Dominik Thomas Adolf

Singularisieren von Nachfolger-Kardinalzahlen unter optimalen Konsistenzstärkevoraussetzungen

Leicht korrigierte Version einer Arbeit, die
am 27.08.2008 am Institut für
mathematische Logik und Grundlagenforschung
am FB 10-Mathematik und Informatik
als Diplomarbeit eingereicht wurde

Vorwort

Sei μ irgendeine Kardinalzahl. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine partielle Ordnung zu finden, die die Kofinalität von μ^+ verändern kann, ohne die Kardinalitäten und Kofinalitäten der Zahlen darunter zu verändern. Es gibt in der Tat so ein Forcing schon in L, das Namba-Forcing, daß dies für $\mu = \aleph_1$ tut (siehe [Jec06] Seite 561 ff.). Wir wollen dieses Ergebnis nun auf $\mu \geq \aleph_2$ ausweiten. Wir werden im Laufe der Arbeit für jedes $\mu \geq \aleph_2$ zeigen, daß es zumindest konsistent ist, daß ein entsprechendes Forcing für μ existiert. Wir werden dies unter gewissen Annahmen an das Universum von dem wir aus starten tun, aber nach Ergebnissen, auf die wir verweisen wollen, werden diese Annahmen sich als notwendig herausstellen.

Kurz zum Aufbau dieser Arbeit. In Kapitel 0 werden wir nur kurz die für uns wichtigen Fakten, über die Annahmen, die wir treffen werden zusammentragen. Im ersten Kapitel werden wir die Ergebnisse vorstellen, die wir dann über den Rest hinweg beweisen werden. Im zweiten bis vierten Kapitel werden wir eine Methode vorstellen, um die Kofinalitäten gewisser großer Zahlen zu verändern. Das zweite Kapitel dient als dabei als so eine Art Prototyp, während wir im dritten Kapitel eine Methode einführen um gewisse partielle Ordnungen, die wir benötigen werden, zu iterieren, um dann im vierten Kapitel die Methode mit Ideen aus dem zweiten und dritten Kapitel formulieren zu können. Im fünften Kapitel werden wir dann noch einmal einen anderen Weg einschlagen, und eine ganz anderes, aber hochinteressantes Forcing vorzustellen, dessen Stärke wir ausnutzen werden, um den stärksten Fall zu knacken.

Dies ist natürlich auch die Stelle, an der Ich den Leuten, die mich bei dieser Arbeit in irgendeiner Weise unterstützt haben. Ich danke meinen Dozenten Prof. Dr. Ralf Schindler, zum einen natürlich weil er mich auf dieses Thema aufmerksam gemacht hat, und auch weil er mir bei meinen Fragen zu der Theorie der inneren Modelle zur Verfügung stand. Ich danke ferner Philipp Doebler, Philipp Schlicht und allen voran Dr. Gunter Fuchs aus dem Stationary-Tower-Seminar, das am WS 07/08 an der WWU Münster stattfand. Die Aufzeichnugnen aus diesen Seminar und die Antworten die ich auf meine Fragen zu diesen Thema erhielt, waren sehr wertvoll. Ich danke Gunter Fuchs auch, daß er mich auf das Programm xfig aufmerksam gemacht hat, ohne welches diese Arbeit, nicht einmal die paar Grafiken hätte. Erwähnen sollte ich vielleicht auch noch Malte Kließ, mit dem immer gut über die LaTeX-nischen Seiten einer Arbeit reden konnte.

Inhaltsverzeichnis

0 Grundlagen **1**

1 Singularisieren von Nachfolgerkardinalzahlen **6**

2 Prikry-Forcing und der erste Hauptsatz **10**
2.1 Das Prikry-Forcing 10
2.2 Beweis des ersten Hauptsatzes 18

3 Iterien von Prikry-Typ-Forcings **20**
3.1 Iteriertes Forcing 20
3.2 Gitik-Iterationen 26

4 Erzwingen überabzählbarer Kofinalitäten mit iterierten Prikry-Forcing **39**
4.1 Exposition 39
4.2 Der Beweis 47
4.3 Beweis des zweiten Hauptsatzes 60

5 Der stationäre Turm **61**
5.1 Verallgemeinerte Stationarität 61
5.2 Die Stationärer-Turm-Einbettung 68
5.3 Semiproperness 74
5.4 Fundiertheit 79
5.5 Beweis des dritten Hauptsatzes 85

Glossar **86**

Literaturverzeichnis **87**

0 Grundlagen

Wir werden in folgenden die Existenz gewisser großer Kardinalzahlen fordern, die (wie wir auch noch begründen wollen) essentiell für diese Arbeit sind. Damit keine Mißverständnisse auftreten, werden wir im folgenden darlegen, was genau wir zum Beispiel unter einer meßbaren Kardinalzahl verstehen, und kurz zusammenfassen, was wir als elementares Grundwissen erachten. Wo sich Beweise in der Standardliteratur finden, werden wir auf einen Beweis verzichten, da hier einfach nicht der Platz ist um lang und breit alles zu erklären. Es lohnt sich auf jeden Fall für denjenigen, der noch nicht mit Meßbaren gearbeitet hat, sich diese Beweise anzusehen, um ein Verständnis dafür zu entwickeln wie man die Stärke meßbarer Kardinalzahlen ausnutzt.

Im Allgemeinen werden wir uns viel mit elementaren Einbettungen des Universums beschäftigen. Um die Arbeit verstehen zu können wird es unumgänglich sein, das wichtigste über Ultrapotenzen, sowohl die üblichen „Internen“, bei denen der Ultrafilter im Modells selbst liegt (siehe dazu etwa [Jec06] Seiten 158 ff., oder [Lar04] Seiten 1 ff.) als auch die „Externen“, bei denen der Ultrafilter zwar Mengen im Modell mißt aber nicht selbst im Modell liegen muß (siehe dazu etwa [Jec06] Seiten 323 ff. oder [Lar04] Seiten 36 ff.).

Auch werden sogenannte Extender erwähnt werden, die Ultrafilter verallgemeinern. Die Details werden für das, was wir später machen werden allerdings nicht so wichtig sein. (Für weitere Informationen siehe etwa [Jec06] Seiten 382 ff. oder [Lar04] Seiten 25 ff. oder [Kan05] Seiten 352 ff.)

Meßbarkeit

Definition 0.0.1: Eine überabzahlbare Kardinalzahl κ heißt meßbar, genau dann wenn es einen normalen $<\kappa$-abgeschlossenenen nicht-trivialen Ultrafilter auf κ gibt. Der Einfachheit halber nennen wir solch einen Filter auch ein normales Maß.

Bemerkung: Dies ist eigentlich nicht, die als kanonisch angesehene Definition einer meßbaren Kardinalzahl, sie ist allerdings zu dieser äquivalent. (siehe dazu [Jec06] Definition 10.3 auf Seite 127 und [Jec06] Theorem 10.20 auf Seite 134).

Sei κ eine meßbare Kardinalzahl, U ein $<\kappa$-abgeschlossenener nicht-trivialer Ultrafilter auf κ. Dann ist nach [Jec06] Lemma 17.2 auf Seite 286 $\mathrm{Ult}(V;U)$ fundiert und wie man sich überlegt ist die Ordnung auf $\mathrm{Ult}(V;U)$ mengenähnlich, und im Folgenden werden wir $\mathrm{Ult}(V;U)$ immer mit seinem transitiven Kollaps identifizieren, und schreiben üblicherweise $j : V \to \mathrm{Ult}(V;U)$ für die kanonische Einbettung.

Satz 0.0.2: *Sei κ eine meßbare Kardinalzahl, U ein $<\kappa$-abgeschlossenener nicht-trivialer Ultrafilter auf κ. Sei*

$$j : V \longrightarrow \mathrm{Ult}(V;U) =: M$$

die kanonische Ultrapotenzeinbettung.Bezeichne id_κ *die Identität auf κ.Dann gilt:*

(a) $\mathrm{crit}(j) = \kappa$

(b) $\forall f \in {}^\kappa V : j(f)([\mathrm{id}_\kappa]) = [f]$

(c) ${}^\kappa M \subset M$

(d) $\kappa^\kappa \leq (\kappa^\kappa)^M < j(\kappa) < (\kappa^\kappa)^+$

(e) $U \notin \mathrm{Ult}(V;U)$

Siehe dazu [Jec06] Seite 268 f. für (a), (b) folgt direkt aus dem Satz von Łoś und siehe[Jec06] Lemma 17.9 auf Seite 291 für (c)-(e) (dort (a)-(c)).

Proposition 0.0.3: *Sei U ein normales Maß auf einer Kardinalzahl κ. Bezeichne $j : V \to \mathrm{Ult}(V;U)$ die kanonische Ultrapotenzeinbettung. Dann gilt:*

(a) $[\mathrm{id}_\kappa] = \kappa$

(b) $U = \{Y \subseteq \kappa | \kappa \in j(Y)\}$

Siehe [Jec06] Lemma 17.5 auf Seite 289.

Proposition 0.0.4: *Sei κ eine meßbare Kardinalzahl, dann ist κ Mahlo, d.h. κ ist unerreichbar und $\{\xi < \kappa | \xi$ ist unerreichbar$\}$ ist stationär.*

Siehe [Jec06] Lemma 10.21 auf Seite 135.

Die Mitchell-Ordnung

Nach Satz 0.0.2 (e) ist ein normale Maß U auf einer Kardinalzahl κ selbst nicht mehr Teil der Ultrapotenz. Wäre U also das einzige normale Maß auf κ, so wäre κ nicht mehr meßbar in der Ultrapotenz. Dies muß aber nicht so sein, es könnte ein normales Maß U^* geben, sodaß $U^* \in \mathrm{Ult}(V;U)$. Da U somit mehr Informationen über das Universum erhält, ist es in einem gewissen Sinne ein besserer Ultrafilter. Nach solchen Standards können wir also normale Maße ordnen.

Definition 0.0.5: Sei κ eine Kardinalzahl, seien U_1, U_2 normale Maß auf κ. Wir definieren dann

$$U_1 <_M U_2 \Leftrightarrow U_1 \in \mathrm{Ult}(V;U_2)$$

Wir nennen $<_M$ die Mitchell-Ordnung auf κ.

Proposition 0.0.6: *Sei κ eine Kardinalzahl, dann ist $<_M$ eine fundierte partielle Ordnung.*

Siehe [Jec06] Lemma 19.32 auf Seite 358.

Definition 0.0.7: Sei κ eine Kardinalzahl, sei $<_M$ die Mitchell-Ordnung auf κ. Dann definieren wir

$$\mathrm{o}(\kappa) = \mathrm{rank}(\langle\{U \subseteq \mathcal{P}(\kappa) | U \text{ ist ein normales Maß}\}, <_M\rangle)$$

Wir nennen $\mathrm{o}(\kappa)$ die Mitchell-Ordnung von κ.

Das nachfolgende Lemma soll uns helfen, den Zusammenhang den die Mitchell-Ordnung zwischen normalen Maßen herstellt auszunutzen.

Lemma 0.0.8: *Sei κ eine Kardinalzahl, seien U_1, U_2 normale Maße auf κ mit $U_1 < U_2$. Seien*

$$\begin{aligned} j_1 &: V \to \mathrm{Ult}(V; U_1) =: N_1 \\ j_2 &: V \to \mathrm{Ult}(V; U_2) =: N_2 \\ j_{1,2} &: N_1 \to \mathrm{Ult}(N_1; j_1(U_2)) =: N_{1,2} \\ j_{2,1} &: N_2 \to \mathrm{Ult}(N_2; U_1) =: N_{2,1} \end{aligned}$$

die kanonischen Ultrapotenzeinbettungen. Dann ist $N_{1,2} = N_{2,1} =: N$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"'] & N_1 \arrow[d, "j_{1,2}"] \\ N_2 \arrow[r, "j_{2,1}"] & N \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis: Man überlegt sich erstmal, daß für alle $A \subseteq \kappa$

$$A = [A \cap \beta : \beta < \kappa]_{U_2}$$

gilt. Da nach Vor. $U_1 \in \mathrm{Ult}(V; U_2)$ finden wir eine Folge $\langle U_\beta : \beta < \kappa\rangle$, sodaß

$$U_1 = [U_\beta : \beta < \kappa]_{U_2}$$

Kombinieren wir dies mit der vorangegangenen Gleichung so erhalten wir:

$$\forall A \subseteq \kappa : A \in U_1 \Leftrightarrow \{\beta < \alpha | A \cap \beta \in U_\beta\} \in U_2 \tag{0.1}$$

Da $j_1(\kappa)$ von $[\kappa : \beta < \kappa]_{U_1}$ und $j_1(U_2)$ von $[U_2 : \beta < \kappa]_{U_1}$ repräsentiert wird können wir die Elemente von $N_{1,2}$ so darstellen:

$$\left[[g(\beta)(\xi) : \xi < \kappa]_{U_2} : \beta < \kappa\right]_{U_1}$$

wobei $g : \kappa \times \kappa \to V$ in V liegt.

Da κ von $[\beta : \beta < \kappa]_{U_2}$ und U_1 von $[U_\beta : \beta < \kappa]_{U_2}$ repräsentiert wird, können wir andererseits die Elemente von N_2 folgendermaßen darstellen:

$$\Big[[g(\beta)(\xi) : \xi < \beta]_{U_\beta} : \beta < \kappa\Big]_{U_2}$$

wobei $g : \{(\beta,\xi) \in \kappa \times \kappa | \xi < \beta\} \to V$ in V liegt.

Da wir ja Ultrapotenzen soweit möglich immer mit ihren transitiven Kollaps identifizieren, reicht es natürlich eine $\in$-Isomorphismus zwischen den Äquivalenzklassen anzugeben. Unser Kandidat ist Folgender:

$$\begin{aligned} \pi : N_{1,2} &\longrightarrow N_{2,1} \\ \big[[g(\beta)(\xi) : \xi < \kappa]_{U_2} : \beta < \kappa\big]_{U_1} &\longmapsto \Big[[g(\xi)(\beta) : \xi < \beta]_{U_\beta} : \beta < \kappa\Big] \end{aligned}$$

Stehe jetzt " R" für "=" oder " $\in$ ", dann gilt für alle $f, g : \kappa \times \kappa \to V$ in V, daß

$$\begin{aligned} &\big[[f(\beta)(\xi) : \xi < \kappa]_{U_2} : \beta < \kappa\big]_{U_1} \, R \, \big[[g(\beta)(\xi) : \xi < \kappa]_{U_2} : \beta < \kappa\big]_{U_1} \\ \Leftrightarrow &\{\beta < \kappa | \{\xi < \kappa | f(\beta)(\xi) \, R \, g(\beta)(\xi)\} \in U_2\} \in U_1 \\ \Leftrightarrow &\{\xi < \kappa | \{\beta < \kappa | f(\xi)(\beta) \, R \, g(\xi)(\beta)\} \in U_2\} \in U_1 \\ \overset{(0.1)}{\Leftrightarrow} &\{\eta < \kappa | \{\xi < \eta | \{\beta < \kappa | f(\xi)(\beta) \, R \, g(\xi)(\beta)\} \in U_2\}\} \in U_\eta\} \in U_2 \\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow} &\{\eta < \kappa | \{\xi < \beta | f(\xi)(\eta) \, R \, g(\xi)(\eta)\} \in U_\eta\} \in U_2 \\ \Leftrightarrow &\pi(\big[[f(\eta)(\xi) : \xi < \kappa]_{U_2} : \eta < \kappa\big]_{U_1}) \, R \, \pi(\big[[g(\eta)(\xi) : \xi < \kappa]_{U_2} : \eta < \kappa\big]_{U_1}) \end{aligned}$$

Gucken wir uns $(*)$ nochmal genauer an. Schreibe erst einmal

$$\begin{aligned} A_0 &:= \{\eta < \kappa | \{\xi < \eta | \{\beta < \kappa | f(\xi)(\beta) \, R \, g(\xi)(\beta)\} \in U_2\}\} \in U_\eta\} \\ A_1 &:= \{\eta < \kappa | \{\xi < \eta | f(\xi)(\eta) \, R \, g(\xi)(\eta)\} \in U_\eta\} \\ B_\xi &:= \{\beta < \kappa | f(\xi)(\beta) \, R \, g(\xi)(\beta)\} \end{aligned}$$

$(*)$ folgt dann, da

- $A_1 \supseteq A_0 \cap \triangle_{(\xi < \kappa : B_\xi \in U_2)} B_\xi$
- $A_0 \supseteq A_1 \cap \triangle_{(\xi < \kappa : B_\xi \notin U_2)} (\kappa \backslash B_\xi)$

und U_2 normal ist. Dies zeigt, daß π ein wohldefinierter Monomorphismus ist.Da π offensichtlich auch surjektiv ist, ist es demnach ein Isomorphismus. Die Kommutativität des Diagrammes folgt daraus, daß π offensichtlich $j_{1,2}(j_1(x))$ in $j_{2,1}(j_2(x))$ überführt, für jedes $x \in V$. $\dashv$

Um die Mitchell-Ordnung voll auszunutzen, benötigen wir noch einen Begriff, der viele Maße gleichzeitig zu einander in Beziehung setzt.

Definition 0.0.9: Wir nennen eine Folge $\vec{U} = \langle U(\alpha,\gamma) : \alpha < \Omega, \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)\rangle$ für eine Ordinalzahl Ω und eine Funktion $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}} : \Omega \to \mathrm{On}$ (wobei wir für unsere Zwecke annehmen wollen, daß $\forall\alpha < \Omega : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) \leq \alpha$), kohärente Folge von Ultrafiltern genau dann, wenn

- $\forall\alpha < \Omega\forall\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) : U(\alpha,\gamma)$ ist ein normales Maß auf α
- $\forall\alpha < \Omega\forall\delta < \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) : U(\alpha,\delta) <_M U(\alpha,\gamma)$
- $\forall\alpha < \Omega\forall\delta < \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) : [U(\beta,\delta) : \beta < \alpha]_{U(\alpha,\gamma)} = U(\alpha,\delta)$

Woodiness

Definition 0.0.10: Sei δ eine unerreichbare Kardinalzahl. δ heißt Woodin genau dann, wenn es für alle Funktionen $f : \delta \to \delta$ einen Extender $E \in V_\delta$ gibt, sodaß für die kanonische Einbettung $j : V \to \mathrm{Ult}(V;E)$ gilt, daß

- $f"[\gamma] \subseteq \gamma$
- $V_{j(f)(\gamma)} \subseteq \mathrm{Ult}(V;E)$

wobei $\gamma = \mathrm{crit}(j)$.

Bemerkung: Auch hier ist die gewählte Definition nicht die allgemein Verwendete, ist allerdings äquivalent zu dieser.(Siehe dazu [Kan05] Seite 360 und [Kan05] Theorem 26.14 auf Seite 363)

Man beachte zusätzlich, daß für eine Einbettung $j : V \to \mathrm{Ult}(V;E)$ für einen Extender in V_δ, gilt, daß für alle $\xi < \delta : j(\xi) < \delta$. Dies liegt daran, daß alle involvierten Äquivalenzklassen in V_δ liegen.

1 Singularisieren von Nachfolgerkardinalzahlen

Unser Ziel ist es für eine Kardinalzahl μ eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$ zu finden, sodaß in allen generischen Erweiterungen $V[G]$

$$\operatorname{cof}^{V[G]}((\mu^+)^V) = \eta$$

wobei $\eta < \mu$ irgendeine reguläre Kardinalzahl sei, und zusätzlich soll $\mathbb{P}$ die Kofinalität und Kardinalität von Zahlen unterhalb von μ nicht verändern.

Wir werden feststellen, daß eine solche partielle Ordnung zu finden, schwerer wird wenn wir η größer machen, und wenn wir nicht-reguläres μ zulassen. Wenn wir diese Variablen betrachten ergeben sich drei Fälle, die wir nun vorstellen wollen.Die Beweise unserer sogenannten Hauptsätze werden uns in den nachfolgenden Kapiteln beschäftigen.

In diesem Kapitel wollen wir eher darlegen, warum die Bedingungen die wir an das Grundmodell stellen in Punkto Konsistenzstärke nicht geringer gewählt werden kann. Wir können dies hier aber leider nicht gänzlich beweisen, da wir Hilfsmittel aus der Theorie der inneren Modelle verwenden müssen, die wir - allein schon aus Platzmangel - unmöglich erklären können.

Der erste Hauptsatz

Hauptsatz A: *Sei $\mu \geq \aleph_2$ eine reguläre Kardinalzahl, und $\kappa > \mu$ sei meßbar. Sei $G \subset \operatorname{Col}(\mu, {<}\kappa)$ ein über V generischer Filter. Schreibe der Einfachheit halber $W := V[G]$, dann existiert in W eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$, sodaß für jeden über W generischen Filter $H \subseteq \mathbb{P}$ gilt, daß*

- $\operatorname{cof}^{W[H]}((\mu^+)^W) = \omega$
- $\forall \alpha \leq \mu : \operatorname{cof}^{W[H]}(\alpha) = \operatorname{cof}^W(\alpha) \wedge \operatorname{Card}^{W[H]}(\alpha) = \operatorname{Card}^W(\alpha)$

Das W dient hier als Grundmodell, in dem das gesuchte Forcing existiert.Dies ist der einfachstmögliche Fall, da es natürlich am bequemsten ist mit regulären μ zu arbeiten, und da Zahlen mit abzählbarer Kofinalität weniger Regularitätseigenschaften erfüllen (der Schnitt von Clubs muß nicht Clubs sein, etc.); es überrascht also nicht, daß solche einfacher zu erzeugen sind.

Daß dieses Ergebnis nicht ohne den Einfluß meßbarer Kardinalzahlen erreichbar ist, zeigen wir mit Hilfe von:

Fakt A: *Gelte, daß* $0^\P$ *nicht existiert, dann existiert ein inneres Modell* K *(üblicherweise das Kernmodell genannt) der Form* $L[E]$*, sodaß* $K^V = K^{V[G]}$ *für jeden generischen Filter* G*, und es gilt noch Folgendes: Ist* $\kappa > \aleph_2$ *eine reguläre Kardinalzahl in* K*, und gilt* $\mathrm{cof}^V(\kappa) = \lambda < \mathrm{Card}^V(\kappa)$*, dann gilt ("*$\kappa$ *ist meßbar")*^{K} *und gilt sogar zusätzlich* $\lambda > \omega$ *dann auch* $\mathrm{o}^K(\kappa) \geq \lambda$

Bemerkung: Wir verweisen hierbei auf [Mit] Theorem 2.5 auf Seite 58, wobei anzumerken ist, daß in den dort zu findenden Quellenangaben, der Beweis nur unter zusätzlichen arithmetischen Annahmen erbracht wird. Die Gültigkeit des Faktes ist unter Experten allerdings unstrittig, und unsere Version enthält die zusätzliche Annahmen, daß $0^\P$ nicht existiert, um sicherzustellen, daß K existiert. Für Informationen darüber, was $0^\P$ ist siehe [Zem01] (erwähnt wird es erstmals auf Seite 272). Siehe auch [Cox09].

Gehen wir jetzt davon aus, wir hätten ein $\mathbb{P}$ gefunden, sodaß für jeden generischen Filter $G \subseteq \mathbb{P}$ gilt

$$V[G] \models \mathrm{cof}((\mu^+)^V) = \omega$$

für ein reguläres $\mu \geq \aleph_2$.

Es gilt dann für $K^V = K^{V[G]}$ aus Fakt A, daß $(\mu^+)^V$ regulär in K ist da $K \subseteq V$, und damit können wir den Fakt anwenden und erhalten, daß μ^+ meßbar in K ist. Zusammenfassend folgt aus der Existenz einer solchen partiellen Ordnung also, daß

- Es gibt ein inneres ZFC-Modell $K \subsetneq V$.
- In K ist $(\mu^+)^V$ meßbar.

Wenn wir also W aus dem Hauptsatz als unser Grundmodell betrachten, erhalten wir mit Hilfe des Faktes, unsere Vorraussetzungen zurück, mit der kleinen Einschränkung, daß das Grundmodell natürlich keine generische Erweiterung von K sein muß. Dies macht von der Konsistenzstärke (was aus praktischen Gründen das Einzige ist, daß uns interessiert) aber keinen Unterschied. Die Voraussetzungen sind für unsere Zwecke also notwendig.

Der zweite Hauptsatz

Hauptsatz B: *Gelte* GCH*, sei* $\vec{U}$ *eine kohärente Folge von Ultrafiltern. Sei* $\mu \geq \aleph_2$ *eine reguläre Kardinalzahl, und* $\kappa > \mu$ *sei meßbar mit* $\eta \leq \mathrm{o}^{\vec{U}}(\kappa)$ *für ein reguläres* $\eta < \mu$*. Dann ex. eine gewisse partielle Ordnung* $\mathbb{P}_\kappa$*. Sei* $G^* \subseteq \mathbb{P}_\kappa$ *ein über* V *generischer Filter. Schreibe* $V^* := V[G^*]$*.* $G \subset \mathrm{Col}^{V^*}(\mu, {<}\kappa)$ *sei ein über* V^* *generischer Filter. Schreibe der Einfachheit halber* $W := V^*[G]$*, dann existiert in* W *eine partielle Ordnung* $\mathbb{P}(\kappa, \eta)$*, sodaß für jeden über* W *generischen Filter* H *gilt, daß*

- $\mathrm{cof}^{W[H]}((\mu^+)^W) = \eta$
- $\forall \alpha \leq \mu : \mathrm{cof}^{W[H]}(\alpha) = \mathrm{cof}^W(\alpha) \wedge \mathrm{Card}^{W[H]}(\alpha) = \mathrm{Card}^W(\alpha)$

Wir merken erstmal an, daß die Voraussetzungen des Satzes durch eine Kardinalzahl von hinreichend hoher Mitchell-Ordnung in einem geeigneten Modell realisiert werden können.

Fakt B: *Sei κ eine Kardinalzahl mit $\mathrm{o}(\kappa) = \eta$, dann existiert ein inneres Modell der Form $L[A]$, sodaß es ein $\vec{U} \in L[A]$ gibt mit*

$$L[A] \models \vec{U} \text{ ist eine kohärente Folge von Ultrafiltern und } \mathrm{o}^{\vec{\mathrm{U}}}(\kappa) = \eta$$

Siehe dazu [Jec06] Theorem 19.39 auf Seite 362.

Sei jetzt wieder wie oben die Existenz einer partiellen Ordnung angenommen, sodaß in jeder generischen Erweiterung $V[G]$

$$\mathrm{cof}^{V[G]}((\mu^+)^V) = \eta$$

für eine reguläre Kardinalzahl $\mu \geq \aleph_2$.

Wenden wir jetzt wie oben Fakt A an, erhalten wir dann also:

- Es gibt ein inneres ZFC + GCH-Modell $K \subsetneq V$.
- In K ist $(\mu^+)^V$ meßbar, mit $\mathrm{o}^K((\mu^+)^V) \geq \eta$.

Wobei wir hier jetzt noch den Zusatz von Fakt A benutzt haben. Wie oben bestätigt uns das, daß die Voraussetzungen auch notwendig sind.

Der dritte Hauptsatz

Hauptsatz C: *Sei $\mu \geq \aleph_2$ eine Kardinalzahl, und $\delta > \mu$ sei Woodin. Dann ex eine partielle Ordnung $\mathbb{P}_\delta$, sodaß für alle regulären $\eta < \mu$ ein $S \in \mathbb{P}_\delta$ existiert, sodaß*

- $S \Vdash \mathrm{cof}(\check{\mu^+}) = \check{\eta}$
- *Schreibe α_0 für $\mathrm{cof}(\alpha)$ und α_1 für $\mathrm{Card}(\alpha)$ für jedes $\alpha \leq \mu$, dann gilt für alle $\alpha \leq \mu$*

$$S \Vdash \mathrm{cof}(\check{\alpha}) = \check{\alpha}_0 \wedge \mathrm{Card}(\check{\alpha}) = \check{\alpha}_1$$

Dieses Ergebnis ist viel leichter anzuwenden. Wir können direkt im Grundmodell arbeiten, und müssen nicht für jedes μ in ein anderes Zwischenmodell übergehen, auch funktioniert es für singuläre μ. Dafür müssen wir allerdings einen beträchtlichen Sprung nach oben in der Konsistenzstärke machen, aber wie wir jetzt sehen werden, ist dies notwendig.

Fakt C: *Gelte, daß es kein inneres Modell mit einer Woodinkardinalzahl gibt. Dann existiert ein inneres Modell K der Form $L[E]$, sodaß für jeden generischen Filter G gilt, daß $K^V = K^{V[G]}$, und es gilt für alle singulären $\alpha \in \mathrm{On}$*

$$\alpha^+ = (\alpha^+)^K$$

Bemerkung: Wir verweisen hier auf [MS95]. Dort findet sich der Fakt zwar nur mit einer Einschränkung, aber nach einem neuen (noch nicht veröffentlichten) Ergebnis von R. Jensen und J. Steel können die Methoden aus dem Artikel angewandt werden, um unseren Fakt C zu beweisen.

Angenommen, es gäbe eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$, sodaß für jeden generischen Filter $G \subseteq \mathbb{P}$ gilt

$$\operatorname{cof}^{V[G]}(\mu^+) = \eta$$

für eine singuläre Kardinalzahl μ und eine reguläre Kardinalzahl $\eta < \mu$.

Nun angenommen es gäbe kein inneres Modell mit einer Woodinkardinalzahl. Dann gilt da $K \subseteq V$

$$\mu^+ \geq (\mu^+)^{K^V} = (\mu^+)^{K^{V[G]}} \overset{(*)}{=} (\mu^+)^{V[G]} > \mu^+$$

Offensichtlich ein Widerspruch. Die Gültigkeit von $(*)$ folgt, wenn wir Fakt C in $V[G]$ anwenden. (Hier ist noch anzumerken, daß es auch in $V[G]$ kein inneres Modell mit einer Woodinkardinalzahl gibt).

Wenn es also ein solches Forcing gibt, daß auch Nachfolger singulärer Kardinalzahlen singularisieren kann, so muß es auch ein inneres Modell mit einer Woodinkardinalzahl geben. Damit muß es natürlich nicht im Grundmodell selber eine Woodinkardinalzahl geben, da es aber von der Konsistenzstärke her keinen Unterschied macht, wollen wir uns damit zufrieden geben.

