, daß der Durchschnitt von clubs wieder club ist.
Ist $\varphi(\vec{x}\,) \equiv (\exists y)\chi(y, \vec{x}\,)$ und $\alpha \in \mathrm{Ref}(\chi) \cap K_\chi$, so gilt für $\vec{a} \in \mathbb{H}_\alpha$:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} \models (\exists y)\chi(y, \underline{\vec{a}}) \ &\Leftrightarrow\ (\exists b \in \mathbb{H}_\alpha)[\mathbb{H} \models \chi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})] \\ &\Leftrightarrow\ (\exists b \in \mathbb{H}_\alpha)[\mathbb{H}_\alpha \models \chi(\underline{b}, \underline{\vec{a}})] \\ &\Leftrightarrow\ \mathbb{H}_\alpha \models (\exists y)\chi(y, \underline{\vec{a}}). \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathrm{Ref}(\chi)$ club und K_χ ist club nach Lemma 4.4.9. Setzen wir $\mathrm{Ref}(\varphi) := \mathrm{Ref}(\chi) \cap K_\chi$, so ist $\mathrm{Ref}(\varphi)$ club.
$\square$

Da die Schichten des fundierten Universums eine kumulative Hierarchie bilden, können wir das in Satz 4.4.10 formulierte Reflexionsprinzip für $\mathbb{V}$ anwenden.
In Satz 4.1.2 haben wir gezeigt, daß in $\mathbb{V}$ immer das Aussonderungsaxiom gilt und im Anschluß an Lemma 4.1.4 erwähnt, daß in $\mathbb{V}$ auch das Kollektionsaxiom gilt, wobei wir allerdings vorausgesetzt hatten, daß $\mathbb{V}$ innerhalb eines Universums $\mathcal{U}$ gebaut wurde, in dem das Kollektionsaxiom bereits gilt. Da $\{V_\alpha \mid\ \alpha \in \mathrm{On}\}$ eine kumulative Hierarchie ist, können wir diese Voraussetzung durch das Reflexionsprinzip ersetzen. Wir erhalten:

4.4.11 Lemma *Ist $\{\mathbb{H}_\alpha \mid\ \alpha \in \mathrm{On}\}$ eine kumulative Hierarchie mit der Eigenschaft*

$$\alpha < \beta \ \Rightarrow\ \mathbb{H}_\alpha \in \mathbb{H}_\beta,$$

so gilt $\mathbb{H} \models$ (Kol).

Beweis: Sei $\varphi(x, y, \vec{u})$ eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel, die keine weiteren freien Variablen enthält. Seien $\vec{a} \in \mathbb{H}^n$, $b \in \mathbb{H}$ und

$$\mathbb{H} \models (\forall x \in \underline{b})(\exists y)\varphi(x, y, \underline{\vec{a}}).$$

Ist $\alpha := \sup\{\mathrm{rk}_{\mathbb{H}}(b), \mathrm{rk}_{\mathbb{H}}(a_1), \ldots, \mathrm{rk}_{\mathbb{H}}(a_n)\}$ so gibt es nach Satz 4.4.10 und Korollar 4.4.5 ein $\beta \geq \alpha$ mit

$$\beta \in \mathrm{Ref}(\varphi(x, y, \vec{u})) \cap \mathrm{Ref}((\forall x \in v)(\exists y)\varphi(x, y, \vec{u})).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{H} \models (\forall x \in \underline{b})(\exists y)\varphi(x, y, \underline{\vec{a}}) \;&\Leftrightarrow\; \mathbb{H}_\beta \models (\forall x \in \underline{b})(\exists y)\varphi(x, y, \underline{\vec{a}})\\ &\Leftrightarrow\; (\forall c \in b)(\exists d \in \mathbb{H}_\beta)[\mathbb{H}_\beta \models \varphi(\underline{c}, \underline{d}, \underline{\vec{a}})]\\ &\Leftrightarrow\; (\forall c \in b)(\exists d \in \mathbb{H}_\beta)[\mathbb{H} \models \varphi(\underline{c}, \underline{d}, \underline{\vec{a}})].\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{H}_\beta \in \mathbb{H}$ folgt dann

$$\mathbb{H} \models (\exists z)(\forall x \in \underline{b})(\exists y \in z)\varphi(x, y, \underline{\vec{a}}). \qquad \square$$

Als Korollar erhalten wir dann

4.4.12 Satz *Im fundierten Universum gilt das Kollektionsaxiom und damit auch das Ersetzungsaxiom.*

Wir können, unter Ausnutzung der Tatsache, daß $\mathbb{V}$ ein Modell der Axiome von ZFC ist, aus Satz 4.4.10 ein Reflexionsprinzip folgern, das unabhängig von kumulativen Hierarchien formuliert ist. Wir bereiten dies durch das folgende Lemma vor.

4.4.13 Lemma *Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ $\mathcal{L}(\in)$-Formeln, in denen höchstens die Variablen $x_1, \ldots, x_n, y$ frei auftreten. Zu jeder Menge M_0 gibt es dann eine Obermenge $M \supseteq M_0$ mit*

$$|M| \leq \aleph_0 \oplus |M_0|$$

so, daß für $i = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}(\forall a_1 \in M) \ldots (\forall a_n \in M)[(\exists b \in M)\varphi_i(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b})\\ \Leftrightarrow\; (\exists b)\varphi_i(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, b)]\end{aligned}$$

gilt.

Beweis: Wir argumentieren im fundierten Universum $\mathbb{V}$. Wie bereits bemerkt ist $\{V_\alpha|\ \alpha \in \mathrm{On}\}$ eine kumulative Hierarchie. Lemma 4.4.9 liefert uns club Klassen K_{φ_i} für $i = 1, \ldots, m$. Dann ist auch

$$K := K_{\varphi_1} \cap \ldots \cap K_{\varphi_m}$$

club. Da M_0 eine Menge ist, gibt es ein $\alpha \in K$ mit $M_0 \in V_\alpha$. Dafür gilt nach Lemma 4.4.9

$$(\forall a_1 \in V_\alpha) \ldots (\forall a_n \in V_\alpha)[(\exists y)\varphi_i(\underline{\vec{a}}, y) \;\Leftrightarrow\; (\exists y \in V_\alpha)\varphi_i(\underline{\vec{a}}, y)]. \qquad \text{(i)}$$

Sei f eine Auswahlfunktion für $V_{\alpha+1}$. Zu $\vec{a} \in V_\alpha^n$ sei

$$g_i(\vec{a}) := \{b \in V_\alpha \mid \varphi_i(\underline{\vec{a}}, \underline{b})\} \in V_{\alpha+1}.$$

Nun definieren wir eine Familie $\{M_k \mid k < \omega\}$ durch Rekursion nach k. M_0 ist gegeben.

$$M_{k+1} := M_k \cup \{f(g_i(\vec{a})) \mid 1 \leq i \leq m \wedge \vec{a} \in M_k^n \wedge g_i(\vec{a}) \neq \emptyset\}.$$

Weiter sei

$$M := \bigcup_{k \in \omega} M_k.$$

Durch Induktion nach k folgt

$$M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq V_\alpha.$$

Also gilt auch

$$M \subseteq V_\alpha.$$

Aus der Definition der M_k erhalten wir

$$\vec{a} \in M_k^n \wedge (\exists y \in V_\alpha)\varphi_i(\underline{\vec{a}}, y) \Rightarrow f(g_i(\vec{a})) \in M_{k+1} \wedge \varphi_i(\underline{\vec{a}}, \underline{f(g_i(\vec{a}))}),$$

woraus sich auf

$$\vec{a} \in M_k^n \wedge (\exists y \in V_\alpha)\varphi_i(\underline{\vec{a}}, y) \Rightarrow (\exists y \in M)\varphi_i(\underline{\vec{a}}, y) \tag{ii}$$

schließen läßt. Aus (i) und (ii) folgt

$$(\forall \vec{a} \in M^n)[(\exists y)\varphi_i(\underline{\vec{a}}, y) \Rightarrow (\exists y \in M)\varphi_i(\underline{\vec{a}}, y)]. \tag{iii}$$

Da die Gegenrichtung in (iii) trivialerweise gilt, bleibt nur noch die Kardinalität von M nachzurechnen. Es ist

$$|M| = |\bigcup_{k<\omega} M_k| \leq \sum_{k<\omega} |M_k| = \aleph_0 \oplus \sup_{k<\omega}(|M_k|).$$

Wir zeigen durch Induktion nach k, daß

$$|M_k| \leq \aleph_0 \oplus |M_0|$$

gilt. Für $k = 0$ ist dies klar, und mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\begin{aligned} |M_{k+1}| &\leq |M_k| \oplus \textstyle\sum_{i=1}^m |\{f(g_i(\vec{a})) \mid \vec{a} \in M_k^n\}| \\ &\leq |M_k| \oplus (m \odot |M_k^n|) \leq \aleph_0 \oplus |M_0|. \end{aligned} \qquad \square$$

Um die Notation nicht unnötig zu komplizieren, werden wir im folgenden nicht mehr zwischen Mengen a und den Konstanten $\underline{a}$ für a unterscheiden. Es ist aus dem Zusammenhang immer klar, was gemeint ist.

Aus Lemma 4.4.13 läßt sich leicht folgern, daß sich jede endliche Menge von Formeln, die simultan im Universum gelten, bereits an einer Menge reflektieren läßt:

4.4.14 Satz *Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ $\mathcal{L}(\in)$-Formeln, in denen höchstens die Variablen $x_1, \dots, x_n$ frei auftreten. Zu jeder Menge M_0 gibt es dann eine Obermenge $M \supseteq M_0$ mit*

$$|M| \leq \aleph_0 \oplus |M_0|$$

so, daß für $i = 1, \dots, m$

$$(\forall a_1 \in M) \dots (\forall a_n \in M)[\varphi_i(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow M \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)]$$

gilt.

Beweis: Zuerst beobachten wir, daß wir (nach eventueller Erweiterung von $\{x_1, \dots, x_n\}$) ohne Einschränkung annehmen können, daß auch alle in den φ_i gebundenen Variablen in $\{x_1, \dots, x_n\}$ enthalten sind. Darüberhinaus dürfen wir davon ausgehen, daß sich alle Subformeln der φ_i schon in $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ befinden. Nach Lemma 4.4.13 existiert eine Menge $M \supseteq M_0$ mit $|M| \leq \aleph_0 \oplus |M_0|$ so, daß

$$(\exists y)\psi(a_1, \dots, a_n, y) \Leftrightarrow (\exists y \in M)\psi(a_1, \dots, a_n, y) \tag{i}$$

für jedes n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ von Elementen aus M und jede Formel $\psi(\vec{x}, y) \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ gilt. Wir zeigen durch Induktion nach der Komplexität von φ_i, daß dann auch

$$\varphi_i(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow M \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n) \tag{ii}$$

für alle n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ aus M und alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Diese Induktion ist legal, da die Induktionsvoraussetzung für alle Subformeln von φ_i zur Verfügung steht. Für Primformeln ist (ii) klar, die Fälle $\varphi_i \equiv \psi_1 \land \psi_2$ und $\varphi \equiv \neg\psi$ folgen wie gewohnt aus der Induktionsvoraussetzung. Sei also $\varphi_i \equiv (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y)$. Laut Voraussetzung existiert ein j mit $y = x_j$. Damit ist x_j keine freie Variable von ψ. Mit (i) und der Induktionsvoraussetzung erhalten wir dann aber für $\hat{a} := a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n$

$$\begin{aligned}(\exists y)\psi(\hat{a}, y) &\Leftrightarrow (\exists y \in M)\psi(\hat{a}, y)\\ &\Leftrightarrow (\exists y \in M)[M \models \psi(\hat{a}, y)]\\ &\Leftrightarrow M \models (\exists y)\psi(\hat{a}, y). \qquad \square\end{aligned}$$

Als Korollar ergibt sich nun leicht:

4.4.15 Satz (Reflexionsprinzip für Formelmengen von beschränkter

Komplexität) *Sei* $m > 0$. *Zu jeder Menge* M_0 *gibt es eine Obermenge* $M \supseteq M_0$ *mit* $|M| \leq \aleph_0 \oplus |M_0|$ *so, daß*

$$(\forall a_1 \in M) \ldots (\forall a_n \in M)[\varphi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)]$$

für alle Formeln φ *einer Komplexität* $\leq m$ *(d.h.* φ *enthält höchstens* m *logische Zeichen) gilt, in der höchstens die freien Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *auftreten.*

Beweis: Da die Namen der gebundenen Variablen unwichtig sind, benötigt man zur Bildung aller möglichen Aussagen einer Komplexität $\leq m$ mit freien Variablen aus $\{x_1, \ldots, x_n\}$ nur m weitere Variablen. Da es nur endlich viele Formeln mit beschränkter Komplexität und beschränktem Variablenvorrat gibt, dürfen wir Satz 4.4.14 anwenden. □

Eine Folgerung aus dem Reflexionsprinzip ist der folgende Satz:

4.4.16 Satz ZF *ist nicht endlich axiomatisierbar, d.h. es gibt keine endliche Satzmenge* Σ *mit*

$$ZF \vdash \varphi \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi.$$

Beweis: Nehmen wir an, ZF wäre endlich axiomatisierbar. Dann ist, da AC ein einzelnes Axiom ist, auch ZFC endlich axiomatisierbar. Sei σ die Konjunktion all dieser Axiome. Dann hätten wir nach dem Reflexionsprinzip

$$ZFC \vdash [\sigma \to (\exists M)(M \models \sigma)]$$

und wegen $ZFC \vdash \sigma$ daher

$$ZFC \vdash (\exists M)(M \models \sigma).$$

Damit würde ZFC seine eigene Widerspruchsfreiheit beweisen, was dem zweiten GÖDELschen Satz widerspricht. □

4.5 Das konstruktible Universum

Fragen nach der Gültigkeit von *(AC)* oder *(GCH)* lassen sich im fundierten Universum $\mathbb{V}$ nicht beantworten. Natürlich können wir zeigen, daß sich die Annahme $\mathcal{U} \models$ *(AC)* bzw. $\mathcal{U} \models$ *(GCH)* auf das fundierte Universum $\mathbb{V}$ überträgt, das innerhalb von $\mathcal{U}$ gebildet wird. Damit können wir aber Fragen nach der relativen Konsistenz von *(AC)* und *(GCH)* nicht angehen. Einer Idee von KURT GÖDEL folgend werden wir daher eine schlankere kumulative Hierarchie einführen, in der sich die Frage nach der Gültigkeit von *(AC)* und *(GCH)* entscheiden läßt. Der wesentliche Unterschied dieser neuen, konstruktibel genannten Hierarchie zum fundierten Universum besteht im vorsichtigeren Umgang mit der Potenzmenge. Dadurch, daß wir bei der Konstruktion der $\mathbb{V}$-Hierarchie

$$V_{\alpha+1} = \mathrm{Pow}(V_\alpha) = \{a \in \mathcal{U} \mid a \subseteq V_\alpha\}$$

gesetzt haben, haben wir die Kenntnis des gesamten Universums bereits antizipiert. Bei der Konstruktion der konstruktiblen Hierarchie wollen wir bei der Bildung von $L_{\alpha+1}$ nur solche $a \subseteq L_\alpha$ zulassen, deren „Mengeneigenschaft" wir auf Grund der Kenntnis des bereits konstruierten Teils des Universums feststellen können.
Dazu definieren wir

4.5.1 Definition Sei M eine Menge. Die Klasse *Def*(M) der über M mit Parametern definierbaren Mengen ist gegeben durch

$a \in$ *Def*(M) $:\Leftrightarrow$ es gibt eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel $\varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$ ohne weitere freie Variablen und $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ mit $a = \{x \in M \mid M \models \varphi(x, a_1, \ldots, a_n)\}$.

Damit ist klar, daß wir

$$\mathit{Def}(M) \subseteq \mathrm{Pow}(M) \tag{4.16}$$

haben. Für unendliches M gilt wegen $|\mathit{Def}(M)| \leq \max\{\aleph_0, |M|\}$ sogar

$$\mathit{Def}(M) \subsetneqq \mathrm{Pow}(M).$$

Ist M endlich, so ist *Def*$(M) = \mathrm{Pow}(M)$. Wir definieren nun die konstruktible Hierarchie wie folgt.

4.5.2 Definition (Die Konstruktible Hierarchie) Durch transfinite Rekursion definieren wir

$$\begin{array}{lcl} L_0 & := & \emptyset \\ L_{\alpha+1} & := & \mathit{Def}(L_\alpha) \\ L_\lambda & := & \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim} \end{array}$$

und setzen

$$L := \bigcup_{\xi \in \mathrm{On}} L_\xi.$$

Als erstes zeigen wir, daß eine kumulative Hierarchie vorliegt.

4.5.3 Lemma *Die konstruktible Hierarchie* $\{L_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{On}\}$ *ist kumulativ.*

Beweis: Es genügt, wenn wir

$$L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1} \subseteq \text{Pow}(L_\alpha)$$

zeigen. $L_{\alpha+1} \subseteq \text{Pow}(L_\alpha)$ folgt aus (4.16). Es gilt

$$\text{Tran}(L_\alpha) \;\Rightarrow\; L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1},$$

denn für $a \in L_\alpha$ ist

$$a = \{x \mid\; x \in a\} = \{x \in L_\alpha \mid\; L_\alpha \models x \in a\}.$$

Daher ist $a \in L_{\alpha+1}$, und wir erhalten $L_\alpha \subseteq L_{\alpha+1}$. Durch Induktion nach α folgt aber sofort

$$(\forall \alpha \in \text{On})[\text{Tran}(L_\alpha)]. \tag{4.17}$$

□

Mit Lemma 4.4.2 folgt nun, daß alle L_α und L transitiv sind und $L_\alpha \subseteq L_\beta$ für $\alpha \leq \beta$ gilt.
Wegen $L_\alpha = \{x \in L_\alpha \mid\; L_\alpha \models x = x\}$ gilt $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$ und es folgt

$$\alpha < \beta \;\Rightarrow\; L_\alpha \in L_\beta. \tag{4.18}$$

Im folgenden wird es oft bequem sein, eine einfache Definition für Ordinalzahlen zur Verfügung zu haben. Mit dem Fundierungsaxiom erhalten wir

$$(\forall x)[x \in \text{On} \leftrightarrow \text{Tran}(x) \wedge (\forall y \in x)\text{Tran}(y)]. \tag{4.19}$$

Die Richtung von links nach rechts in (4.19) folgt dabei sofort aus Lemma 3.2.2 *(i)*. Die Gegenrichtung zeigen wir durch $\in$-Induktion nach x. Die Induktionsvoraussetzung liefert dann $x \subseteq \text{On}$. Mit $\text{Tran}(x)$ (und $x \in \mathbb{V}$, was implizit in der Tatsache steckt, daß wir nur über Mengen quantifizieren) erhalten wir aus Korollar 3.2.8 dann $x \in \text{On}$. □

Wir wollen als erstes feststellen, daß alle Ordinalzahlen konstruktibel sind.

4.5.4 Lemma *Es gelten*

(i) $L_\alpha \cap \text{On} = \alpha$

(ii) $\alpha \in \text{On} \;\Rightarrow\; \text{rk}_L(\alpha) = \alpha + 1$

(iii) $\text{On} \subseteq L$

Beweis: Wir zeigen *(i)* und *(ii)* simultan durch Induktion nach α.
$L_0 \cap \text{On} = \emptyset$ ist klar. Ist $\alpha \in \text{Lim}$, so folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$L_\alpha \cap \mathrm{On} = \bigcup_{\xi < \alpha} (L_\xi \cap \mathrm{On}) = \bigcup_{\xi < \alpha} \xi = \alpha.$$

Damit ist

$$\alpha = \{x \in L_\alpha \mid x \in \mathrm{On}\}.$$

Wegen

$$\mathrm{Tran}(x) \Leftrightarrow (\forall y \in x)(\forall z \in y)[z \in x]$$

ist $\mathrm{Tran}(x)$ und damit nach (4.19) auch $x \in \mathrm{On}$ eine Δ_0-Formel. Also ist

$$\alpha = \{x \in L_\alpha \mid L_\alpha \models x \in \mathrm{On}\}$$

und damit

$$\alpha \in L_{\alpha+1}. \tag{4.20}$$

Sei nun $\alpha = \beta + 1$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung für *(i)*

$$L_\beta \cap \mathrm{On} = \beta$$

und nach Induktionsvoraussetzung für *(ii)*

$$\beta \in L_{\beta+1} = L_\alpha.$$

Damit ist $\alpha = \beta \cup \{\beta\} \subseteq L_\alpha$, woraus

$$\alpha \subseteq L_\alpha \cap \mathrm{On} \tag{i}$$

folgt. Da umgekehrt nach (4.6)

$$L_\alpha \cap \mathrm{On} \subseteq V_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$$

gilt, folgt

$$L_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha.$$

Damit ist *(i)* gezeigt. Um auch *(ii)* zu erhalten, beobachten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= \beta \cup \{\beta\}\\ &= (L_\beta \cap \mathrm{On}) \cup \{\beta\}\\ &= \{x \in L_\beta \mid x \in \mathrm{On}\} \cup \{z \mid z = L_\beta \cap \mathrm{On}\}\\ &= \{x \in L_\beta \mid x \in \mathrm{On}\} \cup\\ &\quad\ \{z \mid (\forall x \in z)(x \in L_\beta \wedge x \in \mathrm{On}) \wedge (\forall x \in L_\beta)(x \in \mathrm{On} \to x \in z)\}.\end{aligned}$$

Also gilt (in $\mathbb{V}$)

$$z \in \alpha \;\Leftrightarrow\; (z \in L_\beta \wedge z \in \mathrm{On}) \\ \vee\, [(\forall x \in z)(x \in L_\beta \wedge x \in \mathrm{On}) \\ \wedge\, (\forall x \in L_\beta)(x \notin \mathrm{On} \vee x \in z)]. \tag{ii}$$

Kürzen wir die rechte Seite der Äquivalenz in (ii) mit $\chi(z)$ ab, so haben wir zusammen mit (i)

$$\alpha = \{z \in L_\alpha \mid\ \chi(z)\}.$$

Wir haben bereits festgestellt, daß $x \in \mathrm{On}$ eine Δ_0-Formel ist. Nach (4.18) ist $L_\beta \in L_\alpha$. Damit ist $\chi(z)$ eine Δ_0-Formel mit Parametern aus L_α. Wegen $L_\alpha \subseteq \mathbb{V}$ und $\mathrm{Tran}(L_\alpha)$ folgt mit Satz 4.3.2 aus (ii)

$$\alpha = \{z \in L_\alpha \mid\ L_\alpha \models \chi(z)\} \in L_{\alpha+1}.$$

Damit ist $\mathrm{rk}_L(\alpha) \leq \alpha + 1$. Hätten wir $\mathrm{rk}_L(\alpha) < \alpha + 1$, so wäre $\alpha \in L_\alpha \cap \mathrm{On} = \alpha$ im Widerspruch zu Lemma 3.2.2 *(iv)*. Damit ist *(ii)* gezeigt. *(iii)* folgt aber sofort aus *(ii)*. □

Wir wollen uns weitere elementare Eigenschaften der L_α klarmachen.

4.5.5 Lemma *Für jede Limeszahl $\alpha > \omega$ gilt*

$$L_\alpha \models \textit{(Ext)} \wedge \textit{(Fu)} \wedge \textit{(Pa)} \wedge \textit{(Vm)} \wedge \textit{(Ue)}$$

Beweis: Da L_α transitiv ist, erhalten wir sofort

$$L_\alpha \models \textit{(Ext)}.$$

Die in (4.15) definierte Abbildung $\mathrm{rk}_L \colon L \longrightarrow \mathrm{On}$ ist ein $\in$-$<$-Homomorphismus. Damit erhalten wir insbesondere

$$L_\alpha \models \textit{(Fu)}.$$

Für eine endliche Menge $M = \{a_0, \ldots, a_n\}$ gilt

$$b \in \mathrm{Pow}(M) \;\Leftrightarrow\; b = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\} \\ \Leftrightarrow\; b = \{x \in M \mid\ M \models x = a_{i_1} \vee \cdots \vee x = a_{i_k}\}$$

für $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$. Also haben wir für endliches M immer

$$\mathrm{Pow}(M) = \textit{Def}(M)$$

und erhalten daher

$$\alpha \leq \omega \;\Rightarrow\; L_\alpha = V_\alpha = \mathbb{HF}_\alpha. \tag{4.21}$$

Aus (4.18) und (4.20) folgt

$$\omega \in L_\alpha$$

und damit

$$L_\alpha \models \textit{(Ue)}.$$

Sind $a, b \in L_\alpha$, so gibt es ein $\beta < \alpha$ mit $a, b \in L_\beta$ und es ist

$$\{a, b\} = \{x \in L_\beta |\ L_\beta \models x = a \vee x = b\} \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha$$

und wir haben somit

$$L_\alpha \models \textit{(Pa)}.$$

Für $a \in L_\beta$ erhalten wir wegen $\mathrm{Tran}(L_\beta)$

$$\bigcup a = \{x \in L_\beta |\ L_\beta \models (\exists y \in a)(x \in y)\} \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha.$$

Also gilt

$$L_\alpha \models \textit{(Vm)}. \qquad \square$$

Wir wollen uns nun klarmachen, daß L ein Modell von ZF ist.
Die Argumentation von Lemma 4.5.5 ist direkt übertragbar, wodurch wir

$$L \models \textit{(Ext)} \wedge \textit{(Fu)} \wedge \textit{(Pa)} \wedge \textit{(Vm)} \wedge \textit{(Ue)}$$

erhalten. Wir haben also nur noch die Abschlußaxiome *(Kol)*, *(Pm)* und *(As)* nachzuprüfen. Aus Lemma 4.5.3, (4.18) und Lemma 4.4.11 erhalten wir sofort

$$L \models \textit{(Kol)}.$$

Etwas aufwendiger wird der Nachweis der Gültigkeit des Potenzmengenaxioms. Sei dazu $a \in L$. Wir haben zu zeigen, daß

$$b := \{x \in L |\ L \models x \subseteq a\} \in L$$

ist. Zunächst ist $b \in \mathbb{V}$. Also gibt es nach Lemma 4.4.2 *(iii)* ein α mit $a \in L_\alpha$ und $b \subseteq L_\alpha$. Damit gilt

$$b = \{x \in L_\alpha |\ \mathbb{V} \models (\forall y \in x)(y \in a)\}.$$

$(\forall y \in x)(y \in a)$ ist aber ein Δ_0-Satz mit Parametern aus L_α. Also ist

$$b = \{x \in L_\alpha |\ L_\alpha \models (\forall y \in x)(y \in a)\} \in L_{\alpha+1}.$$

und wir haben

$$L \models (\forall a)(\exists b)(\forall z)(z \in b \ \Leftrightarrow\ z \subseteq a),$$

d.h.

$$L \models \textit{(Pm)}.$$

Somit verbleibt nur noch die Aussonderung. Sei also $\varphi(x, \vec{u})$ eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel ohne weitere Variablen, sowie $\vec{a}, a \in L$. Wir haben zu zeigen, daß ein $b \in L$ existiert mit

$$(\forall x \in L)[L \models x \in b \leftrightarrow x \in a \land \varphi(x, \vec{a})]. \tag{i}$$

Mit Lemma 4.4.2 finden wir wieder ein α mit $\vec{a}, a \in L_\alpha$. Wir definieren

$$b := \{x \in L |\ L \models x \in a \land \varphi(x, \vec{a})\}.$$

Mit dem Reflexionsprinzip für L finden wir ein $\beta \geq \alpha$ mit

$$b = \{x \in L_\beta |\ L_\beta \models x \in a \land \varphi(x, \vec{a})\} \in L_{\beta+1}.$$

Offensichtlich gilt (i) für das so konstruierte b. □

Zusammenfassend erhalten wir

4.5.6 Satz $L \models ZF$.

Wir haben mit L innerhalb von $\mathbb{V}$ ein Modell von ZF konstruiert. Daher nennt man L ein *inneres Modell*. Zur Konstruktion von L haben wir außer der Transitivität von $\mathbb{V}$ nur die Tatsache benutzt, daß $\mathbb{V}$ ein ZF-Modell ist. Damit ist L innerhalb jedes transitiven ZF-Modells konstruierbar. Es ist in diesem Sinne *minimal*, wobei es bislang noch nicht klar ist, ob L unabhängig von dem Universum ist, in dem es konstruiert wird. Das soll in den folgenden Abschnitten studiert werden.