2 Prikry-Forcing und der erste Hauptsatz

2.1 Das Prikry-Forcing

Wir wollen uns als Erstes damit beschäftigen Zahlen abzählbarer Kofinalität durch Forcing zu erzeugen. Dieser Fall unterscheidet sich vom allgemeinen Fall, da Zahlen abzählbarer Kofinalität, sich in einigen bedeutenden Eigenschaften von Zahlen überabzählbarer Kofinalität unterscheiden(z.B. ist der Schnitt von zwei Clubmengen dann nicht unbedingt wieder club).Die hier vorgestellten Methoden, sollen uns als eine Art Prototyp für das Forcing, das wir in Kapitel 4 vorstellen wollen, dienen.

Theorem 2.1.1: *Sei κ eine meßbare Kardinalzahl. Dann ex. eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$, sodaß*

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \operatorname{cof}(\check{\kappa}) = \check{\omega}$$

und forcen mit $\mathbb{P}$ fügt keine beschränkten Teilmengen zu κ hinzu.

Wir wollen besagte partielle Ordnung gleich definieren. Sei dazu jetzt κ meßbar. Dann wählen wir auf κ einen nicht-trivialen $<\kappa$-abgeschlossenen Ultrafilter U - der Filter muß nicht unbedingt normal sein. Wir erhalten für verschiedene Ultrafilter auch durchaus verschiedene Ordnungen $\mathbb{P}^U$. Um die Notation zu vereinfachen, wollen wir aber für den Rest dieses Abschnittes ein U fixieren, und werden nur noch von einer Ordnung $\mathbb{P}$ sprechen.

Bemerkung: Im Folgenden werden wir oft mit endlichen Mengen von Ordinalzahlen hantieren müssen. Wir wollen diese nach Bedarf mit deren monotoner Aufzählung identifizieren. In diesem Sinne ist auch ein Baum $T \subseteq [\kappa]^{<\omega}$, als ein Baum von streng monoton aufsteigen Folgen zu verstehen. Bezeichne $\trianglelefteq$ die Ordnung durch Enderweiterung.

Im folgenden werden wir $T_s := \{t \in T | s \trianglelefteq t \vee t \trianglelefteq s\}$ schreiben für einen Baum T auf κ und ein $s \in T$, ferner $T/s := \{t \in T | s^\frown t \in T\}$ und auch $s^\frown T := \{s^\frown t | t \in T\}$ für beliebiges $s \in [\kappa]^{<\omega}$.

Definition 2.1.2: Ein Baum $T \subseteq [\kappa]^{<\omega}$ heißt U-Baum mit Stamm $t \in [\kappa]^{<\omega}$, genau dann wenn folgendes gilt:

(a) t ist Stamm von T, d.h.

$$\forall s \in T : s \trianglelefteq t \ \vee \ t \trianglelefteq s$$

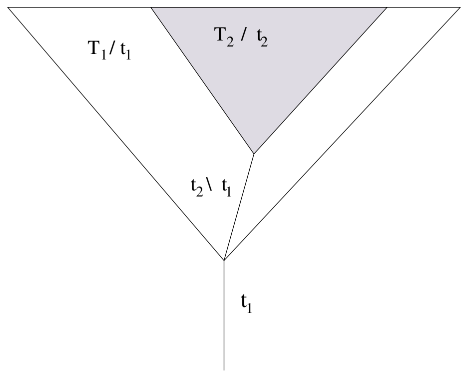
(b) Für alle $s \in T$ mit $t \trianglelefteq s$, gilt:

$$\operatorname{suc}_T(s) := \{\eta < \kappa | s^\frown \langle \eta \rangle \in T\} \in U$$

Die Menge aller U-Bäume mit Stamm t bezeichnen wir mit $\mathrm{Tr}(t)$.

Definition 2.1.3: Wir definieren eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$:

- Der Träger von $\mathbb{P}$ sind die Paare (t, T), sodaß T ein U-Baum mit Stamm t ist.
- Für zwei Elemente $(t_1, T_1), (t_2, T_2)$ gilt $(t_1, T_1) \leq (t_2, T_2)$ genau dann wenn $T_1 \subseteq T_2$. (Damit ist insbesondere $t_2 \trianglelefteq t_1$)



Wir nennen $\mathbb{P}$ das Prikry-Forcing, nach seinem Entdecker Karel Prikry. Bei dem Forcing, daß wir vorgestellt haben, handelt es sich eigentlich um einer Variante von dem, was man sonst unter Prikry-Forcing versteht (siehe [Jec06] Seiten 401 ff.). Für unsere Zwecke ist diese Form einfach die Passendste.

Wir überlegen uns als Nächstes, daß das Prikry-Forcing eine abzählbare kofinale Teilmenge zu κ hinzufügt.

Lemma 2.1.4: *Sei $G \subset \mathbb{P}$ generisch über V. Dann ist*

$$g := \bigcup \{t | \exists T \in \mathrm{Tr}(t) : (t, T) \in G\}$$

eine kofinale Teilmenge von κ vom Ordnungstyp ω.

Beweis: Sei also G generisch über V.

1. Zeigen wir zuerst, daß g kofinal ist. Dazu geben wir uns ein beliebiges $\alpha < \kappa$ vor. Betrachte
$$D := \{(t, T) \in \mathbb{P} | \sup(t) > \alpha\}$$
Sei nun $(t, T) \in \mathbb{P}$ beliebig, dann ist T also ein U-Baum und damit ist $\mathrm{suc}_T(t) \in U$. Insbesondere gibt es ein $\xi \in \mathrm{suc}_T(t)$ mit $\xi > \alpha$. Offensichtlich ist dann $(t^\frown\langle\xi\rangle, T_{t^\frown\langle\xi\rangle}) \leq (t, T)$, und es gilt offensichtlich auch $(t^\frown\langle\xi\rangle, T_{t^\frown\langle\xi\rangle}) \in D$. Also ist D dicht. Wählen wir ein $(t, T) \in D \cap G$. Dann ist also $t \subset g$ und damit $\sup(g) > \alpha$, da $\sup(t) > \alpha$.

2. Wir zeigen nun, daß $\text{otyp}(g) = \omega$.

„$\leq$“ Sei $\alpha < \kappa$ beliebig. Wir zeigen dann, daß es $(t, T) \in G$ gibt mit $g \cap \alpha = t$. Für jedes $\xi \in \alpha \cap g$ finden wir ein $(t_\xi, T_\xi) \in G$ mit $\xi \in t_\xi$. Da all die (t_ξ, T_ξ) in G liegen sind sie paarweise kompatibel. Also sind die $\langle t_\xi : \xi \in \alpha \cap g \rangle$ bezüglich $\trianglelefteq$ total geordnet.

Es darf jetzt nur endlich viele t_ξ geben, denn: Wählen wir ein $\alpha < \eta < \kappa$, sodaß es ein $(t, T) \in G$ mit $\eta \in t$ gibt (existiert wegen dem ersten Teil). Dann gilt da (t, T) und die (t_ξ, T_ξ) kompatibel sind und offensichtlich nicht $t \trianglelefteq t_\xi$ gilt, daß $t_\xi \trianglelefteq t$ für alle $\xi \in \alpha \cap g$. Gäbe es also unendlich viele t_ξ, so müßte t unendlich sein.

Man sieht jetzt ein, daß für das maximale t_ξ gilt, daß $\alpha \cap g = t_\xi$.

„$\geq$“ Folgt aus dem ersten Teil. (eine endliche Menge kann nicht kofinal in κ sein)$\dashv$

Auf der anderen Seite ist das Prikry-Forcing offensichtlich nicht abgeschlossen, denn für eine absteigende Folge $\langle (t_n, T_n) : n < \omega \rangle$ könnte die Größe der t_n gegen ω gehen. Damit können wir nicht die übliche Methode anwenden, um zu zeigen, daß das Prikry-Forcing keine kleinen Mengen hinzufügt. Wir umgehen dies, indem wir eine andere schwächere Ordnung betrachten.

Definition 2.1.5: Für $(t_1, T_1), (t_2, T_2) \in \mathbb{P}$ sei $(t_1, T_1) \leq^* (t_2, T_2)$ genau dann wenn

$$(t_1, T_1) \leq (t_2, T_2) \ \wedge \ t_1 = t_2$$

wir nennen (t_1, T_1) eine direkte Erweiterung von (t_2, T_2).

Die selbe Methode (also zwei Ordnungen zusammen zu betrachten) wird uns auch später noch wertvolle Dienste leisten. Deshalb werden wir für diese Klasse von partiellen Ordnungen einen eigenen Begriff einführen. Da das Prikry-Forcing das kanonische Beispiel für diese Klasse ist, nennen wir Forcings in dieser Klasse Prikry-Typ-Forcings.

Exkurs - Prikry-Typ-Forcings

Definition 2.1.6: $\langle \mathbb{P}, \leq, \leq^* \rangle$ heißt ein Prikry-Typ-Forcing, genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- $\langle \mathbb{P}, \leq^* \rangle$ und $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ sind part. Ordnungen, wobei $\leq^* \subseteq \leq$.
- Für alle $p \in \mathbb{P}$, alle $\tau_1, \ldots, \tau_n \in V^{\langle \mathbb{P}, \leq \rangle}$ und $\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ eine Aussage der Forcingsprache von $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$, ex. ein $p^* \in \mathbb{P}$ mit $p^* \leq^* p$ und:

$$p^* \Vdash_{\langle \mathbb{P}, \leq \rangle} \sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n) \quad \vee \quad p^* \Vdash_{\langle \mathbb{P}, \leq \rangle} \neg\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

Bemerkung: Ist $\langle \mathbb{P}, \leq, \leq^* \rangle$ vom Prikry-Typ, so ist die Forcing-Relation bzgl. $\langle \mathbb{P}, \leq^* \rangle$ für uns nicht interessant. Ist also in diesem Zusammenhang von einer Forcing-Relation die Rede, so meinen wir die Forcing-Relation bzgl. $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$.

Die Essenz des Ganzen ist, daß die Zweitordnung "$\leq^*$" noch nahe an der Hauptordnung " $\leq$ " liegt, aber im Gegensatz zu jener Abschlußeigenschaften haben kann. Was uns der Abschluß von " $\leq^*$ " eröffnet, wollen wir als Nächstes sehen.

Definition 2.1.7: Ein Prikry-Typ-Forcing $\langle \mathbb{P}, \leq, \leq^* \rangle$ heißt schwach $<\alpha$-abgeschlossen, genau dann wenn $\langle \mathbb{P}, \leq^* \rangle$ $<\alpha$-abgeschlossen ist.

Satz 2.1.8: *Sei $\langle \mathbb{P}, \leq, \leq^* \rangle$ ein schwach $<\kappa$-abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing. Dann fügt forcen mit $\mathbb{P}$ keine beschränkten Teilmengen zu κ hinzu.*

Beweis: Sei $G \subset \mathbb{P}$ ein über V generischer Filter. Und sei $A \subseteq \alpha$ in $V[G]$ für ein $\alpha < \kappa$. Wähle einen Namen $\dot{A}$ für A und ein $p \in G$ mit

$$p \Vdash \dot{A} \subseteq \check{\alpha}$$

Sei jetzt $q \leq p$ beliebig. Wir wollen eine $\leq^*$-absteigende Folge $\langle p_\xi : \xi < \alpha \rangle$ konstruieren, sodaß

$$\forall \xi < \alpha : p_\xi \leq^* q \;\wedge\; p_\xi \parallel \check{\xi} \in \dot{A}$$

Dazu sei als erstes p_0 irgendeine direkte Erweiterung von q, die $\varnothing \in \dot{A}$ entscheidet. Ist dann für ein $\beta < \alpha$ bereits $\langle p_\xi : \xi < \beta \rangle$ definiert, dann nutzen wir als erstes die schwache Abgeschlossenheit von $\mathbb{P}$ aus um eine $\leq^*$-untere Schranke p' von $\langle p_\xi : \xi < \beta \rangle$ zu finden. Wir wählen uns dann als p_β eine direkte Erweiterung von p', die $\check{\beta} \in \dot{A}$ entscheidet. Die Konstruktion ist damit abgeschlossen. Da $\alpha < \kappa$ finden wir eine $\leq^*$-untere Schranke p_α der $\langle p_\xi : \xi < \alpha \rangle$. Dann gilt also jetzt

$$\forall \xi < \alpha : p_\alpha \leq^* q \;\wedge\; p_\alpha \parallel \check{\xi} \in \dot{A}$$

Wir habe also gezeigt, daß

$$D := \{q \leq p | \forall \xi < \alpha : q \parallel \check{\xi} \in \dot{A}\}$$

dicht unter p ist. Insbesondere existiert ein $p^* \in D \cap G$, definiere dann $A^* \subseteq \alpha$ (in V!) durch

$$\xi \in A^* \;\Leftrightarrow\; p^* \Vdash \check{\xi} \in \dot{A}$$

Man sieht jetzt leicht, daß $A = A^* \in V$. $\dashv$

Das Prikry-Forcing - Fortsetzung

Diese neuen Begriffe wollen wir natürlich sogleich auf unser Prikry-Forcing anwenden.

Satz 2.1.9: *Sei κ eine meßbare Kardinalzahl. Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ das Prikry-Forcing auf κ für einen festen $<\kappa$-abgeschlossen Ultrafilter U. Sei $\leq^*$ definiert wie in Definition 2.1.5. Dann ist $\langle \mathbb{P}, \leq, \leq^* \rangle$ ein schwach $<\kappa$-abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing.*

Dies zu zeigen erfordert aber noch einiges an Arbeit.

Lemma 2.1.10: *Sei $\alpha < \kappa$ und $\langle T_\xi : \xi < \alpha\rangle$ eine Folge von U-Bäumen mit Stamm t. Dann ist $\bigcap_{\xi<\alpha} T_\xi$ auch ein U-Baum mit Stamm t.*

Beweis: Das $T := \bigcap_{\xi<\alpha} T_\xi$ wieder Stamm t hat ist klar. Es bleibt also zu zeigen, daß für alle $s \in T$ gilt, daß $\mathrm{suc}_T(s) \in U$. Man sieht aber leicht, daß

$$\mathrm{suc}_T(s) = \bigcap_{\xi<\alpha} \mathrm{suc}_{T_\xi}(s)$$

Für jedes $\xi < \alpha$ ist nach Voraussetzung $\mathrm{suc}_{T_\xi}(s) \in U$, mit der $<\kappa$-Abgeschlossenheit von U folgt dann auch $\mathrm{suc}_T(s) \in U$. ⊣

Korrolar 2.1.11: *$\mathbb{P}$ erfüllt die κ^+-c.c.*

Beweis: Sei $A \subseteq \mathbb{P}$ mit $\mathrm{Card}(A) = \kappa^+$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es dann $(t_1, T_1), (t_2, T_2) \in A$ mit $t := t_1 = t_2$. Nach dem Lemma ist dann $T_1 \cap T_2$ ein U-Baum mit Stamm t. Es ist dann also $(t, T_1 \cap T_2) \in \mathbb{P}$, und diese Bedingung ist offensichtlich eine gemeinsame Erweiterung von (t_1, T_1) und (t_2, T_2), also ist A keine Antikette. ⊣

Daß zeigt natürlich die Abgeschlossenheit von $\leq^*$. Die zweite Bedingung an $\leq^*$ zeigen wir sogleich, aber davor noch ein kleines Lemma.

Lemma 2.1.12: *Sei $(t, T) \in \mathbb{P}$ beliebig, dann ist*

$$D := \{(t', T') \in \mathbb{P} | \exists \eta \in \mathrm{suc}_T(t) : (t', T') \leq (t^\frown\langle\eta\rangle, T_{t^\frown\langle\eta\rangle})\}$$

dicht unter (t, T).

Beweis: Sei $(t', T') \leq (t, T)$ beliebig.

1.Fall: Ist $t = t'$, dann wähle ein $\eta \in \mathrm{suc}_{T'}(t) \subseteq \mathrm{suc}_T(t)$. Dann ist

$$(t^\frown\langle\eta\rangle, (T')_{t^\frown\langle\eta\rangle}) \leq (t', T')$$

und ferner auch

$$(t^\frown\langle\eta\rangle, (T')_{t^\frown\langle\eta\rangle}) \leq (t^\frown\langle\eta\rangle, T_{t^\frown\langle\eta\rangle})$$

Also $(t^\frown\langle\eta\rangle, (T')_{t^\frown\langle\eta\rangle}) \in D$.

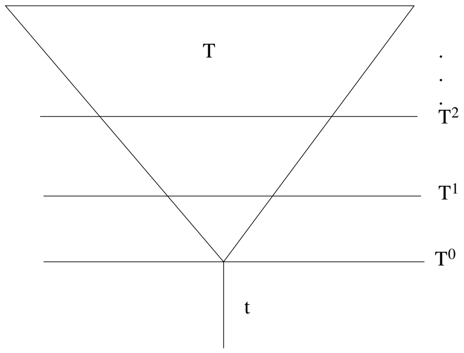
2.Fall: Ist $t \neq t'$, dann ist $t' = t^\frown\langle\eta\rangle^\frown s$, für ein geeignetes s und $\eta \in \mathrm{suc}_T(t)$. Dann ist aber

$$(t', T') \leq (t^\frown\langle\eta\rangle^\frown s, T_{(t^\frown\langle\eta\rangle^\frown s)}) \leq (t^\frown\langle\eta\rangle, T_{(t^\frown\langle\eta\rangle)})$$

also $(t', T') \in D$. ⊣

Für einen U-Baum T mit Stamm t bezeichne T^n das n-te Level über t, d.h. die Menge

$$\{s \in T | s = t^\frown s^* \text{ mit } \operatorname{lh}(s^*) = n\}$$



Ferner benutzen wir noch, um die Notation zu vereinfachen, folgende Schreibweise: Für eine Aussage einer Forcingsprache φ setzen wir $\varphi^0 \equiv \varphi$ und $\varphi^1 \equiv \neg\varphi$.

Lemma 2.1.13: *Sei $\tau \in V^{\mathbb{P}}$, und $\varphi(\tau)$ sei eine Aussage der Forcing-Sprache von $\mathbb{P}$. $(t, T) \in \mathbb{P}$ sei beliebig. Dann ex. ein $T^* \subseteq T$ mit $(t, T^*) \parallel \varphi(\tau)$.*

Beweis: Als Erstes müssen wir T geeignet ausdünnen:

Behauptung: *Es existiert ein $T \supseteq T^* \in \operatorname{Tr}(t)$, sodaß für alle $t \trianglelefteq s \in T^*$ folgendes gilt:*

$$\begin{aligned} &\exists i < 2 \exists \eta \in \operatorname{suc}_{T^*}(s) : \exists T' \in \operatorname{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T') \Vdash \varphi^i(\tau) \\ &\Rightarrow \forall \eta \in \operatorname{suc}_{T^*}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, (T^*)_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi^i(\tau) \end{aligned}$$

Beweis der Behauptung: Wir konstruieren eine Folge $\langle (t, T_n) : n < \omega \rangle \subset \operatorname{Tr}(t)$, sodaß gilt:

(a) $\forall n < \omega : T \supseteq T_n \supseteq T_{n+1}$

(b) $\forall n < \omega \forall k \leq n : T_n^k = T_{n+1}^k$

(c) Für alle $s \in T_n^n (= T_{n+1}^n)$ gilt:

$$\begin{aligned} &\exists i < 2 \exists \eta \in \operatorname{suc}_{T_{n+1}}(s) : \exists T' \in \operatorname{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T') \Vdash \varphi^i(\tau) \\ &\Rightarrow \forall \eta \in \operatorname{suc}_{T_{n+1}}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, (T_{n+1})_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi^i(\tau) \end{aligned}$$

Wir konstruieren die T_n durch Rekursion:

Wir beginnen, indem wir $T_0 := T$ setzen. Dann sei jetzt T_n bereits konstruiert. Bis zum n-ten Level über t ist unsere Konstruktion bereits abgeschlossen, und wir dünnen nun das nächste Level aus. Sei dazu $s \in T_n^n$ beliebig; betrachte $\operatorname{suc}_{T_n}(s)$ und definiere

$$\begin{aligned} A_1^s &:= \{\eta \in \operatorname{suc}_{T_n}(s) | \exists T' \in \operatorname{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T') \Vdash \varphi(\tau)\} \\ A_2^s &:= \{\eta \in \operatorname{suc}_{T_n}(s) | \exists T' \in \operatorname{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T') \Vdash \neg\varphi(\tau)\} \\ A_0^s &:= \operatorname{suc}_{T_{n+1}}(s) \backslash (A_1^s \cup A_2^s) \end{aligned}$$

Da U ein Ultrafilter ist und $\mathrm{suc}_{T_n}(s) \in U$ existiert genau ein $i < 3$, mit $A_i^s \in U$. Dieses bezeichnen wir nunmehr einfach als A^s.

Als nächstes definieren wir für jedes $\eta \in A^s$ ein $(T_n)_{s^\frown\langle\eta\rangle} \supseteq T_{s,\eta} \in \mathrm{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle)$. Welches $T_{s,\eta}$ machen wir davon abhängig, was wir als A^s genommen haben. Also:

1.Fall: Ist $A^s = A_0^s$, dann sei $T_{s,\eta} = (T_n)_{s^\frown\langle\eta\rangle}$.

2.Fall: Ist $A^s = A_1^s$ dann existiert für alle $\eta \in A^s$ ein $T^{'} \in \mathrm{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle)$, sodaß $(s^\frown\langle\eta\rangle, T^{'}) \Vdash \varphi(\tau)$. Setze dann $T_{s,\eta} := (T_n)_{s^\frown\langle\eta\rangle} \cap T^{'}$ für ein solches $T^{'}$. Nach Lemma 2.1.10 ist das Ergebnis wieder in $\mathrm{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle)$.

Ferner ist dann offensichtlich auch für alle $\eta \in A^s$

$$(s^\frown\langle\eta\rangle, T_{s,\eta}) \leq (s^\frown\langle\eta\rangle, T^{'}).$$

Damit folgt

$$\forall\eta \in A^s : (s^\frown\langle\eta\rangle, T_{s,\eta}) \Vdash \varphi(\tau) \tag{2.1}$$

3.Fall: Ist $A^s = A_2^s$ dann gehe analog zum zweiten Fall vor.(Man ersetze nur $\varphi(\tau)$ durch $\neg\varphi(\tau)$.)

Aus diesen Zutaten basteln wir uns jetzt unser T_{n+1}. Und zwar sei:

1. $\forall k \leq n : T_n^k = T_{n+1}^k$
2. $\forall s \in T_{n+1}^n : \mathrm{suc}_{T_{n+1}}(s) = A^s$
3. $\forall s \in T_{n+1}^n \forall\eta \in \mathrm{suc}_{T_{n+1}}(s) : (T_{n+1})_{s^\frown\langle\eta\rangle} = T_{s,\eta}$

Dieses T_{n+1} erfüllt nun offensichtlich die Forderungen (a) und (b). Es bleibt nun zu überprüfen, daß es auch die Eigenschaft (c) erfüllt. Gelte also für ein bel. $s \in T_n^n$

$$\exists\eta \in \mathrm{suc}_{T_{n+1}}(s) : \exists T^{'} \in \mathrm{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T^{'}) \Vdash \varphi^i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

für ein geeignetes $i < 2$, o.B.d.A $i = 0$. Das muß aber heißen, daß in der Konstruktion von T_{n+1} $A^s = A_1^s$ war, insbesondere haben wir $T_{s,\eta} = (T_{n+1})_{s^\frown\langle\eta\rangle}$ für alle $\eta \in A^s = \mathrm{suc}_{T_{n+1}}(s)$ so gewählt, daß (2.1) erfüllt ist. Also ist T_{n+1} wie gewünscht. Dies beendet die Konstruktion.

Wir setzen jetzt schließlich $T^* := \bigcap_{n<\omega} T_n$, und behaupten T^* sei wie gewünscht. Dazu wähle einfach ein $s \in T^*$, sodaß

$$\exists\eta \in \mathrm{suc}_{T^*}(s) : \exists T^{'} \in \mathrm{Tr}(s^\frown\langle\eta\rangle) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T^{'}) \Vdash \varphi^i(\tau) \tag{2.2}$$

Der Punkt ist jetzt, daß $s \in T_{n+1}^n$ für ein geeignetes n. Damit existiert jetzt ein η wie aus (2.2) in $\mathrm{suc}_{T_{n+1}}(s)$, und damit gilt nach Verwendung der Forderung (c), daß

$$\forall\eta \in \mathrm{suc}_{T_{n+1}}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, (T_{n+1})_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi^i(\tau)$$

Da jetzt ,wegen Konstruktion von T^* und Forderung (a) und (b), $\mathrm{suc}_{T^*}(s) \subseteq \mathrm{suc}_{T_{n+1}}(s)$ und für alle $s \in \mathrm{suc}_{T^*}(s)$

$$(s^\frown\langle\eta\rangle, (T^*)_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \leq (s^\frown\langle\eta\rangle, (T_{n+1})_{s^\frown\langle\eta\rangle})$$

folgt auch

$$\forall\eta \in \mathrm{suc}_{T^*}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, (T^*)_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi^i(\tau)$$

Also ist T^* wie gewollt. □

Damit sind wir eigentlich bereits fertig. Sei jetzt nämlich $(t^{'}, T^{'}) \in \mathbb{P}$ eine Verstärkung von (t, T^*), die $\varphi(\tau)$ entscheidet, wobei die Länge von $t^{'}$ minimal sein soll. O.B.d.A. gelte $(t^{'}, T^{'}) \Vdash \varphi(\tau)$.

Wäre $t^{'} \neq t$, dann ist $t^{'} = s^\frown\langle\eta\rangle$ mit $t \trianglelefteq s \in T^*$ und $\eta \in \mathrm{suc}_{T^*}(s)$. Der Behauptung zufolge gilt dann

$$\forall\eta \in \mathrm{suc}_{T^*}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, (T^*)_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$$

Nach Lemma 2.1.12 gibt es dann unter $(s, {T^*}_s)$ dicht viele Bedingungen die $\varphi(\tau)$ erzwingen. Also gilt bereits $(s, {T^*}_s) \Vdash \varphi(\tau)$. Aber die Länge von $t^{'} = s^\frown\langle\eta\rangle$ sollte minimal gewesen sein. Widerspruch! In der Tat muß also $t^{'} = t$ gelten. ⊣

Jetzt haben wir alle Zutaten zusammen, für unser ursprüngliches Theorem.

Beweis (von Satz 2.1.9): Daß $\langle\mathbb{P}, \leq, \leq^*\rangle$ vom Prikry-Typ ist folgt aus Lemma 2.1.13. Daß es schwach $<\kappa$-abgeschlossen ist aus Lemma 2.1.10. ⊣

Beweis (von Theorem 2.1.1): Fixiere wieder einen $<\kappa$-abgeschlossenen nicht-trivialen Ultrafilter U. Sei $\mathbb{P}$ das Prikry-Forcing.

Dann ist $\mathbb{P}$ wie gewünscht, denn aus Satz 2.1.9 in Verbindung mit Satz 2.1.8 folgt, daß $\mathbb{P}$ keine beschränkten Teilmengen zu κ hinzufügt. Das $\mathbb{P}$ die Kofinalität von κ abzählbar macht, folgt hingegen aus Lemma 2.1.4. ⊣

2.2 Beweis des ersten Hauptsatzes

Bevor wir uns an den Beweis machen, wollen wir uns noch kurz das Forcing $\mathrm{Col}(\mu, <\kappa)$ angucken.

Lemma 2.2.1: *Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl und μ regulär.*

(a) $\mathrm{Col}(\mu, <\kappa)$ *erfüllt die κ-c.c.*

(b) $\mathrm{Col}(\mu, <\kappa)$ *ist $<\mu$-abgeschlossen.*

Beweis:

(a) Sei $\langle p_\xi : \xi < \kappa \rangle \subseteq \mathrm{Col}(\mu, <\kappa)$ mit paarweise verschiedenen p_ξ. Wir haben zu zeigen, daß es kompatible p_{ξ_1}, p_{ξ_2} gibt. Betrachte ersteinmal

$$M := \{\mathrm{supp}(p_\xi) | \xi < \kappa\}$$

1.Fall Ist $\mathrm{Card}(M) < \kappa$, so existiert da κ regulär ist, nach dem Schubfachprinzip ein $r \in \mathcal{P}_\mu(\kappa)$ und eine κ-große Teilmenge $M^* \subseteq M$, sodaß $\mathrm{supp}(p) = r$ ist für alle $p \in M^*$. Es gibt aber da κ ein starker Limes ist, nicht κ-viele solche Bedingungen. Widerspruch!

2.Fall Es muß also $\mathrm{Card}(M) = \kappa$ sein. Es gilt dann also $M^* \subseteq \mathcal{P}_\mu(\kappa)$ und

$$\forall \alpha < \kappa : \alpha^{<\mu} \leq \alpha^\mu < \kappa$$

da κ ein starker Limes ist. Nach dem Δ-Lemma (siehe [Kun83] Seiten 49 f.) finden wir dann ein Δ-System $M^* \subseteq M$ der Größe κ. Bezeichne r die Wurzel des Systems. Nach dem Schubfachprinzip finden wir dann ein $M^{**} \subseteq M^*$ der Größe κ, sodaß für alle p_{ξ_1}, p_{ξ_2} mit $supp(p_{\xi_1}), \mathrm{supp}(p_{\xi_2}) \in M^{**}$ gilt, daß

$$p_{\xi_2} \restriction r = p_{\xi_1} \restriction r$$

Insbesondere sind alle Bedingungen p_ξ mit $\mathrm{supp}(p_\xi) \in M^{**}$ kompatibel.

(b) Sei $\eta < \mu$ und $\langle p_\xi : \xi < \eta \rangle$ eine absteigende Folge. Definiere eine Funktion p auf κ, sodaß $p(\zeta) = \bigcup_{\xi<\eta} p_\xi(\zeta)$ für alle $\zeta < \kappa$. Da die p_ξ absteigend waren, sind die $p(\zeta)$ wieder Funktionen, und da μ regulär ist und $\eta < \mu$, sind die $p(\zeta) \in {}^{<\mu}\zeta$. Ferner gilt natürlich $\mathrm{supp}(p) = \bigcup_{\xi<\eta} \mathrm{supp}(p_\xi)$, und damit wie oben, daß $\mathrm{supp}(p) \in \mathcal{P}_\mu(\kappa)$. Damit ist $p \in \mathrm{Col}(\mu, <\kappa)$ und offensichtlich eine untere Schranke der $\langle p_\xi : \xi < \eta \rangle$.$\dashv$

Sei $\mu \geq \aleph_2$ eine reguläre Kardinalzahl, und $\kappa > \mu$ meßbar.