Mit Satz 4.5.6 haben wir die relative Konsistenz des Konstruktibilitätsaxioms

$$\mathbb{V} = L$$

gezeigt. Damit gilt

4.5.7 Satz *Das Konstruktibilitätsaxiom* $\mathbb{V} = L$ *ist relativ konsistent zu* ZF.

Allerdings haben wir uns noch nicht klar gemacht, daß sich $\mathbb{V} = L$ durch einen $\mathcal{L}(\in)$ Satz beschreiben läßt. Das soll im folgenden Abschnitt geklärt werden.

4.6 GÖDEL**operationen**

Ziel dieses (etwas technischen) Abschnittes ist es, das Konstruktibilitätsaxiom $\mathbb{V} = L$ als $\mathcal{L}(\in)$-Formel zu erhalten. Erst dann wird Satz 4.5.7 zu einer wirklich sinnvollen Aussage. Daneben wollen wir so vorgehen, daß wir eine gewisse Kontrolle über die Komplexität der Formel $\mathbb{V} = L$ erhalten.

Wir können L als Funktion $L\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathbb{V}$ auffassen, die durch die Rekursionsgleichungen

$$\begin{array}{lcl} L_0 & = & \emptyset \\ L_{\alpha+1} & = & \mathit{Def}(L_\alpha) \\ L_\lambda & = & \bigcup_{\xi<\lambda} L_\xi \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim} \end{array}$$

definiert ist. Gemäß (3.1) und (3.2) erhalten wir daher

$$\begin{aligned} x = L_\alpha \;\Leftrightarrow\; (\exists f)[&\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \\ &\wedge (\forall y \in \alpha)(f(y) = G(f \restriction y)) \wedge x = G(f)] \end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei gemäß Satz 3.4.10 die Funktion G definiert ist durch

$$G(f) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \mathrm{dom}(f) = 0 \\ \bigcup \mathrm{rng}(f) & \text{falls } \mathrm{dom}(f) \in \mathrm{Lim} \\ \mathit{Def}(f(\alpha)) & \text{falls } \mathrm{dom}(f) = S\alpha. \end{cases} \tag{4.23}$$

Um einzusehen, daß $x = L_\alpha$ durch eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel definiert wird, genügt es daher, $\mathit{Def}(M)$ durch eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel zu beschreiben. Dazu ist es notwendig, $M \models \varphi(\vec{a})$ auszudrücken. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, dies zu erreichen. Eine besteht darin, jeder $\mathcal{L}(\in)$-Formel φ eine GÖDELnummer $\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathbb{V}$ zuzuordnen und dann die Existenz einer Formel *Sat* zu zeigen, für die

$$M \models \varphi(\vec{a}) \;\Leftrightarrow\; \mathit{Sat}(\ulcorner\varphi\urcorner, M, \vec{a})$$

für alle transitiven $M \in \mathbb{V}$ und $\vec{a} \in M^k$ gilt. Dieser Weg wird beispielsweise in [2] beschritten. Wir wollen hier einen anderen Weg beschreiten und $\mathit{Def}(M)$ als Abschluß von M unter elementaren Funktionen beschreiben. Dieser Weg wurde bereits von K. GÖDEL beschritten.

4.6.1 Definition Die elementaren GÖDELfunktionen sind:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F}_1(x,y) := \{x,y\} & \mathcal{F}_6(x,y) := \mathrm{dom}(x) \\ \mathcal{F}_2(x,y) := x \times y & \mathcal{F}_7(x,y) := \{(u,v) \mid u \in x \wedge v \in y \wedge u \in v\} \\ \mathcal{F}_3(x,y) := x \setminus y & \mathcal{F}_8(x,y) := \{(v,u) \mid (u,v) \in x\} \\ \mathcal{F}_4(x,y) := x \cap y & \mathcal{F}_9(x,y) := \{((u,w),v) \mid (u,v) \in x \wedge w \in y\} \\ \mathcal{F}_5(x,y) := \bigcup x & \mathcal{F}_{10}(x,y) := \{((u,v),w)) \mid u \in x \wedge (v,w) \in y\} \end{array}$$

Die etwas merkwürdig aussehenden Funktionen $\mathcal{F}_9$ und $\mathcal{F}_{10}$ erklären sich aus der Asymmetrie der n-Tupel. Wir wollen von

$$(a_1, \ldots, a_{n+1}) := ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

ausgehen. Dann ist natürlich klar, daß $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(a_1, (a_2, \ldots, a_n))$ sehr verschiedene Objekte sind. Die beiden Funktionen sorgen dafür, daß wir das eine in das andere umwandeln können.

Mit Hilfe der elementaren GÖDELfunktionen erhalten wir den GÖDELabschluß $Cl(M)$ einer Menge M wie folgt:

4.6.2 Definition Durch Rekursion nach $k \in \omega$ definieren wir

$$Cl^0(M) := M$$

$$Cl^{k+1}(M) := Cl^k(M) \cup \mathcal{F}_1[Cl^k(M) \times Cl^k(M)] \cup \cdots \cup \mathcal{F}_{10}[Cl^k(M) \times Cl^k(M)]$$

und setzen dann

$$Cl(M) := \bigcup_{k \in \omega} Cl^k(M).$$

Der Bequemlichkeit halber wollen wir $Cl(M)$ noch in anderer Form darstellen. Dazu definieren wir GÖDELterme wie folgt:

4.6.3 Definition GÖDELterme werden induktiv durch folgende Klauseln definiert

(GT0) Jede freie Variable ist ein GÖDELterm.

(GT1) Sind s und t GÖDELterme und gilt $1 \leq i \leq 10$, so ist auch $\mathcal{F}_i(s,t)$ ein GÖDELterm.

Ist $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein GÖDELterm ohne weitere freie Variablen, so definiert er die GÖDELfunktion $\lambda x_1 \ldots x_n \, . \, t(x_1, \ldots, x_n)$.

4.6.4 Lemma $Cl(M) = \{\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n) | a_1, \ldots, a_n \in M$ *und* $\mathcal{F}$ *ist* GÖDEL*funktion* $\}$.

Beweis: Sei $\overline{M} := \{\mathcal{F}(a_1, \ldots, a_n) | \vec{a} \in M^n \wedge \mathcal{F}$ ist GÖDELfunktion $\}$. Wir zeigen

$$a \in Cl^k(M) \;\Rightarrow\; a \in \overline{M} \tag{i}$$

durch Induktion nach k. Für $k = 0$ ist $a \in M$ und daher $a \in \overline{M}$ über die GÖDELfunktion $\lambda x \, . \, x$. Ist

$$a \in Cl^{k+1}(M) = Cl^k(M) \cup \bigcup_{i=1}^{10} \mathcal{F}_i[Cl^k(M) \times Cl^k(M)]$$

und $a \in Cl^k(M)$, so gilt $a \in \overline{M}$ nach Induktionsvoraussetzung. Ist $a \notin Cl^k(M)$, so gibt es $s, t \in Cl^k(M)$ und ein $i \in \{1, \ldots, 10\}$ mit $a = \mathcal{F}_i(s,t)$. Nach Induktionsvoraussetzung sind $s, t \in \overline{M}$ und wir erhalten GÖDELterme $\tilde{s}, \tilde{t}$ und ein $\vec{a} \in M$ mit $s = \tilde{s}(\vec{a})$ und $t = \tilde{t}(\vec{a})$. (Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für s und t das gleiche Tupel $\vec{a}$ herangezogen werden kann. Notfalls fügen wir leere Argumente in $\tilde{s}$ und $\tilde{t}$ ein.) Dann ist aber $\mathcal{F}_i(\tilde{s},\tilde{t})$ eine GÖDELfunktion und wir erhalten

$$\mathcal{F}_i(\tilde{s},\tilde{t})(\vec{a}) = \mathcal{F}_i(s,t) = a.$$

Also ist $a \in \overline{M}$.
Für die entgegengesetzte Inklusion

$$\overline{M} \subseteq \mathit{Cl}(M) \tag{ii}$$

nehmen wir

$$a = t(\vec{a})$$

an und zeigen $t(\vec{a}) \in \mathit{Cl}(M)$ durch Induktion nach dem Aufbau des GÖDELterms t. Ist $t = x_i$, so ist $t(\vec{a}) = a_i \in M \subseteq \mathit{Cl}(M)$. Ist $t = \mathcal{F}_i(t_0,t_1)$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung $t_0(\vec{a}), t_1(\vec{a}) \in \mathit{Cl}(M)$. Damit finden wir ein $k \in \omega$ mit $t_0(\vec{a}), t_1(\vec{a}) \in \mathit{Cl}^k(M)$ und es folgt

$$t(\vec{a}) = \mathcal{F}_i(t_0(\vec{a}),\ t_1(\vec{a})) \in \mathit{Cl}^{k+1}(M) \subseteq \mathit{Cl}(M). \qquad \square$$

Unser Ziel ist es, $\mathit{Cl}(M)$ und $\mathit{Def}(M)$ in Beziehung zu setzen. Dazu definieren wir $\mathcal{L}(\in)$-Formeln in Normalform. Zunächst eliminieren wir das Gleichheitszeichen, indem wir

$$x = y \ :\Leftrightarrow\ (\forall z \in x)(z \in y) \wedge (\forall z \in y)(z \in x) \tag{4.24}$$

setzen. Eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel φ im Fragment $\neg$, $\wedge$, $\exists$ heißt eine Normalformel, falls

- φ kein Gleichheitszeichen enthält
- $\in$ nur in der Form $x_i \in x_j$ mit $i \neq j$ in φ auftritt
- $\exists$ nur in der Form $(\exists x_{m+1} \in x_i)\psi(x_1,\ldots,x_{m+1})$ mit $i \leq m$ in φ auftritt.

Insbesondere sind alle Normalformeln Δ_0-Formeln. Es gilt aber allgemeiner

4.6.5 Lemma *Ist φ eine Δ_0-Formel, so gibt es eine Normalformel φ_N mit*

$$M \models (\forall x_1)\ldots(\forall x_m)[\varphi(x_1,\ldots,x_m) \leftrightarrow \varphi_N(x_1,\ldots,x_m)]$$

für jede Menge $M \neq \emptyset$ mit $M \models$ (Ext). Umgekehrt ist jede Normalformel bereits eine Δ_0-Formel.

Beweis: Sei φ eine Δ_0-Formel. Ersetzen wir in φ jedes Auftreten von $x = y$ gemäß (4.24), so bleibt φ eine Δ_0-Formel. Wegen $M \models$ *(Ext)* dürfen wir daher annehmen, daß φ eine Formel des Fragmentes $\neg$, $\wedge$, $\exists$, $\in$ ohne Gleichheitszeichen ist. Der Beweis verläuft nun durch Induktion nach dem Aufbau von φ und besteht im wesentlichen in einer Umbenennung der gebundenen Variablen. Etwas Aufmerksamkeit erfordert der Fall, daß $\varphi \equiv x_i \in x_i$ ist. Wegen $M \not\models (\forall x_i)(x_i \in x_i)$ genügt es, φ_N als unerfüllbare Formel, z.B. $(\exists x_{i+1} \in x_i)[x_i \in x_{i+1}]$ zu wählen. □

4.6.6 Definition Eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ohne weitere freie Variablen heißt eine $\mathcal{G}$-Formel, wenn es eine n-stellige GÖDELfunktion $\mathcal{F}_\varphi$ gibt mit

$$\{(x_1,\dots,x_n) \in a_1 \times \cdots \times a_n \mid \varphi(x_1,\dots,x_n)\} = \mathcal{F}_\varphi(a_1,\dots,a_n).$$

Wir zeigen nun

4.6.7 Lemma *Jede Δ_0-Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ohne weitere freie Variablen ist eine $\mathcal{G}$-Formel.*

Beweis: Wegen Lemma 4.6.5 dürfen wir annehmen, daß φ eine Normalformel ist. Wir machen eine Reihe von Beobachtungen, die den Beweis vorbereiten.

Ist $\varphi(x_1,\dots,x_{n+1}) :\equiv \psi(x_1,\dots,x_n)$ und $\psi(x_1,\dots,x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel, so ist auch $\varphi(x_1,\dots,x_{n+1})$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (i)

Dazu setzen wir einfach $\mathcal{F}_\varphi(a_1,\dots,a_n,a_{n+1}) := \mathcal{F}_\psi(a_1,\dots,a_n) \times a_{n+1}$. Etwas schwieriger ist es, die Stellenzahl zu vermindern.

Ist $\varphi(x_1,\dots,x_n) :\equiv \psi(x_1,\dots,x_{n+1})$ und $\psi(x_1,\dots,x_{n+1})$ eine $\mathcal{G}$-Formel, so ist auch $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (ii)

Dazu beobachten wir, daß $\{\emptyset\} = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_3(a,a),\mathcal{F}_3(a,a))$ für alle a gilt und definieren $\mathcal{F}_\varphi(a_1,\dots,a_n) := \mathrm{dom}(\mathcal{F}_\psi(a_1,\dots,a_n,\{\emptyset\}))$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\varphi(a_1,\dots,a_n) &= \{x \mid (\exists y)[(x,y) \in \mathcal{F}_\psi(a_1,\dots,a_n,\{\emptyset\})]\}\\ &= \{(x_1,\dots,x_n) \in a_1 \times \cdots \times a_n \mid \psi(x_1,\dots,x_n,\emptyset)\}\\ &= \{(x_1,\dots,x_n) \in a_1 \times \cdots \times a_n \mid \varphi(x_1,\dots,x_n)\}.\end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) erhalten wir durch Iteration sofort

Ist $\varphi(x_1,\dots,x_n) :\equiv \psi(x_1,\dots,x_m)$ und $\psi(x_1,\dots,x_m)$ eine $\mathcal{G}$-Formel, so ist auch $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (iii)

Als nächstes wollen wir einsehen, daß $\mathcal{G}$-Formeln gegenüber den booleschen Operationen abgeschlossen sind. Wir zeigen

Ist $\varphi(x_1,\dots,x_n) :\equiv \neg\psi(x_1,\dots,x_n)$ und $\psi(x_1,\dots,x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel, so ist auch $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (iv)

Dazu definieren wir $\mathcal{F}_\varphi := (a_1 \times \cdots \times a_n) \setminus \mathcal{F}_\psi$.

Ist $\varphi(\vec{x}) :\equiv \psi_1(\vec{x}) \wedge \psi_2(\vec{x})$ und sind $\psi_1(\vec{x})$ und $\psi_2(\vec{x})$ $\mathcal{G}$-Formeln, so ist auch φ eine $\mathcal{G}$-Formel. (v)

Dazu setzen wir $\mathcal{F}_\varphi(\vec{a}) := \mathcal{F}_{\psi_1}(\vec{a}) \cap \mathcal{F}_{\psi_2}(\vec{a})$.
Aus (iii), (iv) und (v) folgt, daß die $\mathcal{G}$-Formeln gegenüber den booleschen Operationen abgeschlossen sind. Zum Nachweis des Abschlußes gegenüber beschränkter $\exists$-Quantifikation benötigen wir die Tatsache, daß normale Primformeln alle $\mathcal{G}$-Formeln sind. Dies gestaltet sich überraschend schwierig. Zunächst zeigen wir

Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) :\equiv \psi(x_1, \ldots, x_n)_{x_n}[x_{n+1}]$ und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel, so ist auch $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1})$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (vi)

(Hier notieren wir mit $\psi_x[y]$ die Zeichenreihe, die aus ψ entsteht, wenn alle freien Auftreten von x durch y ersetzt werden.)
Ist $n = 1$, so setzen wir

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, a_2) := a_1 \times \mathcal{F}_\psi(a_2).$$

Für $n > 1$ sei

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_{n+1}) := \mathcal{F}_9(\mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}), a_n).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_\varphi(\vec{a}) \\
&\quad = \{((y, x_n), x_{n+1}) \mid\ x_n \in a_n \wedge (y, x_{n+1}) \in \mathcal{F}_\psi(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1})\} \\
&\quad = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in a_1 \times \cdots \times a_{n+1} \mid\ \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})\}.
\end{aligned}$$

Ist $\psi(x_1, x_2)$ eine $\mathcal{G}$-Formel und $\varphi(x_1, \ldots, x_n) :\equiv \psi_{x_1,x_2}[x_{n-1}, x_n]$, so ist auch $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (vii)

Natürlich müssen wir hier $n \geq 2$ annehmen. Für $n > 2$ sei

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \ldots, a_n) := \mathcal{F}_{10}(a_1 \times \cdots \times a_{n-2}, \mathcal{F}_\psi(a_{n-1}, a_n)).$$

Die Formel $(x_1 \in x_2)$ ist eine $\mathcal{G}$-Formel. (viii)

Wir setzen $\mathcal{F}_\varphi(a_1, a_2) := \mathcal{F}_7(a_1, a_2)$.

Aus (vii) und (viii) erhalten wir nun

Die Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) :\equiv x_n \in x_{n+1}$ ist eine $\mathcal{G}$-Formel. (ix)

Durch Induktion nach n erhalten wir nun:

Für $i < n$ ist die Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n) :\equiv x_i \in x_n$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (x)

Für $n = 2$ ist dies (viii). Nach Induktionsvoraussetzung ist $x_i \in x_n$ für $i < n$ eine $\mathcal{G}$-Formel und $x_n \in x_{n+1}$ ist nach (ix) eine $\mathcal{G}$-Formel. Mit (vi) folgt, daß dann auch $x_i \in x_{n+1}$ eine $\mathcal{G}$-Formel ist.

Aus (x) folgt nun mit (iii)

Ist $i < j$, so ist die Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n) :\equiv x_i \in x_j$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (xi)

Betrachten wir die Funktion $\mathcal{F}_8(\mathcal{F}_7(a_1, a_2), a_2)$ so erhalten wir

Die Formel $x_2 \in x_1$ ist eine $\mathcal{G}$-Formel. (xii)

Dies zusammen mit (vii) ergibt

Die Formel $\varphi(x_1, \dots, x_{n+1}) :\equiv x_{n+1} \in x_n$ ist eine $\mathcal{G}$-Formel. (xiii)

Analog zu (xi) erhalten wir aus (vi), (xii) und (xiii), daß auch für $i > j$ die Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n) :\equiv x_i \in x_j$ eine $\mathcal{G}$-Formel ist. Damit haben wir:

Ist $i \neq j$, so ist die Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n) :\equiv x_i \in x_j$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (xiv)

Nun muß nur noch der Abschluß der $\mathcal{G}$-Formeln gegenüber beschränkter Quantifikation gezeigt werden. D.h.

Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n) :\equiv (\exists x_{n+1} \in x_i)\psi(x_1, \dots, x_{n+1})$ für ein $i \leq n$ und eine $\mathcal{G}$-Formel $\psi(x_1, \dots, x_{n+1})$, so ist auch $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine $\mathcal{G}$-Formel. (xv)

Nach (xiv) und (v) ist die Formel

$$\chi(x_1, \dots, x_{n+1}) :\equiv x_{n+1} \in x_i \wedge \psi(x_1, \dots, x_{n+1})$$

eine $\mathcal{G}$-Formel. Dann gilt $F_\chi(a_1, \dots, a_n, \bigcup a_i) = c$ für

$$c := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) | \bigwedge_{k=1}^{n} (x_k \in a_k) \wedge x_{n+1} \in x_i \wedge \psi(\vec{x}\,)\}.$$

Damit können wir

$$\mathcal{F}_\varphi(a_1, \dots, a_n) := \mathrm{dom}(\mathcal{F}_\chi(a_1, \dots, a_n, \bigcup a_i))$$

setzen.

Aus (xiv) zusammen mit (iv),(v) und (xv) folgt durch Induktion nach dem Aufbau von φ, daß jede Normalformel φ eine $\mathcal{G}$-Formel ist. □

Nun wenden wir Lemma 4.6.7 an, um das folgende Lemma zu zeigen.

4.6.8 Lemma *Es ist Def*$(M) \subseteq$ *Cl*$(M \cup \{M\}) \cap \mathrm{Pow}(M)$.

Beweis: Ist $a \in \mathit{Def}(M)$, so gibt es einen Satz $\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ mit Parametern aus $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$ so, daß

$$\begin{aligned} a &= \{x \in M \mid M \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\} \\ &= \{x \in M \mid \varphi(x, a_1, \dots, a_n)^M\} \\ &= \mathrm{rng}(\{(z, \vec{y}, x) \in \{M\} \times \{a_1\} \cdots \times \{a_n\} \times M \mid \varphi(x, \vec{y})^z\}) \end{aligned}$$

gilt. Nun ist die Formel $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)^z$ eine Δ_0-Formel. Daher existiert nach Lemma 4.6.7 eine GÖDELfunktion $\mathcal{F}_\varphi$ mit

$$a = \mathrm{rng}(\mathcal{F}_\varphi(\{M\}, \{a_1\}, \cdots, \{a_n\}, M)).$$

Wegen $\mathrm{rng}(f) = \mathrm{dom}(\mathcal{F}_8(f, f))$ erhalten wir aus Lemma 4.6.4

$$a \in \mathit{Cl}(M \cup \{M\}) \cap \mathrm{Pow}(M). \qquad \square$$

Die Umkehrung der Inklusion in Lemma 4.6.8 bereiten wir durch die folgenden Definitionen und Lemmata vor.

4.6.9 Definition Eine Funktion $\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ heißt *substituierbar*, falls die folgenden vier Bedingungen erfüllt sind:

(S1) $u \in \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ ist eine Δ_0-Formel.

(S2) Mit φ ist auch $(\exists u \in \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n))\varphi$ eine Δ_0-Formel.

(S3) $z = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ ist eine Δ_0-Formel.

(S4) Mit φ ist auch $\varphi(\mathcal{F}(\vec{x}))$ eine Δ_0-Formel.

Erfüllt eine Funktion die Punkte (S1) und (S2), so ist sie bereits substituierbar, denn $z = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ ist äquivalent zu

$$(\forall y \in z)(y \in \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)) \wedge (\forall y \in \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n))(y \in z),$$

was laut Voraussetzung wieder eine Δ_0-Formel ist. Um auch (S4) einzusehen, überlegt man sich, daß durch das Einsetzen von $\mathcal{F}(\vec{x})$ in die Δ_0-Formel φ nur neue Subformeln der Formen $y \in \mathcal{F}(\vec{x})$, $y = F(\vec{x})$, $(\exists y \in \mathcal{F}(\vec{x}))\psi$ und $\mathcal{F}(\vec{x}) \in y$ entstehen können. Während die ersten drei Formeln schon durch (S1) bis (S3) als Δ_0-Formeln erkannt werden, läßt sich die vierte äquivalent zur Δ_0-Formel $(\exists z \in y)(z = \mathcal{F}(\vec{x}))$ umformen. Die substituierbaren Funktionen tragen ihren Namen zu recht.

4.6.10 Lemma *Die substituierbaren Funktionen sind gegen Substitution mit substituierbaren Funktionen abgeschlossen.*

Beweis: Wir müssen nur zeigen, daß mit F und G auch $H := F \circ G$ substituierbar ist. Um (Si) (sogar für $1 \le i \le 4$) für H zu beweisen, benutzt man (Si) für F und dann (S4) für G. $\square$

4.6.11 Lemma *Die* GÖDEL*funktionen sind substituierbar.*

Beweis: Wegen Lemma 4.6.10 müssen wir nur zeigen, daß die $\mathcal{F}_i$ substituierbar sind. Zuerst bearbeiten wir dazu folgerichtigerweise $\mathcal{F}_1$, wofür wir leicht die gesuchten Δ_0-Formeln finden:

$$u \in \mathcal{F}_1(x,y) \;\Leftrightarrow\; u = x \vee u = y$$

sowie

$$(\exists u \in \mathcal{F}_1(x,y))\varphi(u) \;\Leftrightarrow\; \varphi(x) \vee \varphi(y).$$

Mit Lemma 4.6.10 folgt nun, daß

$$\mathcal{F}(x,y) := (x,y) = \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_1(x,y), \mathcal{F}_1(x,x))$$

subsituierbar ist. Um möglichst ökonomisch zu verfahren, zeigen wir jetzt, daß die Projektionen P_1 und P_2 substituierbar sind. Dazu beachten wir, daß es eine Δ_0-Formel Paar(x) gibt, die genau dann zutrifft, wenn x ein geordnetes Paar ist:

$$\text{Paar}(x) \;:\Leftrightarrow\; (\exists y \in x)(\exists u \in y)(\exists v \in y)[x = (u,v)].$$

Wir sehen leicht, daß $z \in P_1(x)$ äquivalent zu der Δ_0-Formel

$$\text{Paar}(x) \wedge (\exists v \in x)(\exists w_0 \in v)(\exists w_1 \in v)(x = (w_0, w_1) \wedge z \in w_0)$$

ist. Die Behandlung von (S2) verläuft analog, ebenso bereitet es jetzt keine Mühe, P_2 zu behandeln.
Wir wollen uns jetzt um die Funktionen $\mathcal{F}_2$ bis $\mathcal{F}_{10}$ kümmern. Da sich dies mit der soeben geleisteten Vorarbeit als Fleißaufgabe erweist, wollen wir nur einige Fälle vorführen. Dabei beschränken wir uns auf (S1), da (S2) stets analog formuliert werden kann. Wir bekommen zum Beispiel

$$u \in \mathcal{F}_2(x,y) \;\Leftrightarrow\; (\exists v \in x)(\exists w \in y)(u = (v,w)),$$

und $u \in \mathcal{F}_9(x,y)$ ist äquivalent zu

$$(\exists w \in y)(\exists z \in x)(\text{Paar}(z) \wedge u = ((P_1(z), w), P_2(z))). \qquad \square$$

4.6.12 Satz *Ist M eine transitive Menge, so gilt*

$$\mathit{Def}(M) = \mathit{Cl}(M \cup \{M\}) \cap \text{Pow}(M).$$

Beweis: In Lemma 4.6.8 haben wir bereits eingesehen, daß $\mathit{Def}(M) \subseteq \mathit{Cl}(M \cup \{M\}) \cap \text{Pow}(M)$ ist.
Für die umgekehrte Inklusion seien eine GÖDELfunktion $\mathcal{F}(x_0, \ldots, x_n)$ und $a_1, \ldots, a_n \in M$ mit $\mathcal{F}(M, a_1, \ldots, a_n) \subseteq M$ gegeben. Wir wollen

$\mathcal{F}(M,\vec{a}) \in \mathit{Def}(M)$ zeigen. Laut Lemma 4.6.11 gibt es eine Δ_0-Formel $\varphi(y,x_0,\ldots,x_n)$ mit $y \in \mathcal{F}(M,\vec{a}) \iff \varphi(y,M,\vec{a})$. Wegen $\mathcal{F}(M,\vec{a}) \subseteq M$ gilt nun

$$\mathcal{F}(M,\vec{a}) = \{y \in M \mid \varphi(y,M,\vec{a})\}. \tag{i}$$

Da der Parameter M in φ benutzt werden kann, müssen wir φ noch modifizieren, um eine Formel ψ mit

$$\varphi(y,M,\vec{a}) \Leftrightarrow M \models \psi(y,\vec{a}) \tag{ii}$$

zu bekommen. Wegen der in transitiven Mengen geltenden Extensionalität dürfen wir annehmen, daß in φ alle Auftreten von $v = w$ durch das äquivalente $(\forall u \in v)(u \in w) \wedge (\forall u \in w)(u \in v)$ ersetzt worden sind. Die Formel ψ entstehe nun aus φ, indem alle Auftreten von $(\mathsf{Q}v \in x_0)$ durch $(\mathsf{Q}v)$, alle Auftreten von $v \in x_0$ durch eine trivial wahre Formel, etwa $v = v$, und alle Auftreten von $x_0 \in v$ durch $v \neq v$ ersetzt werden. Man überlegt sich leicht, daß nun (ii) zutrifft, woraus mit (i) sofort $\mathcal{F}(M,\vec{a}) \in \mathit{Def}(M)$ folgt. $\square$

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.6.12 erhalten wir

4.6.13 Korollar $L_{\alpha+1} = \mathit{Cl}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\}) \cap \mathrm{Pow}(L_\alpha)$.

4.7 Die relative Konsistenz des Auswahlaxioms

Als erste Anwendung von Korollar 4.6.13 wollen wir zeigen, daß sich das konstruktible Universum wohlordnen läßt. Die Wohlordnung des Universums soll mit $<_L$ bezeichnet werden. Wir definieren $<_L$ in Schichten $<_\alpha$, die L_α wohlordnen und sich enderweitern. Da im Nachfolgerfall

$$L_{\alpha+1} = \mathit{Cl}(SL_\alpha) \cap \mathrm{Pow}(L_\alpha) = \bigcup_{n\in\omega} \mathit{Cl}^n(SL_\alpha) \cap \mathrm{Pow}(L_\alpha)$$

ist, definieren wir $<_{\alpha+1}$ wieder in Schichten $<^n_{\alpha+1}$, die $\mathit{Cl}^n(SL_\alpha)$ wohlordnen und die sich ebenfalls enderweitern.
Es sei

$$<_0 := \emptyset$$

und für $\lambda \in \mathrm{Lim}$

$$<_\lambda := \bigcup_{\xi<\lambda} <_\xi \ .$$

Im Nachfolgerfall setzen wir

$$<_{\alpha+1} := \bigcup_{n \in \omega} <^n_{\alpha+1},$$

wobei die Relationen $<^n_{\alpha+1}$ durch Rekursion nach n wie folgt definiert werden:

$$a <^0_{\alpha+1} b \;:\Leftrightarrow\; a <_\alpha b \vee (a \in L_\alpha \wedge b = L_\alpha)$$

Im Nachfolgerfall soll $<^{n+1}_{\alpha+1}$ die Relation $<^n_{\alpha+1}$ fortsetzen und die Schicht $Cl^{n+1}(SL_\alpha)$ wohlordnen. Zunächst seien alle Elemente in $Cl^n(SL_\alpha)$ vor den Elementen, die erst in $Cl^{n+1}(SL_\alpha)$ dazukommen, d.h.

$$a \in Cl^n(SL_\alpha) \wedge b \notin Cl^n(SL_\alpha) \;\Rightarrow\; a <^{n+1}_{\alpha+1} b.$$

Nun wollen wir davon ausgehen, daß $a, b \notin Cl^n(SL_\alpha)$ gilt. Dann gibt es $i, j \in \{1, \dots, 10\}$ und $c, d, c', d' \in Cl^n(SL_\alpha)$ mit $a = \mathcal{F}_i(c, d)$ und $b = \mathcal{F}_j(c', d')$. Wir setzen

$$k_x := \min\{i \,|\; (\exists c \in Cl^n(SL_\alpha))(\exists d \in Cl^n(SL_\alpha))[x = \mathcal{F}_i(c, d)]\}$$

für $x \in \{a, b\}$ und fordern

$$k_a < k_b \;\Rightarrow\; a <^{n+1}_{\alpha+1} b.$$

Stimmen diese beiden Minima überein und haben sie den Wert k, so definieren wir

$$c_x := \min_{<^n_{\alpha+1}}\{c \in Cl^n(SL_\alpha) \,|\; (\exists d \in Cl^n(SL_\alpha))[x = \mathcal{F}_k(c, d)]\}$$

und

$$c_a <^n_{\alpha+1} c_b \;\Rightarrow\; a <^{n+1}_{\alpha+1} b,$$

wobei $\min_{<^n_{\alpha+1}}$ das Minimum bezüglich der Relation $<^n_{\alpha+1}$ bedeutet, die ja nach Induktionsvoraussetzung bereits definiert ist. Stimmen auch diese Minima überein und haben sie den Wert c, so setzen wir schließlich $d_x := \min_{<^n_{\alpha+1}}\{d \in Cl^n(SL_\alpha) \,|\; x = \mathcal{F}_k(c, d)\}$ und

$$d_a <^n_{\alpha+1} d_b \;\Rightarrow\; a <^{n+1}_{\alpha+1} b.$$

Damit haben wir alle möglichen Fälle erfaßt und können schließlich

$$<_L := \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} <_\alpha$$

definieren. Es ist nach Konstruktion klar, daß $<_L$ eine lineare wohlfundierte Ordnung ist. Damit haben wir den folgenden Satz:

4.7.1 Satz *Es gibt eine Wohlordnung $<_L$ des konstruktiblen Universums.*

Als Folgerung erhalten wir sofort

4.7.2 Korollar *Jede konstruktible Menge läßt sich wohlordnen. Damit haben wir*

$$L \models (AC).$$

Wir wollen hier vermerken, daß in L sogar das starke Auswahlaxiom gilt, demzufolge eine Klassenfunktion C existiert mit

$$(\forall x)(x \neq \emptyset \to C(x) \in x).$$

Die Funktion C wird definiert durch

$$C(x) := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } x = \emptyset \\ \min_{<_L}\{y|\ y \in x\} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.25}$$

Als Folgerung von Korollar 4.7.2 erhalten wir

4.7.3 Satz *Das Auswahlaxiom ist relativ konsistent zu ZF.*

4.8 Absolutheit von L

Um die Komplexität der Formel

$$x = L_\alpha$$

zu untersuchen, haben wir nach (4.22) und (4.23) im wesentlichen die Komplexität von *Def*(M) festzustellen. Dazu stellen wir Tabellen von häufig benutzten Δ_0-Prädikaten in den Abbildungen 4.8.1 und 4.8.2 zusammen.

4.8.1 Definition Es sei $\mathcal{C}$ eine der üblichen Komplexitätsmengen für Formeln.
Eine (totale) Funktion F heißt eine $\mathcal{C}$-Funktion, wenn es eine $\mathcal{C}$-Formel $\varphi(\vec{x}, y)$ mit

$$F(\vec{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$$

gibt. F heißt eine $\mathcal{M}$-$\mathcal{C}$-Funktion, wenn es eine $\mathcal{C}$-Formel $\varphi(\vec{x}, y)$ mit

$$\mathcal{M} \models (\forall\vec{x})(\forall y)[F(\vec{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)]$$

gibt.

Wegen

$$F(\vec{x}) \neq y \Leftrightarrow (\exists z)[F(\vec{x}) = z \wedge y \neq z] \tag{4.26}$$

Prädikat	Definition
$a = \emptyset$	$\neg(\exists x \in a)[x = x]$
$a \subseteq b$	$(\forall x \in a)[x \in b]$
$u = a \cup b$	$a \subseteq u \wedge b \subseteq u \wedge (\forall x \in u)[x \in a \vee x \in b]$
$u = a \cap b$	$u \subseteq a \wedge u \subseteq b \wedge (\forall x \in a)[x \notin b \vee x \in u]$
$a = \bigcup b$	$(\forall x \in a)(\exists y \in b)[x \in y] \wedge (\forall y \in b)(\forall x \in y)[x \in a]$
$u = b \setminus a$	$(\forall x \in u)[x \in b \wedge x \notin a] \wedge (\forall x \in b)[x \in a \vee x \in u]$
$a = Sb$	$(\forall x \in a)[x \in b \vee x = b] \wedge b \subseteq a \wedge b \in a$
Tran(a)	$(\forall x \in a)(x \subseteq a)$
$a \in$ On	Tran$(a) \wedge (\forall x \in a)$Tran$(x)$
$\alpha \in$ Lim	$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \alpha \neq \emptyset \wedge (\forall y \in \alpha)(\exists z \in \alpha)[z = Sy]$
$\alpha < \beta$	$\alpha \in \mathrm{On} \wedge \beta \in \mathrm{On} \wedge \alpha \in \beta$
$\alpha \leq \beta$	$\alpha < \beta \vee (\alpha \in \mathrm{On} \wedge \alpha = \beta)$
$a = \{u_0, \ldots, u_n\}$	$u_0 \in a \wedge \cdots \wedge u_n \in a$ $\wedge (\forall x \in a)[x = u_0 \vee \cdots \vee x = u_n]$
$a = (u, v)$	$(\exists x \in a)(\exists y \in a)[a = \{x, y\}$ $\wedge x = \{u\} \wedge y = \{u, v\}]$

Abbildung 4.8.1: Einige Δ_0-Prädikate

Prädikat	Definition
Paar(a)	$(\exists y \in a)(\exists u \in y)(\exists v \in y)[a = (u, v)]$
Rel(a)	$(\forall x \in a)[\text{Paar}(x)]$
$P_1(a) = u$, d.h. $(\exists y)[a = (u, y)]$	$(\exists z \in a)(\exists y \in z)[a = (u, y)]$
$P_2(a) = u$, d.h. $(\exists y)[a = (y, u)]$	$(\exists z \in a)(\exists y \in z)[a = (y, u)]$
Fkt(f)	$\text{Rel}(f) \wedge (\forall x \in f)(\forall y \in f)[P_1(x) = P_1(y) \Rightarrow P_2(x) = P_2(y)]$
$a = \text{dom}(f)$	$(\forall x \in f)(\exists y \in a)[y = P_1(x)] \wedge (\forall y \in a)(\exists x \in f)[y = P_1(x)]$
$a = \text{rng}(f)$	$(\forall x \in f)(\exists y \in a)[y = P_2(x)] \wedge (\forall y \in a)(\exists x \in f)[y = P_2(x)]$
$a \in \text{dom}(f)$	$(\exists x \in f)[a = P_1(x)]$
$f(a) = b$	$(a \in \text{dom}(f) \wedge (\exists z \in f)[z = (a, b)]) \vee (a \notin \text{dom}(f) \wedge b = \emptyset)$

Abbildung 4.8.2: Δ_0-Prädikate für Relationen und Funktionen

gilt:

$$\textit{Jede } (\mathcal{M}\text{-})\Sigma_{(1)}\textit{-Funktion ist bereits eine } (\mathcal{M}\text{-})\Delta_{(1)}\textit{-Funktion.} \tag{4.27}$$

Aus den Tabellen in den Abbildungen 4.8.1 und 4.8.2 sehen wir sofort, daß Funktionen wie beispielsweise

$$\lambda xy \,.\, x \cup y \,, \lambda xy \,.\, x \cap y \,, \lambda x \,.\, \bigcup x \,, \lambda x \,.\, \text{rng}(x) \,, \ldots$$

Σ_1-Funktionen sind. Als Übung sollte man sich klarmachen, daß die Klasse der Σ-Funktionen gegenüber Substitution mit Σ-Funktionen abgeschlossen ist. Das liegt daran, daß für eine Σ-Formel φ und eine Σ-Funktion F die Formel $\varphi(F(\vec{x}\,), \vec{x}\,)$ wegen

$$\varphi(F(\vec{x}\,), \vec{x}\,) \;\Leftrightarrow\; (\exists z)[F(\vec{x}\,) = z \wedge \varphi(z, \vec{x}\,)]$$

wieder eine Σ-Formel ist.)

Einige Beispiele für Σ-Funktionen finden sich in der Tabelle in Abbildung 4.8.3.

Ist G eine Σ-Funktion und ist F durch die Rekursionsgleichung

$$F(\alpha) := G(F \restriction \alpha)$$

Funktion	Definition
$\lambda f\,.\,\mathrm{dom}(f)$	$u = \mathrm{dom}(f)$ siehe Abb. 4.8.2
$\lambda f\,.\,\mathrm{rng}(f)$	$u = \mathrm{rng}(f)$ siehe Abb. 4.8.2
$\lambda x\,.\,P_i(x)$	siehe Abb. 4.8.2
$\lambda fx\,.\,f \restriction x$	$a = f \restriction x \;\Leftrightarrow\; a = \{z \in f \mid\; P_1(z) \in x\}$
$\lambda fx\,.\,f[x]$	$a = f[x] \;\Leftrightarrow\; a = \{z \in \mathrm{rng}(f) \mid\; (\exists y \in x)[z = f(y)]\}$
$\lambda x\,.\,Sx$	$a = Sx \;\Leftrightarrow\; a = x \cup \{x\}$
$\lambda ab\,.\,a \times b$	$u = a \times b \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in u)[P_1(x) \in a \wedge P_2(x) \in b] \wedge (\forall x \in a)(\forall y \in b)[(x, y) \in u]$

Abbildung 4.8.3: Einige Σ-Funktionen

definiert, so gilt nach (3.1) und (3.2)

$$\begin{aligned} x = F(\alpha) \;\Leftrightarrow\; (\exists f)\{&\mathrm{Fkt}(f) \wedge\; \mathrm{dom}(f) = \alpha \\ &\wedge (\forall y \in \alpha)[f(y) = G(f \restriction y)] \\ &\wedge x = G(f)\}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Aus (4.28) folgt, daß F wieder eine Σ-Formel ist, d.h. wir haben den folgenden Satz:

4.8.2 Satz (Σ-Rekursionssatz) *Ist G eine Σ-Funktion und ist F durch die Rekursionsgleichung*

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

definiert, so ist F eine Σ-Funktion.

Der Satz gilt natürlich auch für Funktionen $F\colon \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ die durch Σ-Rekursion definiert werden.
Als Anwendung des Σ-Rekursionssatzes wollen wir feststellen, daß die Funktion $L\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathbb{V}$ eine Σ-Funktion ist. Dazu zeigen wir:

4.8.3 Lemma *Die Funktion F definiert durch*

$$F(M) := \begin{cases} \mathit{Def}(M) & \textit{falls } \mathrm{Tran}(M) \\ \emptyset & \textit{sonst} \end{cases}$$

ist eine Σ-Funktion.

Beweis: Nach Satz 4.6.12 gilt für transitives M

$$\mathit{Def}(M) = \mathit{Cl}(SM) \cap \mathrm{Pow}(M) = \bigcup \mathrm{rng}(\lambda k\,.\,\mathit{Cl}^k(SM)) \cap \mathrm{Pow}(M),$$

d.h.

$$\begin{aligned} x = \mathit{Def}(M) \;\Leftrightarrow\; & (\forall y \in x)(y \subseteq M) \wedge x \subseteq \bigcup \mathrm{rng}(\lambda k\,.\,\mathit{Cl}^k(SM)) \\ & \wedge (\forall y \in \bigcup \mathrm{rng}(\lambda k\,.\,\mathit{Cl}^k(SM)))(y \subseteq M \to y \in x). \end{aligned}$$

Da $\lambda a\,.\bigcup a$, $\lambda M\,.\,SM$ und $\lambda f\,.\,\mathrm{rng}(f)$ alle Σ-Funktionen sind, müssen wir nur noch die Abbildung $\lambda k\,.\,\mathit{Cl}^k(M)$ als Σ-Funktion nachweisen. Aus Definition 4.6.2 und dem Σ-Rekursionssatz (Satz 4.8.2) ersehen wir, daß wir dazu nur alle elementaren GÖDELfunktionen als Σ-Funktionen nachzuweisen haben. Mit den Tabellen in den Abbildungen 4.8.1 und 4.8.3 folgt dies für $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_{10}$ aber sofort aus deren Definition (Definition 4.6.1).
Wegen

$$F(M) = x \;\Leftrightarrow\; (\mathrm{Tran}(M) \wedge \mathit{Def}(M) = x) \vee (\neg\mathrm{Tran}(M) \wedge x = \emptyset)$$

erhalten wir nun F als Σ-Funktion. □

Mit Lemma 4.8.3 folgt, daß die in (4.23) definierte Funktion G eine Σ-Funktion ist. Zusammen mit dem Σ-Rekursionssatz (oder direkt mit (4.22)) erhalten wir daher:

4.8.4 Satz *Die Funktion $L\colon \mathrm{On} \longrightarrow \mathbb{V}$ ist eine Σ-Funktion. Damit ist L absolut für alle transitiven ZF-Modelle $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{V}$, die alle Ordinalzahlen enthalten.*

Beweis: Daß L eine Σ-Funktion ist, folgt sofort aus unseren vorhergehenden Überlegungen. Mit (4.26) folgt daher, daß $x = L_\alpha$ eine Δ-Relation und daher absolut ist. Also gilt für jedes transitive $\mathcal{M} \models ZF$

$$\begin{aligned} L_\alpha^{\mathcal{M}} &= \{x \in \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models (\exists z)(z = L_\alpha \wedge x \in z)\} \\ &= \{x \in \mathcal{M} \mid (\exists z)(z = L_\alpha \wedge x \in z)\} = L_\alpha \cap \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Durch Induktion nach α folgt, da $\mathcal{M}$ ein ZF-Modell ist, sofort

$$\alpha \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; L_\alpha \subseteq \mathcal{M}.$$

Damit ist $L_\alpha^{\mathcal{M}} = L_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathcal{M}$, und da $\mathcal{M}$ alle Ordinalzahlen enthält, folgt $L^{\mathcal{M}} = L$. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir daraus

4.8.5 Satz *L ist die bezüglich der Inklusion kleinste transitive Klasse, die alle Ordinalzahlen enthält und ein Modell von ZFC ist.*

4.9 Zulässige Ordinalzahlen

4.9.1 Definition Eine Ordinalzahl α heißt *zulässig*, wenn $\alpha \in \mathrm{Lim}$ ist und

$$L_\alpha \models (\forall \vec{u})[\varphi(\vec{u}) \leftrightarrow (\exists x)\varphi^x(\vec{u})] \tag{4.29}$$

für jede Σ-Formel $\varphi(\vec{u})$ gilt.

Das bedeutet, daß für zulässiges α jeder Σ-Satz mit Parametern aus L_α schon ein L_α-Σ_1-Satz ist. Das Schema (4.29) wird als Σ-*Reflexionsschema* bezeichnet.

Wir wollen hier die Theorie zulässiger Mengen und Ordinalzahlen nur oberflächlich streifen. Als erstes bemerken wir, daß für $a, b \in L_\alpha$ und Σ-Sätze φ mit Parametern aus L_α

$$L_\alpha \models a \subseteq b \to (\varphi^a \to \varphi^b) \tag{4.30}$$

und

$$L_\alpha \models \varphi^a \to \varphi \tag{4.31}$$

gilt. Dies ist nichts anderes als die Persistenz von Σ-Formeln. Der Beweis verläuft wie in Lemma 4.3.3.
Unter dem Schema der Δ_0-*Kollektion* (abgekürzt *(Δ_0-Kol)*) verstehen wir

$$(\forall a)(\forall \vec{u})[(\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x, y, \vec{u}) \to (\exists z)(\forall x \in a)(\exists y \in z)\varphi(x, y, \vec{u})],$$

wobei $\varphi(x, y, \vec{v})$ eine Δ_0-Formel ist. Dann gilt:

4.9.2 Lemma *Eine Ordinalzahl α ist genau dann zulässig, wenn α eine Limeszahl ist und L_α das Schema der Δ_0-Kollektion erfüllt.*

Beweis: Offensichtlich ist Δ_0-Kollektion ein Spezialfall der Σ-Reflexion. Damit gilt

$$L_\alpha \models (\Delta_0\text{-}Kol)$$

für jedes zulässige α. Für die Gegenrichtung nehmen wir

$$L_\alpha \models (\Delta_0\text{-}Kol)$$

an und zeigen

$$L_\alpha \models \varphi \;\Rightarrow\; (\exists a \in L_\alpha)[L_\alpha \models \varphi^a] \tag{i}$$

für Σ-Sätze φ mit Parametern aus L_α durch Induktion nach der Länge von φ. Ist φ ein Δ_0-Satz, so ist $\varphi \equiv \varphi^a$.

Ist $\varphi \equiv \varphi_1 \wedge \varphi_2$, so haben wir $a_1, a_2 \in L_\alpha$ mit $L_\alpha \models \varphi_1^{a_1}$ und $L_\alpha \models \varphi_2^{a_2}$. Wegen $\alpha \in \mathrm{Lim}$ ist $a := a_1 \cup a_2 \in L_\alpha$, und wir erhalten mit (4.30)

$$L_\alpha \models (\varphi_1 \wedge \varphi_2)^a.$$

Ähnlich schließen wir, falls $\varphi \equiv \varphi_1 \vee \varphi_2$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $a \in L_\alpha$ mit $L_\alpha \models \varphi_i^a$ für ein $i \in \{1, 2\}$. Damit folgt aber auch $L_\alpha \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)^a$.
Der interessanteste Fall ist $\varphi \equiv (\forall x \in b)\psi(x)$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$(\forall x \in b)(\exists y \in L_\alpha)[L_\alpha \models \psi(x)^y],$$

und damit

$$L_\alpha \models (\forall x \in b)(\exists y)\psi(x)^y.$$

Nun ist $\psi(x)^y$ eine Δ_0-Formel. Wegen $L_\alpha \models$ *(Δ_0-Kol)* erhalten wir ein $c \in L_\alpha$ mit $L_\alpha \models (\forall x \in b)(\exists y \in c)\psi(x)^y$. Mit $c \in L_\alpha$ ist aber auch $a := \bigcup c \in L_\alpha$. Damit haben wir $y \subseteq a$ für $y \in c$ und erhalten nach (4.30)

$$L_\alpha \models (\forall x \in b)\psi(x)^a.$$

Ist schließlich $\varphi \equiv (\exists x)\psi(x)$ und gilt

$$L_\alpha \models \psi(b)$$

für ein $b \in L_\alpha$, so erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung ein $c \in L_\alpha$ mit $L_\alpha \models \psi(b)^c$. Setzen wir $a := \{b\} \cup c$, so folgt mit (4.30)

$$L_\alpha \models (\exists x \in a)\psi^a. \qquad \square$$

Zuletzt wollen wir uns davon überzeugen, daß es tatsächlich zulässige Ordinalzahlen gibt.