Sei dann jetzt $G \subseteq \mathrm{Col}(\mu, {<}\kappa)$ ein über V generischer Filter. Als Kandidaten für die zweite partielle Ordnung wählen wir das Prikry-Forcing $\mathbb{P} \in V \subseteq V[G]$. Sei also $H \subseteq \mathbb{P}$ ein über $W := V[G]$ generischer Filter.

Der Beweis zerfällt dann jetzt in zwei Etappen.

1. Nach dem Produktlemma ist H generisch über V und G generisch über $V[H]$. Ferner gilt nach Satz 2.1.9 in Verbindung mit Satz 2.1.8

$$ {}^{<\mu}{}_{\mathrm{Col}(\mu,<\kappa)} \cap V[H] \subseteq V $$

   Insbesondere folgt, daß $\mathrm{Col}(\mu, {<}\kappa)$ auch in $V[H]$ ${<}\mu$-abgeschlossen ist. Also ist

$$ \mathcal{P}_\mu^{V[H]}(\mu) = \mathcal{P}_\mu^{V[H][G]}(\mu) $$

   Wieder wegen Satz 2.1.9 und Satz 2.1.8 folgt ferner, daß

$$ \mathcal{P}_\mu^{V}(\mu) = \mathcal{P}_\mu^{V[H]}(\mu) $$

   Wir erhalten also:

$$ \begin{tikzcd} & \mathcal{P}_\mu^{W}(\mu) \arrow[dr, "\subseteq"] & \\ \mathcal{P}_\mu^{V}(\mu) \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[rr, "="] & & \mathcal{P}_\mu^{W[H]}(\mu) \end{tikzcd} $$

2. Da ja $\mathrm{Col}(\mu, {<}\kappa)$ die κ-c.c. hat, ist $(\mu^+)^{V[G]} = \kappa$. Weiterhin ist natürlich auch in $V[G]$ das Resultat Lemma 2.1.4 gültig, daß $h := \bigcup\{t \mid \exists T : (t, T) \in H\}$ kofinal in κ und abzählbar ist. Dann gilt auch

$$ \mathrm{cof}^{V[G][H]}((\mu^+)^{V[G]}) = \mathrm{cof}^{V[G][H]}(\kappa) = \omega $$

Zusammenfassend gilt also:

- $\mathrm{cof}^{W[H]}((\mu^+)^W) = \omega$
- $\forall \alpha \leq \mu : \mathrm{cof}^{W[H]}(\alpha) = \mathrm{cof}^W(\alpha) \wedge \mathrm{Card}^{W[H]}(\alpha) = \mathrm{Card}^W(\alpha)$

q.e.d.

3 Iterien von Prikry-Typ-Forcings

3.1 Iteriertes Forcing

Grundlagen

Wie der Name dieses Abschnittes bereits verrät, wollen wir eine Methode vorstellen, wie man Forcing iterieren kann. Naturgemäß fangen wir ersteinmal mit den einfachsten Fall an, den wir auch in einem allgemeinen Kontext besprechen wollen, im Gegensatz zu dem allgemeineren Fall, wo wir uns auf das für uns Wesentliche beschränken wollen.

Die Situation mit der wir uns im Folgenden auseindersetzen werden, sieht so aus, daß wir mit einer partiellen Ordnung $\mathbb{P}$ anfangen, und zum anderen einen $\mathbb{P}$-Namen $\dot{Q}$ für eine partielle Ordnung in der generischen Erweiterung haben. Die intuitive Methode, aus diesen beiden Objekten eine neue partielle Ordnung zu extrahieren, liefert in diesem Fall den richtigen Ansatz. Wir nehmen als Objekte Paare $(p, \dot{q})$, sodaß

$$p \in \mathbb{P} \wedge \dot{q} \in V^{\mathbb{P}} \wedge p \Vdash \dot{q} \in \dot{Q}$$

was leider nicht ganz so einfach geht, denn es gibt natürlich klassenviele solche Paare und wir hätten natürlich weiterhin gerne ein mengengroßes Forcing. Wir werden also die Klasse der in der zweiten Komponente zugelassenen Namen geeignet ausdünnen. Etwa folgendermaßen:

Proposition 3.1.1: *Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\dot{Q}$ ein $\mathbb{P}$-Name. Sei $p \in \mathbb{P}$ und $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$ sodaß $p \Vdash \dot{q} \in \dot{Q}$, wir definieren:*

$$\dot{q}_{gut} := \{(\tau, p^*) | \operatorname{rank}(\tau) < \operatorname{rank}(\dot{Q}) \wedge p^* \leq p \wedge p^* \Vdash \tau \in \dot{q}\} \tag{3.1}$$

Dann gilt $p \Vdash \dot{q} = \dot{q}_{gut}$.

Beweis: Sei $G \subset \mathbb{P}$ ein generischer Filter über V, sodaß $p \in G$. Zu zeigen ist $\dot{q}^G = \dot{q}^G_{\text{gut}}$

„$\subseteq$" Sei also $\tau^G \in \dot{q}^G$ beliebig. Da $p \Vdash \dot{q} \in \dot{Q}$, und $p \in G$, ist τ^G im transitiven Kollaps von $\dot{Q}^G$, und damit finden wir eine Namen σ, dessen Rang kleiner als der von $\dot{Q}$ ist, und eine Bedingung $p^* \in G$ (die wir o.B.d.A stärker als p wählen können), sodaß $p^* \Vdash \sigma = \tau$ und durch notfalls weitere Verstärkung $p^* \Vdash \tau \in \dot{q}$. Also ist $(\sigma, p^*) \in \dot{q}_{\text{gut}}$, und damit $\tau^G = \sigma^G \in \dot{q}^G_{\text{gut}}$.

„$\supseteq$" Sei $\tau^G \in \dot{q}^G_{\text{gut}}$. Es existiert also ein $p^* \in G$, sodaß $(\tau, p^*) \in \dot{q}_{\text{gut}}$, und damit gilt $p^* \Vdash \tau \in \dot{q}$, also $\tau^G \in \dot{q}^G$ da $p^* \in G$. $\dashv$

Definition 3.1.2: Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

Namen der Art wie in (3.1), für ein $p \in \mathbb{P}$ und $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$ sodaß $p \Vdash \dot{q} \in \dot{Q}$, nennen wir gute Namen für Elemente von $\dot{Q}$ unter der Bedingung p.

Wir können uns für die Definition unseres iterierten Forcings also auf solche „guten“ Namen beschränken, ohne dadurch in der Wahl von Namen besonders eingeschränkt zu sein, denn immer wenn uns im Folgenden solche Namen begegnen werden, können wir sie je nach Bedarf durch gute Namen ersetzen. Im Folgenden werden wir häufig irgendwelche Namen angeben, oder durch „Fullness“ Namen erhalten, die eventuell nicht gut im eben definiertem Sinne sind. Solche Namen soll man sich einfach direkt durch gute Namen ersetzt vorstellen. Man kann es sich auch folgendermaßen vorstellen, daß wir anstatt den Namen selbst, Äquivalenzklassen von Namen unter der Relation

$$\sigma \approx_p \tau \quad \Leftrightarrow \quad p \Vdash \sigma = \tau$$

betrachten, wobei die guten Namen als kanonische Repräsentanten dienen können. Wie man es sich auch vorstellen will, man erhält durch die Einschränkung noch folgendes Ergebnis.

Bemerkung 3.1.3: Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

Seien sowohl $\dot{q}$ als auch $\dot{r}$ gute Namen für Elemente von $\dot{Q}$ unter der Bedingung p. Gilt $p \Vdash \dot{q} = \dot{r}$, so gilt bereits $\dot{q} = \dot{r}$.

Definition 3.1.4: Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

Wir definieren eine partielle Ordnung $\mathbb{P} * \dot{Q}$, wie folgt:

(a) Der Träger von $\mathbb{P} * \dot{Q}$ besteht genau aus den Paaren $(p, \dot{q})$, sodaß
   1. $p \in \mathbb{P}$
   2. $\dot{q} \in V^{\mathbb{P}}$ und $p \Vdash \dot{q} \in \dot{Q}$ (wobei $\dot{q}$ gut im Sinne von Definition 3.1.2 sei)

(b) Für $(p_1, \dot{q}_1), (p_2, \dot{q}_2) \in \mathbb{P} * \dot{Q}$ gilt $(p_1, \dot{q}_1) \leq (p_2, \dot{q}_2)$ genau dann, wenn

$$p_1 \leq p_2 \wedge p_1 \Vdash \dot{q}_1 \dot{\leq} \dot{q}_2$$

Dies ist also nun, die Definition einer sogenannten Zwei-Schritt-Iteration. Sie erinnert etwas an das Produktforcing, und in der Tat, können wir das Produktforcing als einen Spezialfall der Zwei-Schritt-Iteration auffassen. Der nächste Satz ist damit als eine Verallgemeinerung des Produktlemmas zu verstehen.

Satz 3.1.5: *Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit*

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

(a) Sei $K \subseteq \mathbb{P} * \dot{Q}$ generisch über V. Wir definieren dann

$$G := \{p \in \mathbb{P} | \exists \dot{q} \in V^{\mathbb{P}} : (p, \dot{q}) \in K\} \quad , \quad H := \{(\dot{q})^G | \exists p \in \mathbb{P} : (p, \dot{q}) \in K\}$$

Es gilt dann

(a.1) $G \subseteq \mathbb{P}$ ist generisch über V.

(a.2) $H \subseteq \dot{Q}^G$ ist generisch über $V[G]$.

(a.3) $K = G * H = \{(p, \dot{q}) | p \in G \wedge (\dot{q})^G \in H\}$

(a.4) $V[K] = V[G * H] = V[G][H]$

(b) Sei $G \subseteq \mathbb{P}$ generisch über V und ferner $H \subseteq \dot{Q}^G$ generisch über $V[G]$. Dann gilt

(b.1) $G * H = \{(p, \dot{q}) | p \in G \wedge (\dot{q})^G \in H\} \subseteq \mathbb{P} * \dot{Q}$ ist generisch über V.

(b.2) $V[G * H] = V[G][H]$

Beweis: Sei $K \subseteq \mathbb{P} * \dot{Q}$ generisch über V.

(a.1) Man sieht leicht, daß G ein Filter ist. Sei dann $D \subseteq \mathbb{P}$ dicht. Definiere dann

$$D^* := \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{Q} | p \in D\}$$

Sei dann $(p, \dot{q})$ beliebig in $\mathbb{P} * \dot{Q}$. Da D dicht ist, finden wir ein $p^* \leq p$ in D. Dann ist aber $(p^*, \dot{q}) \leq (p, \dot{q})$ in D^*. Also ist D^* dicht, und damit ist $D^* \cap K \neq \varnothing$. Für ein $(p, \dot{q}) \in D^* \cap K$ ist dann $p \in D \cap G$.

(a.3) Nach Definition ist klar, daß $K \subseteq G * H$, sei also $(p, \dot{q}) \in G * H$ beliebig. Wir finden dann ein $\dot{q}_1$, sodaß $(p, \dot{q}_1) \in K$ und p_1, sodaß $(p_1, \dot{q}) \in K$. Da K ein Filter ist können wir dann ein $(p_2, \dot{q}_2) \in K$ finden, sodaß $(p_2, \dot{q}_2) \leq (p, \dot{q}_1), (p_1, \dot{q})$. Damit ist aber auch $(p_2, \dot{q}_2) \leq (p, \dot{q})$, also auch $(p, \dot{q}) \in K$. Dies zeigt $G * H \subseteq K$.

(a.2) Zeigen wir zuerst, daß H ein Filter ist. Seien dazu zuerst, $q_1, q_2 \in H$ beliebig, dann existieren $(p_1, \dot{q}_1), (p_2, \dot{q}_2) \in K$ mit $q_i = \dot{q}_i^G$. Da K ein Filter ist, folgt, daß es ein $(p, \dot{q}) \in K$ gibt mit $(p, \dot{q}) \leq (p_1, \dot{q}_1), (p_2, \dot{q}_2)$. Da damit $p \in G$ ist, folgt daß $\dot{q}^G \in H$ und $\dot{q}^G \leq q_1, q_2$. Gelte nun $q_1 \in H$ und $q_1 \leq q_2$. Seien $\dot{q}_i$ geeignete Namen für q_i $(i < 2)$, und $p \in G$ mit $p \Vdash \dot{q}_1 \dot{\leq} \dot{q}_2$. Nach (a.3) gilt $(p, \dot{q}_1) \in K$ und nach Wahl von p auch $(p, \dot{q}_1) \leq (p, \dot{q}_2)$, und damit $(p, \dot{q}_2) \in K$, was $q_2 \in H$ bedeutet.

Sei also schließlich $D \subset \dot{Q}^G$ dicht in $V[G]$. Wählen wir ein $p \in G$, sodaß

$$p \Vdash \sigma \text{ ist dicht.}$$

für ein geeigneten Namen σ für D. Dann definieren wir

$$D^* := \{(p^*, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{Q} | p^* \leq p \wedge p^* \Vdash \dot{q} \in \sigma\}$$

Sei dann $(p^*, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{Q}$ beliebig mit $p^* \leq p$. Da damit

$$p^* \Vdash \sigma \text{ ist dicht.}$$

finden wir ein $\dot{q}_1$, sodaß $p^* \Vdash \dot{q}_1 \,\dot{\leq}\, \dot{q} \wedge \dot{q}_1 \in \sigma$. Also ist $(p^*, \dot{q}_1) \leq (p^*, \dot{q})$ und $(p^*, \dot{q}_1) \in D^*$. Also ist D^* dicht unter $(p, \mathbf{1}_{\dot{Q}})$, und damit ist $K \cap D^* \neq \varnothing$, und für ein $(p^*, \dot{q}) \in D^* \cap K$ ist $\dot{q}^G \in H \cap D$.

Sei nun $G \subseteq \mathbb{P}$ generisch über V und ferner $H \subseteq \dot{Q}^G$ generisch über $V[G]$.

(b.1) Nach dem bereits gezigten sieht man leicht, daß $G * H$ ein Filter ist. Sei also $D \subseteq \mathbb{P} * \dot{Q}$ dicht. Definiere zuerst

$$D_2 := \{\dot{q}^G \in \dot{Q}^G | \exists p \in G : (p, \dot{q}) \in D\} \subseteq \dot{Q}^G$$

Sei $q \in \dot{Q}^G$ beliebig, wähle ein $p \in G$ mit $p \Vdash \dot{q} \in \dot{Q}$, wobei wie üblich $\dot{q}^G = q$. Definiere dann noch

$$D_1 := \{p_1 \leq p | \exists \dot{q}_1 : (p_1, \dot{q}_1) \leq (p, \dot{q}) \wedge (p_1, \dot{q}_1) \in D\}$$

D_1 ist offensichtlich dicht, da es D ist. Wählen wir also ein $p_1 \in G \cap D_1$ und ein $\dot{q}_1$, daß bezeugt, daß $p_1 \in D_1$. Dann gilt für $q_1 := \dot{q}_1^G$ also $q_1 \leq q$ in D_2. Es ist also D_2 dicht und wir finden ein $q \in H \cap D_2$. Wählen wir ein $p \in G$, das dies bezeugt, so ist $(p, \dot{q}) \in D \cap G * H$, wobei wie üblich $\dot{q}^G = q$.

(a.4) und (b.2) sind klar. $\dashv$

Die Iterierte Forcingrelation

Wir wissen mittlerweile, wie der generische Filter einer Iteration im Zusammenhang mit den Komponenten dieser Iteration steht. Wir wollen nun noch einen genaueren Blick darauf werfen, wie sich die Forcingrelation einer Iteration, in Vergleich zu den Forcingrelationen seiner Komponenten verhält. Für eine Iteration $\mathbb{P} * \dot{Q}$ und $(p, \dot{q})$, wäre dabei etwa folgendes Ergebnis anzustreben:

$$\text{"}(p, \dot{q}) \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Leftrightarrow p \Vdash (\dot{q} \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))\text{"}$$

wobei $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ eine Aussage der Forcingsprache von $\mathbb{P} * \dot{Q}$ sei. Und in der Tat werden wir ungefähr Dieses zeigen, aber vorher müssen wir wieder ein paar Details beachten, denn die rechte Seite der Gleichung macht so eigentlich keinen Sinn (weshalb sie auch in Anführungszeichen steht), denn die $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sind ja $\mathbb{P} * \dot{Q}$-Namen, wir bräuchten aber $\mathbb{P}$-Namen. Glücklicherweise ersinnt man schnell eine recht einsichtige Weise, wie man einen beliebigen $\mathbb{P} * \dot{Q}$-Namen in einen $\mathbb{P}$-Namen für einen $\dot{Q}$-Namen übersetzen kann.

Definition 3.1.6: Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

Sei σ ein $\mathbb{P} * \dot{Q}$-Name. Wir definieren durch Induktion über den Rang des Namens

$$\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma) := \{(\lceil \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau), \dot{q} \rceil, p) | (\tau, (p, \dot{q})) \in \sigma\}$$

wobei $\lceil \tau_1, \tau_2 \rceil$ für zwei Namen τ_1, τ_2 den Standardnamen für das Paar (τ_1^G, τ_2^G) in einer generischen Erweiterung $V[G]$ bezeichne.

Das Folgende ergibt sich sofort, durch Induktion über den Rang des Namens.

Bemerkung 3.1.7: Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

Sei σ ein $\mathbb{P} * \dot{Q}$-Name.

(a) $\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma)$ ist ein $\dot{Q}$-Name

(b) $\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}} : V^{\mathbb{P}*\dot{Q}} \to V$ ist eine injektive Abbildung.

Das diese Übersetzung injektiv ist erlaubt uns zumindest partiell eine Umkehrung, womit wir uns aber nicht gänzlich zufrieden geben können. Daher wollen wir eine möglichst weitdefinierte Umkehrfunktion. Bis auf einige Details erscheint auch hier das Vorgehen klar.

Definition 3.1.8: Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

τ sei ein $\mathbb{P}$-Name, sodaß ($p \Vdash \tau$ ist ein $\dot{Q}$-Name) für ein $p \in \mathbb{P}$.

Unsere endgültige Übersetzung von τ in einen $\mathbb{P}*\dot{Q}$-Namen, wird natürlich von diesem p abhängen müssen, da natürlich nicht alle Bedingungen erzwingen müssen, daß es sich bei τ überhaupt um einen $\dot{Q}$-Namen handelt.

Als erstes wollen wir τ durch ein τ^* ersetzen, sodaß $\operatorname{ran}(\tau^*) \subseteq \{p^* \in \mathbb{P} | p^* \leq p\}$. Dabei gehen uns natürlich Informationen verloren, wir können aber noch garantieren, daß $p \Vdash \tau = \tau^*$. Man sieht dann leicht, daß für alle $(\rho, p^*) \in \tau^*$ gelten muß, daß

$$p^* \Vdash \rho = (\sigma_\rho, \dot{q}_\rho) \wedge \dot{q}_\rho \in \dot{Q} \wedge \sigma_\rho \text{ ist ein } \dot{Q}\text{-Name}$$

für geeignete $\mathbb{P}$-Namen $\sigma_\rho, \dot{q}_\rho$, wobei wir diese so wählen können, daß

$$\operatorname{rank}(\sigma_\rho) \leq \operatorname{rank}(\rho) < \operatorname{rank}(\tau^*) \leq \operatorname{rank}(\tau)$$

Durch Rekursion über den Rang des Namens können wir also letzlich definieren

$$(\Theta^p_{\mathbb{P}*\dot{Q}})^{-1}(\tau) = \begin{cases} \sigma & \tau = \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma) \\ \{((\Theta^p_{\mathbb{P}*\dot{Q}})^{-1}(\sigma_\rho), (p^*, \dot{q}_\rho)) | (\rho, p^*) \in \tau^*\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Zusammenhang zwischen unsere Übersetzungsabbildungen klärt sich rasch.

Bemerkung 3.1.9: Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \text{ ist eine partielle Ordnung}$$

(a) Sei σ ein $\mathbb{P} * \dot{Q}$-Name. Dann ist $(\Theta^p_{\mathbb{P}*\dot{Q}})^{-1}(\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma)) = \sigma$ für alle $p \in \mathbb{P}$.

(b) τ sei ein $\mathbb{P}$-Name, sodaß ($p \Vdash \tau$ ist ein $\dot{Q}$-Name) für ein $p \in \mathbb{P}$. Dann gilt ($p \Vdash \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}((\Theta^p_{\mathbb{P}*\dot{Q}})^{-1}(\tau)) = \tau$).

Satz 3.1.10: *Sei $\langle \mathbb{P}, \leq \rangle$ eine partielle Ordnung, $\langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle$ ein $\mathbb{P}$-Name mit*

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}} \Vdash \langle \dot{Q}, \dot{\leq} \rangle \textit{ ist eine partielle Ordnung}$$

Sei $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ eine Aussage der Forcingsprache von $\mathbb{P} * \dot{Q}$. Dann gilt für $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{Q}$

$$(p, \dot{q}) \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Leftrightarrow p \Vdash (\dot{q} \Vdash \varphi(\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_1), \ldots, \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_n)))$$

Beweis:

Behauptung: *Sei τ ein $\mathbb{P} * \dot{Q}$-Name und $G * H \subset \mathbb{P} * \dot{Q}$ ein generischer Filter. Dann ist $\tau^{G*H} = ((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau))^G)^H$.*

Beweis der Behauptung (durch Induktion nach Rang des Namens):

$$\begin{aligned}
\tau^{G*H} =& \{\sigma^{G*H} | \exists (p, \dot{q}) \in G * H : (\sigma, (p, \dot{q})) \in \tau\} \\
\overset{I.V.}{=}& \{((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma))^G)^H | \exists \dot{q}^G \in H \exists p \in G : (\lceil \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma), \dot{q} \rceil, p) \in \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau)\} \\
=& \{((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma))^G)^H | \exists \dot{q}^G \in H : ((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma))^G, \dot{q}^G) \in (\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau))^G\} \\
=& \{((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma))^G)^H | ((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\sigma))^G)^H \in ((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau))^G)^H\} \\
=& ((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau))^G)^H
\end{aligned}$$

□

Fixieren wir dann jetzt ein $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P} * \dot{Q}$, dann:

„⇒" Gelte $(p, \dot{q}) \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, und sei $G \subset \mathbb{P}$ ein über V generischer Filter mit $p \in G$. Zu zeigen ist dann, daß $\dot{q}^G \Vdash \varphi((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_1))^G, \ldots, (\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_n))^G)$.

Sei also $H \subset \dot{Q}^G$ generisch über $V[G]$ mit $\dot{q}^G \in H$. Nach Satz 3.1.5 ist dann $G * H$ ein $\mathbb{P} * \dot{Q}$-generischer Filter mit $(p, \dot{q}) \in G * H$, also

$$\begin{aligned}
& V[G * H] \models \varphi(\tau_1^{G*H}, \ldots, \tau_n^{G*H}) \\
\overset{\text{Beh.3.1.5}}{\Rightarrow} & V[G][H] \models \varphi(((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_1))^G)^H, \ldots, ((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_n))^G)^H)
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

„$\Leftarrow$" Gelte $p \Vdash (q \Vdash \varphi(\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_1), \dots, \Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_n)))$ und sei $K \subset \mathbb{P} * \dot{Q}$ generisch über V mit $(p, \dot{q}) \in K$. Nach Satz 3.1.5 finden wir dann $G \subset \mathbb{P}$ generisch über V, sodaß $p \in G$ und $H \subset \dot{Q}^G$ generisch über $V[G]$ mit $\dot{q}^G \in H$, sodaß $K = G * H$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$V[G] \models \dot{q}^G \Vdash \varphi((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_1))^G, \dots, (\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_n))^G)$$

also auch

$$\begin{aligned} & V[G][H] \models \varphi(((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_1))^G)^H, \dots, ((\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}(\tau_n))^G)^H) \\ \overset{\text{Beh.3.1.5}}{\Rightarrow} & V[G*H] \models \varphi(\tau_1^{G*H}, \dots, \tau_n^{G*H}) \end{aligned}$$

was zu zeigen war. $\dashv$

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel zusammengetragen, die wir aus der allgemeinen Theorie der Zwei-Schritt-Iteration verwenden werden. Wir wollen jetzt ohne Umwege zu der Art von iterierten Forcing kommen, die uns wirklich interessiert.

3.2 Gitik-Iterationen

Definition 3.2.1:

$$\langle\langle\langle \mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^* \rangle : \beta \leq \Omega \rangle, \langle\langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta \rangle : \beta < \Omega \rangle\rangle$$

heißt eine Gitik-Iteration, genau dann wenn Folgendes gilt:

(a) Ist $\beta < \Omega$ nicht unerreichbar, so gilt

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \dot{Q}_\beta = \{\varnothing\}$$

(b) Für alle $\beta < \Omega$,

- $\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta \rangle$ ist ein schwach $<\check{\beta}$-abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing
- $(\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \mathrm{Card}(\dot{Q}_\beta) < \check{\delta})$, wobei $\delta = \min\{\beta < \xi | \xi \text{ ist unerreichbar}\}$.

(c) Die Elemente von $\mathbb{P}_\beta$ sind genau die Funktionen p mit Domain β, für welche folgende Bedingungen gelten

- p hat Easton-Support, d.h. für alle unerreichbaren λ ist $\lambda \cap \mathrm{supp}(p) (:= \{\xi < \beta | p \restriction \xi \nVdash p(\xi) = \mathbf{1}\})$ beschränkt in λ.
- $\forall \xi < \beta : p \restriction \xi \in \mathbb{P}_\xi$
- Für alle $\xi < \beta$ ist $p(\xi)$ ein $\mathbb{P}_\beta$ Name, sodaß $p \restriction \xi \Vdash p(\xi) \in \dot{Q}_\xi$. (auch hier wollen wir aber nur Namen zulassen die gut im Sinne von Definition 3.1.2 sind)

(d) Für zwei Elemente $p, q \in P_\beta$ gilt $p \leq q$ genau dann wenn:

- $\forall \xi < \beta : p \restriction \xi \Vdash p(\xi) \dot{\leq}_\xi q(\xi)$
- Die Menge $b(p,q) := \{\xi < \beta | p \restriction \xi \nVdash p(\xi) \dot{\leq}^*_\xi q(\xi)\}$ ist endlich.

(e) Für zwei Elemente $p, q \in P_\beta$ gilt $p \leq^* q$ genau dann wenn:

$$\forall \xi < \beta : p \restriction \xi \Vdash p(\xi) \dot{\leq}^*_\xi q(\xi)$$

d.h. $p \leq q$ und die Menge $b(p,q)$ definiert wie in (d) ist leer. Wir nennen p auch eine direkte Erweiterung von q.

Da eine solche Iteration natürlich nur von der Folge $\langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta : \beta < \Omega \rangle$ abhängt, nennen wir es oft auch einfach die Gitik-Iteration der $\langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta : \beta < \Omega \rangle$. Ferner bezeichnen wir mit $\mathrm{NT}(\mathbb{P}_\beta) := \{\xi < \beta | \mathbf{1}_{\mathbb{P}_\xi} \nVdash \dot{Q}_\xi = \{\varnothing\}\}$ die nicht-trivialen Stellen der Iteration.

Die Gitik-Iteration ist in der Tat fast eine Iteration im gewöhnlichem Sinne, mit einer Besonderheit die an die speziellen Bedürfnisse von Prikry-Typ-Forcings angepasst ist (wir meinen die Forderung, daß die $b(p,q)$ endlich sein müssen).

Für viele Zwecke ist es sehr nützlich bei einer generischen Erweiterung durch ein iteriertes Forcing, ein Anfangsstück der Iteration zu betrachten, um ein Zwischenmodell zwichen dem Grundmodell und der generischen Erweiterung zu erhalten. Aus diesen Grund wollen wir nun erstmal betrachten an welchen Stellen man Gitik-Iterationen zweiteilen kann.

Die Gitik-Iteration als Iteration

Bis zu einen gewissen Grad kann man sich vorstellen, daß die Gitik-Iteration aus der wiederholten Anwendung der Zwei-Schritt-Iteration hervorgeht;offensichtlich gilt schließlich Folgendes:

Proposition 3.2.2:

$$\langle \langle \langle \mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^* \rangle : \beta \leq \Omega \rangle, \langle \langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta \rangle : \beta < \Omega \rangle \rangle$$

sei eine Gitik-Iteration, sei $\alpha < \Omega$ beliebig. Definiere

$$\begin{aligned} \pi_\xi : \mathbb{P}_{\alpha+1} &\longrightarrow \mathbb{P}_\alpha * \dot{Q}_\alpha \\ p &\longmapsto (p \restriction \alpha, p(\alpha)) \end{aligned}$$

π_ξ ist ein Isomorphismus.

Im allgemeinen Fall ist es hingegen nicht so klar, daß jede Gitik-Iteration an jeder Stelle, in zwei klar getrennte Teile zerfällt. Dies liegt vornehmlich an der zweiten Bedingung in der Definition 3.2.1 Teil (d), eine Bedingung, die wir benötigen, weil wir schließlich speziell Prikry-Typ-Forcings iterieren wollen. Nichtsdestotrotz erlaubt uns auch diese Konstruktion jederzeit eine Spaltung, aber bevor wir dazu kommen, noch eine kleine Bemerkung.

Bemerkung 3.2.3:

$$\langle\langle\langle \mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^* \rangle : \beta \leq \Omega\rangle, \langle\langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta \rangle : \beta < \Omega\rangle\rangle$$

sei eine Gitik-Iteration, sei $\alpha < \Omega$ beliebig, und sei $\delta = \min\{\alpha < \xi | \xi \text{ ist unerreichbar}\}$. Dann gilt $\mathrm{Card}(\mathbb{P}_\alpha) < \delta$.