4.9.3 Satz *Zu jedem $\beta \in \mathrm{On}$ gibt es eine zulässige Ordinalzahl $\alpha \geq \beta$.*

Beweis: Wir setzen $\alpha := \beta^+$. Dann ist α eine Nachfolgerkardinalzahl oder $\aleph_0$ und damit nach Satz 3.9.7 regulär. Gilt nun

$$L_\alpha \models (\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x, y, \vec{u}),$$

so haben wir zu jedem $x \in a$ ein $y_x \in L_\alpha$ mit $L_\alpha \models \varphi(x, y_x, \vec{u})$. Dann ist $\mathrm{rk}_L(y_x) < \alpha$ und, da α regulär ist, auch $\gamma := \sup_{x \in a} \mathrm{rk}_L(y_x) < \alpha$. Wegen $L_\gamma \in L_\alpha$ und $y_x \in L_\gamma$ für alle $x \in a$ haben wir

$$L_\alpha \models (\exists z)(\forall x \in a)(\exists y \in z)\varphi(x, y, \vec{u}).$$

Damit gilt

$L_\alpha \models$ *(Δ_0-Kol)*,

und α ist nach Lemma 4.9.2 zulässig. □

Natürlich haben wir hier α viel zu groß gewählt. Es gibt viel kleinere. Insbesondere läßt sich α so wählen, das $|\alpha| = |\beta|$ ist. Einzelheiten stehen in [1].
Als Korollar des Beweises von Satz 4.9.3 können wir zumindest festhalten:

4.9.4 Korollar *Jede reguläre Ordinalzahl ist zulässig.*

Allerdings gibt es sehr viel mehr zulässige als reguläre Ordinalzahlen. So liegt bereits zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ ein ganzer Kosmos von zulässigen Ordinalzahlen (vgl. [1]).
Es ist unter gewissen Anstrengungen möglich, Satz 4.8.4 zu verallgemeinern:

4.9.5 Satz *Es gibt parameterfreie Σ_1-Formeln $\varphi_L(x, y)$ und $\varphi_<(x, y)$, die für alle zulässigen $\alpha > \omega$*

$$(\forall a \in L_\alpha)(\forall \beta < \alpha)[a = L_\beta \Leftrightarrow L_\alpha \models \varphi_L(a, \beta)]$$

sowie

$$(\forall a \in L_\alpha)(\forall b \in L_\alpha)[a <_L b \Leftrightarrow L_\alpha \models \varphi_<(a, b)]$$

erfüllen.

Beweis: Hier verweisen wir auf [2]. Der Beweis ähnelt unserem Vorgehen in Abschnitt 4.6, allerdings ist einiger Mehraufwand erforderlich. □

4.10 Das Kondensationslemma und *(GCH)*

Eine der wesentlichen Eigenschaften des konstruktiblen Universums ist das Verhalten konstruktibler Mengen unter dem MOSTOWSKI-Kollaps. Als Vorbereitung führen wir den Begriff der *elementaren Substruktur* ein.

4.10.1 Definition Sei $M \subseteq L_\alpha$. Wir nennen M eine *elementare Substruktur* von L_α, wenn

$$M \models \varphi \Leftrightarrow L_\alpha \models \varphi \tag{4.32}$$

für jeden Satz φ mit Parametern aus M gilt. Man notiert mit

$$M \prec L_\alpha,$$

daß M eine elementare Substruktur von L_α ist.
Gilt (4.32) nur für M-Σ_1-Sätze, so heißt M eine Σ_1-elementare Substruktur von L_α und wir notieren dies durch

$$M \prec_1 L_\alpha.$$

4.10.2 Lemma *Sei $M \subseteq L_\alpha$. Dann gilt $M \prec L_\alpha$ genau dann, wenn für jedes nichtleere $A \subseteq L_\alpha$, das sich über L_α mit Parametern aus M definieren läßt, auch $A \cap M \neq \emptyset$ ist.*

Beweis: Sei zuerst $M \prec L_\alpha$ und $A := \{x \in L_\alpha |\ L_\alpha \models \varphi(x, \vec{u})\}$, wobei $\vec{u} \in M$ ist. Ist $A \neq \emptyset$, so gilt $L_\alpha \models (\exists x)\varphi(x, \vec{u})$ und damit ebenfalls $M \models (\exists x)\varphi(x, \vec{u})$. Somit gibt es ein $b \in M$ mit $M \models \varphi(b, \vec{u})$, woraus $L_\alpha \models \varphi(b, \vec{u})$ folgt. Das bedeutet $b \in A \cap M$.
Für die Gegenrichtung zeigen wir

$$L_\alpha \models \varphi(\vec{u}) \ \Leftrightarrow\ M \models \varphi(\vec{u})$$

für jeden Satz $\varphi(\vec{u})$ mit Parametern aus M durch Induktion nach der Komplexität von $\varphi(\vec{u})$. Dabei können wir uns wieder auf das $\neg$, $\wedge$, $\exists$-Fragment beschränken.
Für Primformeln $\varphi(\vec{u})$ ist die Behauptung klar und für $\varphi(\vec{u}) \equiv \neg\psi(\vec{u})$ bzw. $\varphi(\vec{u}) \equiv \varphi_1(\vec{u}) \wedge \varphi_2(\vec{u})$ erhalten wir die Behauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung.
Sei also $\varphi \equiv (\exists x)\psi(x, \vec{u})$. Nehmen wir zunächst $M \models \varphi(\vec{u})$ an. Dann gibt es ein $b \in M$ mit $M \models \psi(b, \vec{u})$ und nach Induktionsvoraussetzung folgt $L_\alpha \models \psi(b, \vec{u})$. Wegen $M \subseteq L_\alpha$ ist $b \in L_\alpha$ und wir erhalten

$$L_\alpha \models (\exists x)\psi(x, \vec{u}).$$

Gilt umgekehrt $L_\alpha \models \varphi(\vec{u})$, so ist

$$A := \{x \in L_\alpha |\ L_\alpha \models \psi(x, \vec{u})\} \neq \emptyset.$$

Also ist $A \cap M \neq \emptyset$ und es gibt ein $b \in M$ mit $L_\alpha \models \psi(b, \vec{u})$. Nach Induktionsvoraussetzung folgt dann aber $M \models \psi(b, \vec{u})$ und damit auch $M \models (\exists x)\psi(x, \vec{u})$. $\square$

4.10.3 Definition Sei $M \subseteq L_\alpha$. Wir sagen, daß $a \in L_\alpha$ über M *als Punkt definierbar* ist, wenn es ein Tupel $\vec{u}$ von Elementen aus M und eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel $\varphi(x, \vec{y}\,)$ gibt, für die

$$L_\alpha \models (\exists! x)\varphi(x, \vec{u})$$

und

$$L_\alpha \models \varphi(a, \vec{u})$$

gilt.
Die SKOLEMhülle $SH^{L_\alpha}(M)$ von M in L_α ist die Menge aller Elemente von L_α, die sich über M als Punkt definieren lassen.

4.10.4 Lemma *Ist α zulässig und $M \subseteq L_\alpha$, so ist $SH^{L_\alpha}(M)$ die kleinste elementare Substruktur von L_α, die M umfaßt, d.h. es gilt*

$$SH^{L_\alpha}(M) \prec L_\alpha$$

und

$$(\forall N)(M \subseteq N \prec L_\alpha \;\Rightarrow\; SH^{L_\alpha}(M) \subseteq N).$$

Beweis: Offenbar ist $M \subseteq SH^{L_\alpha}(M)$, denn wir haben ja

$$L_\alpha \models (\exists! x)[x = a]$$

und

$$L_\alpha \models a = a$$

für jedes $a \in M$. Wegen $SH^{L_\alpha}(M) \subseteq L_\alpha$ erhalten wir nach Lemma 4.10.2

$$SH^{L_\alpha}(M) \prec L_\alpha,$$

wenn wir $A \cap SH^{L_\alpha}(M) \neq \emptyset$ für jedes nicht leere $A \subseteq L_\alpha$ gezeigt haben, das sich mit Parametern aus $SH^{L_\alpha}(M)$ über L_α definieren läßt. Sei also $\vec{u} \in SH^{L_\alpha}(M)$ und $A := \{x \in L_\alpha \mid\; L_\alpha \models \varphi(x, \vec{u})\} \neq \emptyset$, d.h.

$$L_\alpha \models (\exists x)\varphi(x, \vec{u}).$$

Jedes u_i läßt sich als Punkt über M in L_α, etwa durch die Formel $\psi_i(x)$, definieren. Dann gilt

$$L_\alpha \models (\exists x)(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)[\psi_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n(x_n) \wedge \varphi(x, \vec{x}\,)],$$

wobei $\psi_1(x_1), \ldots, \psi_n(x_n)$ und $\varphi(x, \vec{x}\,)$ höchstens noch Parameter aus M enthalten. Wir definieren

$$\begin{aligned} \chi(x) :\equiv (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)\{\psi_1(x_1) \wedge \ldots \wedge \psi_n(x_n) \wedge \varphi(x, \vec{x}\,) \\ \wedge (\forall y)[y <_L x \to \neg\varphi(y, \vec{x}\,)]\}, \end{aligned}$$

wobei wir für $y <_L x$ die Formel $\varphi_<$ aus Satz 4.9.5 verwenden. Dann gilt $L_\alpha \models (\exists! x)\chi(x)$ und $a \in A$ für das $a \in L_\alpha$ mit $L_\alpha \models \chi(a)$. Damit ist $a \in SH^{L_\alpha}(M) \cap A$.
Um den Beweis abzuschließen, sei

$$M \subseteq N \prec L_\alpha.$$

Ist $a \in SH^{L_\alpha}(M)$, so ist a das eindeutig bestimmte $a \in L_\alpha$ mit $L_\alpha \models \varphi(a,\vec{u})$ für ein $\vec{u} \in M^k$. Wegen $L_\alpha \models (\exists! x)\varphi(x,\vec{u})$ und $M \subseteq N \prec L_\alpha$ folgt dann aber auch $N \models (\exists! x)\varphi(x,\vec{u})$. Also gilt $a \in N$ und wir erhalten $SH^{L_\alpha}(M) \subseteq N$. □

Wir wollen hier nochmals anmerken, daß sich jedes $a \in L_\omega$ als Punkt über der leeren Menge definieren läßt, (vgl. (4.21)). Für $M \subseteq L_\omega$ ist also $SH^{L_\omega}(M) = L_\omega$.
Als Folgerung aus Lemma 4.10.4 erhalten wir

4.10.5 Satz *Ist α zulässig und $M \subseteq L_\alpha$, so gibt es ein $N \prec L_\alpha$ mit $M \subseteq N$ und $|N| = \sup\{\aleph_0, |M|\}$.*

Beweis: Wir setzen $N := SH^{L_\alpha}(M)$ und haben nur noch die Kardinalität nachzurechnen. Da sich aber nur so viele Mengen a als Punkte über M definieren lassen, wie es $\mathcal{L}(\in)$ - Formeln $\varphi(x,\vec{u})$ mit Parametern aus M gibt, gilt

$$|SH^{L_\alpha}(M)| \leq \sup\{\aleph_0, |M|\}.$$

Wegen $SH^{L_\alpha}(M) \supseteq M \cup L_\omega$ gilt auch

$$|SH^{L_\alpha}(M)| \geq \sup\{\aleph_0, |M|\}.$$ □

4.10.6 Lemma (Kondensationslemma) *Sei α eine zulässige Ordinalzahl. Ist $M \prec_1 L_\alpha$, so gibt es ein $\beta \leq \alpha$ mit $\beta \in \mathrm{Lim}$ und*

$$\pi[M] = L_\beta.$$

Beweis: Mit einer einfachen Induktion nach n können wir

$$(\forall n \in \omega)[L_n \subseteq M]$$

und damit

$$L_\omega \subseteq M \tag{i}$$

zeigen. Offensichtlich gilt $L_0 \subseteq M$. Ist $L_n \subseteq M$ und $\{a_1,\ldots,a_m\} \subseteq L_n$, so haben wir für

$$\psi :\equiv (\exists z)[a_1 \in z \wedge \ \ldots \ \wedge a_m \in z \\ \wedge (\forall x \in z)(x = a_1 \vee \ \ldots \ \vee x = a_m)]$$

natürlich $L_\alpha \models \psi$, also auch $M \models \psi$. Damit gilt auch $L_{n+1} \subseteq M$.
Der Fall $\alpha = \omega$ ist mit (i) trivial, denn hier folgt $M = L_\alpha$. Deshalb sei ab jetzt $\alpha > \omega$.
Wir zeigen zuerst, daß M extensional ist, d.h.

$$M \models \textit{(Ext)}.$$

Gilt nämlich $M \models x \neq y$, so folgt $L_\alpha \models x \neq y$ und damit

$$L_\alpha \models (\exists z)(z \in x \leftrightarrow z \notin y).$$

Wegen $M \prec_1 L_\alpha$ haben wir also auch

$$M \models (\exists z)(z \in x \leftrightarrow z \notin y).$$

Mit Lemma 3.3.3 folgt nun, daß $\pi[M]$ transitiv und

$$\pi_M \colon M \longleftrightarrow \pi[M]$$

ein $\in$ - $\in$ - Isomorphismus ist. Damit ist

$$\pi[M] \cap \mathrm{On} \in \mathrm{On}$$

und wir setzen $\beta := \pi[M] \cap \mathrm{On}$. Wir behaupten nun

$$\pi[M] = L_\beta.$$

Die Formel

$$u = L_\gamma$$

ist für $\gamma < \alpha$ nach Satz 4.9.5 eine L_α-Σ_1-Formel. Wegen $\alpha \in \mathrm{Lim}$ haben wir für jedes $a \in L_\alpha$

$$L_\alpha \models (\exists x)(\exists \gamma)[\gamma \in \mathrm{On} \wedge x = L_\gamma \wedge a \in x]. \tag{ii}$$

Sei

$$a \in \pi[M]. \tag{iii}$$

Dann gilt nach (ii)

$$M \models (\exists x)(\exists \gamma)[\gamma \in \mathrm{On} \wedge x = L_\gamma \wedge \pi_M^{-1}(a) \in x]$$

und damit

$$\pi[M] \models (\exists x)(\exists \gamma)[\gamma \in \mathrm{On} \wedge x = L_\gamma \wedge a \in x],$$

d.h.

$$(\exists x \in \pi[M])(\exists \gamma \in \pi[M])[\pi[M] \models \gamma \in \mathrm{On} \wedge x = L_\gamma \wedge a \in x].$$

Da $\pi[M]$ transitiv ist, folgt $\gamma \in \pi[M] \cap \mathrm{On} = \beta$ und (mit der Aufwärtspersistenz von Σ_1-Formeln) $a \in x = L_\gamma$. Also ist

$$a \in \bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma. \tag{iv}$$

Mit (iii) und (iv) haben wir daher

$$\pi[M] \subseteq \bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma. \tag{v}$$

Ist $\gamma < \beta$, so ist $\pi_M^{-1}(\gamma) \in M$ und es gilt $M \models \pi_M^{-1}(\gamma) \in \mathrm{On}$. Also ist $\pi_M^{-1}(\gamma) < \alpha$ und wir haben

$$L_\alpha \models (\exists z)[z = L_{\pi_M^{-1}(\gamma)}].$$

Damit folgt aber

$$M \models (\exists z)[z = L_{\pi_M^{-1}(\gamma)}]$$

und schließlich

$$\pi[M] \models (\exists z)[z = L_\gamma]. \tag{vi}$$

Da (vi) für alle $\gamma < \beta$ gilt, haben wir

$$\bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma \subseteq \pi[M]. \tag{vii}$$

Nach (vii) und (v) ist

$$\pi[M] = \bigcup_{\gamma < \beta} L_\gamma. \tag{viii}$$

Für $\gamma < \beta$ gilt aber wieder wegen $\pi_M^{-1}(\gamma) < \alpha$

$$L_\alpha \models (\exists \xi)(\pi_M^{-1}(\gamma) < \xi),$$

und wir erhalten analog zu eben

$$\pi[M] \models (\exists \xi)(\gamma < \xi),$$

d.h. $(\exists \xi < \beta)[\gamma < \xi]$. Also ist $\beta \in \mathrm{Lim}$ und es folgt mit (viii)

$$\pi[M] = L_\beta. \qquad \square$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß das Kondensationslemma bereits für Limeszahlen α gilt. Es erfordert allerdings einen wesentlich höheren Aufwand, wenn man einsehen möchte, daß für $\gamma < \alpha \in \mathrm{Lim}$ die Formel $x = L_\gamma$ eine L_α-Σ_1-Formel ist (vgl. [2]). Sobald man dies jedoch zur Verfügung hat, überträgt sich der hier geführte Beweis sofort.
Zur Erinnerung sei nochmals betont, daß für transitives $a \subseteq M$ immer $\pi_M \restriction a = \mathrm{id}_a$ ist. Das ergibt sich sofort aus der Definition des MOSTOWSKI-Kollapses (Definition 3.3.2).

Mit Hilfe des Kondensationslemmas erhalten wir eine gewisse Kontrolle über das Wachstum der Schichten der konstruktiblen Welt. Während ja bei der Bildung der Schichten des fundierten Universums die Potenzmenge von V_α bereits in $V_{\alpha+1}$ erscheint, geschieht dies in L viel langsamer. Die Frage, die wir jetzt klären wollen, ist, wann im konstruktiblen Universum die Potenzmenge erscheint, d.h. wir setzen $\mathbb{V} = L$ voraus, betrachten ein $a \subseteq L_\alpha$ und fragen nach $\mathrm{rk}_L(a)$.

4.10.7 Lemma *Ist* $\mathbb{V} = L$ *und* $a \subseteq L_\alpha$*, so ist* $\mathrm{rk}_L(a) < \alpha^+$*.*

Beweis: Für $\alpha < \omega$ ist die Aussage wegen $\alpha^+ = \omega$ und $L_\omega = \mathbb{HF}_\omega$ klar. Sei daher $\omega \leq \alpha$. Da wir $\mathbb{V} = L$ voraussetzen, ist $a \in L$ und wir finden mit Satz 4.9.3 eine zulässige Ordinalzahl β mit $L_\alpha \cup \{a\} \subseteq L_\beta$. Nach Satz 4.10.5 gibt es ein $M \prec L_\beta$ mit

$$L_\alpha \cup \{a\} \subseteq M \text{ und } |M| = |L_\alpha \cup \{a\}| < \alpha^+.$$

Dann ist $\pi[M] = L_\gamma$ für ein $\gamma \in \mathrm{Lim}$ nach dem Kondensationslemma. Wegen $|\gamma| = |L_\gamma| = |M| < \alpha^+$ ist $\gamma < \alpha^+$. Da $L_\alpha \cup \{a\}$ transitiv und in M enthalten ist, gilt $\pi_M \restriction L_\alpha \cup \{a\} = \mathrm{id}$. Also ist $a = \pi_M(a) \in L_\gamma$ und damit $\mathrm{rk}_L(a) \leq \gamma < \alpha^+$. $\square$

4.10.8 Satz *Es gilt* $L \models$ *(GCH). Damit ist (GCH) relativ konsistent zu* ZFC*.*

Beweis: Wir arbeiten unter der Voraussetzung $\mathbb{V} = L$. Sei $\omega \leq \kappa \in L$. Für alle $a \subseteq \kappa$ gilt wegen $\kappa \subseteq L_\kappa$ nach Lemma 4.10.7 $a \in L_{\kappa^+}$. Also ist $\mathrm{Pow}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}$ und damit $|\mathrm{Pow}(\kappa)| \leq \kappa^+$. Somit gilt mittels (3.34)

$$\kappa^+ \leq 2^\kappa = |\mathrm{Pow}(\kappa)| \leq \kappa^+,$$

d.h. $2^\kappa = \kappa^+$. $\square$

4.11 Weitere Unendlichkeitsaxiome

Wir erinnern an die Begriffe von schwach unerreichbaren und unerreichbaren Kardinalzahlen. Es sei

$$WI := \{\kappa \in \mathbb{R} \mid (\exists \lambda \in \mathrm{Lim})[\kappa = \aleph_\lambda]\}$$

die Klasse der schwach unerreichbaren Kardinalzahlen. Eine reguläre Kardinalzahl, die auch gegenüber der Kontinuumsfunktion abgeschlossen ist, heißt (stark) unerreichbar. Wir wollen allerdings nur überabzählbare Kardinalzahlen betrachten. Jede überabzählbare unerreichbare Kardinalzahl κ ist wegen

$$\lambda < \kappa \;\Rightarrow\; \lambda^+ \leq 2^\lambda < \kappa$$

auch eine Limeskardinalzahl und damit auch schwach unerreichbar. Daher können wir

$$I := \{\kappa \in WI \,|\, (\forall \lambda < \kappa)[2^\lambda < \kappa]\}$$

setzen und I die Klasse der (stark) unerreichbaren Kardinalzahlen nennen. Wir zeigen zuerst:

4.11.1 Satz *Ist $\kappa \in I$, so ist V_κ ein Modell von ZF. Gilt $\mathbb{V} \models$ (AC), so folgt auch $V_\kappa \models$ (AC).*

Beweis: Wegen $\omega < \kappa \in \mathrm{Lim}$ gilt nach Satz 4.1.2

$$V_\kappa \models \textit{(Ext)} \wedge \textit{(Fu)} \wedge \textit{(Pa)} \wedge \textit{(Vm)} \wedge \textit{(Pm)} \wedge \textit{(As)} \wedge \textit{(Ue)}.$$

Wir haben also nur noch

$$V_\kappa \models \textit{(Kol)} \tag{i}$$

zu zeigen. Dazu zeigen wir durch Induktion nach $\lambda < \kappa$ zuerst

$$\lambda < \kappa \;\Rightarrow\; |V_\lambda| < \kappa. \tag{ii}$$

Natürlich ist $|V_0| < \kappa$.
Im Nachfolgerfall haben wir $|V_{\alpha+1}| = |\operatorname{Pow}(V_\alpha)| = 2^{|V_\alpha|} < \kappa$, da nach Induktionsvoraussetzung $|V_\alpha| < \kappa$ ist.
Für $\lambda \in \mathrm{Lim}$ ist

$$\begin{aligned} |V_\lambda| &= |\textstyle\bigcup_{\xi<\lambda} V_\xi| \leq \Sigma_{\xi<\lambda}|V_\xi| \\ &= |\lambda| \odot \sup_{\xi<\lambda} |V_\xi| < \kappa, \end{aligned}$$

da $|\lambda| < \kappa$, κ regulär und nach Induktionsvoraussetzung $|V_\xi| < \kappa$ für alle $\xi < \lambda$ ist.
Wegen $\kappa \cap V_\kappa = \kappa$ erhalten wir mit (ii)

$$\kappa \in I \;\Rightarrow\; |V_\kappa| = \kappa. \tag{4.33}$$

Um die Gültigkeit des Kollektionsschemas in V_κ nachzuprüfen, sei

$$\vec{u}, a \in V_\kappa$$

und

$$V_\kappa \models (\forall x \in a)(\exists y)\varphi(x, y, \vec{u}). \tag{iii}$$

Zu $x \in a$ definieren wir

$$\alpha_x := \min\{\mathrm{rk}(y) \,|\, \varphi(x, y, \vec{u})\}.$$

Nach (iii) gilt $\alpha_x < \kappa$, und nach (4.33) gilt $|a| < |V_\kappa| = \kappa \in \mathbb{R}$. Daher ist

$$\alpha := \sup_{x \in a} \alpha_x < \kappa,$$

und wir erhalten

$$(\forall x \in a)(\exists y \in V_\alpha)[V_\kappa \models \varphi(x, y, \vec{u})].$$

Daraus folgt schließlich

$$V_\kappa \models (\exists z)(\forall x \in a)(\exists y \in z)\varphi(x, y, \vec{u}).$$

Damit ist (i) bewiesen. Wir wollen schließlich noch zeigen, daß aus

$$\mathbb{V} \models \textit{(AC)}$$

auch

$$V_\kappa \models \textit{(AC)}$$

folgt. Ist nämlich $a \in V_\kappa$ mit $\emptyset \notin a$ und gibt es eine Funktion $f \in \mathbb{V}$ mit

$$\operatorname{dom}(f) = a \wedge (\forall x \in a)[f(x) \in x], \tag{iv}$$

so sehen wir sofort, daß die Formel in (iv) eine V_κ-Δ_0-Formel ist. Da V_κ ein ZF-Modell ist, gilt $a \times \bigcup a \in V_\kappa$ und weiter

$$f \in \operatorname{Pow}(a \times \bigcup a) \in V_\kappa.$$

Damit ist $f \in V_\kappa$, und aus (iv) folgt wegen der Absolutheit von V_κ-Δ_0-Formeln

$$V_\kappa \models \operatorname{dom}(f) = a \wedge (\forall x \in a)[f(x) \in x],$$

d.h. $V_\kappa \models$ *(AC)*. □

Man kann sich nun klarmachen, daß sich Satz 4.11.1 formal innerhalb von ZFC zeigen läßt, d.h. wir haben

$$ZFC \vdash (\forall \kappa \in I)[\varphi^{V_\kappa}] \tag{4.34}$$

für jedes ZFC-Axiom φ. Nehmen wir nun an, wir hätten

$$ZFC \vdash I \neq \emptyset,$$

so folgte mit (4.34) (nach einiger Formalisierung)

$$ZFC \vdash \text{ „}ZFC \text{ ist konsistent“.}$$

Da dies dem zweiten GÖDELschen Satz widerspricht, haben wir

4.11.2 Satz *In ZFC läßt sich die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen nicht beweisen.*

Beweis: Wir wollen hier, weil es uns instruktiv zu sein scheint, einen Beweis angeben, der ohne Bezug auf den GÖDELschen Satz arbeitet. Nehmen wir also an, wir hätten

$$ZFC \vdash I \neq \emptyset. \tag{i}$$

Wegen $\mathbb{V} \models ZFC$ existiert dann

$$I_0 := \min I. \tag{4.35}$$

und es ist $V_{I_0} \cap \mathrm{On} = I_0$, d.h.

$$V_{I_0} \cap I = \emptyset. \tag{4.36}$$

Gelingt es uns zu zeigen, daß

$$\kappa \in I \;\Rightarrow\; [(V_\kappa \models \lambda \in I) \;\Leftrightarrow\; \lambda \in I] \tag{4.37}$$

für alle $\lambda < \kappa$ gilt, d.h. daß unerreichbare Kardinalzahlen V_κ-absolut sind, so erhalten wir aus (4.36), daß

$$V_{I_0} \models I = \emptyset \tag{ii}$$

gilt. Da nach Satz 4.11.1 $V_{I_0} \models ZFC$ gilt, widersprechen sich (i) und (ii).

Für $\kappa \in I$ zeigen wir zuerst die V_κ-Absolutheit von Card. Es gilt

$$\lambda \in \mathrm{Card} \;\Leftrightarrow\; (\forall f)(\forall\gamma)[f\colon \lambda \longleftrightarrow \gamma \;\Rightarrow\; \lambda \leq \gamma].$$

Damit liegt eine Π_1-Formel vor, die abwärts persistent ist.
Gilt umgekehrt $V_\kappa \models \lambda \in \mathrm{Card}$ für ein $\lambda \in V_\kappa$ und nehmen wir ein

$$f\colon \lambda \longleftrightarrow \gamma \text{ mit } \gamma < \lambda$$

an, so ist $\gamma < \kappa$ und daher $f \subseteq \lambda \times \gamma \in V_\kappa$. Also ist $f \in V_\kappa$. Da Begriffe wie „*Funktion*“, „*Ordinalzahl*“, $\mathrm{dom}(f)$ etc. Δ_0-definierbar und mithin absolut sind, folgt widersprüchlicherweise

$$V_\kappa \not\models \lambda \in \mathrm{Card}.$$

Somit ist aber auch die Aufwärtspersistenz gezeigt und Card absolut für V_κ. Ebenso überlegt man sich sofort, daß für $a \in V_\kappa$ auch $\mathrm{Pow}(a) \cap V_\kappa = \mathrm{Pow}(a)$ ist und damit die Potenzmenge absolut ist. Damit gilt

$$(V_\kappa \models \lambda = 2^\mu) \;\Leftrightarrow\; \lambda = 2^\mu$$

für alle $\lambda, \mu < \kappa$ und wir sehen, daß eine Kardinalzahl genau dann gegenüber der Kontinuumsfunktion abgeschlossen ist, wenn dies schon innerhalb von V_κ gilt.

Weiterhin gilt

$$V_\kappa \models \text{„}\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl“} \quad \Leftrightarrow \quad \text{„}\lambda \text{ ist Limeskardinalzahl“},$$

da wegen der Absolutheit von Card in V_κ auch die $\aleph$-Funktion absolut ist, wir daher

$$V_\kappa \models (\exists\mu\in\mathrm{Lim})[\lambda = \aleph_\mu] \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\mu\in\mathrm{Lim})[\lambda = \aleph_\mu]$$

für jedes $\lambda \in V_\kappa$ haben.

Die Absolutheit von $\mathbb{R}$ in V_κ ergibt sich aus der Tatsache, daß sich für $\lambda < \kappa$ alle bei der Auswertung von $\mathrm{cf}(\lambda)$ betrachteten Funktionen schon in V_κ befinden.
Zusammenfassend erhalten wir (4.37). □

Mit einem ähnlichen Argument wollen wir auch einsehen, daß die Existenz schwach unerreichbarer Kardinalzahlen in ZFC nicht beweisbar sein kann. Dazu zeigen wir zuerst

4.11.3 Lemma *Ist $\kappa \in WI$, so ist L_κ ein Modell von ZFC.*

Beweis: Wir haben ja bereits in Lemma 4.5.5 gezeigt, daß wir an Limeszahlen $\alpha > \omega$ immer

$$L_\alpha \models \textit{(Ext)} \wedge \textit{(Fu)} \wedge \textit{(Pa)} \wedge \textit{(Vm)} \wedge \textit{(Ue)}$$

haben. Daneben wissen wir, daß für reguläres κ auch

$$L_\kappa \models \textit{(Kol)}$$

gilt (vgl. Satz 4.9.3). Es bleibt also

$$L_\kappa \models \textit{(Pm)} \wedge \textit{(As)} \wedge \textit{(AC)} \tag{i}$$

zu zeigen. Ist aber $a, b \in L_\kappa$ mit $a \subseteq b$, so gibt es ein $\lambda < \kappa$ mit $a \subseteq b \subseteq L_\lambda$. Mit Lemma 4.10.7 erhalten wir $a \in L_{\lambda^+} \subseteq L_\kappa$. Damit ist aber auch $\mathrm{Pow}(b) \cap L_\kappa \subseteq L_{\lambda^+}$ und damit $\mathrm{Pow}(b) \cap L_\kappa \in L_{\lambda^{++}}$. Also gilt $L_\kappa \models$ *(Pm)*.
Sei nun $\varphi(x, \vec{y})$ eine $\mathcal{L}(\in)$ - Formel und a und $\vec{a}$ in L_κ. Wir betrachten

$$b := \{x\in a \mid\ L_\kappa \models \varphi(x, \vec{a})\}.$$

Dann ist $b \in L$ und $b \subseteq a \in L_\lambda$ für ein $\lambda < \kappa$. Mit Lemma 4.10.7 erhalten wir $b \in L_{\lambda^+} \subseteq L_\kappa$. Also gilt $L_\kappa \models$ *(As)*.
Zum Nachweis von $L_\kappa \models$ *(AC)* erinnern wir uns an die in (4.25) eingeführte L-Auswahlfunktion C. Wir wollen zeigen, daß sich mit a auch

$C \restriction a$ in L_κ befindet. Ist $x \in a$, so gilt $C(x) \in x$ für $x \neq \emptyset$. Wegen $C(\emptyset) = \emptyset$ ergibt sich

$$\mathrm{rk}_L(C(x)) \leq \mathrm{rk}_L(x) < \mathrm{rk}_L(a). \tag{ii}$$

Da κ Limeskardinalzahl ist, befindet sich $\lambda := \mathrm{rk}_L(a)^+$ in L_κ. Mittels (ii) gilt $C \restriction a \subseteq L_\lambda$, und aus Satz 4.9.5 folgt für

$$\begin{aligned}\psi(x,y) :\equiv [&(x = \emptyset \wedge y = \emptyset)\\ &\vee (x \neq \emptyset \wedge y \in x \wedge (\forall z \in x)(\neg z <_L y))]\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}\psi(x,y) \Leftrightarrow [&(x = \emptyset \wedge y = \emptyset)\\ &\vee (x \neq \emptyset \wedge y \in x \wedge (\forall z \in x)(y <_L z \vee y = z))]\end{aligned}$$

leicht

$$C \restriction a = \{(x,y) \in L_\lambda \mid L_\lambda \models x \in a \wedge \psi(x,y)\} \in L_{\lambda+1} \subseteq L_\kappa.$$

Also ist (i) gezeigt. $\square$

Wir bemerken, daß für die Absolutheit unerreichbarer Kardinalzahlen in V_κ, wie wir sie schon skizziert haben, die Absolutheit der Potenzmenge ausschlaggebend war. Für $\kappa \in \mathit{WI}$ ist aber die Potenzmenge in dem Sinn absolut, daß

$$a \in L_\kappa \Rightarrow \mathrm{Pow}(a) \cap L \in L_\kappa \tag{4.38}$$

gilt. Dies folgt wie im Beweis von Lemma 4.11.3 sofort aus Lemma 4.10.7. Damit erhalten wir, ohne daß wir alle Details ausführen wollen, wieder

$$\iota \in \mathit{WI} \Rightarrow (L_\iota \models \kappa \in \mathit{WI} \Leftrightarrow L \models \kappa \in \mathit{WI}). \tag{4.39}$$

Aus (4.39) erhalten wir dann

4.11.4 Satz *Die Existenz einer schwach unerreichbaren Kardinalzahl ist in ZFC nicht beweisbar.*

Beweis: Nehmen wir $ZFC \vdash \mathit{WI} \neq \emptyset$ an, so gilt $L \models \mathit{WI} \neq \emptyset$. Sei

$$\iota_0 := \min\{\iota \in L \mid L \models \iota \in \mathit{WI}\}. \tag{4.40}$$

Dann ist

$$L_{\iota_0} \cap \mathit{WI}^L = \emptyset.$$

Wegen (4.39) folgt nun aber

$$L_{\iota_0} \models \mathit{WI} = \emptyset. \tag{i}$$

Da $L_{\iota_0} \models ZFC$ gilt, widerspricht (i) aber unserer Annahme $ZFC \vdash$ *WI* $\neq \emptyset$. □

Um unerreichbare und schwach unerreichbare Kardinalzahlen weiter zu studieren, erinnern wir an die Begriffe einer club Klasse, bzw. einer Menge $A \subseteq \kappa$, die club in κ ist. (Vgl. Abschnitt 4.4 auf Seite 92)

4.11.5 Definition Eine Menge $A \subseteq \kappa$ heißt *stationär in einer regulären Kardinalzahl* $\kappa > \omega$, wenn für jedes $K \subseteq \kappa$, das club in κ ist, $A \cap K \neq \emptyset$ gilt.

Da der Durchschnitt von clubs immer wieder club ist, ist jede Menge $K \subseteq \kappa$, die club in κ ist, auch stationär. Ist S stationär und K club in κ, so ist offensichtlich $S \cap K$ ebenfalls stationär in κ.
Stationäre Mengen sind relativ groß in κ. Insbesondere sind sie kofinal. Mengen, die nicht stationär in κ sind, heißen daher *dünn in* κ.

4.11.6 Lemma *Ist* $\kappa \in \mathbb{R}$ *und* $\omega < \kappa$, *so ist die Menge*

$$W := \{\alpha < \kappa \mid \ \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$$

stationär in κ.

Beweis: Ist $K \subseteq \kappa$ club, so wählen wir eine aufsteigende Folge

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$

in K. Dann ist $\alpha := \sup_{n \in \omega} \alpha_n \in K$ und $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$. Also ist $W \cap K \neq \emptyset$. □

Es gibt zwei interessante Eigenschaften stationärer Mengen, die wir hier erwähnen möchten.

4.11.7 Satz (Satz von FODOR**)** *Ist* $S \subseteq \kappa$ *stationär und* $f\colon S \longrightarrow \kappa$ *eine regressive Funktion, d.h.* $(\forall \alpha \in S)[\alpha \neq 0 \rightarrow f(\alpha) < \alpha]$, *so ist* f *auf einer stationären Teilmenge von* S *konstant.*

Beweis: Wir zeigen das Lemma indirekt und nehmen an, daß für jedes $\gamma < \kappa$ die Urbildmenge $\{\xi \in S \mid \ f(\xi) = \gamma\}$ dünn in κ ist. Dann gibt es zu jedem solchen $\gamma < \kappa$ ein club $K_\gamma \subseteq \kappa$ mit

$$(\forall \xi \in K_\gamma \cap S)[f(\xi) \neq \gamma]. \tag{i}$$

Sei

$$K := \Delta_{\gamma < \kappa} K_\gamma$$

die Diagonalisierung der K_γ. Laut Lemma 4.4.7 ist K club in κ und somit $S \cap K$ stationär. Für $\alpha \in S \cap K$ gilt $f(\alpha) \neq \xi$ für alle $\xi < \alpha$. Also ist $\alpha \leq f(\alpha)$ im Widerspruch zur Regressivität von f. □

4.11.8 Satz *Jede überabzählbare reguläre Kardinalzahl κ ist disjunkte Vereinigung von κ-vielen stationären Mengen.*

Beweis: Sei $W := \{\alpha < \kappa \mid \operatorname{cf}(\alpha) = \omega\}$. Nach Lemma 4.11.6 ist W stationär in κ. Zu jedem $\alpha \in W$ haben wir eine kofinale Abbildung

$$f_\alpha : \omega \longrightarrow \alpha. \tag{i}$$

Dann gilt

$$(\exists n \in \omega)(\forall \eta \in \kappa)[\{\alpha \in W \mid f_\alpha(n) \geq \eta\} \text{ ist stationär in } \kappa]. \tag{ii}$$

Anderenfalls fänden wir zu jedem $n \in \omega$ ein η_n und ein club $K_n \subseteq \kappa$ mit $\{\alpha \in W \mid f_\alpha(n) \geq \eta_n\} \cap K_n = \emptyset$, d.h. $f_\alpha(n) < \eta_n$ für alle $\alpha \in K_n \cap W$. Wir definieren

$$\eta := \sup_{n \in \omega} \eta_n \text{ und } K := \bigcap_{n \in \omega} K_n.$$

Dann gilt $f_\alpha(n) < \eta$ für alle $\alpha \in K \cap W$. Da $K \cap W$ unbeschränkt in κ ist, widerspricht dies (i).
Gemäß (ii) wählen wir nun ein $n \in \omega$, so daß $\{\alpha \in W \mid f_\alpha(n) \geq \eta\}$ für jedes $\eta < \kappa$ stationär ist und definieren

$$F(\alpha) := f_\alpha(n).$$

Dann gilt $F(\alpha) < \alpha$ für alle $\alpha \in W$, d.h. F ist regressiv. Nach dem Satz von FODOR (Satz 4.11.7) finden wir zu jedem $\eta < \kappa$ ein γ_η mit $\eta \leq \gamma_\eta < \kappa$ so, daß

$$S_\eta := \{\beta \in W \mid F(\beta) = \gamma_\eta\}$$

stationär auf κ ist. Wir können darüber hinaus γ_η so wählen, daß $\gamma_\xi < \gamma_\eta$ für alle $\xi < \eta$ ist. Für $\eta \neq \eta'$ ist dann $\gamma_\eta \neq \gamma_{\eta'}$ und damit $S_\eta \cap S_{\eta'} = \emptyset$. Setzen wir

$$\tilde{S}_\eta := \begin{cases} \kappa \setminus \bigcup_{\eta < \kappa} S_\eta & \text{falls } \eta = 0 \\ S_\xi & \text{falls } \eta = \xi + 1 < \omega \\ S_\eta & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erhalten wir κ als disjunkte Vereinigung der $\tilde{S}_\eta$ mit

$$|\{\tilde{S}_\eta \mid \eta < \kappa\}| = |\{\gamma_\eta \mid \eta < \kappa\}| = \kappa. \qquad \square$$

Ist $\kappa \in I$, so ist klar, daß die Menge der Kardinalzahlen unterhalb κ club in κ ist. Dies gilt natürlich auch für die Menge der Limeskardinalzahlen. Auch die Menge der *starken Limeskardinalzahlen* kleiner als κ, d.h. die Menge der Kardinalzahlen $< \kappa$, die unter der Kontinuumsfunktion abgeschlossen sind, ist club in κ.

Per definitionem liegen unterhalb von I_0 keine regulären starken Limeszahlen. Da die starken Limeszahlen club in I_0 sind, ist die Klasse der regulären Kardinalzahlen nicht stationär in I_0. Stark unerreichbare Kardinalzahlen, in denen die regulären Kardinalzahlen stationär sind, bezeichnet man als MAHLOzahlen. Ist κ eine MAHLOzahl, so liegen κ viele unerreichbare Kardinalzahlen unterhalb von κ. Natürlich ist die Existenz von MAHLOzahlen in ZFC nicht beweisbar.
Analog nennt man κ eine schwache MAHLOzahl, wenn κ ein Limeskardinalzahl ist und die regulären Kardinalzahlen unterhalb von κ stationär in κ sind. Es ist leicht einzusehen, daß jede schwache MAHLOzahl auch schwach unerreichbar ist. Daher ist die Existenz schwacher MAHLOzahlen in ZFC nicht beweisbar.

5. Meßbare Kardinalzahlen

Es ist wohlbekannt, daß sich nicht alle Mengen reeller Zahlen im LEBESGUEschen Sinne messen lassen. Die Frage, die wir uns hier stellen wollen ist, ob es nicht möglich ist, eine Menge S so zu finden, daß sich ein Maß auf der vollen Potenzmenge von S definieren läßt. Insbesondere interessieren wir uns dann für die Frage, wie groß diese Menge zu sein hätte. Im folgenden Abschnitt wollen wir zunächst die Problematik genauer studieren.

5.1 Das Maßproblem

Bevor wir uns mit dem eigentlichen Maßproblem beschäftigen können, müssen wir einige Grundbegriffe bereitstellen.

5.1.1 Definition Sei S eine unendliche Menge. Ein *Filter* auf S ist eine Menge $U \subseteq \mathrm{Pow}(S)$, die den folgenden Bedingungen genügt.

(i) $S \in U$ und $\emptyset \notin U$

(ii) $A \in U \wedge B \in U \;\Rightarrow\; A \cap B \in U$

(iii) $A \in U \wedge A \subseteq B \;\Rightarrow\; B \in U$

Der zum Filter duale Begriff ist der eines Ideals. Wir definieren:

5.1.2 Definition Sei S eine unendliche Menge. Ein *Ideal* auf S ist eine Menge $I \subseteq \mathrm{Pow}(S)$, die den folgenden Bedingungen genügt.

(i) $\emptyset \in I$ und $S \notin I$

(ii) $A \in I \wedge B \in I \;\Rightarrow\; A \cup B \in I$

(iii) $A \subseteq B \wedge B \in I \;\Rightarrow\; A \in I$

Als Folgerung aus beiden Definitionen erhalten wir sofort:

Die Menge $I \subseteq \mathrm{Pow}(S)$ *ist genau dann ein Ideal, wenn*

$$D := \{X \subseteq S \mid\; S \setminus X \in I\}$$

ein Filter ist.
Umgekehrt ist eine Menge $U \subseteq \mathrm{Pow}(S)$ *genau dann ein Filter, wenn die Menge*

$$I := \{X \subseteq S |\ S \setminus X \in U\}$$

ein Ideal ist.

Ist U ein Filter und gibt es ein $A \subseteq S$ derart, daß

$$U = \{X \subseteq S |\ A \subseteq X\}$$

ist, so heißt U ein *Hauptfilter*. Die Menge A nennen wir eine *Erzeugende* des Filters. Der dazu duale Begriff ist der des *Hauptideals*. D.h. ein Hauptideal auf S ist eine Menge

$$I = \{X \subseteq S |\ X \subseteq A\}$$

für ein $A \subseteq S$. A heißt wieder die Erzeugende des Ideals.
Läßt sich die Bedingung *(ii)* in der Definition des Filters verstärken zu

(ii) $\quad (\forall \alpha < \kappa)[\{X_\xi |\ \xi < \alpha\} \subseteq U \ \Rightarrow \bigcap_{\xi < \alpha} X_\xi \in U],$

so spricht man von einem *κ-vollständigen Filter*. $\aleph_1$-vollständige Filter nennt man aus historischen Gründen *σ-vollständig*.
Die dualen Begriffe gelten wieder für Ideale. Wir glauben, daß sie nicht mehr explizit formuliert werden müssen.
Ein Filter U auf S heißt ein *Ultrafilter*, wenn für jede Menge $X \subseteq S$ entweder $X \in U$ oder $S \setminus X \in U$ gilt.
Der duale Begriff zum Ultrafilter ist der des *Primideals*.
Zwei oft nützliche Beobachtungen formulieren wir als Lemmata.

5.1.3 Lemma *Ein Ultrafilter U auf S ist genau dann ein Hauptfilter, wenn es ein $a \in S$ so gibt, daß*

$$U = \{X \subseteq S |\ a \in X\}$$

gilt.

Beweis: Ist

$$U = \{X \subseteq S |\ a \in X\},$$

so ist U natürlich ein Hauptfilter, der von der Menge $\{a\} \subseteq S$ erzeugt wird. Ist umgekehrt U ein Haupt-Ultrafilter, so gibt es ein $A \subseteq S$ mit

$$U = \{X \subseteq S |\ A \subseteq X\}.$$

Wir zeigen, daß dann A bereits ein Singleton sein muß. Anderenfalls gäbe es nämlich ein $x \in A$ so, daß $\{x\} \subsetneqq A$ gilt. Also ist $\{x\} \notin U$ und, da ein Ultrafilter vorliegt, damit $S \setminus \{x\} \in U$. Also gilt $A \supsetneqq A \setminus \{x\} \in U$. Ein Widerspruch. $\square$

5.1.4 Definition Eine Familie $\{X_\xi \mid \xi < \alpha\}$ heißt *Partition* einer Menge S, wenn die X_ξ paarweise disjunkt sind und $S = \bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi$ gilt.

5.1.5 Lemma *Ein Ultrafilter U auf S ist genau dann κ-vollständig, wenn jede Partition von S in weniger als κ Teile zumindest ein Element von U enthält, d.h. wenn*

$$(\forall\alpha<\kappa)[S = \bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \Rightarrow (\exists\eta<\alpha)(X_\eta \in U)]$$

gilt.

Beweis: Beginnen wir mit der Richtung von links nach rechts. Sei also $\alpha < \kappa$, $S = \bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi$ und $(\forall\xi<\alpha)[X_\xi \notin U]$. Bezeichnen wir mit $\overline{X}_\xi$ das Komplement von X_ξ in S, so erhalten wir wegen der Ultrafiltereigenschaft von U

$$(\forall\xi<\alpha)[\overline{X}_\xi \in U].$$

Wegen der κ-Vollständigkeit von U folgte dann aber der Widerspruch

$$\emptyset = \bigcap_{\xi < \alpha} \overline{X}_\xi \in U.$$

Für die Gegenrichtung gehen wir davon aus, daß U nicht κ-vollständig ist. Dann finden wir ein $\alpha < \kappa$ und eine Familie $\{X_\xi \mid \xi < \alpha\}$ von Elementen von U derart, daß $X := \bigcap_{\xi < \alpha} X_\xi \notin U$ gilt. Dann ist

$$S = \bigcup_{\xi < \alpha} \overline{X}_\xi \cup X$$

und es ist klar, daß sich daraus eine Partition von S der Länge α konstruieren läßt, deren Elemente alle nicht in U liegen. □

Doch nun zum Maßproblem. Wir definieren:

5.1.6 Definition Eine Menge $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Pow}(S)$ heißt eine σ-Mengenalgebra über S, wenn $\mathcal{F}$ die folgenden Bedingungen erfüllt.

(i) $S \in \mathcal{F}$

(ii) $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegenüber (endlichem) Durchschnitt und Komplement. (Damit ist insbesondere $\emptyset \in \mathcal{F}$.)

(iii) $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen gegenüber abzählbaren Vereinigungen.

(iv) Für alle $x \in S$ ist $\{x\} \in \mathcal{F}$.

Auf σ-Mengenalgebren definieren wir Maße in der folgenden Weise.

5.1.7 Definition Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Mengenalgebra über S. Ein Maß für $\mathcal{F}$ ist eine Abbildung

$$\mu\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $\mathbb{R}$ hier die reellen Zahlen, nicht die regulären Ordinalzahlen bedeutet, die den folgen Bedingungen genügt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(S) = 1$.

(ii) Für X und Y in $\mathcal{F}$ mit $X \subseteq Y$ gilt $\mu(X) \leq \mu(Y)$.

(iii) Für alle $x \in S$ ist $\mu(\{x\}) = 0$. (Nichttrivialität)

(iv) Ist $\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$ eine paarweise disjunkte abzählbare Familie, so ist

$$\mu(\bigcup_{i \in I} X_i) = \sum_{i \in I} \mu(X_i). \qquad (\sigma\text{-Additivität})$$

Als Paradigma für den Maßbegriff dient selbstverständlich das (normierte) LEBESGUE-Maß für die LEBESGUE-meßbaren Mengen. (Allerdings werden wir uns keine Gedanken über die Translationsinvarianz von Maßen machen.)
Offensichtlich ist $\aleph_0$ nicht mit einem Maß versehbar. Es ist allgemein bekannt, daß sich nicht jede Menge reeller Zahlen im LEBESGUEschen Sinne messen läßt. D.h. die LEBESGUE-meßbaren Mengen bilden eine echte Teilmenge der Potenzmenge von $\mathbb{R}$. Die Frage ist nun, ob es überhaupt eine Menge S gibt, für die sich ein Maß auf $\mathrm{Pow}(S)$ angeben läßt und, falls dies zutrifft, wie groß diese Menge zu sein hat. Dieser Frage wollen wir in diesem Abschnitt nachgehen.
Zur Vereinfachung der Redeweisen vereinbaren wir, daß ein *Maß auf S* ein Maß für $\mathrm{Pow}(S)$ sein soll.
Um den Hauptsatz dieses Abschnittes formulieren zu können, müssen wir einige Notationen bereitstellen.

5.1.8 Definition Ein Maß μ auf S heißt zweiwertig , wenn $\mu(X) \in \{0, 1\}$ für alle $X \subseteq S$ gilt.

Zwischen zweiwertigen Maßen und Ultrafiltern besteht eine enge Beziehung, die im folgenden Lemma zum Ausdruck kommt.

5.1.9 Lemma *Ist μ ein zweiwertiges Maß auf S, so ist die Menge*

$$U := \{X \subseteq S \mid \mu(X) = 1\}$$

ein σ-vollständiger Ultrafilter, der kein Hauptfilter ist.

Umgekehrt definiert jeder solche Filter vermöge

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } X \in U \\ 0 & \textit{falls } X \notin U \end{cases}$$

ein zweiwertiges Maß auf S.

Beweis: Wir zeigen nur, daß durch das Maß ein Ultrafilter definiert wird. Den anderen Teil, dessen Beweis völlig kanonisch verläuft, rechnet man einfach nach.
Wegen $\mu(S) = 1$ und $\mu(\emptyset) = 0$ haben wir $S \in U$ und $\emptyset \notin U$.
Sind X und Y in U und nehmen wir $\mu(X \cap Y) = 0$ an, so gelangen wir wie folgt zu einem Widerspruch. Es ist

$$X = X \setminus Y \cup (X \cap Y)$$

und analog

$$Y = Y \setminus X \cup (X \cap Y).$$

Mit unserer Annahme erhielten wir also

$$\mu(X \cup Y) = \mu(X \setminus Y) + \mu(Y \setminus X) = \mu(X) + \mu(Y) = 2,$$

was natürlich absurd ist.
Daß $\mu(X) \leq \mu(Y)$ für $X \subseteq Y$ gilt, ist klar.
Wegen der σ-Additivität von μ kann es keine abzählbare Partition $S = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$ durch Nullmengen X_ι geben. Nach Lemma 5.1.5 ist U daher σ-vollständig.
Da für $x \in S$ stets $\mu(\{x\}) = 0$ ist, kann U nach Lemma 5.1.3 kein Hauptfilter sein. □

5.1.10 Definition Sei μ ein Maß auf S. Eine Menge $A \subseteq S$ heißt ein *Atom* von μ, wenn $\mu(A) > 0$ ist und

$$(\forall X)[X \subseteq A \Rightarrow \mu(X) = 0 \vee \mu(X) = \mu(A)]$$

gilt. Maße, die keine Atome besitzen, heißen *atomlos*.

Bei einem zweiwertigen Maß ist offenbar jede Menge vom Maß 1 ein Atom. Umgekehrt induziert jedes Maß μ auf S, das ein Atom A besitzt, ein zweiwertiges Maß

$$\nu(X) := \frac{1}{\mu(A)} \cdot \mu(X \cap A)$$

auf S.
Wir haben nun alle Begriffe zur Hand, um den Hauptsatz dieses Abschnittes formulieren zu können.