Beweis (durch Induktion nach α):

$\alpha = 0$ Trivial

$\lim(\alpha)$ Es gilt dann nach I.V. $\mathrm{Card}(\mathbb{P}_\beta) < \delta$ für $\beta < \alpha$, also

$$\mathrm{Card}(\mathbb{P}_\alpha) \leq \prod_{\beta<\alpha} \mathrm{Card}(\mathbb{P}_\beta) < \alpha \cdot \delta = \delta$$

$\alpha = \bar{\alpha} + 1$ Sei jetzt $\langle p_\xi : \xi < \delta\rangle \subseteq \mathbb{P}_\alpha$. Zu zeigen ist $\exists \xi_1 \neq \xi_2 : p_{\xi_1} = p_{\xi_2}$. Nach dem Schubfachprinzip können wir auf jeden Fall annehmen, daß $p_\xi \restriction \bar{\alpha}$ gleich ist für alle $\xi < \delta$. Also ist $p_\xi = p^\frown \langle \dot{q_\xi}\rangle$ für jedes $\xi < \delta$ und ein geeignetes $p \in \mathbb{P}_{\bar{\alpha}}$.

Behauptung: *Es gibt ein $\gamma < \delta$, sodaß*

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{\bar{\alpha}}} \Vdash \mathrm{Card}(\dot{Q}_{\bar{\alpha}}) < \check{\gamma}$$

Beweis der Behauptung: Wir wissen bereits, daß $\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{\bar{\alpha}}} \Vdash \mathrm{Card}(\dot{Q}_{\bar{\alpha}}) < \check{\delta}$, also ist natürlich

$$D := \{p \in \mathbb{P}_{\bar{\alpha}} | \exists \gamma_p < \delta : p \Vdash \mathrm{Card}(\dot{Q}_{\bar{\alpha}}) = \check{\gamma}_p\}$$

dicht. Nach I.V. ist $\mathrm{Card}(D) < \delta$, und damit ist auch $\sup_{p\in D} \gamma_p < \delta$. Also wäre etwa $\gamma = \sup_{p\in D} \gamma_p + 1$ wie gewünscht. □

Da jetzt gilt $p \Vdash \langle \dot{q_\xi} : \xi < \check{\delta}\rangle \subset \dot{Q}_{\bar{\alpha}}$, gibt es insbesondere $\xi_1, \xi_2 < \delta$, sodaß $p \Vdash \dot{q_{\xi_1}} = \dot{q_{\xi_2}}$, was da wir ja nur gute Namen zulassen, bedeutet, daß $\dot{q_{\xi_1}} = \dot{q_{\xi_2}}$. Also auch $p_{\xi_1} = p_{\xi_2}$. ⊣

Satz 3.2.4:

$$\langle\langle\langle \mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^* \rangle : \beta \leq \Omega\rangle, \langle\langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta \rangle : \beta < \Omega\rangle\rangle$$

sei eine Gitik-Iteration. Sei $\Omega = \alpha + \eta$. Definiere rekursiv

$$\langle \pi^\zeta_\alpha : \zeta \leq \eta\rangle, \langle \dot{\mathbb{P}}^\zeta_\alpha : \zeta \leq \eta\rangle$$

durch

1. *Für alle $\zeta \leq \eta$ sei $\dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta$ ein $\mathbb{P}_\alpha$-Name, sodaß*

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta \text{ ist die Gitik-Iteration der } \langle \Theta_{\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta}(\tilde{\pi}_\alpha^\xi(\dot{Q}_{\alpha+\xi})) : \xi < \check{\zeta} \rangle$$

   wobei $\tilde{\pi}_\alpha^\xi$ für die Induzierte Abbildung auf den Namen steht.

2.

$$\pi_\alpha^\zeta : \mathbb{P}_{\alpha+\zeta} \longrightarrow \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta \qquad\qquad p \longmapsto (p \restriction \alpha, \dot{p}_\alpha^\zeta)$$

   wobei $\dot{p}_\alpha^\zeta := \{ \lceil \check{\xi}, \Theta_{\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta}(\tilde{\pi}_\alpha^\xi(p(\alpha+\xi))) \rceil | \xi < \zeta \}$

Es gilt dann für alle $\zeta \leq \eta$

(a) *π_α^ζ ist bijektiv.*

(b) *Für alle $p, q \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$ gilt $(p \leq q \Rightarrow \pi_\alpha^\zeta(p) \leq \pi_\alpha^\zeta(q))$*

(c) *Für alle $p, q \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$ gilt $(p \perp q \Rightarrow \pi_\alpha^\zeta(p) \perp \pi_\alpha^\zeta(q))$*

(d) *Für alle $p, q \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$ gilt $(p \leq^* q \Leftrightarrow \pi_\alpha^\zeta(p) \leq^* \pi_\alpha^\zeta(q))$*

Insbesondere ist π_α^ζ für alle $\zeta < \eta$ eine dichte Einbettung. Damit gilt insbesondere $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ für jede Aussage der Forcingsprache von $\mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$, daß für alle $p \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Leftrightarrow \pi_\alpha^\zeta(p) \Vdash \varphi(\tilde{\pi}_\alpha^\zeta(\tau_1), \ldots, \tilde{\pi}_\alpha^\zeta(\tau_n))$$

Beweis (durch Induktion nach ζ): Sei die Aussage bereits für alle $\xi < \zeta$ nachgewiesen. Der Einfachheit halber schreiben wir Φ_α^ζ für $\Theta_{\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta} \circ \tilde{\pi}_\alpha^\zeta$. Man bemerke als erstes, daß für $p \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$ gilt, daß für $\xi < \zeta$

$$p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}_\alpha^\xi = \dot{p}_\alpha^\zeta \restriction \check{\xi}$$

Damit können wir die I.V. kombiniert mit Satz 3.1.10 anwenden um folgende zentrale Gleichung für beliebige Aussagen $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ und alle $\xi < \zeta$ zu erhalten.

$$p \restriction (\alpha+\xi) \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Leftrightarrow p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}_\alpha^\zeta \restriction \xi \Vdash \varphi(\Phi_\alpha^\zeta(\tau_1), \ldots, \Phi_\alpha^\zeta(\tau_n)) \tag{3.2}$$

Auf diese Gleichung werden wir im folgenden häufig zurückgreifen, so ist auch erst mit dieser überhaupt klar, daß π_α^ζ überhaupt wohldefiniert ist. So wissen wir jetzt, daß für $\xi < \zeta$

$$p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}_\alpha^\zeta \restriction \check{\xi} \Vdash \dot{p}_\alpha^\zeta(\check{\xi}) \in \Phi_\alpha^\zeta(\dot{Q}_{\alpha+\xi})$$

oder daß

$$p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}_\alpha^\zeta \text{ hat Easton-Support}$$

Also $p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}_\alpha^\zeta \in \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta$. Damit können wir uns aber nun den eigentlichen Beweis widmen.

(a) Der Beweis von (a) zerfällt naturgemäß in zwei Teile.

(a.1) Seien $p, q \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$ mit $\pi_\alpha^\zeta(p) = \pi_\alpha^\zeta(q)$. Daraus folgt sofort $p \restriction \alpha = q \restriction \alpha$. Wir zeigen dann noch

Behauptung 1: *Für alle $\xi \leq \zeta$ gilt $p \restriction (\alpha+\xi) = q \restriction (\alpha+\xi)$.*

Beweis der Behauptung (duch Induktion nach ξ): Induktionsanfang und Induktionsschritt für Limeszahlen sind trivial. Gehen wir also davon aus, daß bereits $p \restriction (\alpha+\xi) = q \restriction (\alpha+\xi)$ gelte. Nach Vorraussetzung gilt dann noch zusätzlich

$$p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}_\alpha^\zeta \restriction \check{\xi} \Vdash \Phi_\alpha^\xi(p(\alpha+\xi)) = \Phi_\alpha^\xi(q(\alpha+\xi)) \overset{(3.2)}{\Leftrightarrow} p \restriction (\alpha+\xi) \Vdash q(\alpha+\xi) = p(\alpha+\xi)$$

Da aber ja $q(\alpha+\xi), p(\alpha+\xi)$ gute Namen sind folgt bereits echte Gleichheit, und damit auch $p \restriction (\alpha+\xi+1) = q \restriction (\alpha+\xi+1)$. □

Mit der Behauptung folgt offensichtlich $p = q$, also ist π_α^ζ injektiv.

(a.2) Sei $(p, \dot{q}) \in \mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\zeta$ beliebig. Es gilt also

$$p \Vdash \dot{q} \text{ ist eine Funktion } \wedge \operatorname{dom}(\dot{q}) = \check{\zeta} \wedge \forall \xi < \check{\zeta} : \dot{q}(\xi) \in \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\xi$$

Insbesondere finden wir Namen $\dot{q}_\xi$, sodaß $p \Vdash \dot{q}(\xi) = \dot{q}_\xi$. Schreiben wir $(\Theta_\xi^p)^{-1}$ für die entsprechende Funktion aus Definition 3.1.8 (bzgl. der Iteration $\mathbb{P}_\alpha * \dot{\mathbb{P}}_\alpha^\xi$). Dann setzen wir

$$p^* = p ^\frown \langle (\tilde{\pi}_\alpha^\xi)^{-1}((\Theta_\xi^p)^{-1}(\dot{q}_\xi)) : \xi < \zeta \rangle$$

Behauptung 2: $p^* \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$

Beweis der Behauptung:

1. Wir zeigen zuerst, daß für alle $\xi < \zeta$

$$p^* \restriction (\alpha+\xi) \Vdash p^*(\alpha+\xi) \in \dot{Q}_{\alpha+\xi}$$

Sei $\xi < \zeta$, dann ist $\Phi_\alpha^\xi(p^*(\alpha+\xi)) = \dot{q}_\xi$ und damit folgt unter verwendung von (3.2)

$$p \Vdash \dot{q} \restriction \check{\xi} \Vdash \dot{q}_\xi \in \Phi_\alpha^\xi(\dot{Q}_{\alpha+\xi}) \Rightarrow p^* \restriction (\alpha+\xi) \Vdash p^*(\alpha+\xi) \in \dot{Q}_{\alpha+\xi}$$

2. Es bleibt noch zu zeigen, daß p^* Easton-Support hat. Sei λ eine unerreichbare Kardinalzahl. Für $\lambda \leq \alpha$ ist die Sache klar, sei also $\lambda > \alpha$. Nach Vor. gilt

$$p \Vdash \exists \sigma < \lambda : \operatorname{supp}(\dot{q}) \cap \check{\lambda} \subset \sigma$$

Da ferner nach Bemerkung 3.2.3 $\operatorname{Card}(\mathbb{P}_\alpha) < \lambda$ existiert nach dem gleichen Argument wie im Beweis von Bemerkung 3.2.3 ein $\gamma < \lambda$, sodaß

$$p \Vdash \operatorname{supp}(\dot{q}) \cap \check{\lambda} \subset \check{\gamma}$$

Also gilt für alle $\gamma \leq \xi < \lambda$ unter Verwendung von (3.2)

$$p \Vdash \dot{q} \restriction \check{\xi} \Vdash \dot{q}_\xi = \mathbf{1} \Rightarrow p^* \restriction (\alpha + \xi) \Vdash p^*(\alpha + \xi) = \mathbf{1}$$

Das heißt $\operatorname{supp}(p^*) \cap \lambda \subset \gamma$. $\square$

Da nach Konstruktion $\pi^\zeta_\alpha(p^*) = (p, \dot{q})$, zeigt dies, daß π^ζ_α surjektiv ist.

(b) Seien $p, q \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$ mit $p \leq q$, dann gilt also zum ersten $p \restriction \alpha \leq q \restriction \alpha$ und zum anderen für alle $\xi < \zeta$

$$p \restriction (\alpha + \xi) \Vdash p(\alpha + \xi) \leq q(\alpha + \xi)$$

unter Verwendung von (3.2) erhalten wir also

$$p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}^\zeta_\alpha \restriction \check{\xi} \Vdash \dot{p}^\zeta_\alpha(\check{\xi}) \leq \dot{q}^\zeta_\alpha(\check{\xi})$$

mit den gleichen Argument erhält man auch

$$p \restriction \alpha \Vdash b(\dot{p}^\zeta_\alpha, \dot{q}^\zeta_\alpha) = \check{b}(p, q) \cap [\alpha, \infty)$$

(man erinnere sich, daß für $p, q \in \mathbb{P}_\alpha$ $b(p, q) = \{\xi < \alpha | p \restriction \xi \nVdash p(\xi) \leq^* q(\xi)\}$) wir erhalten also $p \restriction \alpha \leq q \restriction \alpha$ und $p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}^\zeta_\alpha \leq \dot{q}^\zeta_\alpha$, wie gewünscht.

(c) Seien $p, q \in \mathbb{P}_\alpha$, sodaß $\pi^\zeta_\alpha(p)$ und $\pi^\zeta_\alpha(q)$ kompatibel sind. Wählen wir ein $r \in \mathbb{P}_\alpha$ mit $\pi^\zeta_\alpha(r) \leq \pi^\zeta_\alpha(p), \pi^\zeta_\alpha(q)$ (hier nutzen wir die Surjektivität aus) Es gilt also $r \restriction \alpha \leq p \restriction \alpha, q \restriction \alpha$ und für alle $\xi < \zeta$

- $r \restriction \alpha \Vdash \dot{r}^\zeta_\alpha \restriction \xi \Vdash \dot{r}^\xi_\alpha(\xi) \leq \dot{p}^\xi_\alpha(\xi), \dot{q}^\xi_\alpha(\xi)$
- $r \restriction \alpha \Vdash b(\dot{r}^\zeta_\alpha, \dot{p}^\zeta_\alpha), b(\dot{r}^\zeta_\alpha, \dot{q}^\zeta_\alpha)$ sind endlich

Wir wählen dann $r^* \leq r \restriction \alpha$, sodaß endliche Mengen $b_0, b_1 \subset \zeta$ existieren mit

$$r^* \Vdash b(\dot{r}^\zeta_\alpha, \dot{p}^\zeta_\alpha) = \check{b_0} \wedge b(\dot{r}^\zeta_\alpha, \dot{q}^\zeta_\alpha) = \check{b_1}$$

Unter Verwendung von (3.2) erhält man daraus, wie gewohnt $(\pi^\zeta_\alpha)^{-1}(r^*, r^\zeta_\alpha) \leq p, q$. Also waren p, q kompatibel.

(d) Seien $p, q \in \mathbb{P}_{\alpha+\zeta}$

$$\begin{aligned} p \leq^* q \Leftrightarrow & \forall \xi < \alpha + \zeta : p \restriction \xi \Vdash p(\xi) \leq^* q(\xi) \\ \Leftrightarrow & p \restriction \alpha \leq^* q \restriction \alpha \wedge \forall \xi < \zeta : p \restriction (\alpha + \xi) \Vdash p(\alpha + \xi) \leq^* q(\alpha + \xi) \\ \overset{(3.2)}{\Leftrightarrow} & p \restriction \alpha \leq^* q \restriction \alpha \wedge \forall \xi < \zeta : p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}^\zeta_\alpha \restriction \check{\xi} \Vdash \Phi^\xi_\alpha((p(\xi))) \leq^* \Phi^\xi_\alpha((q(\xi))) \\ \Leftrightarrow & p \restriction \alpha \leq^* q \restriction \alpha \wedge p \restriction \alpha \Vdash \dot{p}^\zeta_\alpha \leq^* \dot{q}^\zeta_\alpha \end{aligned}$$

$\dashv$

Bemerkung 3.2.5:

$$\langle\langle\langle\mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^*\rangle : \beta \leq \Omega\rangle, \langle\langle\dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta\rangle : \beta < \Omega\rangle\rangle$$

sei eine Gitik-Iteration. Das Ergebnis des Satzes erlaubt uns $\mathbb{P}_\alpha$ für jedes $\beta < \alpha < \Omega$ mit einer Zwei-Schritt- oder auch Drei-Schritt-Iteration zu identifizieren.

$$\begin{array}{rcc} \mathbb{P}_\alpha \simeq & \mathbb{P}_{\beta+1} * \mathbb{P}_\alpha/\mathbb{P}_{\beta+1} \simeq & \mathbb{P}_\beta * \dot{Q}_\beta * \mathbb{P}_\alpha/\mathbb{P}_{\beta+1} \\ p \simeq & (p \restriction (\beta+1), \dot{p} \restriction \alpha\backslash(\beta+1)) \simeq & (p \restriction \beta, p(\beta), \dot{p} \restriction \alpha\backslash(\beta+1)) \end{array}$$

Wir werden die Notation etwas mißbrauchen, indem wir einen $\mathbb{P}_\alpha$-Namen mit dem entsprechenden $\mathbb{P}_\beta$-Namen für einen $\mathbb{P}_\alpha/\mathbb{P}_\beta$-Namen identifizieren. Vereinfacht läßt sich dann das Ergebnis des Satzes so darstellen, daß für alle $p \in \mathbb{P}_\alpha$ und alle Aussagen $\varphi(\tau)$ der Forcingsprache von $\mathbb{P}$

$$p \Vdash \varphi(\tau) \Leftrightarrow p \restriction (\beta+1) \Vdash \dot{p} \restriction \alpha\backslash(\beta+1) \Vdash \varphi(\tau) \tag{3.3}$$

$$p \restriction (\beta+1) \Vdash \dot{p} \restriction \alpha\backslash(\beta+1) \Vdash \varphi(\tau) \Leftrightarrow p \restriction \beta \Vdash p(\beta) \Vdash \dot{p} \restriction \alpha\backslash(\beta+1) \Vdash \varphi(\tau) \tag{3.4}$$

Umgekehrt können wir für ein $p \in \mathbb{P}_\beta$ und ein $\dot{q}$, sodaß $p \Vdash \dot{q} \in \mathbb{P}_\alpha/\mathbb{P}_\beta$ mit einem Element in $\mathbb{P}_\alpha$ identifizieren, die wir einfach mit $p^\frown\dot{q}$ bezeichnen wollen. Hier sagt uns der Satz dann:

$$p^\frown\dot{q} \Vdash \varphi(\tau) \Leftrightarrow p \Vdash \dot{q} \Vdash \varphi(\tau)$$

Die Gitik-Iteration als Prikry-Typ-Forcing

Die Gitik-Iteration ist eine Iteration von Prikry-Typ-Forcings, und wir haben jetzt bereits gesehen, wie sie sich als Iteration verhält. Wir wollen aber natürlich noch zeigen, daß sie auch selbst wieder vom Prikry-Typ ist.

Theorem 3.2.6:

$$\langle\langle\langle\mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^*\rangle : \beta \leq \Omega\rangle, \langle\langle\dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta\rangle : \beta < \Omega\rangle\rangle$$

sei eine Gitik-Iteration. Dann ist $\langle\mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^*\rangle$ ein schwach $<\min(\mathrm{NT}(\mathbb{P}_\beta))$-abgesclossenes Prikry-Typ-Forcing für jedes $\beta \leq \Omega$.

Lemma 3.2.7:

$$\langle\langle\langle\mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^*\rangle : \beta \leq \Omega\rangle, \langle\langle\dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta\rangle : \beta < \Omega\rangle\rangle$$

sei eine Gitik-Iteration. Sei $\langle p_\xi : \xi < \eta\rangle \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ eine $\leq^*$-absteigende Folge, mit

$$\forall \xi_1, \xi_2 < \eta : p_{\xi_1} \restriction (\eta+1) = p_{\xi_2} \restriction (\eta+1)$$

Dann hat $\langle p_\xi : \xi < \eta\rangle \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ eine $\leq^*$-untere Schranke in $\mathbb{P}_\alpha$.

Beweis: Wir konstruieren die Schranke $p \restriction \zeta$ für alle $\zeta < \alpha$ durch Rekursion.

Wir beginnnen indem wir $p \restriction (\eta + 1) = p_0 \restriction (\eta + 1)$. Trivialerweise ist dann $p \restriction (\eta + 1)$ eine untere Schranke der $\langle p_\xi \restriction (\eta + 1) : \xi < \eta \rangle$. Das klärt den Induktionsanfang. Der Induktionsschritt für Limeszahlen ist simpel. Gehen wir also davon aus, daß wir bereits $p \restriction \zeta$ definiert hätten, für ein $\zeta > \eta$. Wir suchen, dann einen geeigneten Wert für $p(\zeta)$. Man bemerke ersteinmal, daß nach Definition der Gitik-Iteration

$$p \restriction \zeta \Vdash \dot{Q}_\zeta \text{ ist schwach } {<}\zeta\text{-abgeschlossen}$$

da jetzt nach Vor.

$$p \restriction \zeta \Vdash \langle p_\xi(\zeta) : \xi < \eta \rangle \text{ ist eine } \leq^*\text{-absteigende Folge}$$

finden wir durch „Fullness“ auch ein $\dot{q}$, sodaß

$$p \restriction \zeta \Vdash \dot{q} \text{ ist } \leq^*\text{-untere Schranke der } \langle p_\xi(\zeta) : \xi < \eta \rangle$$

$p(\zeta) = \dot{q}$ ist dann wie gewünscht. ⊣

Lemma 3.2.8:

$$\langle \langle \langle \mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^* \rangle : \beta \leq \Omega \rangle, \langle \langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta \rangle : \beta < \Omega \rangle \rangle$$

sei eine Gitik-Iteration. Ist α Mahlo, so erfüllt $\mathbb{P}_\alpha$ die α-c.c..

Beweis: Sei $\langle p_\xi : \xi < \alpha \rangle \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ beliebig; zu zeigen ist, daß es zwei kompatible Elemente dieser Folge gibt. Für alle $\xi < \alpha$ ist $\mathrm{supp}(p_\xi)$ beschränkt in α, denn eine Gitik-Iteration hat Easton-Support. Ein standard Catch-Up-Argument zeigt, daß

$$C := \{\eta < \alpha | \forall \xi < \eta : \mathrm{supp}(p_\xi) \subseteq \eta\}$$

club in α ist. Da α Mahlo ist, ist damit

$$S^* := C \cap \{\eta < \alpha | \eta \text{ ist unerreichbar}\}$$

stationär. Wir definieren schließlich

$$f : S^* \longrightarrow \alpha \qquad\qquad \xi \longmapsto \sup(\mathrm{supp}(p_\xi) \cap \xi)$$

Auf S^* ist f wegen des Easton-Supports regressiv. Wir finden also nach dem Satz von Fodor ein stationäres $S \subseteq S^*$ und ein $\gamma < \alpha$, sodaß für alle $\xi \in S : f(\xi) = \gamma$. Wir betrachten

$$M := \{p_\xi \restriction \gamma | \xi \in S\} \subseteq \mathbb{P}_\gamma$$

Da S als stationäre Menge unbeschränkt ist, gilt $\mathrm{Card}(M) = \alpha$, nach Bemerkung 3.2.3 ist aber auch $\mathrm{Card}(\mathbb{P}_\gamma) < \alpha$, wir finden also $\mu, \nu < \alpha$ (o.B.d.A $\mu < \nu$) sodaß $p_\mu \restriction \gamma = p_\nu \restriction \gamma$. Ferner stellen wir fest, daß $\mathrm{supp}(p_\mu) \subseteq \nu$, da $\mu < \nu$ und $\nu \in S \subset C$, und daß $\mathrm{supp}(p_\nu) \cap \nu \subseteq \gamma$, da $\sup(\mathrm{supp}(p_\nu) \cap \nu) = \gamma$ wegen $\nu \in S$.

Wir halten also fest, daß bis γ p_μ und p_ν gleich sind, zwischen einschließlich γ und μ ist p_ν trivial, und darüber ist p_μ trivial. Damit sollte einsichtig sein, daß

$$p(\xi) := \begin{cases} p_\mu(\xi) & \xi < \gamma \\ p_\mu(\xi) & \gamma \leq \xi < \nu \\ p_\nu(\xi) & \nu \leq \xi < \alpha \end{cases}$$

eine gemeinsame Verstärkung von p_μ und p_ν darstellt. $\dashv$

Lemma 3.2.9:

$$\langle\langle\langle\mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^*\rangle : \beta \leq \Omega\rangle, \langle\langle\dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta\rangle : \beta < \Omega\rangle\rangle$$

sei eine Gitik-Iteration. Sei $p \in \mathbb{P}_\alpha$ und $\varphi(\tau)$ eine Aussage der Forcingsprache von $\mathbb{P}_\alpha$. Dann exisitiert ein $p^* \leq^* p$, sodaß $p^* \parallel \varphi(\tau)$.

Beweis: Man erinnere sich, daß wir $\varphi^0 \equiv \varphi$ und $\varphi^1 \equiv \neg\varphi$ schreiben. o.B.d.A sei ersteinmal $\operatorname{supp}(p) \neq \varnothing$, sonst wäre nichts zu zeigen. Wir wollen nun durch simultane Rekursion eine $\leq^*$-absteigende Folge von Bedingungen $\langle p_\xi : \xi \leq \eta\rangle$ und eine aufsteigende Folge von Ordinalzahlen $\langle \beta_\xi : 0 < \xi \leq \eta\rangle$ konstruieren, sodaß folgende Bedingungen erfüllt sind.

(a) η ist minimal mit $\operatorname{supp}(p_\eta) = \{\beta_{\delta+1} | \delta + 1 \leq \eta\}$

(b) (b.1) $\beta_1 = \min(\operatorname{supp}(p_0))$

(b.2) Für $1 < \delta + 1 \leq \eta$ ist $\beta_{\delta+1} = \min(\operatorname{supp}(p_\delta) \backslash (\beta_\delta + 1))$

(b.3) Für eine Limeszahl δ ist $\beta_\delta = \sup\limits_{\xi<\delta} \beta_\xi$

(c) (c.1) Für alle $\delta + 1 \leq \eta$ gilt $p_{\delta+1} \upharpoonright \beta_{\delta+1} = p_\delta \upharpoonright \beta_{\delta+1}$.

(c.2) Für eine Limeszahl δ ist $\operatorname{supp}(p_\delta) = \sup\limits_{\xi<\delta} \operatorname{supp}(p_\xi)$

(d) Für alle $\delta + 1 \leq \eta$ und für alle $q \leq p_{\delta+1}$ mit $b(q, p_{\delta+1}) \subset \beta_{\delta+1} + 1$, gilt

$$q \Vdash \varphi^i(\tau) \Rightarrow (q \upharpoonright \beta_{\delta+1})^\frown(\dot{p}_{\delta+1} \upharpoonright \alpha \backslash \beta_{\delta+1}) \Vdash \varphi^i(\tau)$$

Wir stellen uns vor, daß wir angefangen mit p schrittweise durch den Support gehen (siehe (b.2)), und die einzelnen Komponenten durch direkte Erweiterungen ersetzen, welche in einen gewissen Sinne entscheiden, ob der dahinterliegende Teil $\varphi(\tau)$ entscheidet. (Etwa so kann man sich die Bedingung (d) vorstellen)

Wir achten dabei darauf keine früheren Ergebnisse zunichte zu machen (siehe (c.1)), eventuell wird dadurch der Support nach hinten hin länger, aber nichtsdestotrotz zeigt natürlich ein einfaches Argument, das wir dennoch irgendwann den Support voll ausgeschöpft haben (das ist gerade der η-ste Schritt der Rekursion, siehe (a)).

An Limesstellen λ ist natürlich nach (c.1) klar wie p_λ bis β_λ aussehen muß. Nach Lemma 3.2.7 können wir den für die einzelnen Endstücke dann eine gemeinsame Verstärkung finden.

Gehen wir jetzt davon aus, wir hätten ein $\delta \leq \eta$ gegeben, so daß p_ξ und β_ξ für alle $\xi < \delta$ bereits konstruiert seien. Wir stellen ersteinmal fest:

Behauptung 1: *Für alle* $\gamma < \eta$ *ist* $\{\beta_{\xi+1} | \xi < \gamma\} \subset \operatorname{supp}(p_\gamma)$.

Beweis der Behauptung (durch Induktion nach γ):

IA Nach (b.1) ist $\beta_1 \in \operatorname{supp}(p_0) \subset \operatorname{supp}(p_1)$.

IS1 Gelte bereits $\{\beta_{\xi+1} | \xi \leq \gamma\} \subset \operatorname{supp}(p_\gamma)$. Ferner gilt nach (b.2), daß $\beta_{\gamma+1} \in \operatorname{supp}(p_\gamma)$, also da $\operatorname{supp}(p_\gamma) \subset \operatorname{supp}(p_{\gamma+1})$

$$\{\beta_{\xi+1} | \xi < \gamma + 1\} = \{\beta_{\xi+1} | \xi < \gamma\} \cup \{\beta_{\gamma+1}\} \subset \operatorname{supp}(p_{\gamma+1})$$

IS2 Sei nun δ eine Limeszahl, sodaß bereits $\{\beta_{\xi+1} | \xi \leq \zeta\} \subset \operatorname{supp}(p_\zeta)$ für alle $\zeta < \gamma$ gelte, nach (c.2) in Kombination mit (b.3)

$$\{\beta_{\xi+1} | \xi < \gamma\} = \bigcup_{\zeta < \gamma} \{\beta_{\xi+1} | \xi \leq \zeta\} \subseteq \bigcup_{\zeta < \gamma} \operatorname{supp}(p_\zeta) = \operatorname{supp}(p_\gamma)$$

□

Behauptung 2: *Für alle Limeszahlen* $\gamma < \delta$ *ist* β_γ *singulär.*

Beweis der Behauptung: Angenommen, β_γ wäre regulär, dann ist aber nach Konstruktion $\langle \beta_\xi : 0 < \xi < \gamma \rangle$ kofinal in β_γ, also

$$\gamma \leq \beta_\gamma = \operatorname{cof}(\beta_\gamma) \leq \gamma$$

also $\gamma = \beta_\gamma$. Nach der vorangegangenen Behauptung ist dann $\{\beta_{\xi+1} | \xi < \gamma\} \subset \operatorname{supp}(p_\gamma)$, und ferner kofinal in γ. Aber p_γ hat Easton-Support und γ ist als regulärer Limes von Unerreichbaren selbst unerreichbar, und daher ist $\operatorname{supp}(p_\gamma) \cap \gamma$ bechränkt in γ. Widerspruch! □

Behauptung 3: *Für alle* $\gamma < \delta$ *ist* $\operatorname{supp}(p_\gamma) \setminus (\beta_\gamma + 1) \neq \varnothing$.