5.1.11 Satz (Satz von ULAM**)** *Existiert ein Maß auf einer Menge S, so gibt es bereits ein zweiwertiges Maß auf S und es ist $I_0 \leq |S|$, oder man findet ein atomloses Maß auf $2^{\aleph_0}$ und es ist $\iota_0 \leq 2^{\aleph_0}$.*

Der Beweis des Satzes erfordert eine Reihe von Vorbereitungen. Beginnen wir damit, die Auswirkungen der Existenz eines zweiwertigen Maßes genauer zu studieren.

5.1.12 Lemma *Es sei κ die kleinste Ordinalzahl, die einen σ-vollständigen Ultrafilter trägt, der kein Hauptfilter ist. Dann ist jeder solche Ultrafilter auf κ bereits κ-vollständig.*

Beweis: Sei U ein σ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptfilter ist. Um zu einem Widerspruch zu gelangen, nehmen wir an, daß U nicht κ-vollständig ist. Nach Lemma 5.1.5 gibt es dann ein $\alpha < \kappa$ und eine Partition $\kappa = \bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi$ so, daß $X_\xi \notin U$ für alle $\xi < \alpha$ gilt. Damit können wir eine Abbildung $f\colon \kappa \longrightarrow \alpha$ mittels

$$f(\xi) = \eta \;:\Leftrightarrow\; \xi \in X_\eta$$

definieren. Die Wohldefiniertheit von f ergibt sich dadurch, daß die X_η paarweise disjunkt sind. Wir setzen

$$D := \{X \subseteq \alpha |\ f^{-1}[X] \in U\}$$

und behaupten, daß D ein σ-vollständiger Ultrafilter auf α ist, der kein Hauptfilter ist. Sobald wir diese Behauptung bewiesen haben, stellt diese aber einen Widerspruch zur Minimalität von κ dar.
Wegen $f^{-1}[\alpha] = \kappa$ ist $\alpha \in D$ und wegen $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ auch $\emptyset \notin D$.
Für $X \in D$ und $X \subseteq Y$ erhalten wir offenbar sofort auch $Y \in D$.
Gilt $X_n \in D$ für alle $n \in \omega$, so haben wir nach Definition $f^{-1}[X_n] \in U$ für alle $n \in \omega$ und damit $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in U$. Nun gilt aber

$$f^{-1}[\bigcap_{n \in \omega} X_n] = \bigcap_{n \in \omega} f^{-1}[X_n],$$

woraus wir $\bigcap_{n \in \omega} X_n \in D$ erhalten. Damit ist D ein σ-vollständiger Filter.
Wegen

$$f^{-1}[\alpha \setminus X] = \kappa \setminus f^{-1}[X]$$

ist D auch ein Ultrafilter.
Nach Konstruktion haben wir für alle $\xi < \alpha$

$$f^{-1}[\{\xi\}] = X_\xi.$$

Wegen $X_\xi \notin U$ für alle $\xi < \alpha$ folgt daher auch $\{\xi\} \notin D$. Also ist D kein Hauptfilter. □

Als eine unmittelbare Folgerung von Lemma 5.1.12 erhalten wir:

5.1.13 Korollar *Ist κ die kleinste Ordinalzahl, die ein zweiwertiges Maß trägt, so existiert ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, der kein Hauptfilter ist.*

Dieses Korollar bildet die Motivation für die folgende Definition.

5.1.14 Definition Eine Ordinalzahl κ heißt *meßbar*, wenn es einen κ-vollständigen Ultrafilter auf κ gibt, der kein Hauptfilter ist.

Wir werden feststellen, daß meßbare Ordinalzahlen sehr groß sind. Zunächst machen wir uns klar, daß

$$X \in U \;\Rightarrow\; \kappa \leq |X| \tag{5.1}$$

für jeden κ-vollständigen Ultrafilter U auf κ gilt, wenn er kein Hauptfilter ist. Anderenfalls erhielten wir nämlich $X = \bigcup_{x \in X}\{x\}$, was wegen der κ-Vollständigkeit von U zusammen mit der Tatsache, daß für alle $x \in X$ stets $\{x\} \notin U$ gilt, zu dem Widerspruch $X \notin U$ führte.
Zusammen mit Lemma 5.1.5 folgt aus dieser Beobachtung, daß jedes meßbare κ bereits regulär, also insbesondere eine Kardinalzahl sein muß. Es gilt aber mehr, wie wir im folgenden Lemma festhalten wollen.

5.1.15 Lemma *Jede meßbare Kardinalzahl ist stark unerreichbar.*

Beweis: Daß meßbare Kardinalzahlen regulär sind, haben wir uns gerade überlegt. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, daß jede meßbare Kardinalzahl κ auch gegenüber der Kontinuumsfunktion abgeschlossen ist. Um zu einem Widerspruch zu gelangen, nehmen wir die Existenz eines $\sigma < \kappa$ an, für das $\kappa \leq 2^\sigma$ ist. Dann wählen wir eine Menge $S \subseteq 2^\sigma$ mit $|S| = \kappa$. Auf S gibt es dann einen κ-vollständigen Ultrafilter U, der kein Hauptfilter ist. Zu $\xi < \sigma$ wählen wir $\varepsilon_\xi \in \{0,1\}$ so, daß immer

$$X_\xi := \{f \in S \mid\; f(\xi) = \varepsilon_\xi\} \in U$$

gilt. Dann ist wegen der κ-Vollständigkeit von U

$$\bigcap_{\xi < \sigma} X_\xi \in U.$$

Da aber $\bigcap_{\xi < \sigma} X_\xi$ als einziges Element die Funktion f enthalten kann, für die immer $f(\xi) = \varepsilon_\xi$ gilt, ist $|\bigcap_{\xi < \sigma} X_\xi| = 1$, was im Widerspruch zu (5.1) steht. □

Damit haben wir bereits ein grobe Größenvorstellung von meßbaren Kardinalzahlen gewonnen, die doch so gut ist, daß sie den ersten Teil der Aussage des Satzes von ULAM – der ja noch immer unser nächstes Ziel ist – nach sich zieht. Wir wollen uns daher nun Maßen zuwenden, die nicht notwendigerweise zweiwertig sind. Dort funktioniert unsere Ultrafilterkonstruktion sicher nicht. Wir können uns aber dem dualen Begriff zuwenden und das *Nullmengenideal*

$$I_\mu := \{X \subseteq S \mid \ \mu(X) = 0\}$$

eines Maßes μ auf S betrachten. Wir wollen hier die Einzelheiten nicht vorrechnen, aber es ist sehr leicht nachzuprüfen, daß I_μ ein σ-vollständiges Ideal auf S ist, das wegen der Nichttrivialität des Maßes μ kein Hauptideal ist. Darüber hinaus können wir feststellen, daß I_μ auch die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$(\forall x \in S)[\{x\} \in I_\mu] \tag{5.2}$$

Jede Familie von paarweise disjunkten Teilmengen von S, die alle nicht in I_μ liegen, ist abzählbar. (5.3)

Um einzusehen, daß (5.3) gilt, betrachten wir eine Familie

$$\mathcal{F} := \{X_\iota \subseteq S \mid \ \iota \in J\}$$

von paarweise disjunkten Mengen mit $\mu(X_\iota) > 0$ für alle $\iota \in J$. Wir setzen

$$\mathcal{F}_n := \{X_\iota \mid \ \iota \in J \wedge \mu(X_\iota) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Jede der Familien $\mathcal{F}_n$ muß endlich sein. Wegen

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$$

ist $\mathcal{F}$ dann abzählbar.
Ein Ideal I auf S, daß die Eigenschaften (5.2) und (5.3) besitzt, wollen wir *σ-saturiert* nennen.
Genügt ein Ideal I der Bedingung (5.2) und erfüllt es die folgende Modifizierung von (5.3):

Jede Familie von paarweise disjunkten Teilmengen von S, die alle nicht in I liegen, hat eine Kardinalität kleiner als κ, (5.4)

so nennen wir I κ-saturiert. Die σ-saturierten Ideale sind also die in diesem Sinne $\aleph_1$-saturierten Ideale.
Ein erstes Analogon zu Lemma 5.1.12 ist die folgende Beobachtung.

5.1.16 Lemma *Ist κ die kleinste Ordinalzahl, die ein Maß μ trägt, so ist dessen Nullmengenideal I_μ σ-saturiert und κ-vollständig.*

Beweis: Daß I_μ ein σ-saturiertes Ideal ist, haben wir uns bereits klar gemacht. Wir beschränken uns daher auf den Nachweis der κ-Vollständigkeit. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen dazu an, daß I_μ nicht κ-vollständig ist. Dann finden wir ein $\alpha < \kappa$ und eine Familie $\{X_\xi |\ \xi < \alpha\}$ von Nullmengen so, daß $\mu(\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi) > 0$ ist. Dabei dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die X_ξ paarweise disjunkt sind. Wir definieren

$$X := \bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi \text{ und } m := \mu(X)$$

und erhalten eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow \alpha$ mittels

$$f(x) = \xi \ :\Leftrightarrow\ x \in X_\xi,$$

die ihrerseits die Definition eines Maßes

$$\nu(Y) := \frac{1}{m} \cdot \mu(f^{-1}[Y])$$

erlaubt. Man rechnet sofort nach, daß es sich um ein σ-additives Maß auf α handelt, das wegen

$$\xi < \alpha \ \Rightarrow\ \nu(\{\xi\}) = \frac{1}{m} \cdot \mu(X_\xi) = 0$$

nichttrivial ist. Dies widerspricht jedoch der Minimalität von κ. □

Um die Analogie zwischen der ersten meßbaren Kardinalzahl und der kleinsten Kardinalzahl, die ein reellwertiges Maß trägt, noch besser herauszuarbeiten, führen wir den Begriff eines κ-additiven Maßes ein. Dazu definieren wir für $\{r_\iota |\ \iota \in J\} \subseteq \mathbb{R}$

$$\sum_{\iota \in J} r_\iota := \sup\{\sum_{\iota \in E} r_\iota |\ E \subseteq J \wedge E \text{ ist endlich}\}.$$

5.1.17 Definition Ein Maß μ auf einer Menge S heißt κ-*additiv*, wenn

$$\mu(\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi) = \sum_{\xi < \alpha} \mu(X_\xi)$$

für alle $\alpha < \kappa$ und paarweise disjunkte $\{X_\xi |\ \xi < \alpha\} \subseteq \text{Pow}(S)$ gilt.

Maße, die κ-additiv sind, lassen sich durch ihre Nullmengenideale charakterisieren. Es gilt:

5.1.18 Lemma *Ein Maß μ auf einer Menge S ist genau dann κ-additiv, wenn sein Nullmengenideal κ-vollständig ist.*

Beweis: Es ist natürlich klar, daß ein κ-additives Maß ein κ-vollständiges Nullmengenideal hat. Nur die Gegenrichtung erfordert etwas Überlegung. Wir wollen daher annehmen, daß das Nullmengenideal I_μ κ-vollständig ist. Sei nun $\alpha < \kappa$ und $\{X_\xi |\ \xi < \alpha\}$ eine Familie paarweise disjunkter Teilmengen von S, wobei wir annehmen dürfen, daß es ein $\xi < \alpha$ mit $X_\xi \notin I_\mu$ gibt. Es können höchstens abzählbar viele X_ξ ein positives Maß haben. Seien diese $\{Y_n |\ n \in \omega\}$. Damit ist

$$\{X_\xi |\ \xi < \alpha\} = \{Y_n |\ n \in \omega\} \cup \{N_\eta |\ \eta < \alpha'\},$$

wobei $\alpha' \leq \alpha$ ist und alle die N_η Nullmengen sind. Wegen der κ-Vollständigkeit des Nullmengenideals ist dann aber auch $\bigcup_{\eta < \alpha'} N_\eta$ eine Nullmenge und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{\xi < \alpha} X_\xi) &= \mu(\bigcup_{n \in \omega} Y_n) + \mu(\bigcup_{\eta < \alpha'} N_\eta) \\
&= \sum_{n \in \omega} \mu(Y_n) + 0 \\
&= \sum_{n \in \omega} \mu(Y_n) + \sum_{\eta < \alpha'} \mu(N_\eta) \\
&= \sum_{\xi < \alpha} \mu(X_\xi).
\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Lemmata 5.1.18 und 5.1.16 gelangen wir zu einem befriedigenden Analogon von Lemma 5.1.12.

5.1.19 Lemma *Ist κ die kleinste Ordinalzahl, die ein Maß trägt, so ist jedes solche Maß bereits κ-additiv.*

Lemma 5.1.19 ist wieder die Motivation der folgenden Definition.

5.1.20 Definition Eine Ordinalzahl κ heißt *reellwertig meßbar*, wenn ein κ-additives Maß auf κ existiert.

Ist nun μ ein κ-additives Maß auf κ, so gilt $\mu(X) = 0$ für jedes $X \subseteq \kappa$ mit $|X| < \kappa$. Damit kann κ nicht die Vereinigung von weniger als κ vielen Mengen einer Kardinalität kleiner als κ sein. Also ist jedes reellwertig meßbare κ regulär. Wir werden etwas später einsehen, daß reellwertig meßbare Kardinalzahlen mindestens schwach unerreichbar sein müssen.
Zunächst sehen wir uns jedoch atomlose Maße genauer an.

5.1.21 Lemma *Wenn überhaupt eine Menge S existiert, die ein atomloses Maß trägt, so gibt es bereits ein $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, das ein Maß trägt.*

Beweis: Sei μ eine atomloses Maß auf S. Der Beweis beruht wesentlich auf der Tatsache, daß sich jede Menge $X \subseteq S$ mit positivem Maß in zwei disjunkte Mengen positiver Maße zerlegen läßt. Dies ist leicht einzusehen, denn zu $X \subseteq S$ mit $\mu(X) > 0$ muß es ein $Y \subseteq X$ mit $0 < \mu(Y) < \mu(X)$ geben, da anderenfalls X ein Atom wäre. Setzen wir $Z := X \setminus Y$, so ist X die disjunkte Vereinigung von Y und Z und sowohl Y als auch Z haben positives Maß.
Wir definieren nun einen Baum $T \subseteq \text{Pow}(S)$, dessen Baumordnung durch die inverse Mengeninklusion gegeben wird. Die Definition erfolgt in Schichten T_ξ, wobei jedes $X \in T_\xi$ positives Maß bekommen soll. Wir beginnen mit

$$T_0 := \{S\}.$$

Ist T_ξ bereits definiert, so finden wir zu jedem $X \in T_\xi$ zwei disjunkte Mengen $Y, Z \subseteq X$ positiven Maßes mit $X = Y \cup Z$. Diese nehmen wir als unmittelbare Nachfolger von X in $T_{\xi+1}$.
Ist schließlich ξ eine Limeszahl und ist $\{X_\eta \mid \eta < \xi\} \subseteq \bigcup_{\beta < \xi} T_\beta$ derart, daß

$$(\forall \eta < \xi)[X_\eta \in T_\eta] \wedge (\forall \eta < \xi)(\forall \zeta < \eta)[X_\eta \subseteq X_\zeta]$$

gilt und $\mu(X) > 0$ für $X := \bigcap_{\eta < \xi} X_\eta$ ist, so ist $X \in T_\xi$.
Schließlich ist

$$T := \bigcup_{\xi \in \text{On}} T_\xi.$$

Wir erinnern daran, daß ein Pfad in einem Baum $(T, \leq)$ eine durch die Baumordnung $\leq$ linear geordnete Teilmenge von T ist. Ein Pfad P heißt ein Pfad *durch* T, wenn P ein maximaler Pfad in T ist, d.h. in T nicht mehr verlängert werden kann.
Ist nun $\{X_\eta \mid \eta < \alpha\}$ ein Pfad durch den eben definierten Baum T, so setzen wir

$$Y_\eta := X_\eta \setminus X_{\eta+1}.$$

Dann bildet $\{Y_\eta \mid \eta < \alpha\}$ eine disjunkte Familie von Mengen positiven Maßes, denn wegen $\mu(X_\eta) = \mu(X_{\eta+1}) + \mu(Y_\eta)$ und $\mu(X_{\eta+1}) < \mu(X_\eta)$ ist $\mu(Y_\eta) > 0$. Damit ist laut (5.3) aber $\alpha < \aleph_1$. Mit der gleichen Argumentation ist $|T_\eta| \leq \aleph_0$ für alle $\eta < \aleph_1$, denn nach Konstruktion sind die Elemente von jedem T_η paarweise disjunkt. Also gibt es höchstens $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ viele Pfade durch T. Sei $\{P_\xi \mid \xi < \kappa\}$ eine Aufzählung der Pfade, deren Durchschnitt $D_\xi := \bigcap \{X \mid X \in P_\xi\}$ nicht leer ist. Da alle P_ξ Pfade durch T sind, muß jedes der D_ξ eine Nullmenge sein. Nach Konstruktion sind die D_ξ paarweise disjunkt, und zu jedem $x \in S$ gibt es ein $\xi < \kappa$ mit $x \in D_\xi$. Damit bildet die Familie $\{D_\xi |\ \xi < \kappa\}$ eine Partition von S in Nullmengen. Wir verwenden diese Partition wieder zur Definition einer Funktion $f\colon S \longrightarrow \kappa$ mittels

$$f(x) = \xi \ :\Leftrightarrow \ x \in D_\xi.$$

Mit Hilfe dieser Abbildung erhalten wir nun ein Maß auf κ durch

$$\nu(X) := \mu(f^{-1}[X]).$$

Man rechnet mühelos nach, daß ν wegen

$$\nu(\{\xi\}) = \mu(D_\xi) = 0$$

ein Maß ist. □

Der eben geführte Beweis hat weiter gezeigt, daß jede Menge S, die ein atomloses Maß μ trägt, eine Partition in höchstens $2^{\aleph_0}$ viele Nullmengen besitzt. Damit kann μ nicht $(2^{\aleph_0})^+$-additiv sein. Trägt also eine Kardinalzahl κ ein atomloses κ-additives Maß, so ist $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$. Damit erhalten wir den folgenden Satz.

5.1.22 Satz *Ist κ eine reellwertig meßbare Kardinalzahl, so ist κ entweder meßbar, oder es ist $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

Aus Lemma 5.1.22 folgt nun auch sofort, daß das im Beweis des Lemma 5.1.21 definierte Maß atomlos sein muß. Anderenfalls wäre nämlich nach Satz 5.1.22 κ meßbar und nach Lemma 5.1.16 damit stark unerreichbar. Wir haben aber $\aleph_0 < \kappa \leq 2^{\aleph_0}$.
Damit haben wir ein atomloses Maß μ auf einem $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, das sich vermöge der Festsetzung

$$\nu(X) := \mu(X \cap \kappa)$$

auf alle $X \subseteq 2^{\aleph_0}$ fortsetzen läßt.
Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $\iota_0 \leq \kappa$ für alle reellwertig meßbaren Kardinalzahlen κ gilt. Da wir, die Existenz eines atomlosen Maßes auf einer Menge S vorausgesetzt, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ für die erste reellwertig meßbare Kardinalzahl haben, folgt dann die letzte Aussage des Satzes von ULAM, nämlich $\iota_0 \leq 2^{\aleph_0}$.
Wir wissen bereits, daß jede reellwertig meßbare Kardinalzahl regulär ist. Daher müssen wir uns also nur noch klar machen, daß sie darüber hinaus auch eine Limeskardinalzahl ist. Dazu führen wir den folgenden Begriff ein:

5.1.23 Definition Sei λ eine Kardinalzahl. Eine Kollektion

$$\{A_{\xi,\eta} |\ \xi < \lambda^+ \wedge \eta < \lambda\} \subseteq \mathrm{Pow}(\lambda^+)$$

heißt eine (λ^+,λ)-ULAM-*Matrix*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $(\forall \xi_1 < \lambda^+)(\forall \xi_2 < \lambda^+)(\forall \eta < \lambda)[\xi_1 \neq \xi_2 \Rightarrow A_{\xi_1,\eta} \cap A_{\xi_2,\eta} = \emptyset]$

(ii) $(\forall \xi < \lambda^+)[|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\xi,\eta}| \leq \lambda]$.

Wir zeigen nun:

5.1.24 Lemma *Zu jeder Kardinalzahl $\lambda \geq \aleph_0$ existiert eine (λ^+,λ)-ULAM-Matrix.*

Beweis: Zu $\xi < \lambda^+$ wählen wir eine Funktion $f_\xi : \lambda \longrightarrow \lambda^+$ so, daß immer $\xi \subseteq \operatorname{rng}(f_\xi)$ gilt. Zu $\xi < \lambda^+$ und $\eta < \lambda$ definieren wir

$$A_{\xi,\eta} := \{\zeta \in \lambda^+ |\ f_\zeta(\eta) = \xi\}$$

und behaupten, daß

$$\mathcal{A} := \{A_{\xi,\eta} |\ \xi < \lambda^+ \wedge \eta < \lambda\}$$

eine ULAM-Matrix ist.
Zuerst bemerken wir, daß es zu jedem $\eta < \lambda$ und $\zeta < \lambda^+$ nur ein $\xi < \lambda^+$ mit $\zeta \in A_{\xi,\eta}$ gibt, nämlich $\xi := f_\zeta(\eta)$. Ist also $\zeta \in A_{\xi_1,\eta} \cup A_{\xi_2,\eta}$, so folgt $\xi_1 = f_\zeta(\eta) = \xi_2$. Damit erfüllt $\mathcal{A}$ aber Bedingung *(i)* der Definition einer ULAM-Matrix.
Ist nun $\xi < \lambda^+$ und $\zeta > \xi$, so gibt es ein $\eta < \lambda$ mit $f_\zeta(\eta) = \xi$, d.h. es ist $\zeta \in A_{\xi,\eta}$. Damit folgt aber

$$\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\xi,\eta} \subseteq \xi + 1,$$

woraus sich

$$|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\eta<\lambda} A_{\xi,\eta}| \leq \lambda$$

ergibt. Damit erfüllt $\mathcal{A}$ auch die Bedingung *(ii)* der Definition einer ULAM-Matrix. □

Als Folgerung erhalten wir:

5.1.25 Lemma *Auf keiner Nachfolgerkardinalzahl λ^+ kann ein λ^+-additives Maß existieren.*

Beweis: Sei λ^+ gegeben und

$$\mathcal{A} := \{A_{\xi,\eta} |\ \xi < \lambda^+ \wedge \eta < \lambda\}$$

eine (λ^+,λ)-ULAM-Matrix. Um zu einem Widerspruch zu gelangen, nehmen wir an, daß auf λ^+ ein λ^+-additives Maß existiert. Dann gibt es wegen der Eigenschaft *(ii)* in der Definition der ULAM-Matrix zu jedem $\xi < \lambda^+$ ein $\eta_\xi < \lambda$ so, daß A_{ξ,η_ξ} positives Maß hat. Aus Kardinalitätsgründen können nicht alle η_ξ voneinander verschieden sein. Es gibt daher eine Menge M der Kardinalität λ^+ mit

$$(\forall\xi\in M)(\forall\zeta\in M)[\eta_\xi = \eta_\zeta]. \tag{i}$$

Aus (i) folgt aber sofort

$$(\forall\xi\in M)(\forall\zeta\in M)[\xi \neq \zeta \;\Rightarrow\; A_{\xi,\eta_\xi} \cap A_{\zeta,\eta_\zeta} = \emptyset]. \tag{ii}$$

Mit (ii) haben wir ein Familie paarweise disjunkter Teilmengen von λ^+ der Kardinalität λ^+ vorliegen, die alle positives Maß besitzen. Dies ist aber unmöglich, da wir das Maß als λ^+-additiv vorausgesetzt haben, und $\lambda^+ \geq \aleph_1$ ist. □

Da, wie bereits gezeigt, jede reellwertig meßbare Kardinalzahl regulär und nach dem eben gezeigten Lemma 5.1.25 auch eine Limeskardinalzahl sein muß, erhalten wir als Korollar:

5.1.26 Korollar *Jede reellwertig meßbare Kardinalzahl ist schwach unerreichbar.*

Existiert überhaupt ein atomloses Maß, so ist nach Lemma 5.1.21 und Satz 5.1.22 die erste reellwertig meßbare Kardinalzahl $\leq 2^{\aleph_0}$. Damit gilt dann aber auch $\iota_0 \leq 2^{\aleph_0}$, und wir haben die letzte noch offene Behauptung des Satzes von ULAM bewiesen.

5.2 Ultraprodukte und Ultrapotenzen

Wir haben im Abschnitt über das Maßproblem dargestellt, wie zweiwertige Maße mit Ultrafiltern zusammenhängen. Ultrafilter spielen in der Modelltheorie eine wichtige Rolle, die wir am Beispiel der Sprache $\mathcal{L}(\in)$ der Mengenlehre in diesem Abschnitt erläutern wollen.
Sei dazu S eine Menge und U ein Ultrafilter auf S. Weiter sei für jedes $x \in S$ eine $\mathcal{L}(\in)$-Struktur $\mathfrak{A}_x = (A_x, E_x)$ gegeben. Auf dem Produkt

$$A := \prod_{x\in S} A_x$$

definieren wir eine Relation

$$f =_U g \;:\Leftrightarrow\; \{x\in S |\; f(x) = g(x)\} \in U. \tag{5.5}$$

Wegen $S \in U$ haben wir

$$f =_U f \tag{5.6}$$

für alle $f \in A$. Da U gegenüber Durchschnitten abgeschlossen ist, folgt

$$f =_U g \wedge g =_U h \;\Rightarrow\; f =_U h \tag{5.7}$$

und schließlich haben wir

$$f =_U g \;\Rightarrow\; g =_U f$$

als unmittelbare Folgerung der Definition (5.5). Damit liegt eine Äquivalenzrelation auf A vor und wir definieren

$$[f]_U := \{g \in A \mid\; f =_U g\},$$

wobei wir den unteren Index U immer fortlassen, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, auf welchen Ultrafilter wir uns beziehen. Wir betrachten nun die Klasse der Äquivalenzklassen

$$A/U = \{[f]_U \mid\; f \in A\}$$

und definieren

$$[f] \in_U [g] \;:\Leftrightarrow\; \{x \in S \mid\; f(x)\; E_x\; g(x)\} \in U,$$

wobei wir nachzuweisen haben, daß diese Definition unabhängig von Repräsentanten ist. Ist nämlich $f_1 \in [f]$ und $g_1 \in [g]$, so sind

$$M_1 := \{x \in S \mid\; f_1(x) = f(x)\} \in U,$$

$$M_2 := \{x \in S \mid\; g_1(x) = g(x)\} \in U$$

und

$$M_3 := \{x \in S \mid\; f(x)\; E_x\; g(x)\} \in U.$$

Also ist

$$M := \{x \in S \mid\; f_1(x)\; E_x\; g_1(x)\} \supseteq M_1 \cap M_2 \cap M_3 \in U$$

und damit $M \in U$, d.h. wir haben

$$[f] \in_U [g] \wedge [f_1] = [f] \wedge [g_1] = [g] \;\Rightarrow\; [f_1] \in_U [g_1].$$

Damit ist $\in_U$ wohldefiniert. Wir schreiben manchmal auch $f \in_U g$ anstatt $[f] \in_U [g]$.
Damit wird

$$\mathfrak{A}_U := (A/U, \in_U)$$

zu einer $\mathcal{L}(\in)$-Struktur. Man nennt $\mathfrak{A}_U$ das *Ultraprodukt* der Strukturen $\mathfrak{A}_x$. Die wichtige Rolle von Ultraprodukten erhellt der folgende Satz, der auch für beliebige Sprachen erster Stufe gilt.

5.2.1 Satz (Fundamentalsatz über Ultraprodukte) *Sei S eine Menge, U ein Ultrafilter auf S und $\{\mathfrak{A}_x \mid x \in S\}$ eine Familie von $\mathcal{L}(\in)$-Strukturen. Für jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, die keine weiteren freien Variablen enthält, und jedes Tupel $f_1, \ldots, f_n \in \prod_{x \in S} A_x$ gilt dann*

$$\mathfrak{A}_U \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) \;\Leftrightarrow\; \{x \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U.$$

Ist insbesondere φ ein Satz, so haben wir

$$\mathfrak{A}_U \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \{x \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi\} \in U.$$

Beweis: Wir führen Induktion nach der Länge der Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, wobei wir uns auf die logischen Zeichen $\wedge$, $\neg$ und $\exists$ beschränken dürfen. Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ die Formel $x_i = x_j$ oder $x_i \in x_j$, so haben wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_U \models [f_i] = [f_j] &\Leftrightarrow \{x \mid f_i(x) = f_j(x)\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{x \mid \mathfrak{A}_x \models f_i(x) = f_j(x)\} \in U \end{aligned}$$

bzw.

$$\mathfrak{A}_U \models [f_i] \in [f_j] \;\Leftrightarrow\; \{x \mid \mathfrak{A}_x \models f_i(x) \in f_j(x)\} \in U.$$

Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge \varphi_2(x_1, \ldots, x_n)$, so erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_U \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) \\ &\quad\Leftrightarrow \mathfrak{A}_U \models \varphi_1([f_1], \ldots, [f_n]) \text{ und } \mathfrak{A}_U \models \varphi_2([f_1], \ldots, [f_n]) \\ &\quad\Leftrightarrow \{x \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi_1(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U \\ &\qquad\quad \text{und } \{x \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi_2(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U \\ &\quad\Leftrightarrow \{x \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi_1(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \wedge \varphi_2(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U, \end{aligned}$$

denn U ist abgeschlossen gegenüber Durchschnitten und Obermengen. Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$, so erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung und der Ultrafiltereigenschaft von U

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_U \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) &\Leftrightarrow \mathfrak{A}_U \not\models \psi([f_1], \ldots, [f_n]) \\ &\Leftrightarrow \{x \mid \mathfrak{A}_x \models \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \notin U \\ &\Leftrightarrow \{x \mid \mathfrak{A}_x \not\models \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U \\ &\Leftrightarrow \{x \mid \mathfrak{A}_x \models \varphi(f_1(x), \ldots, f_n(x))\} \in U. \end{aligned}$$

Gilt schließlich $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\exists y)\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ und

$$\mathfrak{A}_U \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]),$$

so gibt es ein $f \in \prod_{x \in S} A_x$ mit

$$\mathfrak{A}_U \models \psi([f_1], \ldots, [f_n], [f]).$$

Damit ist

$$\{x|\ \mathfrak{A}_x \models \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x), f(x))\} \in U$$

und damit auch

$$\{x|\ \mathfrak{A}_x \models (\exists y)\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x), y)\} \in U,$$

denn U ist abgeschlossen gegenüber Obermengen.
Ist umgekehrt

$$M := \{x|\ \mathfrak{A}_x \models (\exists y)\psi(f_1(x), \ldots, f_n(x), y)\} \in U,$$

so haben wir zu jedem $x \in M$ ein $y_x \in A_x$ mit

$$\mathfrak{A}_x \models \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x), y_x)$$

und wir definieren

$$g(x) := \begin{cases} y_x & \text{falls } x \in M \\ \text{beliebiges Element in } A_x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g \in \prod_{x \in S} A_x$, und es gilt

$$\{x|\ \mathfrak{A}_x \models \psi(f_1(x), \ldots, f_n(x), g(x))\} = M \in U.$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt

$$\mathfrak{A}_U \models \psi([f_1], \ldots, [f_n], [g])$$

und damit auch

$$\mathfrak{A}_U \models (\exists y)\psi([f_1], \ldots, [f_n], y). \qquad \square$$

Ein wichtiger Spezialfall von Ultraprodukten ist die *Ultrapotenz*, in der alle Strukturen $\mathfrak{A}_x$ identisch sind. Ist also $\mathfrak{A} = (A, E)$ eine $\mathcal{L}(\in)$-Struktur, so sei

$$\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A}) = \left((\prod_{x \in S} A)/U, \in_U \right).$$

Als eine unmittelbare Folgerung des Fundamentalsatzes für Ultraprodukte erhalten wir den folgenden Satz:

5.2.2 Satz *Die Ultrapotenz* $\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$ *zu einer Struktur* $\mathfrak{A}$ *ist elementar äquivalent zu* $\mathfrak{A}$*, d.h. für jeden* $\mathcal{L}(\in)$*-Satz* φ *gilt:*

$$\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A}) \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi.$$

Beweis: Nach dem Fundamentalsatz gilt

$$\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A}) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \{x \in S \mid \mathfrak{A} \models \varphi\} \in U.$$

Da $\{x \in S \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$ entweder S oder $\emptyset$ und $\emptyset \notin U$ ist, folgt

$$\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A}) \models \varphi \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \models \varphi. \qquad \square$$

Im engen Zusammenhang mit elementarer Äquivalenz stehen elementare Einbettungen. Um diesen hier zu erhalten, definieren wir

$$j\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$$

wie folgt:
Zunächst betrachten wir zu jedem $a \in A$ die konstante Abbildung

$$c_a\colon S \longrightarrow A$$

mit

$$c_a(x) := a.$$

Dann ist $c_a \in \prod_{x \in S} A$, und wir definieren

$$j_U(a) := [c_a]_U.$$

Wir nennen j die *kanonische Einbettung* von $\mathfrak{A}$ in $\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$. Wir wollen nun festhalten, daß wir mit der kanonischen Einbettung bereits eine elementare Einbettung von $\mathfrak{A}$ in $\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$ gefunden haben.

5.2.3 Lemma *Die kanonische Einbettung*

$$j\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$$

ist elementar, d.h. für jede Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ohne weitere freie Variablen und jedes n-Tupel $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A}) \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n)).$$

Beweis: Auch dies ist eine unmittelbare Konsequenz des Fundamentalsatzes. Es gilt ja

$$\mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A}) \models \varphi(j(a_1), \ldots, j(a_n)) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A}) \models \varphi([c_{a_1}], \ldots, [c_{a_n}])$$

$$\Leftrightarrow\; \{x \in S \mid \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\} \in U$$

$$\Leftrightarrow\; \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n). \qquad \square$$

Man sollte an dieser Stelle erwähnen, daß für Haupt-Ultrafilter U die kanonische Einbettung j_U ein Isomorphismus wird. Zunächst ist klar, daß wegen

$$x \neq y \;\Leftrightarrow\; M \models j(x) \neq j(y) \;\Leftrightarrow\; j(x) \neq j(y)$$

jede elementare Einbettung j injektiv ist. Ist U ein Haupt-Ultrafilter, so gibt es nach Lemma 5.1.3 ein $u \in S$ mit

$$M \in U \;\Leftrightarrow\; u \in M.$$

Zu $[f] \in \mathrm{Ult}_U(\mathfrak{A})$ sei $a := f(u) \in \mathfrak{A}$. Dann gilt aber

$$[f] = [c_a] = j(a),$$

denn es ist ja $f(u) = a = c_a(u)$, also

$$\{x \in S \mid\; f(x) = c_a(x)\} \in U.$$

Damit ist j auch surjektiv und somit ein Isomorphismus. Um nichttriviale Einbettungen zu erhalten, werden wir uns daher mit Ultrafiltern zu beschäftigen haben, die keine Hauptfilter sind.

Wenn wir versuchen, Ultraprodukte und Ultrapotenzen innerhalb unseres Mengenuniversums zu bauen, so stoßen wir sofort auf die Schwierigkeit, daß für einen Ultrafilter U die Äquivalenzklasse $[f]_U$ im allgemeinen eine echte Klasse wird. Wir behelfen uns daher mit dem Lokalisierungsprinzip, wie wir es in (4.14) angegeben haben.
Beginnend mit dem Universum $\mathbb{V}$ und einer Menge S definieren wir wie vorher die Äquivalenzrelation $f =_U g$ für $f, g \in {}^S\mathbb{V}$. Die Äquivalenzklassen jedoch lokalisieren wir zu

$$[f]_U := \{g \in {}^S\mathbb{V} \mid\; g =_U f \wedge (\forall h \in {}^S\mathbb{V})[h =_U f \;\Rightarrow\; \mathrm{rk}(g) \leq \mathrm{rk}(h)]\},$$

d.h.

$$[f]_U = \tau([f])$$

in der Terminologie von (4.14), wenn $[f]$ die alte Äquivalenzklasse bedeutet, die im allgemeinen eine echte Klasse ist. Schließlich definieren wir die Ultrapotenz

$$\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V}) = \{[f]_U \mid\; f \in {}^S\mathbb{V}\},$$

die mit $[f]_U \in_U [g]_U \;:\Leftrightarrow\; \{x \mid\; f(x) \in g(x)\} \in U$ wieder zu einer $\mathcal{L}(\in)$-Struktur wird, für die der Fundamentalsatz gilt. Damit sind $\mathbb{V}$ und $\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$ elementar äquivalent. Da $\mathbb{V}$ ein Modell des Fundierungsschemas ist, gilt dies ebenso in $\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$. Damit hat jede nicht leere Klasse, die sich durch eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel beschreiben läßt, ein $\in$-minimales Element. Das bedeutet aber **nicht**, daß $\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$ generell wohlfundiert ist. Wir erinnern daran, daß eine $\mathcal{L}(\in)$-Struktur $\mathfrak{A} = (A, E)$ wohlfundiert heißt, wenn jede Teilklasse $B \subseteq A$, die nicht leer ist, ein E-minimales Element besitzt und für jedes $a \in A$ die Klasse $\{b \in A \mid\; b \; E \; a\}$ eine Menge ist.

Die Tatsache, daß jede nicht leere Teilklasse von A ein E-minimales Element besitzt, ist äquivalent dazu, daß es keine Funktion

$$f\colon \omega \longrightarrow A$$

gibt mit

$$(\forall n \in \omega)[f(n+1)\ E\ f(n)].$$

Gibt es nämlich eine Funktion f, so ist ja die Klasse

$$\{f(n) \mid\ n \in \omega\}$$

nicht fundiert. Ist umgekehrt (A, E) nicht fundiert, so haben wir ein nicht leeres $B \subseteq A$ ohne E-minimales Element. Wir wählen ein $x \in B$ und definieren $f(0) = x$. Haben wir $f(0), \dots, f(n) \in B$ so gewählt, daß $f(n)\ E\ \dots\ E\ f(0)$ gilt, so gibt es ein $y \in B$ mit $y\ E\ f(n)$ da anderenfalls $f(n)$ in B E-minimal wäre. Wir definieren dann $f(n+1) := y$ und haben so durch Rekursion ein $f\colon \omega \longrightarrow A$ definiert, für das $(\forall n)[f(n+1)\ E\ f(n)]$ gilt.
Wir suchen nun nach Bedingungen dafür, daß die Ultrapotenz von $\mathbb{V}$ selbst wieder wohlfundiert ist.

5.2.4 Lemma *Die Ultrapotenz* $\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$ *ist genau dann fundiert, wenn* U *ein* σ*-vollständiger Ultrafilter ist.*

Beweis: Sei zunächst U σ-vollständig. Nehmen wir an, daß $\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$ nicht fundiert ist, so finden wir eine Folge $F_0, F_1, \dots, F_n, \dots$ in $\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$ mit

$$F_{n+1} \in_U F_n$$

für alle $n \in \omega$. D.h. wir haben

$$M_n := \{x \in S \mid\ F_{n+1}(x) \in F_n(x)\} \in U$$

für alle $n \in \omega$. Damit ist aber auch $\bigcap_{n \in \omega} M_n \in U$. Für ein $x \in \bigcap_{n \in \omega} M_n$ gilt dann aber

$$(\forall n \in \omega)[F_{n+1}(x) \in F_n(x)],$$

was der Wohlfundiertheit von $\mathbb{V}$ widerspricht.
Damit ist eine Richtung gezeigt. Für die Gegenrichtung nehmen wir an, daß U nicht σ-vollständig ist. Dann gibt es eine Partition

$$S = \bigcup_{n \in \omega} M_n$$

mit $M_n \notin U$ für alle $n \in \omega$. Definieren wir

$$N_k := \bigcup_{n \le k} M_n,$$

so gilt auch $N_k \notin U$ für alle $k \in \omega$. Bezeichnen wir mit $\overline{N}_k$ das Komplement von N_k in S, so haben wir $\overline{N}_k \in U$. Sei $G\colon S \longrightarrow \omega$ durch

$$G(x) := \min\{n \in \omega \mid x \in M_n\}$$

definiert. Wir definieren eine Familie von Funktionen $f_k\colon S \longrightarrow \mathbb{V}$ vermöge

$$f_k(x) := \begin{cases} G(x) - k & \text{falls } k < G(x) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \in \overline{N}_k$ gilt dann $G(x) > k$ und damit $f_{k+1}(x) < f_k(x)$. Also ist

$$U \ni \overline{N}_k \subseteq \{x \in S \mid f_{k+1}(x) \in f_k(x)\}$$

und es folgt $[f_{k+1}] \in_U [f_k]$. Damit ist $\text{Ult}_U(\mathbb{V})$ nicht fundiert. $\square$

Nun haben wir die Äquivalenzklassen $[f]$ in $\text{Ult}_U(\mathbb{V})$ ja gerade so eingeführt, daß es ein $\alpha \in \text{On}$ mit $[g] \in V_\alpha$ gibt. Für jedes $[f] \in_U [g]$ folgt $\text{rk}([f]) \le \alpha$, denn zu $f_0 =_U f$ und $g_0 =_U g$ kann man $f' =_U f_0$ durch

$$f'(x) := \begin{cases} f_0(x) & \text{falls } f_0(x) \in g_0(x) \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Nun gilt $\text{rk}(f') \le \text{rk}(g_0)$. Damit ist

$$\{[f] \mid [f] \in_U [g]\} \in V_{\alpha+1} \subseteq \mathbb{V}.$$

Gehen wir daher von einem σ-vollständigen Ultrafilter U aus, so ist $\text{Ult}_U(\mathbb{V})$ eine wohlfundierte $\mathcal{L}(\in)$-Struktur. Damit können wir deren MOSTOWSKI-Kollaps $\pi[\text{Ult}_U(\mathbb{V})]$ bilden und gelangen so zu einer transitiven $\mathcal{L}(\in)$-Struktur. Also haben wir

$$\mathbb{V} \xrightarrow{j_U} \text{Ult}_U(\mathbb{V}) \xrightarrow{\pi} \pi[\text{Ult}_U(\mathbb{V})], \tag{5.8}$$

wobei π der Isomorphismus auf den MOSTOWSKI-Kollaps ist, wie er in Abschnitt 3.3 eingeführt wurde. Wir wollen im folgenden in der Regel $\text{Ult}_U(\mathbb{V})$ mit seinem MOSTOWSKI-Kollaps identifizieren und daher $\text{Ult}_U(\mathbb{V})$ als transitive Klasse annehmen. Gemäß (5.8) haben wir dann eine elementare Einbettung von $\mathbb{V}$ in eine transitive Klasse vorliegen. Da dies eine im folgenden immer wiederkehrende Situation ist, wollen wir uns diese einmal genauer ansehen.
Sei daher

$$j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$$

eine elementare Einbettung in eine transitive Klasse M. Dabei wollen wir annehmen, daß j nicht trivial, d.h. nicht die Identität ist.
Für Δ-Formeln $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ haben wir

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,\ldots,x_n) &\Leftrightarrow M \models \varphi(j(x_1),\ldots,j(x_n)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(j(x_1),\ldots,j(x_n)),\end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei wir für die letzte Äquivalenz die Absolutheit von φ für alle transitiven Klassen ausgenutzt haben. Ist nun F eine Σ-Funktion (und besitzt daher einen Δ-Graphen), so ist

$$j(F(x_1,\ldots,x_n)) = F(j(x_1),\ldots,j(x_n)). \tag{5.10}$$

Ist nämlich $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ die Δ-Formel, die den Graphen von F beschreibt, so folgt

$$\begin{aligned}F(x_1,\ldots,x_n) = y &\Leftrightarrow \varphi(x_1,\ldots,x_n,y) \\ &\Leftrightarrow M \models \varphi(j(x_1),\ldots,j(x_n),j(y)) \\ &\Leftrightarrow \varphi(j(x_1),\ldots,j(x_n),j(y)) \\ &\Leftrightarrow F(j(x_1),\ldots,j(x_n)) = j(y).\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.6.11 ergeben sich jetzt viele elementare Identitäten, beispielsweise gelten $j(x \cap y) = j(x) \cap j(y)$, $j(x \setminus y) = j(x) \setminus j(y)$ und $j(\{x\}) = \{j(x)\}$.
Sei $\alpha \in \mathrm{On}$. Da $x \in \mathrm{On}$ eine Δ_0-Formel ist, folgt $j(\alpha) \in \mathrm{On}$. Wegen

$$\alpha < \beta \;\Leftrightarrow\; j(\alpha) < j(\beta)$$

bekommen wir

$$\alpha \leq j(\alpha) \in \mathrm{On} \cap M, \tag{5.11}$$

was wegen der Transitivität von M zu $\alpha \in M$ führt. Damit gilt

$$\mathrm{On} \subseteq M. \tag{5.12}$$

Es ist $j(0) = 0$ und

$$j(\alpha+1) = j(\alpha \cup \{\alpha\}) = j(\alpha) \cup \{j(\alpha)\} = j(\alpha)+1.$$

Da ω von der Δ_0-Formel

$$\mathrm{Lim}(x) \wedge (\forall y \in x)(\neg \mathrm{Lim}(y))$$

als Punkt definiert werden kann, folgt $j(\omega) = \omega$ mit (5.9). Also wissen wir

$$(\forall \alpha \leq \omega)[j(\alpha) = \alpha]. \tag{5.13}$$

5.2.5 Lemma *Sind die Mengen X_α uniform in α definierbar, gibt es also eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel φ mit*

$$x \in X_\alpha \;\Leftrightarrow\; \varphi(x, \alpha),$$

so gilt für alle α

$$x \in j(X_\alpha) \;\Leftrightarrow\; x \in M \wedge M \models x \in X_{j(\alpha)}.$$

Beweis: Sei α gegeben. Wir setzen $Z := X_\alpha = \{x \mid \varphi(x, \alpha)\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&(\forall x)(x \in Z \leftrightarrow \varphi(x, \alpha)) \\
&\Rightarrow\; M \models (\forall x)(x \in j(Z) \leftrightarrow \varphi(x, j(\alpha))) \\
&\Rightarrow\; (\forall x \in M)(x \in j(Z) \leftrightarrow x \in M \wedge M \models x \in X_{j(\alpha)}).
\end{aligned}$$

Wegen $j(Z) \subseteq M$ ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Interessanterweise legt jede elementare Einbettung ihre Bildklasse eindeutig fest. Wir zeigen:

5.2.6 Lemma *Ist $j \colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ eine elementare Einbettung in eine transitive Klasse, so ist $M = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} j(V_\alpha)$.*

Beweis: Sei $x \in M$ gegeben. Mit etwas Mühe sieht man ein, daß die V_α uniform in α definierbar sind, sagen wir durch $\psi(x, \alpha)$. Weil ZFC in M gilt, haben wir

$$M \models \gamma \leq \delta \rightarrow (\forall z)(\psi(z, \gamma) \rightarrow \psi(z, \delta)) \tag{i}$$

und $M \models (\exists \alpha)\psi(x, \alpha)$. Insbesondere existiert ein α mit $M \models \psi(x, \alpha)$. Aus (5.11) und (i) folgt $M \models \psi(x, j(\alpha))$, und Lemma 5.2.5 bestätigt $x \in V_{j(\alpha)}$. $\square$

Mit (4.12) und dem Σ-Rekursionssatz (Satz 4.8.2) sehen wir sofort, daß die Rangfunktion rk(x) eine Σ-Funktion ist. Damit ist speziell

$$j(\mathrm{rk}(x)) = \mathrm{rk}(j(x)). \tag{5.14}$$

Dies ist der Schlüssel im Beweis des folgenden Lemmas.

5.2.7 Lemma *Gilt $j(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha < \kappa$, so gilt auch $j(x) = x$ für alle $x \in V_\kappa$.*

Beweis: Wir führen Induktion nach rk(x). Es gilt

$$\begin{aligned}
y \in x \;&\Leftrightarrow\; M \models j(y) \in j(x) \\
&\Leftrightarrow\; j(y) \in j(x) \\
&\Leftrightarrow\; y \in j(x),
\end{aligned}$$

wobei wir in der Richtung von unten nach oben in der letzten Äquivalenz $\mathrm{rk}(j(x)) = j(\mathrm{rk}(x)) = \mathrm{rk}(x)$ benötigen, um die Induktionsvoraussetzung anwenden zu können. $\square$

Eine wichtige Folgerung dieses Lemmas formulieren wir als Korollar.

5.2.8 Korollar *Ist $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ eine nichttriviale elementare Einbettung, so ist die Menge $\{\alpha \in \mathrm{On} \mid j(\alpha) \neq \alpha\}$ nicht leer. Wir definieren*

$$\mathrm{cr}(j) := \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid j(\alpha) \neq \alpha\}$$

und nennen $\mathrm{cr}(j)$ *den* kritischen Punkt *der Einbettung j.*

Als eine Folgerung von Korollar 5.2.8 und Lemma 5.2.7 erhalten wir:

5.2.9 Lemma *Ist $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ eine elementare Einbettung in eine transitive Klasse M mit kritischem Punkt κ, so ist $j \restriction V_\kappa = \mathrm{id}_{V_\kappa}$.*

Wegen (5.11) gilt insbesondere

$$\mathrm{cr}(j) < j(\mathrm{cr}(j)). \tag{5.15}$$

Das zeigt, daß man sich nicht zu dem Trugschluß verleiten lassen sollte, daß $j(x) = \{j(y) \mid y \in x\}$ ist. Ist nämlich κ der kritische Punkt der Einbettung, so gilt

$$\{j(\alpha) \mid \alpha < \kappa\} = \{\alpha \mid \alpha < \kappa\} = \kappa < j(\kappa).$$

Als eine weitere Folgerung aus Lemma 5.2.9 erhalten wir

$$j(X) \cap V_\kappa = X \tag{5.16}$$

für alle $X \subseteq V_\kappa$, denn für $x \in V_\kappa$ gilt

$$\begin{aligned} x \in j(X) &\Leftrightarrow j(x) \in j(X) \\ &\Leftrightarrow x \in X. \end{aligned}$$

Wegen $V_\kappa \subseteq V_{j(\kappa)} = j(V_\kappa)$ erhalten wir mittels Aussonderung in M und der Δ-Definierbarkeit des Graphen der Rang-Funktion

$$\begin{aligned} V_\kappa &= \{x \in j(V_\kappa) \mid \mathrm{rk}(x) < \kappa\} \\ &= \{x \in j(V_\kappa) \mid M \models \mathrm{rk}(x) < \kappa\} \in M. \end{aligned}$$

Dies können wir nutzen, um

$$V_{\kappa+1} \subseteq M \tag{5.17}$$

zu zeigen. Ist nämlich $x \in V_{\kappa+1}$, so erhalten wir $x = j(x) \cap V_\kappa \in M$ durch (5.16). Jetzt bekommen wir auch

$$(\forall X \subseteq V_\kappa)[\mathrm{Pow}^M(X) = \mathrm{Pow}(X)], \tag{5.18}$$

denn wegen (5.17) gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Pow}^M(X) &= \{y\in M \mid M \models y \subseteq X\}\\ &= \{y\in M \mid y \subseteq X\}\\ &= \mathrm{Pow}(X) \cap M = \mathrm{Pow}\, X.\end{aligned}$$

Durch Induktion nach α erhalten wir aus (5.18) dann

$$(\forall \alpha \leq \kappa + 1)[V_\alpha^M = V_\alpha], \tag{5.19}$$

denn beispielsweise gilt für jede Limeszahl $\alpha \leq \kappa$

$$\begin{aligned}x \in V_\alpha^M &\Leftrightarrow M \models (\exists \beta < \alpha)(x \in V_\beta)\\ &\Leftrightarrow (\exists \beta < \alpha)(M \models x \in V_\beta)\\ &\Leftrightarrow (\exists \beta < \alpha)(x \in V_\beta^M),\end{aligned}$$

was per Induktionsvoraussetzung zu $x \in V_\alpha$ äquivalent ist.
Für $\nu < \kappa$ gilt

$$j(\bigcap_{\alpha < \nu} X_\alpha) = \bigcap_{\alpha < \nu} j(X_\alpha). \tag{5.20}$$