Beweis der Behauptung: Sei $\gamma < \delta$ beliebig. Nach der ersten Behauptung, und da $\gamma \neq \eta$ gilt $\operatorname{supp}(p_\gamma) \supsetneqq \{\beta_{\xi+1} | \xi < \gamma\}$, wählen wir also $\zeta \in \operatorname{supp}(p_\gamma) \setminus \{\beta_{\xi+1} | \xi < \gamma\}$. Es reicht jetzt zu zeigen, daß $\zeta > \beta_\gamma$.

Angenommen $\zeta \leq \beta_\gamma$. Es kann nicht $\zeta = \beta_\gamma$ sein, nach Konstruktion wenn γ Nachfolger ist, oder nach der vorhergehenden Bemerkung wenn γ eine Limeszahl ist (denn dann wäre β_γ singulär, aber ζ ist regulär, sogar unerreichbar). Es gilt also $\zeta < \beta_\gamma$.

Sei dann $\xi < \gamma$, so daß $\beta_\xi \leq \zeta < \beta_{\xi+1}$, aus den gleichen Gründen wie oben muß dann schon $\beta_\xi < \zeta < \beta_{\xi+1}$ gelten. Nach (b.2) ist $\beta_{\xi+1} = \min(\operatorname{supp}(p_\xi) \setminus (\beta_\xi + 1))$; es folgt $\zeta \notin \operatorname{supp}(p_\xi)$. Es folgt aber induktiv aus (c.1) $\operatorname{supp}(p_\gamma) \cap \beta_{\xi+1} = \operatorname{supp}(p_\xi) \cap \beta_{\xi+1}$, also $\zeta \notin \operatorname{supp}(p_\gamma)$. Widerspruch! □

Wir konstruieren jetzt p_δ und β_δ.

1.Fall Setze $p_0 := p$.

2.Fall Ist $\delta = \xi + 1$, so sei $\dot{p}$ ein $\mathbb{P}_{\xi+1}$-Name, sodass

$$p_\xi \restriction (\beta_\xi + 1) \Vdash (\exists \tau \leq^* (\dot{p}_\xi \restriction \alpha \backslash (\beta_\xi + 1)) : \tau \parallel \varphi(\tau) \rightarrow \dot{p} \leq^* (\dot{p}_\xi \restriction \alpha \backslash (\beta_\xi + 1)) \wedge \dot{p} \parallel \varphi(\tau)) \tag{3.5}$$

Sei nun $\psi(\dot{p}, \tau) \equiv \dot{p} \parallel \varphi(\tau)$, da

$$p^\xi \restriction \beta_\xi \Vdash \dot{Q}_{\beta_\xi} \text{ ist vom Prikrytyp}$$

finden wir ein $\dot{q}^*$, sodaß

$$p_\xi \restriction \beta_\xi \Vdash (\dot{q}^* \leq^* p(\beta_\xi) \wedge \dot{q}^* \parallel \psi(\dot{p}, \tau))$$

Dann finden wir auch ein $\dot{q}$, sodaß

$$p_\xi \restriction \beta_\xi \Vdash (\dot{q} \leq^* \dot{q}^* \wedge (\dot{q} \Vdash \dot{p} \nVdash \varphi(\tau) \Rightarrow \dot{q} \Vdash (\dot{p} \Vdash \neg\varphi(\tau))) \tag{3.6}$$

Dazu wählen wir $\dot{q}$ einfach so, daß

$$p_\xi \restriction \beta_\xi \Vdash (\dot{q}^* \Vdash \neg\psi(\dot{p}, \tau) \Rightarrow \dot{q}^* = \dot{q} \wedge \dot{q}^* \Vdash \psi(\dot{p}, \tau) \Rightarrow \dot{q} \leq^* \dot{q}^* \wedge \dot{q} \parallel (\dot{p} \Vdash \varphi(\tau)))$$

Wir definieren dann schließlich $\beta_\delta = \min(\mathrm{supp}(p_\xi) \backslash (\beta_\xi + 1))$ und $p_\delta = (p_\gamma \restriction \beta_\xi)^\frown \langle \dot{q} \rangle^\frown \dot{p}$.

BEHAUPTUNG 4: *Sei $q \leq p_\delta$ mit $b(q, p_\delta) \subseteq \beta_\delta + 1$, dann gilt*

$$q \Vdash \varphi^i(\tau) \Rightarrow (q \restriction \beta_\delta)^\frown (\dot{p}_\xi \restriction \alpha \backslash \beta_\delta) \Vdash \varphi^i(\tau)$$

(also p_δ erfüllt die Bedingung (d))

BEWEIS DER BEHAUPTUNG: Gelte o.B.d.A $q \Vdash \varphi(\tau)$. Nach (3.3) gilt dann

$$q \restriction (\beta_\delta + 1) \Vdash \dot{q} \restriction \alpha \backslash (\beta_\delta + 1) \Vdash \varphi(\tau)$$

da nach Vor. $q \restriction (\beta_\delta + 1) \leq p_\delta \restriction (\beta_\delta + 1)$ und $q \restriction \beta_\delta + 1 \Vdash \dot{q} \restriction \alpha \backslash (\beta_\delta + 1) \leq^* \dot{p}$ gilt nach (3.5)

$$q \restriction (\beta_\delta + 1) \Vdash \dot{p} \Vdash \varphi(\tau)$$

mit (3.4) wird daraus

$$q \restriction \beta_\delta \Vdash (q(\beta_\delta) \Vdash \dot{p} \Vdash \varphi(\tau))$$

da ferner nach Vor. $q \restriction \beta_\delta \leq p^\delta \restriction \beta_\delta$ und $q \restriction \beta_\delta \Vdash q(\beta_\delta) \leq \dot{q}$ gilt nach (3.6)

$$q \restriction \beta_\delta \Vdash (\dot{q} \Vdash \dot{p} \Vdash \varphi(\tau))$$

unter Verwendung von (3.3) und (3.4) wird

$$(q \restriction \beta_\delta)^\frown (\dot{p}_\delta \restriction \alpha \backslash \beta_\delta) \Vdash \varphi(\tau)$$

daraus, was zu zeigen war. □

Also ist p_δ wie gewünscht.

3.Fall Sei δ nun eine Limeszahl. Setze $\beta_\delta = \sup_{\xi<\delta} \beta_\xi$. Schreibe ferner $A := \sup_{\xi<\delta} \operatorname{supp}(p_\xi)$.

BEHAUPTUNG 5: *Sei $\lambda < \alpha$ eine unerreichbare Kardinalzahl. Dann ist* $\operatorname{Card}(A \cap \lambda) < \lambda$ *und* $\{\beta_\xi | \xi \leq \delta\} \cap \lambda$ *beschränkt in* λ.

BEWEIS DER BEHAUPTUNG:

1. Zeigen wir zuerst, daß $\{\beta_\xi | \xi \leq \delta\} \cap \lambda$ beschränkt in λ ist. Angenommen nicht, dann setzen wir zuerst $\zeta = \{\xi < \delta | \beta_\xi < \lambda\}$. Das heißt $\langle \beta_\xi : \xi < \zeta \rangle$ ist eine kofinale Folge in λ. Damit ist natürlich $\beta_\zeta = \lambda$, was wiederum zeigt, daß $\zeta = \delta$ sein muss, da nach einer vorangeganenen Behauptung, für Limeszahlen $\gamma < \delta$ β_γ singulär ist. Ferner wissen wir auch, daß $A \supset \{\beta_\xi | \xi < \zeta\}$, also ist auch $A \cap \lambda$ kofinal in λ ist. Wir definieren dann mit

$$c : \delta \longrightarrow \lambda \qquad\qquad \xi \longmapsto \bigcup (\operatorname{supp}(p_\xi) \cap \lambda)$$

   eine stetige monoton steigende kofinale Funktion nach λ, also genau so, wie die Folge der $\langle \beta_\xi : \xi < \delta \rangle$. Wir finden dann ein $\gamma < \delta$, sodaß $\gamma = \beta_\gamma = c(\gamma)$. Es gilt dann $\beta_{\gamma+1} = \min(\operatorname{supp}(p_\gamma) \setminus (\beta_\gamma + 1))$, da aber $c(\gamma) = \gamma$ ist $\min(\operatorname{supp}(p_\gamma) \setminus (\beta_\gamma + 1)) > \lambda$. Widerspruch!

2. Nach dem ersten Ergebnis ist dann jetzt $\zeta = \{\xi < \delta | \beta_\xi < \lambda\} < \lambda$.

1.Fall Ist $\zeta = \delta$, dann folgt aus der Tatsache, daß $\operatorname{supp}(p_\xi) \cap \lambda$ für alle $\xi < \delta$ beschränkt in λ sind (denn die p_ξ haben Easton-Support), daß auch

$$A \cap \lambda = \sup_{\xi<\delta} \operatorname{supp}(p_\xi) \cap \lambda = \sup_{\xi<\delta} (\operatorname{supp}(p_\xi) \cap \lambda)$$

beschränkt in λ ist.

2.Fall Ist $\zeta < \delta$, so gilt $\beta_{\zeta+1} = \min(\operatorname{supp}(p_\zeta) \setminus (\beta_\zeta + 1)) > \lambda$, und da ferner aus der Bedingung (c.1) folgt, daß $A \cap \beta_{\zeta+1} = \operatorname{supp}(p_\zeta) \cap \beta_{\zeta+1}$ ist dann $A \cap \lambda \subseteq \beta_\zeta + 1 < \lambda$. □

Wir definieren jetzt eine Bedingung $q \in \mathbb{P}_{\beta_\delta}$, durch $q \restriction \beta_{\xi+1} = p_\xi \restriction \beta_{\xi+1}$. Dies ist wohldefiniert wegen der Bedingung (c.1) und hat Easton-Support wegen der vorangegangen Behauptung. Wir definieren dann ferner $p^\xi = q^\frown(\dot{p}_\xi \restriction \alpha \setminus \beta_\delta)$. Dann ist also $\langle p^\xi : \xi < \delta \rangle$ eine $\leq^*$-absteigende Folge, die bis β_δ übereinstimmen. p_δ sei eine $\leq^*$-untere Schranke, die nach Lemma 3.2.7 existiert. Also ist p_δ wie gewünscht.

Dies beendet die Konstruktion. Angenommen es gäbe nun keine direkte Erweiterung von p_η die $\varphi(\tau)$ entschiede, das heißt

$$\forall q \leq p_\eta : q \parallel \varphi(\tau) \Rightarrow b(q, p_\eta) \neq \varnothing$$

Dann wählen wir $q \leq p_\eta$ mit $q \parallel \varphi(\tau)$, sodaß $\gamma = \max(b(q, p_\eta))$ minimal ist. Es ist dann zwangsläufig $\gamma \in \operatorname{supp}(p_\eta)$, wegen der Bedingung (a) existiert dann eine Nachfolgerzahl

$\xi < \eta$, sodaß $\gamma = \beta_\xi$. Es gilt also $b(q, p_\eta) \subset \beta_\xi + 1$, nach Konstruktion (Bedingung (d)) gilt auch

$$p^* = (q \restriction \beta_\xi)^\frown(\dot{p}_\eta \restriction \alpha \backslash \beta_\eta) \parallel \varphi(\tau)$$

aber $\max(b(p^*, p_\eta)) < \max(b(q, p_\eta))$. Widerspruch! $\dashv$

4 Erzwingen überabzählbarer Kofinalitäten mit iterierten Prikry-Forcing

4.1 Exposition

Theorem 4.1.1: *Gelte* GCH. *Sei* $\vec{U} = \langle U_\gamma^\beta : \beta < \Omega, \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)\rangle$ *eine kohärente Folge von Ultrafiltern. Sei* $\alpha < \Omega$ *mit* $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) < \alpha$ *regulär. O.B.d.A. gelte, daß* $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\gamma) = 0$ *für alle* $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$. *Dann existiert eine Gitik-Iteration*

$$\langle\langle\langle \mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^* \rangle : \beta \leq \Omega\rangle, \langle\langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}_\beta^* \rangle : \beta < \Omega\rangle\rangle$$

sodaß gilt:

- $\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \mathbf{1}_{\dot{Q}_\beta} \Vdash \mathrm{cof}(\check{\alpha}) = \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\check{\alpha})$
- $\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \alpha$ *ist unerreichbar*

Fixiere für den Rest dieses Kapitels eine kohärente Folge von Ultrafiltern $\vec{U}$, und ferner eine Wohlordnung W von V_λ wobei λ groß genug, und für $\delta_1 < \delta_2$ Unerreichbare, sei $W \upharpoonright V_{\delta_1}$ ein Anfangsstück von $W \upharpoonright V_{\delta_2}$.

Für $(\beta, \gamma) \in \mathrm{dom}(\vec{U})$ schreiben wir $U(\beta, \gamma)$ für $\vec{U}(\beta, \gamma)$, N_γ^β für $\mathrm{Ult}(V; U(\beta, \gamma))$, und $j_\gamma^\beta : V \to N_\gamma^\beta$ für die kanonische Ultrapotenzeinbettung.

Wir werden diese Iteration nun durch Rekursion definieren, benötigen, um dies adequat durchzuführen, allerdings noch einige weitere Begriffe. Wir definieren durch simultane Rekursion partielle Ordnungen $\langle \mathbb{P}_\beta : \beta \leq \Omega\rangle$, und noch zusätzlich $\mathbb{P}_\beta$-Namen sodaß:

- $\langle \dot{\mathbb{P}}(\beta, \gamma) : \beta < \Omega, \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)\rangle$ seien Namen, sodaß $\mathbb{P}_\alpha$ für alle $\alpha \leq \Omega$ die Gitik-Iteration, der $\langle \dot{\mathbb{P}}(\beta, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)) : \beta < \alpha\rangle$ ist.
- $\langle \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) : \beta < \Omega, \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)\rangle$ seien Namen, sodaß für alle $\beta < \Omega$ und alle $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$ gilt:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) \subset \{t \in [\check{\beta}]^{<\omega} | \forall \xi \in t : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) < \check{\gamma}\}$$

- $\langle\langle \dot{U}(\beta, \gamma, t) : t \in \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma)\rangle : \beta < \Omega, \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)\rangle$ seien Namen, sodaß für alle $\beta < \Omega$ und alle $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$ gilt:

  $\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \forall \tau \in \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) : \dot{U}(\beta, \gamma, \tau)$ ist ein $<\beta$-abgeschlossener nicht-trivialer Ultrafilter

- Für alle $\beta < \Omega$ und alle $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$ gilt:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \dot{\mathbb{P}}(\beta, \gamma) \text{ ist ein schwach } <\beta\text{-abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing}$$

und für alle generischen Filter $G \subset \mathbb{P}_\beta$ und für alle über $V[G]$ generischen Filter $H \subseteq \dot{\mathbb{P}}^G(\alpha, \gamma)$ gilt, daß

$$h := \bigcup \{t | \exists T : (t, T) \in H\} \subseteq \{\xi < \beta | \, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) < \gamma\}$$

eine Club-Teilmenge von β mit Ordnungstyp ω^γ ist.

Das Forcing $\dot{\mathbb{P}}(\beta, \gamma)$ wird ähnlich aufgebaut sein, wie das Prikry-Forcing aus Kapitel 2, wir haben also als Bedingungen Paare (t, T), wobei t eine endliche Folge, und T ein Baum ist. Dieser Ansatz hat die Schwäche, daß wenn wir nichts anderes tun, als endliche Folgen aneinander zu setzen, wir letztendlich irgendetwas abzählbares erhalten. Dies ist aber genau der Punkt, warum wir uns einer Iteration bedienen, denn durch das Forcen mit $\mathbb{P}_\beta$ wurden ja bereits Folgen zu jedem $\beta < \alpha$ hinzugefügt, und die endliche Folge $t = \langle \delta_1, \ldots, \delta_n \rangle$ soll einfach die Folge kodieren, die wir erhalten, wenn wir die zu δ_1 bis δ_n gehörigen Folgen zusammensetzen.

Dies bringt natürlich eine gewisse Komplexität mit sich, und deswegen können wir natürlich nicht mehr alle Folgen zulassen. Deswegen führen wir noch einen $\mathbb{P}_\beta$-Namen für die Menge der sogenannten kohärenten Folgen ein, wobei wir hier nach danach unterscheiden, welche Ordnung bezüglich $\vec{U}$ wir maximal zulassen wollen.Das sollen die $\langle \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) : \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) \rangle$ bezeichnen.

Wie beim Prikry-Forcing enthält die zweite Komponente T die Informationen darüber, welche Erweiterungen der Folge t denkbar wären, wobei die Menge der denkbaren Fortsetzungen immer „groß“ sein soll. Beim Prikry-Forcing bestimmte ein normaler Ultrafilter welche Mengen groß waren, hier werden wir natürlich gleich $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$ viele verwenden wollen, denn soviele stellt uns die Folge $\vec{U}$ zur Verfügung. Diese Ultrafilter sind natürlich in einer $\mathbb{P}_\beta$-generischen Erweiterung nicht mehr Ultrafilter, daher müssen wir sie geeignet erweitern. Diese Erweiterung muß von einer weiteren Komponente abhängig gemacht werden, denn wie schon erklärt, sollen diese Ultrafilter angeben, welche Erweiterungen zulässig sind, und da wir nun darauf aufpassen müssen, nur kohärente Folgen zuzulassen, wird unsere Auswahlmenge irgendwie noch von der zu erweiternden Folge abhängig gemacht werden müssen.

Wir führen daher als weiteren Begriff einen $\mathbb{P}_\beta$-Namen für eine Folge von Filter ein, die wir mit $\langle \dot{U}(\beta, \gamma, t) : \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta), t \in \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) \rangle$ bezeichnen wollen. Das alles setzen wir zusammen, um einige Prikrytyp-Forcings zu definieren. Die $\langle \dot{\mathbb{P}}(\beta, \gamma) : \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) \rangle$ sollen Namen dafür sein.

Gehen wir jetzt davon aus, daß wir $\langle \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) : \beta < \alpha, \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) \rangle$, $\langle \langle U(\beta, \gamma, t) : \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta), t \in \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) \rangle : \beta < \alpha \rangle$ und $\langle \dot{\mathbb{P}}(\beta, \gamma) : \beta < \alpha, \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) \rangle$ bereits definiert hätten für irgendein $\alpha < \Omega$.

Sei dann $G \subseteq \mathbb{P}_\alpha$ generisch über V. Wir definieren dann in $V[G]$ Objekte $\langle \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma) : \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) \rangle$,$\langle U(\alpha, \gamma, t) : \gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha), t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma) \rangle$ und $\langle \mathbb{P}(\alpha, \gamma) : \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) \rangle$. Die $\dot{\mathrm{Koh}}(\alpha, \gamma)$, etc. seien dann geeignete Namen dafür.

Für ein $\beta < \alpha$, bezeichne $G_\beta := \{p \upharpoonright \beta | p \in G\}$. Dann ist G_β nach Satz 3.2.4 ein $\mathbb{P}_\beta$-generischer Filter und ferner ist $H_\beta := \{(p(\beta))^{G_\beta} | p \in G\}$ nach Satz 3.2.4,Proposition 3.2.2 und Satz 3.1.5 ein $(\dot{\mathbb{P}}(\beta, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)))^{G_\beta}$-generischer Filter über $V[G_\beta]$. Wir schreiben $\mathbb{P}(\beta, \gamma)$ für $(\dot{\mathbb{P}}(\beta, \gamma))^{G_\beta}$ etc. für jedes $\beta < \alpha$ und $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$

Gehen wir zusätzlich, davon aus, daß $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) > 0$ ist, weil sonst nichts zu zeigen ist; damit ist natürlich α meßbar und insbesondere Mahlo. (Man sollte auch daran denken, daß wir allgemein $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) \leq \alpha$ fordern.) Wir halten dann noch fest, daß wegen Bemerkung 3.2.3 bzw. Lemma 3.2.8

$$\text{o.B.d.A. } \mathbb{P}_\alpha \subseteq V_\alpha \tag{4.1}$$

$$\mathbb{P}_\alpha \text{ hat die } \alpha\text{-c.c.} \tag{4.2}$$

$$h_\beta := \begin{cases} \bigcup\{t \in [\beta]^{<\omega} | \exists T : (t, T) \in H_\beta\} & \text{falls } \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) > 0 \\ \varnothing & \text{sonst} \end{cases}$$

und $b_\beta := h_\beta \cup \{\beta\}$, ferner $b_t := \bigcup\{b_\delta | \delta \in t\}$ für eine endliche Menge von Ordinalzahlen t. Die b_β sind also die von vorherigen Iterationsschritten hinzugefügten Folgen, die durch das hinzufügen von β quasi markiert werden.

Wir halten jetzt als allgemeine Induktionsvoraussetzung fest:

(A) $\mathbb{P}_\alpha$ ist die Gitik-Iteration der $\langle \dot{\mathbb{P}}(\beta, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)) : \beta < \alpha \rangle$.

(B) Für alle $\beta < \alpha$ und alle $\delta < \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$ und alle $t \in \mathrm{Koh}(\beta, \gamma)$ ist

$$\{\eta < \beta | t^\frown\langle\eta\rangle \in \mathrm{Koh}(\beta, \gamma)\} \in U(\alpha, \delta, t \upharpoonright \delta)$$

(C) Für alle $\beta < \alpha$ und alle $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$ gilt:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \forall \tau \in \dot{\mathrm{Koh}}(\beta, \gamma) : U(\beta, \gamma, \tau) \text{ ist ein } {<}\beta\text{-abgeschlossener nicht-trivialer Ultrafilter}$$

(D) Für alle $\beta < \alpha$ und alle $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$ gilt:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \dot{\mathbb{P}}(\beta, \gamma) \text{ ist ein schwach } {<}\beta\text{-abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing}$$

und für alle über $V[G_\beta]$ generischen Filter $H \subseteq \mathbb{P}(\beta, \gamma)$ gilt, daß

$$h := \bigcup\{t | \exists T : (t, T) \in H\} \subseteq \{\xi < \beta | \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) < \gamma\}$$

eine Club-Teilmenge von β mit Ordnungstyp ω^γ ist.

(E) Sei h in einer generischen Erweiterung $V[G_\beta][H]$ definiert wie in (D), dann gilt für alle $(t, T) \in H$, daß $b_t \trianglelefteq h$.

(Hierbei ist $t \upharpoonright \delta$ eine Art Projektion von $\mathrm{Koh}(\beta, \gamma)$ auf $\mathrm{Koh}(\beta, \delta)$. Wir erklären gleich genau was es ist.)

Bemerkung 4.1.2:

(a) Sei $\beta < \alpha$. Nach allgemeiner Induktionsvoraussetzung (D) gilt für alle $\xi \in b_\beta$

$$\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) \quad \wedge \quad (\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) = \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) \Rightarrow \xi = \beta)$$

(b) Nach allgemeiner Induktionsvorraussetzung (D) ist b_β abgeschlossen für alle $\beta < \alpha$, ferner ist auch b_t abgeschlossen für jedes $t \in [\alpha]^{<\omega}$.

Bemerkung: Im Folgenden werden wir oft mit endlichen Mengen von Ordinalzahlen hantieren müssen. Wir wollen diese nach Bedarf mit deren monotoner Aufzählung identifizieren. In diesem Sinne ist auch ein Baum $T \subseteq [\kappa]^{<\omega}$, als ein Baum von streng monoton aufsteigen Folgen zu verstehen. Bezeichne $\trianglelefteq$ die Ordnung durch Enderweiterung.

Definition 4.1.3: Sei $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$. Ein $t \in [\alpha]^{<\omega}$ mit monotoner Aufzählung $\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \rangle$ heißt γ-kohärent genau dann wenn gilt:

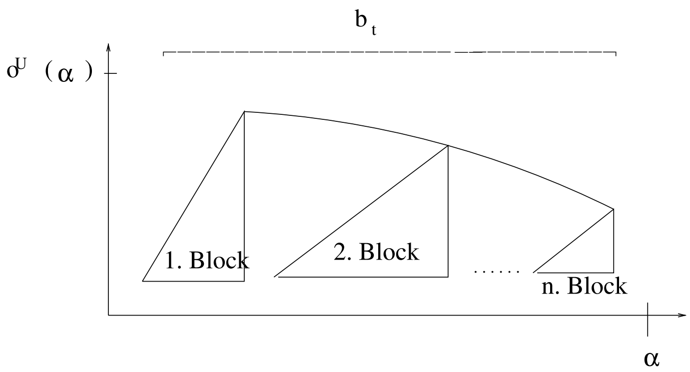
- $\gamma = 0$ impliziert, daß $t = \varnothing$
- $\forall i < n : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_i) < \gamma$
- $\forall i < n : b_{\langle \delta_{i^*}, \ldots, \delta_{i-1} \rangle} \trianglelefteq b_{\tau_i}$, wobei

$$i^* = \begin{cases} \min\{k < i | \forall k \leq j < i : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_j) < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_i)\} & \text{falls dieses Minimum existiert} \\ i & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\forall i < n : \max(b_{\langle \delta_k : k < i^* \rangle}) < \min(b_{\langle \delta_k : i^* \leq i \rangle})$, man bemerke, daß das Maximum nach Konstruktion der b_β existiert.

Die Menge der γ-kohärenten Folgen in $[\alpha]^{<\omega}$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$.

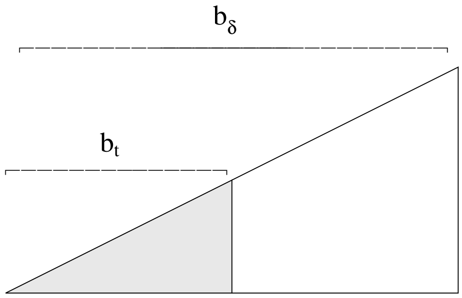
Man kann sich vorstellen, daß b_t durch eine kohärente Folge t in disjunkte Blöcke zerlegt wird (welche natürlich selbst wieder in Blöcke zerfallen usw.), wobei das maximale Element eines Blockes diesen dominiert. Wenn man b_t in ein Koordinatensystem zeichnen will, wobei man die tatsächliche Größe auf der Abzisse einträgt, und die Ordnung bzgl. $\vec{U}$ auf der Ordinate einträgt, erhält man etwa folgendes:



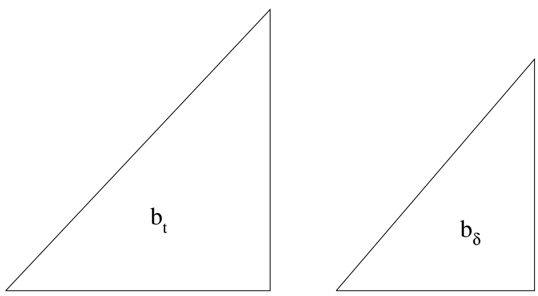
Es stimmt zwar, daß der letzte Punkt eines Blockes auch der von der Ordnung her größte ist, und der erste Punkt der von der Ordnung her kleinste, was uns auf die Dreiecksform bringt. Es stimmt aber auf keinen Fall, daß die Ordnung immer mit der Größe der Zahl steigt. Es ist vielmehr so, daß jeder einzelne Block wieder aus kleineren „Dreiecken“ zusammengesetzt ist (an geeigneter Stelle werden wir noch mehr zu dem Aussehen der b_β sagen).

Da uns die feinere Struktur der Blöcke sich aber nicht auf das Verhältnis der Blöcke untereinander auswirkt, wollen wir diese Ungenauigkeit einfach hinnehmen.

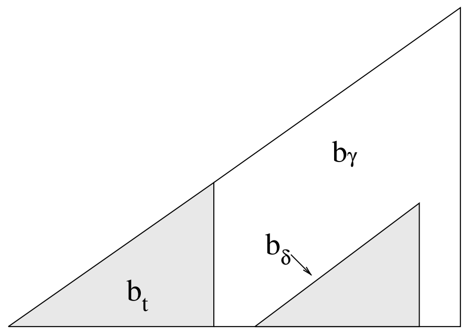
Man versteht die kohärenten Folgen vielleicht etwas besser, wenn man sich ansieht wie sich eine Folge t verändert, wenn man sie um einen weiteren Punkt δ erweitert. Gehen wir der Einfacheit halber davon aus, daß t nur aus einem Block besteht, dann sind zwei Fälle zu unterscheiden. Sei zuerst die Ordnung von δ größer als die Höhe des einen Blockes von t, dann wird nach der Definition von köharenten Folgen, dieser eine Block durch das b_δ fortgesetzt, etwa so:



Ist dagegen die Ordnung von δ kleiner oder gleich der Höhe des Blockes ist, so wird mit b_δ ein neuer Block begonnen, etwa so:



Natürlich können diese beiden Blöcke durch ein γ, dessen Ordnung größer ist, als sowohl die Höhe des Blockes, als auch die Ordnung von δ in einen größeren Block vereinigt werden, etwa so:



Die endgültige generische Folge, die wir hinzuzufügen gedenken, wird dann wie üblich eine Art Limes von solchen kohärenten Folgen sein.

Dies scheint nun die passendste Stelle, kurz die elementarsten Eigenschaften aufzulisten.

Lemma 4.1.4: *Sei* $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ *und* $t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$ *mit monotoner Aufzählung* $\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \rangle$.

(a) Für alle $i < n$ *ist* $\langle \delta_0, \ldots, \delta_i \rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$.

(b) Für alle $i < n$ *ist* $\langle \delta_{i^*}, \ldots, \delta_i \rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$.

(c) Für alle $i < n$ *und alle* $s \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$ *mit* $b_s \trianglelefteq b_i$, *dann ist* $s^* := \langle \delta_k : k < i^* \rangle^\frown s^\frown \langle \delta_i \rangle^\frown \langle \delta_k : i < k < n \rangle$ *in* $\mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$. *Ferner gilt* $b_{s^*} = b_t$.

(d) Für alle $s \in \mathrm{Koh}(\alpha, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_{n-1}) + 1)$ *mit* $\min(b_s) > \max(b_t)$ *ist* $t^\frown s \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$.

(e) Für alle $s, t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$

$$s \trianglelefteq t \Rightarrow b_s \trianglelefteq b_t$$

(f) Ist $\beta < \alpha$ *mit* $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$, *so ist* $\mathrm{Koh}(\beta, \gamma) \subseteq \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$. *Und natürlich gilt ferner* $\mathrm{Koh}(\alpha, \delta) \subseteq \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$ *für* $\delta < \gamma$.

Beweis:

(a) Klar.

(b) Man mache sich klar, daß für jedes $i^* \leq j \leq i$ gilt daß $i^* \leq j^*$. Der Rest ist Routine.

(c) Das $b_{s^*} = b_t$ gilt, sollte nach Definition der kohärenten Folgen klar sein. Man muß sich eigentlich nur noch überlegen, daß die Blockstruktur sich nicht wesentlich geändert hat. Wir haben nur ein Anfangsstück eines Blockes rausgenommen und durch ein anderes ersetzt.

(d) Das einzige was man sich hierzu überlegen muß, ist daß wenn $\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1}, \ldots, \delta_{n+m-1} \rangle$ die monotone Aufzählung von $t^\frown s$ ist, daß dann für alle $n \leq j < n + m$ gilt, daß $n \leq j^*$, da $s \in \mathrm{Koh}(\alpha, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_{n-1}) + 1)$. Der Rest ist dann wieder Routine.

(e) Es reicht natürlich zu zeigen, daß für alle $\delta_n < \alpha$ sodaß $t^\frown\langle\delta_n\rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)$

$$b_t \trianglelefteq b_{t^\frown\langle\delta_n\rangle}$$

1.Fall Sei $n^* = n$, dann ist also $\min(b_{\delta_n}) > \max(b_t)$, und damit gilt

$$b_t \trianglelefteq b_t \cup b_{\delta_n} = b_{t^\frown\langle\delta_n\rangle}$$

2.Fall Sei jetzt $n^* < n$, dann ist also $\max(b_{\langle\delta_i : i<n^*\rangle}) < \min(b_{\langle\delta_{n^*},\ldots,\delta_n\rangle})$ und damit

$$b_{\langle\delta_i:i<n^*\rangle} \trianglelefteq b_t \quad \wedge \quad b_{\langle\delta_{n^*},\ldots,\delta_{n-1}\rangle} \trianglelefteq b_{\delta_n}$$

woraus $b_t \trianglelefteq b_{t^\frown\langle\delta_n\rangle}$ folgt.

(f) Klar. $\dashv$

Definition 4.1.5: Sei $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ und $t \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)$.Es gibt wegen (4.2) und GCH

$$(\mathrm{Card}(\mathbb{P}_\alpha)^{<\alpha})^\alpha \stackrel{(4.1)}{=} (\alpha^{<\alpha})^\alpha = \alpha^+$$

viele nette $\mathbb{P}_\alpha$-Namen für Teilmengen von α. Sei $\langle \dot{A}_\xi : \xi < \alpha^+\rangle$ die $j_0^\alpha(W)$-minimale Aufzählung dieser netten Namen. Arbeitend in N_γ^α ist nach Elementarität $\mathbb{P}_{j_\gamma^\alpha(\alpha)}$ eine Gitik-Iteration, und nach Satz 3.2.4 ist in N_γ^α

$$\mathbb{P}_{j_\gamma^\alpha(\alpha)} \simeq \mathbb{P}_{\alpha+1} * \mathbb{P}_{j_\gamma^\alpha(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}$$

sodaß nach Theorem 3.2.6

$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash \mathbb{P}_{j_\gamma^\alpha(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1} \text{ ist ein schwach } {<}\min(\mathrm{NT}(\mathbb{P}_{j_\gamma^\alpha(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}))\text{-abgeschlossenes Prikry-Typ Forcing}$$

Wir finden also eine Folge von $\mathbb{P}_{\alpha+1}$-Namen $\langle \dot{p}_\xi^\gamma : \xi < \alpha^+\rangle$ für Bedingungen in $\mathbb{P}_{j_\gamma^\alpha(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}$, sodaß für alle $\xi < \alpha^+$ gilt

$$\dot{p}_{\xi+1}^\gamma \text{ ist } j_\gamma^\alpha(W)\text{-minimal mit } \mathbf{1}_{\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash (\dot{p}_\xi^\gamma \parallel \check{\alpha} \in j_\gamma^\alpha(\dot{A}_\xi)) \wedge \dot{p}_{\xi+1}^\gamma \leq^* \dot{p}_\xi^\gamma \tag{4.3}$$

$$\dot{p}_\xi^\gamma \text{ ist } j_\gamma^\alpha(W)\text{-minimal mit } \mathbf{1}_{\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash (\forall\sigma < \check{\xi} : \dot{p}_\xi^\gamma \leq^* \dot{p}_\sigma^\gamma) \tag{4.4}$$

Wir definieren dann schließlich, daß $A \in U(\alpha,\gamma,t)$ für ein $A \subseteq \alpha$ genau dann gilt, wenn

$$\exists r \in G \exists \xi < \alpha^+ N_\gamma^\alpha \models \exists \dot{T} \in V^{\mathbb{P}_\alpha} : r^\frown(\check{t},\dot{T})^\frown \dot{p}_\xi^\gamma \Vdash \check{\alpha} \in j_\gamma^\alpha(\dot{A})$$

wobei $\dot{A}$ ein Name für A sei.

Bemerkung 4.1.6: $U(\alpha,\gamma,t)$ ist wohldefiniert,denn es hängt nicht von der Wahl des Namens ab.

Seien $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ zwei Namen, sodaß für geeignetes $r \in G$ und $\xi < \alpha^+$ und $\dot{T}$ gilt, daß

$$N_\gamma^\alpha \models r^\frown(\check{t},\dot{T})^\frown \dot{p}_\xi^\gamma \Vdash \check{\alpha} \in j_\gamma^\alpha(\dot{A}_1)$$

und daß $A_1^G = A_2^G$ ist. Wähle dann einfach ein $r \geq r^* \in G$ mit $r^* \Vdash \dot{A}_1 = \dot{A}_2$ und dann gilt

$$N_\gamma^\alpha \models r^{*\frown}(\check{t},\dot{T})^\frown \dot{p}_\xi^\gamma \Vdash \check{\alpha} \in j_\gamma^\alpha(\dot{A}_2)$$

Sei $t \in \mathrm{Koh}(\beta, \gamma)$ und sei $\gamma^* < \gamma$. Wir schreiben dann

$$t \upharpoonright \gamma^* = \begin{cases} \langle \delta_k, \ldots, \delta_{n-1} \rangle & \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_n) < \gamma^* \wedge k = \min\{i < n | \forall i \leq j < n : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_i) < \gamma^*\} \\ \varnothing & \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_{n-1}) \geq \gamma^* \end{cases}$$

wobei $\langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \rangle$ die monotone Aufzählung von t sei.

Bei $t \upharpoonright \gamma^*$ handelt es sich also um das längste Endstück der Folge, daß von der Ordnung her noch komplett unter γ^* liegt.

Bemerkung 4.1.7: Für alle $t = \langle \delta_0, \ldots, \delta_{n-1} \rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$ und alle $\delta < \gamma$ ist $t \upharpoonright \delta \in \mathrm{Koh}(\alpha, \delta)$. Dies folgt, da man schnell sieht, daß für jedes $\delta_i \in t \upharpoonright \delta$ auch $\delta_{i^*} \in t \upharpoonright \delta$ ist.

Definition 4.1.8: Sei $T \subseteq [\alpha]^{<\omega}$ ein Baum und $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$. Wir nennen T einen γ-Baum mit Stamm t genau dann, wenn:

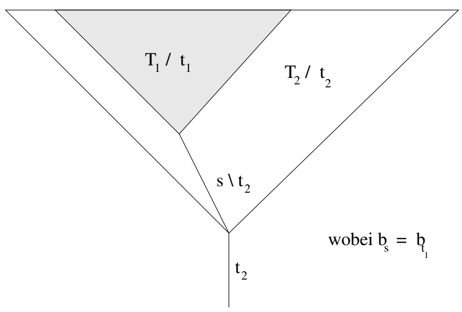
- t ist die Wurzel von T, d.h. für alle $s \in T$ ist $s \trianglelefteq t$ oder $t \trianglelefteq s$.
- Für alle $s \in T$ ist
$$\mathrm{suc}_T(s) = \bigcup_{\xi < \gamma} \mathrm{suc}_{T,\xi}(s)$$
wobei $\mathrm{suc}_{T,\xi}(s) \in U(\alpha, \gamma, t \upharpoonright \xi)$ für alle $\xi < \gamma$ ist.

Die Menge aller γ-Bäume mit Stamm t auf α bezeichnen wir mit $\mathrm{Tr}(\alpha, \gamma, t)$.

Man erinnere sich, daß wir $s^\frown T = \{s^\frown r | r \in T\}$ für beliebiges $s \in [\alpha]^{<\omega}$ und einen Baum T schreiben, und $T/t := \{r | t^\frown r \in T\}$ sowie $T_t = \{r \in T | t \trianglelefteq r \vee r \trianglelefteq t\}$ für ein $t \in T$.

Definition 4.1.9: Sei $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$. Wir definieren eine partielle Ordnung $\mathbb{P}(\alpha, \gamma)$:

- Der Träger von $\mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ bestehe genau aus den Paaren (t, T) wobei $t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$ und $T \in \mathrm{Tr}(\alpha, \gamma, t)$.
- Für $(t_1, T_1), (t_2, T_2) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ gilt $(t_1, T_1) \leq (t_2, T_2)$ genau dann, wenn:
  - $\exists t_2 \trianglelefteq s \in T_2 : b_s = b_{t_1}$
  - $s^\frown(T_1/t_1) \subseteq T_2$



Die Ordnung ist fast die gleiche wie die, die wir von dem Prikry-Forcing gewöhnt sind, wir erlauben allerdings das t_1 durch eine äquivalente Folge s auszutauschen, bevor wir die Baüme vergleichen, wobei in diesem Kontext zwei Folgen äquivalent sind, wenn sie die gleiche Folge erzeugen.

- Für $(t_1, T_1), (t_2, T_2) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ gilt $(t_1, T_1) \leq^* (t_2, T_2)$ genau dann, wenn $(t_1, T_1) \leq (t_2, T_2)$ und $t_1 = t_2$.

4.2 Der Beweis

Nach Elementarität ist natürlich $j^\alpha_\gamma(\vec{U})$ für jedes $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ wieder einen köharente Folge von Ultrafiltern, insofern können wir natürlich in N^α_γ auch eine Iteration definieren, und in der Tat haben wir diese Tatsache auch bereits bei der Definition der $U(\alpha, \gamma, t)$ angewandt. Insbesondere gilt natürlich, daß wir für die α-te Stelle der Iteration in N^α_γ $(\dot{\mathrm{K}}\mathrm{oh}(\alpha, \delta))^{N^\alpha_\gamma}$ etc. auch bereits für $\delta < \gamma$ definiert haben, und sogar nach Konstruktion bereits wissen, daß sie die gewünschten Eigenschaften haben. Insofern ist es nicht schwer zu sehen, wie das nachfolgende Lemma uns nützen kann.

Lemma 4.2.1: *Sei $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$, dann gilt:*

(a) $(\mathbb{P}_\alpha)^{N^\alpha_\gamma} = \mathbb{P}_\alpha$ *und G ist auch generisch über N^α_γ. Ferner gilt für alle $p \in \mathbb{P}_\alpha$ und alle Δ_1-Aussagen $\varphi(\tau)$ mit $\tau \in N^\alpha_\gamma$:*

$$p \Vdash \varphi(\tau) \Leftrightarrow N^\alpha_\gamma \models (p \Vdash \varphi(\tau))$$

(b) $\forall \delta \leq \gamma : (\mathrm{Koh}(\alpha, \delta))^{N^\alpha_\gamma[G]} = \mathrm{Koh}(\alpha, \delta)$

(c) $\forall \delta < \gamma \forall t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \delta) : (U(\alpha, \delta, t))^{N^\alpha_\gamma[G]} = U(\alpha, \delta, t)$

(d) $\forall \delta \leq \gamma : (\mathbb{P}(\alpha, \delta))^{N^\alpha_\gamma[G]} = \mathbb{P}(\alpha, \delta)$

Beweis:

(a) Dies folgt unmittelbar daraus, daß $V_{\alpha+1} = (V_{\alpha+1})^{N^\alpha_\gamma}$ und (4.1). Der Rest folgt daraus, daß damit V und N^α_γ auch die gleichen dichten Teilmengen von $\mathbb{P}_\alpha$ haben.

(b) Dies folgt direkt daraus, daß für $\beta < \alpha$

$$\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \mathrm{o}^{j^\alpha_\gamma(\vec{U})}(\beta)$$

und der Rest absolut von G abhängig ist.

(c) Sei $\delta < \gamma$ und $t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \delta)$ beliebig. Seien

$$\begin{aligned} j_{\delta,\gamma} :& N_\delta^\alpha \to \mathrm{Ult}(N_\delta^\alpha; j_\delta^\alpha(U_\gamma^\alpha)) =: N_{\delta,\gamma} \\ j_{\gamma,\delta} :& N_\gamma^\alpha \to \mathrm{Ult}(N_\gamma^\alpha; U_\delta^\alpha) =: N_{\gamma,\delta} \end{aligned}$$

die kanonsichen Ultrapotzeinbettungen. Dann ist $N := N_{\delta,\gamma} = N_{\gamma,\delta}$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j_\delta^\alpha"] \arrow[d, "j_\gamma^\alpha"'] & N_\delta^\alpha \arrow[d, "j_{\delta,\gamma}"] \\ N_\gamma^\alpha \arrow[r, "j_{\gamma,\delta}"] & N \end{tikzcd} \tag{4.5}$$

kommutiert (siehe Lemma 0.0.8). Wir erhalten dann, daß

$$j_{\gamma,\delta}(j_\gamma^\alpha(W)) \restriction V^N_{j_\delta^\alpha(\alpha)} \overset{(4.5)}{=} j_{\delta,\gamma}(j_\delta^\alpha(W)) \restriction V^N_{j_\delta^\alpha(\alpha)} \overset{\mathrm{crit}(j_{\delta,\gamma}) = j_\delta^\alpha(\alpha)}{=} j_\delta^\alpha(W) \restriction V^{N_\delta^\alpha}_{j_\delta^\alpha(\alpha)} \tag{4.6}$$

Um jetzt zu zeigen, daß die gewünschte Gleichheit gilt, müssen wir nach (a) noch zeigen, daß wir auch in N_γ^α die gleiche Folge $\langle A_\xi : \xi < \alpha^+ \rangle$ und die gleichen $\langle \dot{p}_\xi^\delta : \xi < \delta \rangle$ aussuchen. (Man sollte noch anmerken, daß V und N_γ^α natürlich das gleiche α^+ haben).

1. Wir merken erstmal an, daß nach (a) V und N_γ^α die gleichen netten Namen haben, also suchen wir unter der gleichen Auswahlmenge in N_γ^α das $j_{\gamma,0}(j_\gamma^\alpha(W))$-Minimale und in V das $j_0^\alpha(W)$-Minimale. (4.6) angwandt für $\delta = 0$ liefert dann

$$j_{\gamma,0}(j_\gamma^\alpha(W)) \restriction V^N_{j_0^\alpha(\alpha)} = j_0^\alpha(W) \restriction V^{N_0^\alpha}_{j_0^\alpha(\alpha)}$$

Da $\langle A_\xi : \xi < \alpha^+ \rangle \in V_{\alpha+2}$ also das Gewünschte.

2. Da nach (4.1) und Elementarität

$$\mathbb{P}_{j_\delta^\alpha} \subset V^{N_\delta^\alpha}_{j_\delta^\alpha(\alpha)} = V^N_{j_\delta^\alpha(\alpha)}$$

und wir die Kandidaten für die $\dot{p}_\xi^\delta$ aus $V_{j_\delta^\alpha(\alpha)}$ auswählen, und nach (a)

$$N_\delta^\alpha \models p \Vdash \check{\alpha} \in j_\delta^\alpha(\dot{A}) \Leftrightarrow N \models p \Vdash \check{\alpha} \in j_\delta^\alpha(\dot{A})$$

gilt, haben V und N_γ^α die gleichen Kandidaten für die $\dot{p}_\xi^\delta$ (man erinnere sich an (4.3) und (4.4)). In V suchen wir dann die $j_\delta^\alpha(W)$-Minimalen, und in N_γ^α die $j_{\gamma,\delta}(j_\gamma^\alpha(W))$-Minimalen. Nach (4.6) gilt dann

$$j_{\gamma,\delta}(j_\gamma^\alpha(W)) \restriction V^N_{j_\delta^\alpha(\alpha)} = j_\delta^\alpha(W) \restriction V^{N_\delta^\alpha}_{j_\delta^\alpha(\alpha)}$$

also das Gewünschte.

(d) Folgt unmittelbar aus (a),(b),(c). $\dashv$

Wenn wir dies mit der allgemeinen Induktionsvoraussetzung und der Elementarität der j^α_γ kombinieren erhalten wir für jedes $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$

(B_γ) Für alle $\delta^* < \delta \leq \gamma$ und alle $t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \delta)$ ist

$$\{\eta < \alpha | t^\frown \langle \eta \rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha, \delta)\} \in U(\alpha, \delta^*, t \upharpoonright \delta^*)$$

(D_γ) Für alle $\delta \leq \gamma$ gilt:

$$N^\alpha_\gamma \models \mathbf{1}_{\mathbb{P}_\delta} \Vdash \dot{\mathbb{P}}(\alpha, \delta) \text{ ist ein schwach } {<}\alpha\text{-abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing}$$

und für alle über $N^\alpha_\gamma[G]$ generischen Filter $H \subseteq \mathbb{P}(\beta, \delta)$ gilt, daß

$$h := \bigcup\{t | \exists T : (t, T) \in H\} \subseteq \{\xi < \alpha | \, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) < \delta\}$$

eine Club-Teilmenge von α mit Ordnungstyp ω^δ ist.

(E_γ) Für jeden über $N^\alpha_\gamma[G]$ generischen Filter $H \subseteq \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ gilt, daß $b_t \trianglelefteq h$ für jedes $(t, T) \in H$, wobei

$$h := \bigcup\{t | \exists T : (t, T) \in H\}$$

Lemma 4.2.2: *Sei* $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ *und* $t \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$*, dann gilt:*

(a) $U(\alpha, \gamma) \subseteq U(\alpha, \gamma, t)$

(b) $U(\alpha, \gamma, t)$ *ist ein nicht-trivialer* ${<}\alpha$*-abgeschlossener Ultrafilter.*

BEWEIS:

(a) Sei $A \in U^\alpha_\gamma$. Da U^α_γ normal ist, folgt dann $N^\alpha_\gamma \models \alpha \in j^\alpha_\gamma(A)$, natürlich gilt dann auch $N^\alpha_\gamma \models (\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\gamma(\alpha)}} \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\check{A}))$ also $A \in U^\alpha_\gamma$.

(b)
1. Daß $U(\alpha, \gamma, t)$ nicht-trivial ist, folgt da nach (a) insbesondere $(\eta, \alpha) \in U(\alpha, \gamma, t)$ für jedes $\eta < \alpha$.
2. Sei $A \subseteq B$ und $A \in U(\alpha, \gamma, t)$, d.h.

$$\exists r \in G \exists \xi < \alpha^+ N^\alpha_\gamma \models \exists \dot{T} : r^\frown(\check{t}, \dot{T})^\frown \dot{p}^\gamma_\xi \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{A})$$

wobei $\dot{A}$ ein Name für A ist. Sei $\dot{B}$ ein Name für B und $r \geq r^* \in G$ mit $r^* \Vdash \dot{A} \subseteq \dot{B}$, dann gilt

$$\exists \xi < \alpha^+ N^\alpha_\gamma \models \exists \dot{T} : r^{*\frown}(\check{t}, \dot{T})^\frown \dot{p}^\gamma_\xi \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{B})$$

Also $B \in U(\alpha, \gamma, t)$.

3. Sei $\eta < \alpha$ und $\langle C_\xi : \xi < \eta \rangle$ mit $\bigcup_{\xi<\eta} C_\xi = \alpha$. Wähle geeignete Namen $\langle \dot{C}_\xi : \xi < \eta \rangle$, sodaß
$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \bigcup_{\xi<\check{\eta}} \dot{C}_\xi = \check{\alpha}$$
Wegen der Elementarität von j^α_γ erhalten wir
$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\gamma(\alpha)}} \Vdash \bigcup_{\xi<\check{\eta}} j^\alpha_\gamma(\dot{C}_\xi) = j^\alpha_\gamma(\check{\alpha}) \tag{4.7}$$
Behauptung: *Es existiert ein $\delta < \alpha^+$, sodaß*
$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash \forall \xi < \check{\eta} : \dot{p}^\gamma_\delta \parallel \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{C}_\xi)$$
Beweis der Behauptung: Arbeite ab jetzt in $N^\alpha_\gamma[G]$. Es existiert für jedes $\xi < \eta$ ein $\beta_\xi < \alpha^+$, sodaß $C_\xi = (\dot{A}_{\beta_\xi})^G$. Wenn wir $\beta := \sup_{\xi<\eta} \beta_\xi$ setzen, so gilt dann nach Wahl der $\dot{p}^\gamma_\xi$ in $N^\alpha_\gamma[G]$
$$\forall \xi < \eta : \mathbf{1}_{\mathbb{P}(\alpha,\gamma)} \Vdash (\dot{p}^\gamma_\beta \parallel \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{C}_\xi))$$
Wir erhalten auf jeden Fall einen Namen σ, sodaß
$$\mathbf{1}_{\mathbb{P}_\alpha} \Vdash \mathbf{1}_{\mathbb{P}(\alpha,\gamma)}(\Vdash \forall \xi < \check{\eta} : \dot{p}^\gamma_\sigma \parallel \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{C}_\xi))$$
da aber $\mathbb{P}_\alpha$ die α-c.c. hat (4.2), und α^+ regulär ist, finden wir auch ein $\delta < \alpha^+$, daß wie gewünscht ist. □

Sei δ wie in der Behauptung. Betrachte nun in $N^\alpha_\gamma[G]$ die $\mathbb{P}(\alpha,\gamma)$ Aussagen $\varphi_\xi \equiv \dot{p}^\gamma_\delta \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{C}_\xi)$. Wegen (D_γ) finden wir in $N^\alpha_\gamma[G]$ ein $(t,T) \in \mathbb{P}(\alpha,\gamma)$, sodaß
$$\forall \xi < \eta : (t,T) \parallel \varphi_\xi$$
Wegen (4.7) finden wir dann ein $\beta < \eta$, sodaß $(t,T) \Vdash \varphi_\beta$. Nehmen wir uns dann ein $r \in G$ und einen geeigneten Namen $\dot{T}$, sodaß $r \Vdash ((\check{t},\dot{T}) \Vdash \varphi_{\check{\beta}})$, so gilt auch in N^α_γ
$$r^\frown(\check{t},\dot{T})^\frown \dot{p}^\gamma_\delta \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{C}_\beta)$$
also $C_\beta \in U(\alpha,\gamma,t)$. ⊣

Lemma 4.2.3: *Sei $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ und $\beta < \alpha$ und $\langle T_\xi : \xi < \beta \rangle \subseteq \mathrm{Tr}(\alpha,\gamma,t)$. Dann ist $\bigcap_{\xi<\beta} T_\xi \in \mathrm{Tr}(\alpha,\gamma,t)$.*

Korrolar 4.2.4: *Für alle $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ erfüllt $\mathbb{P}$ die α^+-c.c.*

Der Beweis ist der selbe wie bei Lemma 2.1.10.

Lemma 4.2.5: *Sei* $\delta < \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$*, und* $t \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)$*, dann gilt*

$$\{\eta < \alpha | t^\frown\langle\eta\rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)\} \in U(\alpha,\delta,t \restriction \delta)$$

Beweis: Ist δ so, daß $\delta + 1 < \gamma$, so folgt das Gewünschte mit (B_γ) und Lemma 4.1.4 (f). Also ist der einzige interessante Fall der daß $\gamma = \delta + 1$.

1.Fall Nehmen wir zuerst an, daß $t \restriction \delta = \varnothing$. In diesem Fall reicht es nach Lemma 4.1.4 (d) zu zeigen, daß

$$M := \{\eta < \alpha | \, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\eta) = \delta \wedge \min(b_\eta) > \max(t)\} \in U(\alpha,\delta,t \restriction \delta)$$

denn das maximale Element von $t \backslash (t \restriction \delta)$ hat Ordnung δ.

Sei dann jetzt φ die Aussage $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\check{\alpha}) = \gamma \wedge \min(b_{\check{\alpha}}) > \max(\check{t})$ der Forcingsprache von $\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}$ in N^α_δ. Wir finden dann nach der allgemeinen Induktionsvor. (D) ein $T \in N^\alpha_\delta[G]$, sodaß $(\varnothing, T)$ die Aussage $(\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)} \backslash \mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash \varphi)$ entscheidet.

Behauptung 1: $N^\alpha_\delta[G] \models (\varnothing, T) \Vdash \mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash \varphi$

Beweis der Behauptung: Wegen der Wahl von T reicht es zu zeigen, daß es ein $t \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)$ gibt mit $((t, T_t) \Vdash \mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash \varphi)$ in $N^\alpha_\delta[G]$.

Da $T \in \mathrm{Tr}(\alpha,\delta,\varnothing)$, gibt es ein $\eta > \max(t)$ in $\mathrm{suc}_{0,T}(\varnothing)$. Ist dann $G^* \subseteq \mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_\alpha$ ein über $N^\alpha_\delta[G]$ generischer Filter mit $\langle(\langle\eta\rangle, T_{\langle\eta\rangle})\rangle^\frown\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}} \in G^*$, dann ist $\min(b_\alpha) = \eta > \max(t)$ wegen (E_δ). Also ist $\langle\eta\rangle$ wie gewünscht. □

Wählen wir jetzt ein $r \in G$, das die Behauptung erzwingt, dann gilt

$$N^\alpha_\gamma \models r^\frown(\varnothing,T)^\frown\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\gamma(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash \varphi$$

Da φ ja gerade für $\check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{M})$ steht, folgt das Gewünschte.

2.Fall Sei jetzt $t \restriction \delta \neq \varnothing$. Sei $T \in \mathrm{Tr}(\alpha,\delta,t \restriction \delta)$ beliebig.

Behauptung 2: $N^\alpha_\delta[G] \models (t \restriction \delta, T) \Vdash \mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash (\check{t} \restriction \check{\delta})^\frown\langle\check{\alpha}\rangle \in \dot{\mathrm{Koh}}(j^\alpha_\delta(\alpha),\gamma)$

Beweis der Behauptung: Sei $G^* \subseteq \mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_\alpha$ ein über $N^\alpha_\delta[G]$ generischer Filter mit $\langle(t \restriction \delta, T)\rangle^\frown\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}} \in G^*$, dann gilt wegen (E_δ), daß $t \restriction \delta \trianglelefteq b_\alpha$, was ausreicht um zu zeigen, daß $t \restriction \delta^\frown\langle\alpha\rangle \in \mathrm{Koh}(j^\alpha_\delta(\alpha),\gamma)$. □

Wählen wir ein $r \in G$, daß die Behauptung erzwingt, und wir erhalten, daß

$$r^\frown(t \restriction \delta)^\frown\mathbf{1}_{\mathbb{P}_{j^\alpha_\delta(\alpha)}/\mathbb{P}_{\alpha+1}} \Vdash (\check{t} \restriction \check{\delta})^\frown\langle\check{\alpha}\rangle \in \dot{\mathrm{Koh}}(j^\alpha_\delta(\alpha),\delta)$$

Da $j_\delta^\alpha(\mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)) = \mathrm{Koh}(j_\delta^\alpha(\alpha),\gamma)$ erhalten wir dann

$$A := \{\eta < \alpha | \, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\eta) = \delta \wedge t \restriction \delta^\frown\langle\eta\rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)\} \in U(\alpha,\delta,t \restriction \delta)$$

Für alle $\eta \in A$ gilt dann, da $\min(t \restriction \delta^\frown\langle\eta\rangle) = \min(t \restriction \delta) > \max(t \backslash (t \restriction \delta))$, daß nach Lemma 4.1.4 $t^\frown\langle\eta\rangle = t\backslash(t \restriction \delta)^\frown(t \restriction \delta)^\frown\langle\eta\rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)$, also

$$\{\eta < \alpha | t^\frown\langle\eta\rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)\} \supseteq A \in U(\alpha,\delta,t \restriction \delta)$$

⊣

Lemma 4.2.6: *Sei $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$, dann gilt:*

(a) Sei $(t_1,T) \in \mathbb{P}(\alpha,\gamma)$ beliebig, und sei $t_2 \in \mathrm{Koh}(\alpha,\beta)$ mit $b_{t_1} = b_{t_2}$. Schreibe $T_2 := t_2{}^\frown(T_1/t_1)$, dann gilt:

$$(t_1,T_1) \leq (t_2,T_2) \leq (t_1,T_1)$$

(b) Gilt sogar $\gamma < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ und sind $t_1,t_2 \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)$, dann gilt:

$$b_{t_1} = b_{t_2} \Longrightarrow U(\alpha,\gamma,t_1) = U(\alpha,\gamma,t_2)$$

Beweis (durch simultane Induktion nach γ): Gelte das Lemma bereits für alle $\delta < \gamma$

(a) Sei $\langle\delta_1,\ldots,\delta_{n-1}\rangle$ die monotonen Aufzählungen einer kohärenten Folge t. Wir setzen

$$t^* := \{\delta_k \in t | \forall k < m < n : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_k) \geq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta_m)\}$$

Nach Definition von $\mathrm{Koh}(\alpha,\gamma)$ gilt $b_{t^*} = b_t$ und es gilt jetzt sogar weiter

Behauptung 1: $\forall t,s \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma) : b_{t^*} = b_{s^*} \Rightarrow t^* = s^*$

Beweis der Behauptung: Sei $\delta \in t^*$ beliebig. Nach Vor. gilt dann zumindest $\delta \in b_{s^*}$; es existiert also ein $\eta \in s^*$, sodaß $\delta \in b_\eta$. Nach Bemerkung 4.1.2 gilt dann also entweder $\delta = \eta$ (in diesem Fall wären wir fertig, da dann $\delta \in b_{s^*}$ wie gewünscht), oder $\delta < \eta$ und $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta) < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\eta)$.