Dazu setzen wir $f := \{(\alpha, X_\alpha) \mid \alpha < \nu\}$. Wegen $\mathrm{Fkt}(f)$ gilt auch $\mathrm{Fkt}(g)$ für $g := j(f)$. Ist $\alpha < \nu$ beliebig vorgegeben, so haben wir für $Y := X_\alpha$ offensichtlich $(\exists p \in f)(P_1(p) = \alpha \wedge P_2(p) = Y)$, und dies führt direkt zu $(\exists p \in g)(P_1(p) = j(\alpha) \wedge P_2(p) = j(Y))$. Mit $j(\alpha) = \alpha$ folgt

$$g(\alpha) = j(X_\alpha). \tag{i}$$

Für $Z := \bigcap_{\alpha < \nu} X_\alpha$ können wir von

$$(\forall x)(x \in Z \leftrightarrow (\forall \alpha < \nu)(x \in f(\alpha)))$$

wegen $j(\nu) = \nu$ zu

$$(\forall x \in M)(x \in j(Z) \leftrightarrow (\forall \alpha < \nu)(x \in g(\alpha)))$$

gelangen, was wegen (i) die Behauptung ergibt. $\square$

Sei nun U ein σ-vollständiger Ultrafilter auf einer Menge S. Wir betrachten die elementare Einbettung

$$j\colon U \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(\mathbb{V}),$$

wobei wie vereinbart $\mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$ der MOSTOWSKI-Kollaps ist, d.h. wir haben

$$j(x) = \pi([c_x]).$$

Ist nun U ein Hauptfilter, so gibt es ein $u \in S$ mit

$$X \in U \ \Leftrightarrow\ u \in X.$$

Wir zeigen durch Induktion, daß dann

$$(\forall \alpha \in \mathrm{On})[j(\alpha) = \alpha] \tag{5.21}$$

gilt. Es ist ja

$$j(\alpha) = \pi([c_\alpha]) = \{\pi([f])|\ [f] \in_U [c_\alpha]\} = \{\pi([f])|\ f(u) \in \alpha\}. \tag{i}$$

Da $f(u)$ dann eine Ordinalzahl $\gamma < \alpha$ ist, erhalten wir aus (i) zusammen mit der Induktionsvoraussetzung

$$j(\alpha) = \{\pi([c_\gamma])|\ \gamma < \alpha\} = \{\gamma|\ \gamma < \alpha\} = \alpha. \qquad \square$$

Aus (5.21) und Lemma 5.2.7 folgt dann, daß die kanonische Einbettung für Hauptfilter trivial ist. Sei nun κ eine meßbare Kardinalzahl. Wir haben dann einen κ-vollständigen Ultrafilter U auf κ, der kein Hauptfilter ist. Die kanonische Einbettung

$$j\colon \mathbb{V} \longrightarrow \mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$$

ist also nicht von vornherein trivial. Wir zeigen zunächst

$$j \restriction \kappa = \mathrm{id}_\kappa. \tag{5.22}$$

Zu $\alpha < \kappa$ und $[f] < [c_\alpha]$ gibt es ein $\gamma < \alpha$ mit $\{x|\ f(x) = \gamma\} \in U$, da wir sonst im Widerspruch zu Lemma 5.1.5 eine Partition von κ in $\alpha < \kappa$ viele Teilmengen erhalten würden, die alle nicht in U liegen. Durch Induktion nach $\alpha < \kappa$ zeigen wir

$$j(\alpha) = \alpha. \tag{i}$$

Aus der obigen Feststellung erhalten wir zusammen mit der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} j(\alpha) = \pi([c_\alpha]) &= \{\pi([f])|\ [f] < [c_\alpha]\} = \{\pi([c_\gamma])|\ \gamma < \alpha\} \\ &= \{j(\gamma)|\ \gamma < \alpha\} = \alpha. \end{aligned} \qquad \square$$

Andererseits gilt

$$\{\alpha|\ \mathrm{id}_\kappa(\alpha) < \kappa\} = \kappa \in U,$$

woraus sich

$$[\mathrm{id}_\kappa] < [c_\kappa]$$

ergibt. Für $\alpha < \kappa$ ist

$$\{\zeta < \kappa \mid \alpha < \mathrm{id}_\kappa(\zeta)\} \in U,$$

denn das Komplement dieser Menge hat eine Kardinalität $< \kappa$ und kann deshalb nicht zu U gehören. Also haben wir für alle $\alpha < \kappa$

$$[c_\alpha] < [\mathrm{id}_\kappa] < [c_\kappa],$$

woraus sich sofort

$$\alpha = j(\alpha) = \pi([c_\alpha]) < \pi([\mathrm{id}_\kappa]) < \pi([c_\kappa]) = j(\kappa)$$

ergibt. Damit ist

$$\kappa \leq \pi([\mathrm{id}_\kappa]) < j(\kappa). \tag{5.23}$$

Aus (5.23) und (5.22) ergibt sich, daß j eine nichttriviale Einbettung mit kritischem Punkt κ ist.
Ist andererseits $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ eine nichttriviale Einbettung in eine transitive Klasse M mit kritischem Punkt κ, so definieren wir

$$U := \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}.$$

Wir wollen zeigen, daß U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf κ ist, der kein Hauptfilter ist.
Wegen $j(0) = 0$ und $\kappa < j(\kappa)$ haben wir $\emptyset \notin U$ und $\kappa \in U$.
Sind $X, Y \in U$, so gilt $\kappa \in j(X)$ und $\kappa \in j(Y)$. Nach (5.10) gilt aber $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ und es folgt $\kappa \in j(X \cap Y)$.
Ist $X \in U$ mit $X \subseteq Y$, so ergibt sich mit (5.9) $\kappa \in j(X) \subseteq j(Y)$ und daher $Y \in U$.
Somit liegt ein Filter vor. Es gilt nun für $X \subseteq \kappa$

$$\begin{aligned} X \notin U \ &\Leftrightarrow\ \kappa \notin j(X) \ \Leftrightarrow\ \kappa \in j(\kappa) \setminus j(X) \\ &\Leftrightarrow\ \kappa \in j(\kappa \setminus X) \ \Leftrightarrow\ \kappa \setminus X \in U \end{aligned}$$

– wobei wir wieder (5.10) benutzt haben – und U ist ein Ultrafilter.
U ist aber auch kein Hauptfilter. Für jedes $\alpha < \kappa$ haben wir ja

$$j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$$

und damit niemals $\kappa \in j(\{\alpha\})$.
Es bleibt zu zeigen, daß U κ-vollständig ist. Sei also $\nu < \kappa$ und

$$\{X_\alpha \mid \alpha < \nu\} \subseteq U.$$

Wir haben dann $(\forall \alpha < \kappa)(\kappa \in j(X_\alpha))$, woraus mit (5.20)

$$\kappa \in \bigcap_{\alpha < \nu} j(X_\alpha) = j(\bigcap_{\alpha < \nu} X_\alpha)$$

folgt. Damit ist $\bigcap_{\alpha<\nu} X_\alpha \in U$. Also ist U κ-vollständig. $\square$

Wir haben damit den folgenden Satz bewiesen.

5.2.10 Satz *Eine Kardinalzahl κ ist genau dann meßbar, wenn es eine elementare Einbettung $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ in eine transitive Klasse M gibt, deren kritischer Punkt κ ist.*

Bevor wir meßbare Kardinalzahlen weiter untersuchen, wollen wir festhalten, daß es in der konstruktiblen Welt keine meßbaren Kardinalzahlen geben kann.

5.2.11 Satz (Satz von Scott**)** *Gilt $\mathbb{V} = L$, so existiert keine meßbare Kardinalzahl.*

Beweis: Zuerst bemerken wir, daß die Eigenschaft, eine meßbare Kardinalzahl zu sein, durch eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel beschrieben werden kann. Für $\kappa \in \mathrm{Card}$ ist „κ ist meßbar" nämlich äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
(\exists U)[&U \subseteq \mathrm{Pow}(\kappa) \wedge \emptyset \notin U \wedge \kappa \in U\\
&\wedge (\forall a \in U)(\forall b \in U)[a \cap b \in U]\\
&\wedge (\forall a \in U)(\forall b \subseteq \kappa)[a \subseteq b \;\Rightarrow\; b \in U]\\
&\wedge (\forall x \in \kappa)(\exists u \in U)[x \notin u]\\
&\wedge (\forall a \subseteq \kappa)[a \in U \;\Leftrightarrow\; \kappa \setminus a \notin U]\\
&\wedge (\forall \alpha \in \kappa)(\forall F)[\mathrm{Fkt}(F) \wedge \mathrm{dom}(F) = \alpha \wedge \mathrm{rng}(F) \subseteq U\\
&\qquad\qquad \Rightarrow \textstyle\bigcap_{\gamma<\alpha} F(\gamma) \in U]].
\end{aligned}
$$

Dann können wir aber auch durch

$$„\kappa \text{ ist meßbar}" \;\wedge (\forall \nu \in \kappa)[\; „\nu \text{ ist nicht meßbar}" \;]$$

ausdrücken, daß κ die kleinste meßbare Kardinalzahl ist.

Um einen Widerspruch zu erlangen nehmen wir an, daß κ die kleinste meßbare Kardinalzahl ist. Nach Satz 5.2.10 haben wir dann eine elementare Einbettung

$$j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$$

in eine transitive Klasse $M \subseteq V$, die laut (5.12) alle Ordinalzahlen enthält. Da M und $\mathbb{V}$ elementar äquivalent sind, ist M ein Modell von ZFC und damit gilt nach Satz 4.8.5

$$L \subseteq M \subseteq \mathbb{V} = L. \tag{i}$$

Da κ die kleinste meßbare Kardinalzahl ist und sich dies durch eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel mit der einzigen Konstanten κ beschreiben läßt, gilt

$$M \models \; „j(\kappa) \text{ ist kleinste meßbare Kardinalzahl}".$$

Zusammen mit (i) folgt daher

$$\mathbb{V} \models \text{ „}j(\kappa)\text{ ist kleinste meßbare Kardinalzahl“.}$$

Das aber steht im Widerspruch zu $\kappa < j(\kappa)$. □

Kehren wir zurück zu Satz 5.2.10. Die Konstruktion des Ultrafilters zur elementaren Einbettung $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ gibt Anlaß zu folgender Beobachtung.

5.2.12 Satz *Ist* $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ *eine elementare Einbettung mit kritischem Punkt* κ *und* $U := \{X{\subseteq}\kappa \mid \kappa \in j(X)\}$ *sowie* $\mathrm{Ult} := \mathrm{Ult}_U(\mathbb{V})$*, so gibt es eine elementare Abbildung* $k\colon \mathrm{Ult} \longrightarrow M$*, die das Diagramm in Abbildung 5.2.1 kommutativ macht.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_U"'] & M \\ \mathrm{Ult} \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Abbildung 5.2.1: Diagramm zu Satz 5.2.12

Beweis: Die Elemente von Ult haben die Gestalt $[f]$ und wir definieren

$$k([f]) := (j(f))(\kappa). \tag{i}$$

Als erstes müssen wir zeigen, daß die Definition in (i) unabhängig vom Repräsentanten ist. Sei also $[f] = [g]$. Dann ist

$$X := \{\alpha{\in}\kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$$

und damit

$$\kappa \in j(X) = \{\alpha{\in} j(\kappa) \mid (jf)(\alpha) = (jg)(\alpha)\},$$

d.h. $(jf)(\kappa) = (jg)(\kappa)$.
Als nächstes haben wir zu zeigen, daß k elementar ist. Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine $\mathcal{L}(\in)$-Formel ohne weitere freie Variablen und

$$\mathrm{Ult} \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]).$$

Dann ist

$$X := \{\alpha{\in}\kappa \mid \varphi(f_1(\alpha), \ldots, f_n(\alpha))\} \in U,$$

d.h.

$$\kappa \in j(X) = \{\alpha \in j(\kappa) \mid M \models \varphi((jf_1)(\alpha), \ldots, (jf_n)(\alpha))\}. \tag{ii}$$

Wegen $k([f_i]) = (jf_i)(\kappa)$ folgt aus (ii)

$$M \models \varphi(k([f_1]), \ldots, k([f_n])).$$

Damit ist k elementar.
Zuletzt haben wir

$$j(x) = k(j_U(x)) = k([c_x])$$

zu zeigen. Es ist aber

$$k([c_x]) := (jc_x)(\kappa) = j(x),$$

und alles ist gezeigt. □

5.3 Weitere Eigenschaften meßbarer Kardinalzahlen

Bislang haben wir eingesehen, daß meßbare Kardinalzahlen zumindest unerreichbar sind. In diesem Abschnitt wollen wir einsehen, daß sie sogar noch deutlich größer sind. Als Vorbereitung zeigen wir

5.3.1 Lemma *Ist $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ eine elementare Einbettung in eine transitive Klasse M mit kritischem Punkt κ und $X \subseteq \kappa$ club in κ, so gilt $\kappa \in j(X)$.*

Beweis: Wir beobachten zuerst, daß wegen $j \restriction \kappa = \mathrm{id}_\kappa$ für jedes $X \subseteq \kappa$, das club in κ ist, schon

$$j(X) \cap \kappa = X$$

ist. Da X club in κ ist, gilt

$$\begin{aligned} M \models (\forall f)[&\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) < j(\kappa) \wedge \mathrm{rng}(f) \subseteq j(X) \\ &\Rightarrow \sup(\mathrm{rng}(f)) \in j(X)] \end{aligned}$$

Wählen wir f als id_κ, so erhalten wir $\kappa = \sup X \in j(X)$. □

Als unmittelbare Folgerung erhalten wir aus Lemma 5.3.1:

5.3.2 Satz *Jede meßbare Kardinalzahl ist eine* MAHLO*zahl.*

Beweis: Sei κ eine meßbare Kardinalzahl und $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ eine elementare Einbettung in eine transitive Klasse M mit kritischem Punkt κ. Da wir κ schon als unerreichbar nachgewiesen haben, haben wir nur zu zeigen, daß die Menge $C := \mathbb{R} \cap \kappa$ der regulären Kardinalzahlen unterhalb von κ stationär in κ ist. Dazu beobachten wir zuerst, daß

$$\begin{aligned}\sigma \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; & \sigma \in \mathrm{Card} \wedge \omega \leq \sigma \\ & \wedge (\forall f)[\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) < \sigma \wedge \mathrm{rng}(f) \subseteq \sigma \\ & \quad \Rightarrow \sup(\mathrm{rng}(f)) < \sigma]\end{aligned}$$

gilt; $\mathbb{R}$ also durch eine Π-Formel beschrieben wird. Damit ist $\mathbb{R}$ abwärts persistent. Wegen $\kappa \in \mathbb{R}$ gilt daher auch

$$M \models \kappa \in \mathbb{R},$$

und wegen

$$j(C) = \{x \in M \mid M \models x \in \mathbb{R} \wedge x < j(\kappa)\}$$

somit auch $\kappa \in j(C)$. Ist nun $X \subseteq \kappa$ club in κ, so gilt nach Lemma 5.3.1 aber auch $\kappa \in j(X)$. Also haben wir

$$\kappa \in j(X) \cap j(C) = j(X \cap C).$$

Also ist $j(X \cap C) \neq \emptyset$ und daher gilt auch $M \models j(X \cap C) \neq \emptyset$. Damit folgt $X \cap C \neq \emptyset$ und C ist stationär in κ. □

Meßbare Kardinalzahlen sind allerdings noch viel größer als die erste MAHLOzahl. Um dies besser beschreiben zu können führen wir die MAHLO*ableitung* $M(X)$ einer Klasse X ein als

$$M(X) := \{\alpha \mid X \cap \alpha \text{ ist stationär in } \alpha\}.$$

Wir definieren nun eine Hierarchie M_α durch

$$\begin{aligned}& M_0 := I, \text{ die Klasse der unerreichbaren Kardinalzahlen} \\ & M_{\alpha+1} := M(M_\alpha) \\ & M_\lambda := \textstyle\bigcap_{\xi < \lambda} M_\xi \text{ für } \lambda \in \mathrm{Lim}.\end{aligned}$$

Dann ist M_1 die Klasse der MAHLOzahlen. Die Zahlen in M_2 bezeichnet man oft als *hyper*-MAHLO*zahlen*, die in M_3 als *hyper-hyper*-MAHLO-*zahlen* und so fort. Um eine Vorstellung von der Größe dieser Kardinalzahlen zu erhalten, muß man sich klarmachen, daß für jedes $\kappa \in M_{\alpha+1}$ stets $|\kappa \cap M_\alpha| = \kappa$ gilt. Es gibt daher κ-viele unerreichbare Kardinalzahlen unterhalb jeder MAHLOzahl κ, κ-viele MAHLOzahlen unterhalb jeder hyper-MAHLOzahl κ und so fort. Meßbare Kardinalzahlen sind so groß, daß sie durch diese Hierarchie nicht beschrieben werden. Es gilt nämlich:

5.3.3 Satz *Ist κ meßbar, so gilt $\kappa \in M_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$.*

Beweis: Wir zeigen durch Induktion nach α, daß für $\alpha < \kappa$ immer

$$\kappa \in M_\alpha \cap j(M_\alpha)$$

gilt. $\kappa \in M_0$ (und auch $\kappa \in M_1$) haben wir bereits gezeigt. Wir haben auch bereits gezeigt, daß jede reguläre Kardinalzahl auch in M regulär ist. Darüber hinaus überlegt man sich, daß die Aussage $2^\sigma < \kappa$ durch eine Π-Formel beschrieben wird. Deren Negation kann man nämlich durch die Σ-Formel
„es gibt eine injektive Funktion f mit Definitionsbereich κ so, daß für alle $\xi < \kappa$ immer $f(\xi) \subseteq \sigma$ ist“
beschreiben. Damit ist jede unerreichbare Kardinalzahl auch in M unerreichbar und es folgt $\kappa \in j(M_0)$.
Für $\alpha \in \mathrm{Lim}$ folgt $\kappa \in M_\alpha \cap j(M_\alpha)$ sofort aus der Induktionsvoraussetzung und der Tatsache, daß für $\alpha < \kappa$ stets $j(\bigcap_{\xi<\alpha} M_\xi) = \bigcap_{\xi<\alpha} j(M_\xi)$ ist.
Nur im Nachfolgerfall ist also tatsächlich etwas zu zeigen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt aber immer $\kappa \in M_\alpha \cap j(M_\alpha)$ und damit auch $M \models \kappa \in j(M_\alpha)$. Nach Lemma 5.3.1 gilt aber $\kappa \in j(X)$ für jedes X, das club in κ ist. Also haben wir

$$M \models \kappa \in j(X) \cap j(M_\alpha),$$

d.h.

$$M \models j(X \cap M_\alpha) \neq \emptyset,$$

woraus wir dann $X \cap M_\alpha \neq \emptyset$ erhalten. Damit ist $M_\alpha \cap \kappa$ stationär in κ und somit $\kappa \in M_{\alpha+1}$. Es bleibt

$$\kappa \in j(M_{\alpha+1})$$

zu zeigen. Dazu sei $\varphi(x, \alpha)$ eine Formel, die $x \in M_\alpha$ besagt. Ist nun X club in κ, so ist dies wegen (5.19) äquivalent zu

$$X \in M \wedge M \models X \text{ ist club in } \kappa.$$

Wegen $\kappa \in M_{\alpha+1}$ und

$$j(M_\alpha) \cap \kappa = M_\alpha \cap \kappa$$

folgt $j(M_\alpha) \cap X \neq \emptyset$. Also gibt es laut Lemma 5.2.5 ein $\gamma < \kappa$ mit $\gamma \in X$ und $M \models \varphi(\gamma, j(\alpha))$. Aus $X \in M$ erhalten wir daraufhin $M \models M_{j(\alpha)} \cap X \neq \emptyset$. Damit haben wir

$$M \models (\forall X)(X \text{ club in } \kappa \;\Rightarrow\; M_{j(\alpha)} \cap X \neq \emptyset),$$

also $M \models \varphi(\kappa, j(\alpha) + 1)$, bewiesen. Wegen $j(\alpha) + 1 = j(\alpha + 1)$ und Lemma 5.2.5 bedeutet das gerade $\kappa \in j(M_{\alpha+1})$. $\square$

Wir haben eingesehen, daß die Existenz einer nichttrivialen elementaren Einbettung $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ die Existenz großer Kardinalzahlen nach sich zieht. Man kann einsehen, daß diese Kardinalzahlen um so größer werden, je mehr Abschlußeigenschaften von M gefordert werden. Daß sich M nicht beliebig vergrößern läßt, zeigt der folgende Satz von KUNEN, dessen erstmaliger Beweis eine gewisse Sensation darstellte.

5.3.4 Satz (KUNEN) *Ist $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow M$ eine nichttriviale elementare Einbettung, so ist $M \neq \mathbb{V}$.*

Der Schlüssel ist merkwürdigerweise ein völlig technisch anmutendes kombinatorisches Lemma.

5.3.5 Lemma *Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $2^\lambda = \lambda^{\aleph_0}$. Dann gibt es eine Funktion $F\colon {}^{\omega}\lambda \longrightarrow \lambda$ so, daß*

$$(\forall X)(\forall\gamma<\lambda)[X \subseteq \lambda \wedge |X| = \lambda \Rightarrow (\exists s \in {}^{\omega}X)F(s) = \gamma]$$

gilt.

Wir beweisen zunächst das Lemma. Es gibt höchstens 2^λ viele Paare (X,γ) mit $|X| = \lambda$, $X \subseteq \lambda$ und $\gamma < \lambda$. Sei daher $\{(X_\xi,\gamma_\xi) \mid \xi < 2^\lambda\}$ eine Aufzählung dieser Paare. Durch Rekursion nach α definieren wir eine Abbildung

$$s\colon 2^\lambda \longrightarrow {}^{\omega}\lambda.$$

Wegen

$$|\alpha| \leq \alpha < 2^\lambda = \lambda^{\aleph_0} \leq |{}^{\omega}X_\alpha|,$$

können wir $s(\alpha) \in {}^{\omega}X_\alpha$ so wählen, daß

$$(\forall\beta<\alpha)[s(\beta) \neq s(\alpha)]$$

gilt. Nun definieren wir $F\colon {}^{\omega}\lambda \longrightarrow \lambda$ durch

$$F(s) := \begin{cases} \gamma_\alpha & \text{falls } s = s(\alpha) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist nun $X \subseteq \lambda$ mit $|X| = \lambda$ und $\gamma < \lambda$, so gibt es ein $\alpha < 2^\lambda$ so, daß $(X,\gamma) = (X_\alpha,\gamma_\alpha)$ ist. Dann ist aber $s(\alpha) \in {}^{\omega}X_\alpha$ und $F(s(\alpha)) = \gamma_\alpha$. Damit hat F die geforderte Eigenschaft. $\square$

Wir beweisen nun den Satz von KUNEN und gehen von einer nichttrivialen elementaren Einbettung $j\colon \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ mit kritischem Punkt κ aus. Wir definieren eine Folge durch $\kappa_0 := \kappa$ und $\kappa_{n+1} := j(\kappa_n)$. Da $\kappa < j(\kappa)$ und j elementar ist, erhalten wir $\kappa_n < \kappa_{n+1}$ für alle $n \in \omega$. Wir definieren

$$\lambda := \sup_{n\in\omega} \kappa_n.$$

Dann gilt

$$j(\lambda) = j(\sup_{n\in\omega} \kappa_n) = \sup_{n\in\omega} j(\kappa_n) = \sup_{n\in\omega} \kappa_{n+1} = \lambda.$$

Weil alle κ_n meßbar sind, ist λ eine starke Limeskardinalzahl. Die Kontinuumsfunktion wird nicht unterhalb λ schließlich konstant, denn zu $\eta < \lambda$ finden wir ein κ_n mit $\eta < \kappa_n$, womit $2^\eta < \kappa_n < 2^{\kappa_n}$ gilt. Wegen $\mathrm{cf}(\lambda) = \omega$ gilt $\lambda \notin \mathbb{R}$. Nach Satz 3.10.6 gilt daher

$$2^\lambda = \gimel(2^{<\lambda}) = \gimel(\lambda) = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^{\aleph_0}.$$

Damit können wir Lemma 5.3.5 anwenden und erhalten eine Funktion

$$F\colon {}^\omega\lambda \longrightarrow \lambda$$

mit $F[{}^\omega X] = \lambda$ für jedes $X \subseteq \lambda$ mit $|X| = \lambda$. Wegen $j(\omega) = \omega$ und $j(\lambda) = \lambda$ gilt dann

$$jF\colon {}^\omega\lambda \longrightarrow \lambda \tag{i}$$

und

$$(\forall X)(\forall\gamma<\lambda)[X \subseteq \lambda \wedge |X| = \lambda \Rightarrow (\exists s\in{}^\omega X)((jF)(s) = \gamma)].$$

Sei $G := j[\lambda] = \{j(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$. Wegen $G \subseteq \lambda$ und $|G| = \lambda$ folgt daher

$$(jF)[{}^\omega G] = \lambda. \tag{ii}$$

Damit gibt es ein $s \in {}^\omega G$ mit $(jF)(s) = \kappa$. Wegen $s\colon\omega \longrightarrow j[\lambda]$ finden wir dann ein $t\colon\omega \longrightarrow \lambda$ mit $s(n) = j(t(n))$ für alle $n \in \omega$. Wegen $j(t(n)) = (jt)(jn) = (jt)(n)$ für alle $n \in \omega$ ist dann $j(t) = s$. Wir erhalten daher

$$\kappa = (jF)(s) = (jF)(jt) = j(F(t)) = j(\alpha), \tag{iii}$$

wenn wir $\alpha := F(t) < \lambda$ setzen. Dies ist aber unmöglich, da für $\beta < \kappa$ stets $j(\beta) = \beta$ und für $\kappa \leq \beta$ immer $\kappa < j(\kappa) \leq j(\beta)$ ist. □

Es sei hier nur am Rande erwähnt, daß der Satz von SCOTT (Satz 5.2.11) sofort aus dem Satz von KUNEN folgt.

Literaturverzeichnis

[1] J. BARWISE, **Admissible sets and structures**, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1975.

[2] K. J. DEVLIN, **Constructibility**, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Heidelberg/New York, 1984.

[3] H. D. EBBINGHAUS, **Einführung in die Mengenlehre**, 2. Aufl., Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1979.

[4] T. J. JECH, **Set theory**, Academic Press, New York, 1978.

[5] A. LÉVY, **Basic set theory**, Springer-Verlag, Heidelberg/New York, 1979.

[6] W. POHLERS UND T. GLASS, *An introduction to mathematical logic*. Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, Münster, 1992.

Index

Symbole

Stichworte