Es gilt dann auf jeden Fall, daß nach Vor. ein $\zeta \in t^*$ existiert mit $\eta \in b_\zeta$. In beiden obengenannten Fällen folgt, daß $\delta < \zeta$ und $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\delta) < \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\zeta)$. Aber δ und ζ liegen beide in t^*. Widerspruch! □

Behauptung 2: $\forall t \in \mathrm{Koh}(\alpha,\gamma) \forall \delta < \gamma : (t \restriction \delta)^* = t^* \restriction \delta$

Beweis der Behauptung: Sei $\delta < \gamma$ beliebig, und $\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$ die monotone Aufzählung von t.

$$\begin{aligned}
\xi_i \in (t \restriction \delta)^* &\Leftrightarrow \xi_i \in (t \restriction \delta) \wedge \forall i \leq j < n(\xi_j \in (t \restriction \delta) \Rightarrow \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_j) \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_i)) \\
&\Leftrightarrow \xi_i \in (t \restriction \delta) \wedge \forall i \leq j < n : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_j) \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_i) \\
&\Leftrightarrow \forall i \leq j < n : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_j) < \delta \wedge \forall i \leq j < n : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_j) \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_i)) \\
&\Leftrightarrow \xi_i \in t^* \wedge \forall i \leq j < n : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi_j) < \delta \\
&\Leftrightarrow \xi_i \in t^* \downarrow \delta
\end{aligned}$$

□

Wir haben jetzt zu zeigen, daß für alle $t_2{}^\frown s \in T_2$ gilt, daß für alle $\delta < \gamma$ $\mathrm{suc}_{T_2,\delta}(t_2{}^\frown s) \in U(\alpha, \delta, (t_2{}^\frown s) \restriction \delta)$. Da aber natürlich $\mathrm{suc}_{T_2,\delta}(t_2{}^\frown s) = \mathrm{suc}_{T_1,\delta}(t_1{}^\frown s)$, reicht es zu zeigen, daß $U(\alpha, \delta, (t_2{}^\frown s) \restriction \delta) = U(\alpha, \delta, (t_1{}^\frown s) \restriction \delta)$, und nach der Induktionsvoraussetzung reicht dafür $b_{(t_2{}^\frown s)\restriction\delta} = b_{(t_1{}^\frown s)\restriction\delta}$.

Nach Voraussetzung gilt natürlich $b_{(t_2{}^\frown s)} = b_{(t_1{}^\frown s)}$, und damit nach Beh. 1 $(t_2{}^\frown s)^* = (t_1{}^\frown s)^*$, was jetzt mit Beh. 2 ergibt, daß:

$$b_{(t_2{}^\frown s)\restriction\delta} = b_{((t_2{}^\frown s)\restriction\delta)^*} = b_{(t_2{}^\frown s)^*\restriction\delta} = b_{(t_1{}^\frown s)^*\restriction\delta} = b_{((t_1{}^\frown s)\restriction\delta)^*} = b_{(t_1{}^\frown s)\restriction\delta}$$

Also ist $(t_2, T_2) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$, und der Rest ist nach Konstruktion klar.

(b) Weil die $U(\alpha, \gamma, t_i)$ Ultrafilter sind (oder einfach nach Symmetrie) reicht es zu zeigen, daß $U(\alpha, \gamma, t_1) \subseteq U(\alpha, \gamma, t_2)$.

Sei also $A \in U(\alpha, \gamma, t_1)$. Wähle ein $r \in G$ und ein $\xi < \alpha^*$, sowie einen $\mathbb{P}_\alpha$-Namen $\dot{T}_1$ für T_1, sodaß

$$N^\alpha_\gamma \models r^\frown(\check{t}_1, \dot{T}_1)^\frown \dot{p}^\gamma_\xi \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{A})$$

Wenden wir nun (a) an in $N^\alpha_\gamma[G]$ und erhalten ein $T_2 \in \mathrm{Tr}(\alpha, \gamma, t_2)$ mit $(t_2, T_2) \leq (t_1, T_1)$. Sei r^* in G, daß dies erzwingt, dann folgt

$$N^\alpha_\gamma \models r^{*\frown}(\check{t}_2, \dot{T}_2)^\frown \dot{p}^\gamma_\xi \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\gamma(\dot{A})$$

also $A \in U(\alpha, \gamma, t_2)$. $\dashv$

Bemerkung 4.2.7: Seien $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$ und $(t, T), (s, S) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ mit $(t, T) \leq (s, S)$, dann gilt nach Definition, daß es ein $r \in S$ gibt mit $b_r = b_t$ und $R := r^\frown(T/t) \subseteq S$.

Nach dem Ergebnis des Lemmas ist $(r, R) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ und $(r, R) \leq (s, S)$. Das bedeutet, daß wir für unsere Zwecke wenn immer eine Verstärkung von (s, S) suchen, wir eine Verstärkung (r, R) finden können, daß sogar $s \trianglelefteq r$ und $R \subseteq S$ gilt.

Lemma 4.2.8: *Sei $0 < \gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$, sei $H \subseteq \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ ein über $V[G]$ generischer Filter, setze*

$$h := \bigcup\{t | \exists T \in \mathrm{Tr}(\alpha, \gamma, t) : (t, T) \in H\}$$

dann gilt

(a) Für alle $(t, T) \in H$ gilt $b_t \trianglelefteq h$.

(b) $h \subseteq \alpha$ ist club.

(c) $\mathrm{otyp}(h) = \omega^\gamma$

Beweis:

(a) Sei $(t, T) \in H$ beliebig. Zu zeigen ist $b_t = h \cap \mathrm{lub}(b_t)$.

„$\subseteq$“ Sei $\langle \delta_1, \dots, \delta_n \rangle$ die monotone Aufzählung von t. Für jedes $\xi \in b_t$ gibt es dann ein $i \leq n$ mit $\xi \in b_{\delta_i}$. Wäre $\xi = \delta_i$, so wäre wegen $(t, T) \in H$ auch $\xi \in h$ wie gewünscht. Ist dagegen $\xi < \delta_i$, so existiert ein $(t_\xi, T_\xi) \in H_{\delta_i}$, sodaß $\xi \in t_\xi$. Da nach Induktionsvoraussetzung (D) damit $b_{t_\xi} \trianglelefteq b_{\delta_i}$ gilt, folgt mit Hilfe von Lemma 4.1.4, daß

$$t^* = \langle \delta_k : 0 < k < i^* \rangle^\frown t_\xi {}^\frown \langle \delta_k : i \leq k \leq n \rangle \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$$

und $b_{t^*} = b_t$. Damit folgt nach Lemma 4.2.6, daß $(t^*, T^*) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ und $(t, T) \leq (t^*, T^*)$ für $T^* := t^{*\frown}(T/t)$. Da H ein Filter ist, ist also $(t^*, T^*) \in H$ und damit $\xi \in t^* \subseteq h$.

„$\subseteq$“ Sei $\xi \in h \cap \mathrm{lub}(b_t)$. Also existiert ein $(t_\xi, T_\xi) \in H$ mit $\xi \in t_\xi$. Da (t, T) und (t_ξ, T_ξ) kompatibel sein müssen, gilt entweder

$$b_t \trianglelefteq b_{t_\xi} \Rightarrow b_{t_\xi} \cap \mathrm{lub}(b_t) = b_t \overset{\xi < \mathrm{lub}(b_t)}{\Rightarrow} \xi \in b_t$$

oder

$$b_{t_\xi} \trianglelefteq b_t \Rightarrow b_{t_\xi} \subseteq b_t \Rightarrow \xi \in b_t$$

(b) Daß h unbeschränkt ist, folgt daraus, daß für alle $\beta < \alpha$

$$D_\beta := \{(t, T) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma) | \max(t) > \beta\}$$

dicht ist (dies wiederum folgt analog wie im Beweis von Lemma 2.1.4).

Seien also jetzt $\langle \beta_\xi : \xi < \eta \rangle \subseteq h$, sodaß $\beta := \sup_{\xi < \eta} \beta_\xi < \alpha$ ist. Wählen wir ein $(t, T) \in H$ mit $\max(t) > \beta$, und zusätzlich $\langle (t_\xi, T_\xi) : \xi < \eta \rangle$ mit $\beta_\xi \in t_\xi$.

Wir können dann o.B.d.A. annehmen, daß bereits $\max(t_\xi) = \beta_\xi$. Denn nach Lemma 4.1.4 ist $t_\xi \restriction (\beta_\xi + 1) \in \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$ und wegen Lemma 4.2.5 ist $\mathrm{Koh}(\alpha, \gamma) \in \mathrm{Tr}(\alpha, \gamma, t_\xi \restriction (\beta_\xi + 1))$, und offensichtlich ist dann $(t_\xi, T_\xi) \leq (t_\xi \restriction (\beta_\xi + 1), \mathrm{Koh}(\alpha, \gamma))$. Damit ist also da H ein Filter ist, auch $t_\xi \restriction (\beta_\xi + 1) \subseteq h$.

Da die (t_ξ, T_ξ) und (t, T) kompatibel sein müssen, folgt für alle $\xi < \eta : b_{t_\xi} \trianglelefteq b_t$, also auch $\langle \beta_\xi : \xi < \eta \rangle \subseteq b_t$. Nach Induktionsvor. ist damit $\beta \in b_t \subseteq h$.

(c) „$\leq$“ Da nach Induktionsvoraussetzung für jedes $\beta < \alpha$ mit $\mathrm{o}^{\vec{\mathrm{U}}}(\beta) < \gamma$ gilt

$$\mathrm{otyp}(b_\beta) = \omega^{\mathrm{o}^{\vec{\mathrm{U}}}(\beta)} + 1 < \omega^\gamma$$

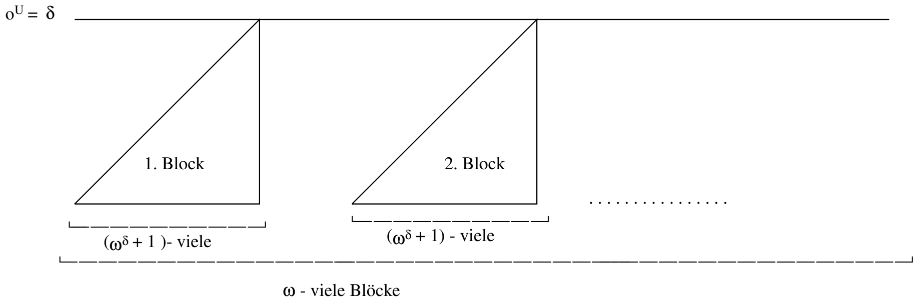
reicht es zu zeigen, daß für alle $\beta < \alpha$ es ein $(t, T) \in H$ gibt mit

$$h \cap (\beta + 1) = b_t$$

Wir zeigen zuerst, daß $h \cap (\beta + 1)$ ein maximales Element besitzt. Wenn nicht, dann wäre $\{\xi \in h | \xi \leq \beta\} \subseteq \beta$ kofinal in seinem Supremum. Da aber nach (b) h abgeschlossen ist, muß dieses Supremum in h liegen und ist dann offensichtlich das maximale Element. Wählen wir dann schließlich für jedes $\xi \in h \cap (\beta + 1)$ ein $(t_\xi, T_\xi) \in H$, sodaß $\xi = \max(t_\xi)$. Da die (t_ξ, T_ξ) damit paarweise kompatibel sind, sind die b_{t_ξ} bezüglich $\trianglelefteq$ total geordnet. Und damit gilt dann auch $b_{t_{\max(h \cap (\beta+1))}} = h \cap (\beta + 1)$.

„$\geq$"

1.Fall Sei erst einmal $\gamma = \delta + 1$, dann werden die γ-kohärenten Folgen also von den Zahlen, die Ordnung δ haben dominiert. Ganz ähnlich wie bei dem Prikry-Forcing, haben wir dann in der generischen Folge ω-viele Zahlen mit Ordnung δ, denen jeweils nach Induktionsvoraussetzung ω^δ-viele Elemente zugeordnet sind. h sieht also etwa so aus:



Formal zeigen wir dazu erst einmal

Behauptung 1: $D_n := \{(t, T) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma) | \operatorname{Card}(\{\xi \in t | \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) = \delta\}) \geq n\}$ *ist dicht für alle* $n < \omega$.

Beweis der Behauptung: Sei $(t, T) \in \mathbb{P}(\alpha, \gamma)$ beliebig. Da T ein γ-Baum ist und $U(\alpha, \delta) \subseteq U(\alpha, \gamma, t \upharpoonright \delta)$ ist dann

$$\operatorname{suc}_{T,\delta}(t) \cap \{\beta < \alpha | \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta\} \neq \varnothing$$

Für ein $\delta_1 \in \operatorname{suc}_{T,\delta}(t) \cap \{\beta < \alpha | \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta\}$ ist dann $(t^\frown\langle\delta_1\rangle, T_{t^\frown\langle\delta_1\rangle}) \leq (t, T)$ in D_1. Und rekursiv erhalten wir natürlich mit diesem Verfahren auch $(t_n, T_n) \leq (t, T)$ in D_n. □

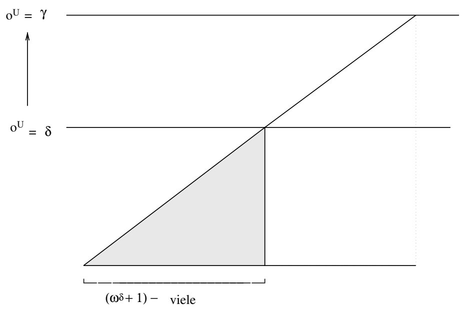
Nach Induktionsvoraussetzung ist jetzt für jedes $(t, T) \in D_n$

$$\operatorname{Card}(b_t) \geq \omega^\delta \cdot n$$

und damit folgt nach (a) und der Tatsache, daß $D_n \cap H \neq \varnothing$ für alle $n < \omega$

$$\operatorname{otyp}(h) \geq \omega^\delta \cdot \omega = \omega^{\delta+1} = \omega^\gamma$$

2.Fall Sei jetzt γ eine Limeszahl, dann werden die γ-kohärenten Folgen natürlich nicht von Zahlen irgendeiner Ordnung dominiert. Es ist vielmehr eine Art Limes, da jede kohärente Folge im generischen Filter von einer Zahl hinreichen großer Ordnung übernommen wird. Dabei sind die Punkte wo zum ersten Mal eine Zahl der Ordnung sagen wir $\delta < \gamma$ auftaucht, die interessanten Etappen. h kann man sich dann etwa so vorstellen:



Behauptung 2: *$D_\delta := \{(t,T) \in \mathbb{P}(\alpha,\gamma) | \exists \xi \in t : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\xi) = \delta\}$ ist dicht für alle $\delta < \gamma$.*

Beweis der Behauptung: Sei $(t,T) \in \mathbb{P}(\alpha,\gamma)$ beliebig. Da T ein γ-Baum ist und $U(\alpha,\delta) \subseteq U(\alpha,\gamma,t \upharpoonright \delta)$ ist dann

$$\forall \delta < \gamma : \mathrm{suc}_{T,\delta}(t) \cap \{\beta < \alpha | \, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta\} \neq \varnothing$$

Für ein $\zeta \in \mathrm{suc}_{T,\delta}(t) \cap \{\beta < \alpha | \, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta\}$ ist dann $(t^\frown\langle\zeta\rangle, T_{t^\frown\langle\zeta\rangle}) \leq (t,T)$ in D_δ. □

Nach Induktionsvoraussetzung ist dann für jedes $(t,T) \in D_\delta$

$$\mathrm{Card}(b_t) \geq \omega^\delta$$

und damit folgt nach (a) und der Tatsache, daß $D_\delta \cap H \neq \varnothing$ für alle $\delta < \gamma$

$$\mathrm{otyp}(h) \geq \sup_{\delta<\gamma} \omega^\delta = \omega^\gamma$$

⊣

Lemma 4.2.9: *Sei $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$, und $(t^*,T^*) \in \mathbb{P}(\alpha,\gamma)$, dann ist*

$$D := \{(t,T) \leq (t^*,T^*) | \exists \delta < \gamma \exists \eta \in \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(t^*) : (t,T) \leq (t^{*\frown}\langle\eta\rangle, T^*_{t^{*\frown}\langle\eta\rangle})\}$$

dicht unter (t^*,T^*).

Beweis: Sei $(t,T) \leq (t^*,T^*)$ beliebig, dann können wir nach Lemma 4.2.6 annehmen, daß $t^* \trianglelefteq t$ und $T \subseteq T^*$. Damit unterscheidet sich dieser Beweis nicht mehr von dem von Lemma 2.1.12. ⊣

Lemma 4.2.10: *Sei $\gamma \leq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha)$, $\varphi(\tau)$ eine Aussage der Forcingsprache von $\mathbb{P}(\alpha,\gamma)$ und $(t,T) \in \mathbb{P}(\alpha,\gamma)$. Dann existiert ein $T \supseteq T^* \in \mathrm{Tr}(\alpha,\gamma,t)$, sodaß $(t,T^*) \parallel \varphi(\tau)$.*

Beweis: Man erinnere sich, daß wir für eine Formel $\varphi^0 \equiv \varphi$ und $\varphi^1 \equiv \neg\varphi$ schreiben. o.B.d.A sei für alle $s \in T$ und alle $\delta < \gamma$

$$\mathrm{suc}_{T,\delta}(s) \subseteq \{\beta < \alpha |\, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta\}$$

sonst ersetzte Level um Level $\mathrm{suc}_{T,\delta}(s)$ durch $\mathrm{suc}_{T,\delta}(s) \cap \{\beta < \alpha |\, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta\}$ für jedes $s \in T$. (dies geht, da $\{\beta < \alpha |\, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta\} \in U(\alpha,\delta) \subseteq U(\alpha,\delta,s \upharpoonright \delta)$).

Behauptung 1: *Es existiert ein $T \supseteq T^* \in \mathrm{Tr}(\alpha,\gamma,t)$, sodaß für alle $t \trianglelefteq s \in T^*$ folgendes gilt:*

$$\begin{aligned}&\exists i < 2 \exists \delta < \gamma \exists \eta \in \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s) : \exists T' \in \mathrm{Tr}(\alpha,\gamma,s^\frown\langle\eta\rangle) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T') \Vdash \varphi^i(\tau)\\ &\Rightarrow \forall \eta \in \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, (T^*)_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi^i(\tau)\end{aligned}$$

Der Beweis ist im Grunde der selbe wie der von Behauptung 1 im Beweis von Lemma 2.1.13.

Sei jetzt ein $(r,R) \leq (t,T^*)$ gegeben, sodaß $(r,R) \parallel \varphi(\tau)$, o.B.d.A. $(r,R) \Vdash \varphi(\tau)$, wobei wir nach Lemma 4.2.6 (r,R) so wählen können, daß $t \trianglelefteq r$ und $R \subseteq T^*$. Ist jetzt $r = t$, so sind wir fertig. Nehmen wir also an, daß $r = s^\frown\langle\eta^*\rangle$ für ein geeignetes $\eta^* \in \mathrm{suc}_{T^*}(s)$ und $t \trianglelefteq s \in T^*$. Nach Wahl von T^* gilt dann

$$\forall \eta \in \mathrm{suc}_{T^*,\delta^*}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi(\tau) \tag{4.8}$$

wobei $\delta^* = \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\eta^*)$.

Behauptung 2: $\forall \delta > \delta^* \forall \eta \in \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$

Beweis der Behauptung: Sei $\delta > \delta^*$ beliebig, sei

$$A := \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s) \in U(\alpha,\delta,s \upharpoonright \delta)$$

Nach Definition finden wir dann $r \in G$, und $\zeta < \alpha^+$ und einen Baum $T_1 \in \mathrm{Tr}(\alpha,\delta,s \upharpoonright \delta)$ mit einem $\mathbb{P}_\alpha$-Namen $\dot{T}_1$, sodaß

$$N^\alpha_\delta \models r^\frown\langle(\check{s} \upharpoonright \delta, \dot{T}_1)\rangle^\frown \dot{p}^\delta_\zeta \Vdash \check{\alpha} \in j^\alpha_\delta(\dot{A}) \tag{4.9}$$

Es folgt jetzt, da $\delta > \delta^*$, daß $s \upharpoonright \delta^* = (s \upharpoonright \delta) \upharpoonright \delta^*$ und damit ist

$$\mathrm{suc}_{T_1,\delta^*}(s \upharpoonright \delta) \in U(\alpha,\delta^*,(s \upharpoonright \delta) \upharpoonright \delta^*) = U(\alpha,\delta^*,s \upharpoonright \delta^*)$$

und daher gibt es $\beta \in \mathrm{suc}_{T_1,\delta^*}(s \upharpoonright \delta) \cap \mathrm{suc}_{T^*,\delta^*}(s)$ Es gilt dann

$$((s \upharpoonright \delta)^\frown\langle\beta\rangle, (T_1)_{s \upharpoonright \delta^\frown\langle\beta\rangle}) \leq (s \upharpoonright \delta, T_1)$$

wenn wir ein $r^* \leq r$ in G nehmen, daß dies erzwingt erhalten wir mit (4.9)

$$N_\delta^\alpha \models r^{*\frown}\langle((\check{s} \upharpoonright \delta)^\frown\langle\beta\rangle, (\dot{T}_1)_{\check{s}\upharpoonright\delta^\frown\langle\beta\rangle})\rangle^\frown \dot{p}_\zeta^\delta \Vdash \check{\alpha} \in j_\delta^\alpha(\dot{A})$$

Also da $(s^\frown\langle\beta\rangle) \upharpoonright \delta = (s \upharpoonright \delta)^\frown\langle\beta\rangle$ wegen $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta^* < \delta$ folgt, daß $A \in U(\alpha, \delta, (s^\frown\langle\beta\rangle) \upharpoonright \delta)$. Wählen wir dann ein $\beta^* \in A \cap \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s^\frown\langle\beta\rangle)$, so erhalten wir nach Definition von $\mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$ und da $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta^*) = \delta > \delta^* = \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta)$, daß $b_{s^\frown\langle\beta,\beta^*\rangle} = b_{s^\frown\langle\beta^*\rangle}$. Nach Lemma 4.2.6 ist dann

$$(s^\frown\langle\beta^*\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta^*\rangle}) \leq (s^\frown\langle\beta, \beta^*\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta,\beta^*\rangle})$$

Wegen (4.8) gilt nun weiter $(s^\frown\langle\beta, \beta^*\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta,\beta^*\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$ also auch

$$(s^\frown\langle\beta^*\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta^*\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$$

Nach Wahl von T^* folgt daraus die Behauptung. (Jedes anderen Element aus $\mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s)$ könnte man gegen β^* eintauschen.) □

Behauptung 3: $\forall\delta < \delta^*\forall\eta \in \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$

Beweis der Behauptung: Sei $B := \mathrm{suc}_{T^*,\delta^*}(s) \in U(\alpha, \delta^*, t \upharpoonright \delta^*)$. Nach Definition finden wir dann $r \in G$, und $\zeta < \alpha^+$ und einen Baum $T_1 \in \mathrm{Tr}(\alpha, \delta^*, t \upharpoonright \delta^*)$ mit einem $\mathbb{P}_\alpha$-Namen $\dot{T}_1$, sodaß

$$N_{\delta^*}^\alpha \models r^\frown\langle(\check{s} \upharpoonright \delta^*, \dot{T}_1)\rangle^\frown \dot{p}_\zeta^{\delta^*} \Vdash \check{\alpha} \in j_{\delta^*}^\alpha(\dot{B}) \tag{4.10}$$

Wir setzen dann

$$T^{**} := \{s^\frown\langle\eta_1, \ldots, \eta_n\rangle \in T^* | (s \upharpoonright \delta^*)^\frown\langle\eta_k : \forall 1 \leq j \leq k : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\eta_j) < \delta^*\rangle \in T_1\}$$

Sei $\beta^* \in \mathrm{suc}_{T^{**},\delta}(s)$, wir zeigen jetzt, daß

$$(s^\frown\langle\beta^*\rangle, T^{**}_{s^\frown\langle\beta^*\rangle}) \Vdash \varphi(\tau) \tag{4.11}$$

Angenommen (4.11) würde nicht gelten, dann finden wir also nach Lemma 4.2.6 ein T_2 und $\langle\eta_0, \ldots, \eta_n\rangle$, sodaß

$$(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_n\rangle, T_2) \leq (s^\frown\langle\beta^*\rangle, T^{**}_{s^\frown\langle\beta^*\rangle})$$

und $(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_n\rangle, T_2) \Vdash \neg\varphi(\tau)$. Nach Wahl von T^* können wir auch davon ausgehen, daß $T_2 = T^*_{s^\frown\langle\beta^*,\eta_1,\ldots,\eta_n\rangle}$. Sei $0 < i \leq n$ maximal mit $\forall 0 < j \leq i : \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\eta_j) < \delta^*$ (wenn das Maximum nicht existiert $i = 0$). Nach Konstruktion von T^{**} ist dann $s^* := (s \upharpoonright \delta^*)^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i\rangle \in T_1$, es gilt also $(s^*, (T_1)_{s^*}) \leq (s \upharpoonright \delta^*, T_1)$, und wenn $r^* \leq r$ in G dies erzwingt, so gilt nach (4.10)

$$N_{\delta^*}^\alpha \models r^{*\frown}\langle(\check{s}^*, (\dot{T}_1)_{\check{s}^*})\rangle^\frown \dot{p}_\zeta^{\delta^*} \Vdash \check{\alpha} \in j_{\delta^*}^\alpha(\dot{B})$$

Es ist also $B \in U(\alpha, \delta^*, s^*)$ und da $s^* = (s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i\rangle) \restriction \delta^*$ finden wir ein $\beta \in B \cap \mathrm{suc}_{T_1,\delta^*}(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i\rangle)$. Für dieses β gilt dann $b_{s^\frown\langle\beta\rangle} = b_{s^\frown\langle\beta^*,\eta_1,\ldots,\eta_i,\beta\rangle}$. Nach Lemma 4.2.6 gilt dann für $T_3 := (s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i, \beta\rangle)^\frown(T^*/s^\frown\langle\beta\rangle)$, daß $(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i, \beta\rangle, T_3) \leq (s^\frown\langle\beta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta\rangle})$, und damit folgt wegen $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta^*$ mit Hilfe von (4.8), daß $(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i, \beta\rangle, T_3) \Vdash \varphi(\tau)$. Wegen Konstruktion von T^* folgt daraus unmittelbar, daß $(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i, \beta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta^*,\eta_1,\ldots,\eta_i,\beta\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$.

1.Fall Ist $i = n$, so gilt nach Wahl von T_2, daß

$$(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i, \beta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta^*,\eta_1,\ldots,\eta_i,\beta\rangle}) \Vdash \neg\varphi(\tau)$$

Widerspruch!

2.Fall Ist $i < n$, so muß offensichtlich $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\eta_{i+1}) \geq \delta^*$ gewesen sein. Mit den gleichen Argument, daß wir benutzt haben Behauptung 2 zu beweisen folgt dann, aus $(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_i, \beta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta^*,\eta_1,\ldots,\eta_i,\beta\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$ wegen $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\beta) = \delta \geq \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\tau_{i+1})$, daß $(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_{i+1}\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta^*,\eta_1,\ldots,\eta_{i+1}\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$ und damit natürlich auch, daß $(s^\frown\langle\beta^*, \eta_1, \ldots, \eta_n\rangle, T^*_{s^\frown\langle\beta^*,\eta_1,\ldots,\eta_n\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$. Widerspruch zur Wahl von T_2!

Also gilt (4.11) doch. Und damit folgt wegen $T^{**} \subseteq T^*$ und der Wahl von T^* die Behauptung. □

Die Behauptungen zusammen mit (4.8) ergeben schließlich, daß

$$\forall \delta < \gamma \forall \eta \in \mathrm{suc}_{T^*,\delta}(s) : (s^\frown\langle\eta\rangle, T^*_{s^\frown\langle\eta\rangle}) \Vdash \varphi(\tau)$$

Nach Lemma 4.2.9 erhalten wir daraus dann schon, daß $(s, T^*_s) \Vdash \varphi(\tau)$. Entweder ist jetzt schon $s = t$ oder wir wiederholen das Argument, das wir vorhin mit r benutzt haben. So oder so erhalten wir schließlich, daß $(t, T^*) \Vdash \varphi(\tau)$. ⊣

Mit diesem letzten Lemma haben wir, wie man jetzt zusammenrechnet (A)-(E) für α nachgerechnet, und damit die Induktion beendet. Wir widmen uns schließlich dem Theorem.

Beweis (von Theorem 4.1.1): Als Kandidaten für unsere Iteration nehmen wir natürlich die so eben Konstruierte. Nehmen wir dann jetzt an $\eta = \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha) < \alpha$ sei regulär. Nehmen wir einen beliebigen über V generischen Filter $G \subseteq \mathbb{P}_\alpha$, und einen beliebigen über $V[G]$ generischen Filter $H \subseteq \mathbb{P}(\alpha, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha))$.

Zum einen bezeugen dann die $U(\alpha, \delta, t)$ nach (C), daß α auch in $V[G]$ noch unerreichbar ist. Zum anderen haben wir natürlich nach (D) in $V[G][H]$ die kofinale Folge vom Ordnungstyp ω^η. Es reicht jetzt also zu sehen, daß η regulär ist in $V[G][H]$.

Ist es in $V[G]$ regulär so auch in $V[G][H]$, da $\mathbb{P}(\alpha, \mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\alpha))$ ein schwach $<\alpha$-abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing ist. In $V[G]$ ist es dagegen regulär, weil nach Annahme bis einschließlich η in der Iteration nichts passiert ist, und die Rest-Iteration nach Theorem 3.2.6 mindestens schwach η^+-abgeschlossen ist. ⊣

4.3 Beweis des zweiten Hauptsatzes

Sei $\mu \geq \aleph_2$ eine reguläre Kardinalzahl, und $\eta < \mu$ sei auch regulär. Sei $\kappa > \mu$ eine Kardinalzahl mit $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\kappa) \geq \eta$ (o.B.d.A sei $\mathrm{o}^{\tilde{\mathrm{U}}}(\kappa) = \eta$).

Sei $\mathbb{P}_\kappa$ die Gitik-Iteration aus Theorem 4.1.1. Sei $G^* \subset \mathbb{P}_\kappa$ ein generischer Filter. Wir betrachten dann $V^* := V[G^*]$, als unser neues Grundmodell. In diesem Grundmodell finden wir dann unser Forcing $\dot{Q}_\alpha^{G^*} = \mathbb{P}(\kappa, \eta)$, sodaß $\mathbf{1}_{\mathbb{P}(\kappa,\eta)} \Vdash \mathrm{cof}(\check{\kappa}) = \check{\eta}$.

Sei $G \subset \mathrm{Col}^{V^*}(\mu, {<}\kappa)$ ein über V^* generischer Filter, und $H \subseteq \mathbb{P}(\kappa, \eta)$ ein über $W := V^*[G]$ generischer Filter.

Dann erhalten wir, da ja auch $\mathbb{P}(\kappa, \eta)$ ein schwach ${<}\kappa$ abgeschlossenes Prikry-Typ-Forcing ist und da κ weiterhin unerreichbar in V^* ist, genau wie im Beweis des zweiten Hauptsatzes

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{P}_\mu^W(\mu) \arrow[dr, "\subseteq"] & \\ \mathcal{P}_\mu^{V^*}(\mu) \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[rr, "="] & & \mathcal{P}_\mu^{W[H]}(\mu) \end{tikzcd} \tag{4.12}$$

Auf der anderen Seite existiert natürlich auch in $W[H]$ eine in $\kappa = (\mu^+)^{W[H]}$ kofinale Folge $\langle \beta_\xi : \xi < \eta \rangle$, und da η nach (4.12) auch in $W[H]$ regulär bleibt, erhalten wir letztlich

- $\mathrm{cof}^{W[H]}((\mu^+)^W) = \eta$
- $\forall \alpha \leq \mu : \mathrm{cof}^{W[H]}(\alpha) = \mathrm{cof}^W(\alpha) \wedge \mathrm{Card}^{W[H]}(\alpha) = \mathrm{Card}^W(\alpha)$

q.e.d.

5 Der stationäre Turm

5.1 Verallgemeinerte Stationarität

Definitionen für Clubmengen und Stationarität

Wie der Titel schon andeutet wünschen wir das Konzept von stationären Teilmenge, auf beliebige nicht-leere Mengen auszudehnen. Zumindest dies geht kanonisch, sobald wir ein breiteres Konzept von Clubmengen haben. Bei beliebigen Mengen gibt es aber leider keine offensichtliche Art zu definieren, was „club“ sein bedeutet.

Wir werden im Folgenden drei verschiedene Konzepte für Clubmengen vorstellen, und zeigen, daß sie den gleichen Begriff von Stationarität induzieren. Für den Rest des Kapitels werden wir dann alle drei Arten von Clubmengen, mehr oder minder gleichwertig behandeln, um in verschiedenartigen Situationen immer die beste Form von Clubmengen zur Hand zu haben.

Definition 5.1.1: Sei X eine nichtleere Menge.

(a) Bezeichne für eine Funktion $F : [X]^{<\omega} \to X$

$$C_F := \{Z \subseteq X | F\text{''} \left[[Z]^{<\omega}\right] \subseteq Z\}$$

(b) Sei $\mathfrak{a} := \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$ eine Folge von Funktionen. Dann bezeichne

$$C_{\mathfrak{a}} := \{\varnothing \neq Z \subseteq X | \forall i < \omega : f_i\text{''} \left[Z^{s(i)}\right] \subseteq Z\}$$

(c) Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache der Logik erster Stufe, dann setzen wir für eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{S} = (X; \ldots)$

$$C_{\mathfrak{S}} = \{Y \subseteq X | Y \prec (X; \ldots)\}$$

Dies sollen also unsere Kandidaten für unsere „neuen“ Clubs sein. Um der Notwendigkeit uns für eine zu entscheiden, aus den Weg zu gehen, werden wir zeigen, daß für unsere Zwecke eigentlich kein Unterschied zwischen diesen besteht.Wir warnen, daß es dabei etwas technisch wird.

Lemma 5.1.2: *Sei X eine nichtleere Menge.*

(a) Sei $F : [X]^{<\omega} \to X$, dann existiert

$$\mathfrak{a} := \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$$

sodaß $C_{\mathfrak{a}} \subseteq C_F$.

(b) $\mathfrak{a} := \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega\rangle$ *sei eine Folge von Funktionen. Dann existiert* $F : [X]^{<\omega} \to X$*, sodaß* $C_F \subseteq C_{\mathfrak{a}}$.

Beweis: (a) Sei $F : [X]^{<\omega} \to X$ gegeben, definiere für $0 < n < \omega$

$$\begin{aligned} f_n : X^n &\longrightarrow X \\ (z_1, \ldots, z_n) &\longmapsto F(\{z_1, \ldots, z_n\}) \end{aligned}$$

und $f_0 \equiv F(\varnothing)$. Für $\mathfrak{a} := \langle f_n : n < \omega\rangle$ gilt dann $C_{\mathfrak{a}} \subseteq C_F$.

(b) $\mathfrak{a} := \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega\rangle$ sei gegeben.

Gehen wir zuerst davon aus, daß X endlich ist. Wir definieren dann $F : [X]^{<\omega} (= \mathcal{P}(X)) \to X$, so daß für alle $Z \subsetneq X$ $F(Z) \notin Z$. Dann ist $C_F = \{X\} \subseteq C_{\mathfrak{a}}$.

Sei nun also X unendlich, wir wählen eine abzählbare Teilmenge $\{x_n | n < \omega\} \subset X$, und eine Wohlordnung $<_X$ auf X. Wenn wir im folgenden $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ schreiben, sollen die x_i nach $<_X$ geordnet seien.

Sei $\langle \pi_n^m : m < \omega, n < m!\rangle$ eine Folge, sodaß $\langle \pi_n^m : n < m!\rangle$ für alle $m < \omega$ die Menge aller Permutationen einer m-elementigen Menge durchlaüft.

Sei $\sigma : \omega \to \{(m,n) | m < \omega, n < s(m)!\}$ so, daß (σ^{-1})" $[\{(m,n)\}]$ für alle $m < \omega$ und $n < s(m)!$ unendlich ist. Wir schreiben $\sigma^i(n)$ für die i-te Komponente von $\sigma(n)$.

Wir definieren jetzt

$$F(z) := \begin{cases} f_{\sigma^1(n)}(z_{\pi^{\sigma^1(n)}_{\sigma^2(n)}(1)}, \ldots, z_{\pi^{\sigma^1(n)}_{\sigma^2(n)}(s(\sigma^1(n)))}) & [x_n \in z \wedge \forall m > n : x_m \notin z] \\ & \wedge z = \{z_1, \ldots, z_{s(\sigma^1(n))}\} \cup \{x_n\} \\ x_0 & z = \varnothing \\ x_{n+1} & z = \{x_n\} \\ x_0 \text{ sonst} & \end{cases}$$

Sei nun $Z \in C_F$ beliebig. Wir wollen zeigen, daß $Z \in C_{\mathfrak{a}}$.

Behauptung: *Es gilt* $\{x_n | n < \omega\} \subset Z$*, also* $\forall n < \omega : x_n \in Z$.

Beweis der Behauptung (durch Induktion nach n): IA: Da $Z \in C_F$ muß insbesondere $x_0 = F(\varnothing) \in Z$ sein.

IV: Gelte bereits $x_n \in Z$.

IS: Da $Z \in C_F$ und $\{x_n\} \in [Z]^{<\omega}$ muß insbesondere $x_{n+1} = F(\{x_n\}) \in Z$ sein.□

Sei jetzt $m < \omega$ beliebig, und $(z_1^*, \ldots, z_{s(m)}^*) \in Z^{s(m)}$. Wählen wir $n < s(m)!$ und $z_1, \ldots, z_{s(m)}$, so daß $z_{\pi_n^m(1)} = z_1^*, \ldots, z_{\pi_n^m(s(m))} = z_{s(m)}^*$ und die $z_1, \ldots, z_{s(m)}$ nach $<_X$ geeordnet sind. Es ist zu zeigen, daß $f_m(z_1^*, \ldots, z_{s(m)}^*) \in Z$ oder anders ausgedrückt $f_n(z_{\pi_n^m(1)}, \ldots, z_{\pi_n^m(s(m))}) \in Z$. Sei $k := \max\{i < \omega | x_i \in z\}$, sei $k < l$ ein Urbild von (m, n) unter σ, dann ist $\{z_1, \ldots, z_{s(m)}\} \cup \{x_m\} \in [Z]^{<\omega}$ und

$$\begin{aligned} f_n(z_{\pi_n^m(1)}, \ldots, z_{\pi_n^m(s(m))}) =& f_{\sigma^1(l)}(z_{\pi_{\sigma^2(l)}^{\sigma^1(l)}(1)}, \ldots, z_{\pi_{\sigma^2(l)}^{\sigma^1(l)}(s(\sigma^1(l)))}) \\ =& F(\{z_1, \ldots, z_{s(m)}\} \cup \{x_m\}) \in Z \end{aligned}$$ ⊣

Dies klärt die Verwandheit von Variante (a) und (b).

Lemma 5.1.3: *Sei X eine nichtleere Menge.*

(a) Sei $\mathfrak{L}$ eine abzählbare Sprache der Logik erster Stufe, sei $\mathfrak{S} = (X; \ldots)$ eine $\mathfrak{L}$-Struktur, dann ex. $\mathfrak{a} := \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$ sodaß $C_{\mathfrak{a}} \subseteq C_{\mathfrak{S}}$.

(b) $\mathfrak{a} := \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$ sei eine Folge von Funktionen. Dann existiert eine Sprache der Logik erster Stufe $\mathfrak{L}$ und eine $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{S} = (X; \ldots)$, sodaß $C_{\mathfrak{S}} \subseteq C_{\mathfrak{a}}$.

Beweis:

(a) Sei für jede $\mathfrak{L}$-Formel $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ eine Skolemfunktion $f_\varphi : X^n \to X$ gegeben. Sei $\mathfrak{a} := \langle f_{\varphi_i} : i < \omega \rangle$ für eine Abzählung der Formeln $\langle \varphi_i : i < \omega \rangle$ dann ist bekanntlich $C_{\mathfrak{a}} \subseteq C_{\mathfrak{S}}$.

(b) Sei $\mathfrak{a} := \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$ gegeben, dann ist für eine geeignete Sprache auch $\mathfrak{S} = (X; \langle f_i : i < \omega \rangle)$ eine Struktur. Und für ein $Y \prec (X; \langle f_i : i < \omega \rangle)$ und $i < \omega$, gilt für alle $(y_1, \ldots, y_{s(i)}) \in Y^{s(i)}$, daß $Y \models f_i(y_1, \ldots, y_{s(i)}) = y$ genau dann wenn $X \models f_i(y_1, \ldots, y_{s(i)}) = y$, da nun $Y \models \exists y : f_i(y_1, \ldots, y_{s(i)}) = y$, ist der echte Wert von $f_i(y_1, \ldots, y_{s(i)})$ schon in Y.

Mit diesem Argument folgt $C_{\mathfrak{S}} \subseteq C_{\mathfrak{a}}$. ⊣

Dies klärt die Verwandheit zwischen Variante (b) und (c). Wir merken an, daß es uns mehr um die Varianten (a) und (c) geht, daß es aber unserer Meinung nach am einfachsten ist, über den Umweg mit Variante (b) die beiden zu vergleichen.

Definition 5.1.4: Sei X eine nichtleere Menge. Wir nennen dann

$$\mathrm{CF}(X) = \{Z \subseteq \mathcal{P}(X) | \exists F : [X]^{<\omega} \to X : C_F \subseteq Z\}$$

den Clubfilter auf $\mathcal{P}(X)$.

Wir wissen an diesere Stelle eigentlich noch nicht, daß es sich dabei tatsächlich um einen Filter handelt, aber dies wollen wir sogleich nachholen.

Proposition 5.1.5: *Sei X eine nichtleere Menge. Dann gilt*

(a) $\mathrm{CF}(X) = \{Z \subseteq \mathcal{P}(X) | \exists \mathfrak{a} = \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle : C_{\mathfrak{a}} \subseteq Z\}$

(b) $\mathrm{CF}(X) = \{Z \subseteq \mathcal{P}(X) | \exists \mathfrak{L} \exists \mathfrak{S} = (X; \ldots) : \mathrm{Card}(\mathfrak{L}) \leq \omega \wedge C_{\mathfrak{S}} \subseteq Z\}$

(c) $\mathrm{CF}(X)$ *ist ein Filter auf* $\mathcal{P}(X)$.

Beweis:

(a) Folgt sofort aus Lemma 5.1.2.

(b) Folgt sofort aus Lemma 5.1.3 in Verbindung mit Lemma 5.1.2.

(c) Seien $C_0, C_1 \in \mathrm{CF}(X)$ beliebig. Nach (a) finden wir

$$\mathfrak{a}_k := \langle (f_i)_k : [X]^{s_k(i)} \to X : i < \omega \rangle$$

sodaß $C_{\mathfrak{a}_k} \subseteq C_k$. Wir definieren jetzt

$$\mathfrak{a} := \langle f_i : [X]^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$$

und zwar soll $f_i = (f_j)_k$ sein, wobei $i = 2 \cdot j + k$ für $k < 2$. Dann ist

$$C_{\mathfrak{a}} = C_{\mathfrak{a}_0} \cap C_{\mathfrak{a}_1} \subseteq C_0 \cap C_1$$

Nach (a) also $C_0 \cap C_1 \in \mathrm{CF}(X)$. ⊣

Wir werden also im Folgenden den Clubfilter als Sammelbegriff für die verschieden Arten von Clubs verwenden. Auf diese Weise erhalten wir uns eine gewisse Flexibilität, wenn wir uns mit stationären Mengen befassen, die wir nun auch endlich ansprechen wollen.

Definition 5.1.6: Sei X eine nichtleere Menge, und $S \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt S stationär in $\mathcal{P}(X)$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind.

(a) Für alle $C \in \mathrm{CF}(X)$ ist $S \cap C \neq \varnothing$.

(b) Für alle $F : [X]^{<\omega} \to X$ ist $S \cap C_F \neq \varnothing$.

(c) Für alle $\mathfrak{a} = \langle f_i : X^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$ ist $S \cap C_{\mathfrak{a}} \neq \varnothing$.

(d) Für alle abzählbaren Sprachen $\mathfrak{L}$ und alle $\mathfrak{L}$-Strukturen $\mathfrak{S} = (X; \ldots)$ ist $S \cap C_{\mathfrak{S}} \neq \varnothing$.

Wir fragen uns natürlich, was den neuen Stationaritätsbegriff mit dem Alten verbindet. Dabei ist das nachfolgende Ergebnis das Beste was wir garantieren können.

Proposition 5.1.7: *Sei λ eine reguläre überabzählbare Kardinalzahl. Sei $S \subseteq \lambda \subset \mathcal{P}(\lambda)$. Dann ist S stationär im gewöhnlichen Sinne genau dann, wenn es stationär im neuen Sinne ist.*

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei S jetzt stationär im alten Sinne. Sei $F : [\lambda]^{<\omega} \to X$ beliebig.

Behauptung: *$C_F \cap \lambda$ ist club im alten Sinne.*

Beweis der Behauptung:

1. Sei $\langle \beta_\xi : \xi < \alpha \rangle \subset C_F \cap \lambda$, sodaß $\beta := \sup_{\xi<\alpha} \beta_\xi$ in λ ist. Sei $z \in [\beta]^{<\omega}$, dann ist $z \in [\beta_\xi]^{<\omega}$ für ein $\xi < \alpha$. Dann ist nach Vor. $F(z) \in \beta_\xi \subset \beta$. Also ist $\beta \in C_F \cap \lambda$. Das zeigt, daß $C_F \cap \lambda$ abgeschlossen ist.
2. Sei $\alpha < \lambda$ beliebig. Definiere durch Rekursion eine aufsteigende Folge $\langle \alpha_n : n < \omega \rangle$. Setze dazu $\alpha_0 := \alpha$. Angenommen wir hätten jetzt bereits α_n definiert, dann setze

$$\alpha_{n+1} := \sup(F\text{"} \left[[\alpha_n]^{<\omega}\right])$$

Da $\mathrm{Card}([\alpha_n]^{<\omega}) < \lambda$ und λ regulär, ist $\alpha_{n+1} < \lambda$. Setzen wir nun $\alpha_\omega = \sup_{n<\omega} \alpha_n$, so ist da λ überabzählbar und regulär ist $\alpha_\omega < \lambda$. Sei nun $a \in [\alpha_\omega]^{<\omega}$ beliebig. Für ein geeignetes n ist dann $a \in [\alpha_n]^{<\omega}$ und damit nach Konstruktion $F(a) \in \alpha_n \subset \alpha_\omega$. Das heißt $\alpha < \alpha_\omega \in C_F \cap \lambda$. □

Es gilt also nach der Behauptung $S \cap C_F = S \cap C_F \cap \lambda \neq \varnothing$

"$\Leftarrow$" Sei S jetzt stationär im neuen Sinne. Sei C eine beliebige Clubmenge (Club im alten Sinne!). Wir definieren dann

$$F : [\lambda]^{<\omega} \longrightarrow \lambda \qquad a \longmapsto \min\{\xi \in C | \xi > \max(a)\}$$

Dies ist wohldefiniert, da C unbeschränkt ist. Sei jetzt $\alpha \in C_F \cap \lambda$ beliebig. Dann gilt für alle $\xi < \alpha$, daß $\xi < F(\{\xi\}) \in \alpha$. Da dann $F(\{\xi\}) \in C$ ist also α ein Limespunkt von C. Wegen der Abgeschlossenheit von C, ergibt dies $C_F \cap \lambda \subseteq C$, also $S \cap C \supseteq S \cap C_f \cap \lambda \overset{S \subseteq \lambda}{=} S \cap C_F \neq \varnothing$ ⊣

Beispiele 5.1.8:

(a) Sei X eine nichtleere Menge und $a \in X$ beliebig, dann ist

$$C_a := \{Z \subseteq X | a \in Z\} \in \mathrm{CF}(X)$$

Das liegt daran, daß $C_a = C_F$ ist für folgendes F:

$$\begin{aligned} F : &[X]^{<\omega} \longrightarrow X \\ &z \longmapsto a \end{aligned}$$

(b) Sei X eine nichtleere Menge und $\omega < \lambda \leq \mathrm{Card}(X)$ eine Kardinalzahl, dann ist $\mathcal{P}_\lambda(X)$ stationär, nach dem Satz von Löwenheimskolem. (Um dies einzusehen, benutze man am besten die Variante (d))

(c) Sei $\lambda > \omega$ eine singuläre Kardinalzahl. Dann ist natürlich $(\mathrm{cof}(\lambda), \lambda)$ stationär im alten Sinne, ist aber nicht stationär im neuen Sinne. Um dies zu sehen, wähle man erstmal eine kofinale Folge $\langle \beta_\xi : \xi < \mathrm{cof}(\lambda) \rangle$, und definiere dann ein $F : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ wie folgt:
$$F(z) := \begin{cases} \beta_\xi & z = \{\xi\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
Man sieht dann jetzt, daß $C_F \cap (\mathrm{cof}(\lambda), \lambda) = \varnothing$.

Daß die Mengen aus (a) und (b), club bzw. stationär sind, sollte man sich merken, wir werden ihnen im Folgenden öfter begegnen. (c) zeigt natürlich, daß das Ergebnis aus Proposition 5.1.7 nicht verbessert werden kann.

Hilfsmittel für den Umgang mit stationären Mengen

Sei $\varnothing \neq X \subseteq Y$, und seien $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $B \subseteq \mathcal{P}(Y)$ bleibig, dann schreiben wir:
$$A \uparrow Y := \{Z \subseteq Y | Z \cap X \in A\} \text{ und } B \downarrow X := \{Z \cap X | Z \in B\}$$

Auf diese Weise werden wir stationäre Mengen die auf unterschiedlichen Mengen leben vergleichen können, dabei ist wichtig, daß Clubmengen und stationäre Mengen bei dieser Verschiebung club bzw. stationär bleiben, und dies zeigen wir jetzt.

Lemma 5.1.9 (Erstes Projektionslemma): *Sei $\varnothing \neq X \subseteq Y$.*

(a) Sei $C \in \mathrm{CF}(X)$, dann ist $C \uparrow Y \in \mathrm{CF}(Y)$.

(b) Sei $C \in \mathrm{CF}(Y)$, dann ist $C \downarrow X \in \mathrm{CF}(X)$.

Beweis: (a) Sei $F : [X]^{<\omega} \to X$, so daß $C \supseteq C_F$. Wir definieren, dann
$$\begin{aligned} G : &[Y]^{<\omega} \longrightarrow Y \\ &a \longmapsto F(a \cap X) \end{aligned}$$

Für ein $Z \subseteq Y$ gilt dann:
$$\begin{aligned} Z \in C_G &\Leftrightarrow \forall z \in [Z]^{<\omega} : G(z) \in Z \\ &\Leftrightarrow \forall z \in [Z]^{<\omega} : F(z \cap X) \in Z \\ &\Leftrightarrow \forall z \in [Z \cap X]^{<\omega} : F(z) \in Z \\ &\Leftrightarrow \forall z \in [Z \cap X]^{<\omega} : F(z) \in Z \cap X \Leftrightarrow Z \cap X \in C_F \Leftrightarrow Z \in C_F \uparrow Y \end{aligned}$$

Also ist $C \uparrow Y \supseteq C_F \uparrow C_Y = C_G$, also $C \uparrow Y \in \mathrm{CF}(Y)$.

(b) Sei $\mathfrak{a} := \langle f_i : [X]^{s(i)} \to X : i < \omega \rangle$ so daß $C_{\mathfrak{a}} \subseteq C$. Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache, die genau aus Funktionszeichen $\dot{f}_i$ für $i < \omega$ besteht. Bezeichne T die Menge aller $\mathfrak{L}$-Terme. Definiere dann für alle $\tau \in T$ eine Funktion f_τ mit Stelligkeit $s(\tau)$, die den Term τ interpretiert, wenn $\dot{f}_i$ durch f_i interpretiert wird. Definiere dann für ein festes $x \in X$:

$$\begin{aligned} g_\tau : & [X]^{s(\tau)} \longrightarrow X \\ & a \longmapsto \begin{cases} f_\tau(a) & f_\tau(a) \in X \\ x & f_\tau(a) \notin X \end{cases} \end{aligned}$$

und setze ferner $\mathfrak{a}^* := \langle g_\tau : \tau \in T \rangle$. Sei jetzt $Z \in C_{\mathfrak{a}^*}$. Sei $A := Z \cup \bigcup_{\tau \in T} f_\tau" \left[[Z]^{s(\tau)} \right]$. Es ist dann $A \in C_{\mathfrak{a}}$.

Behauptung: $A \cap X = Z$

Beweis der Behauptung: $Z \subseteq A \cap X$ ist klar. Es bleibt z.z. $A \cap X \subseteq Z$,oder

$$\forall \tau \in T \forall z \in [Z]^{s(\tau)} : f_\tau(z) \in X \Rightarrow f_\tau(z) \in Z$$

Wenn aber $f_\tau(z) \in X$, dann ist $f_\tau(z) = g_\tau(z)$, und da $Z \in C_{\mathfrak{a}^*}$ und $z \in [Z]^{s(\tau)}$, so ist $f_\tau(z) = g_\tau(z) \in Z$. □

Mit der Behauptung erhalten wir dann schließlich, daß $Z \in C_{\mathfrak{a}} \downarrow X$, also, da Z beliebig war, daß $C_{\mathfrak{a}^*} \subseteq C_{\mathfrak{a}} \downarrow X$. Also $C_{\mathfrak{a}^*} \subseteq C \downarrow X$, damit $C \downarrow X \in \mathrm{CF}(X)$. ⊣

Lemma 5.1.10 (2. Projektionslemma): *Sei $\varnothing \neq X \subseteq Y$.*

(a) Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ stationär, dann ist $S \uparrow Y$ stationär auf Y.

(b) Sei $S \subseteq \mathcal{P}(Y)$ stationär, dann ist $S \downarrow X$ stationär auf X.

Beweis:

(a) Sei S stationär auf X. Sei $C \in \mathrm{CF}(Y)$. Nach dem vorhergehenden Lemma ist dann $C \downarrow X \in \mathrm{CF}(X)$, also nach Vor. $S \cap C \downarrow X \neq \varnothing$. Sei $x \in S \cap C \downarrow X$, dann ist also $x \in S$ und $x = y \cap X$ für ein $y \in C$. Dann ist also $y \in S \uparrow Y \cap C$.

(b) Sei S stationär auf Y. Sei $C \in \mathrm{CF}(X)$. Nach dem vorhergehenden Lemma ist dann $C \uparrow Y \in \mathrm{CF}(Y)$, also nach Vor. $S \cap C \uparrow Y \neq \varnothing$. Sei $y \in S \cap C \uparrow Y$, dann ist also $y \in S$ und $x := y \cap X \in C$. Dann ist also $x \in S \downarrow X \cap C$. ⊣

Der nächste Satz schließlich ist ein Analogon zu dem berühmten Satz von Fodor.

Satz 5.1.11 (Normalität): *Sei X eine nichtleere Menge, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ stationär, $f : S \to X$ eine regressive Funktion. Dann existiert eine stationäre Menge $S' \subseteq S$, sodaß f auf S' konstant ist.*

Beweis: Angenommen für kein $a \in \mathrm{ran}(f)$ ist $\{x \in S | f(x) = a\}$ stationär. Dann finden wir also für jedes $a \in \mathrm{ran}(f)$ ein $G_a : [X]^{<\omega} \to X$, sodaß

$$C_{G_a} \cap \{x \in S | f(x) = a\} = \varnothing$$

Fixiere ein beliebiges $x \in X$.Wir definieren jetzt für $n < \omega$ Funktionen

$$\begin{aligned} g_n : & X^{n+1} \longrightarrow X \\ & \langle a, x_1, \ldots, x_n \rangle \longmapsto \begin{cases} G_a(\{x_1, \ldots, x_n\}) & a \in \mathrm{ran}(f) \\ x & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Bezeichne dann $\mathfrak{S}$ die Struktur $(X; \langle g_n : n < \omega \rangle)$. Wir finden dann ein $Z \in S \cap C_{\mathfrak{S}}$. Man beachte, daß damit Z unter allen g_n abgeschlossen ist. Es gilt dann ferner $a := f(Z) \in Z$, und damit für alle $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset Z$, daß $\{a, x_1, \ldots, x_n\} \subset Z$, also

$$G_a(\{x_1, \ldots, x_n\}) = g_n(a, x_1, \ldots, x_n) \in Z$$

Daß heißt also $Z \in C_{G_a} \cap \{x \in S | f(x) = a\}$. Widerspruch! $\dashv$

5.2 Die Stationärer-Turm-Einbettung

Das Forcing

Bemerkung: Sei X eine nichtleere Menge, $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ stationär. Dann ist $\bigcup S = X$. (Sei $x \in X$ beliebig.Betrachte $F : [X]^{<\omega} \to X$, $F \equiv x$. Dann ist für alle $Z \in C_F$ $x \in Z$.)

Definition 5.2.1: Sei S eine nichtleere Menge. Dann heißt S stationär genau dann, wenn es stationär in $\bigcup S$ ist.

Definition 5.2.2: Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl.Wir definieren eine partielle Ordnung $\langle \mathbb{P}_\kappa, \leq \rangle$, wie folgt:

- $\mathbb{P}_\kappa = \{S \in V_\kappa | \ S \text{ ist stationär}\}$
- Fur zwei $S, T \in \mathbb{P}_\kappa$ gilt $S \leq T$ genau dann, wenn $\bigcup S \supseteq \bigcup T$ und $S \subseteq T \uparrow \bigcup S$.

Wir nennen $\mathbb{P}_\kappa$ den stationären Turm.

Diese partielle Ordnung hat jetzt die nützliche Eigenschaft für je zwei kompatible Elemente eine schwächste gemeinsame Verstärkung zu haben. Nachdem man etwas nachgedacht hat, bietet sich folgende Menge an.

Für zwei stationäre Mengen S, T schreibe

$$S \wedge T := S \uparrow (\bigcup S \cup \bigcup T) \cap S \uparrow (\bigcup S \cup \bigcup T)$$

Lemma 5.2.3: *Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl, $\mathbb{P}_\kappa$ der stat. Turm. Dann sind $S,T \in \mathbb{P}_\kappa$ genau dann kompatibel, wenn $S \wedge T$ stationär ist. $S \wedge T$ ist in diesem Fall die schwächste gemeinsame Verstärkung von S und T.*

BEWEIS: Seien $S,T \in \mathbb{P}_\kappa$ beliebig.

„$\Rightarrow$" Seien S und T kompatibel. Wir finden also ein stationäres R, sodass $R \leq S,T$, d.h. $\bigcup R \supseteq (\bigcup S \cup \bigcup T)$ und $R \subseteq S \uparrow \bigcup R$ und $R \subseteq T \uparrow \bigcup R$. Betrachte $R \downarrow (\bigcup S \cup \bigcup T)$. Ist $x \in R \downarrow (\bigcup S \cup \bigcup T)$, dann ist $x := y \cap (\bigcup S \cup \bigcup T)$ für ein $y \in R$. Also ist nach Vor. sowohl $y \cap \bigcup S \in S$, als auch $y \cap \bigcup T \in T$. Damit folgt

$$x \cap \bigcup S = \left[y \cap (\bigcup S \cup \bigcup T)\right] \cap \bigcup S = y \cap \bigcup S \in S$$

also $x \in S \uparrow (\bigcup S \cup \bigcup T)$ und völlig analog folgt $x \in T \uparrow (\bigcup S \cup \bigcup T)$. Dies zeigt $R \downarrow (\bigcup S \cup \bigcup T) \subseteq S \wedge T$, und da nach Lemma 5.1.10 $R \downarrow (\bigcup S \cup \bigcup T)$ stationär ist, so auch $S \wedge T$, und damit $S \wedge T \in \mathbb{P}_\kappa$; ferner gilt $R \leq S \wedge T$, da

$$S \wedge T \uparrow \bigcup R \supseteq \left[R \downarrow (\bigcup S \cup \bigcup T)\right] \uparrow \bigcup R \supseteq R$$

„$\Leftarrow$" Wenn $S \wedge T$ stationär ist, so ist offensichtlich auch $S \wedge T \in \mathbb{P}_\kappa$, und offensichtlich ist es eine gemeinsame Verstärkung von S und T. Das es die schwächste Solche ist, ergibt sich direkt aus dem Beweis von „$\Rightarrow$". $\dashv$

Das nachfolgende Lemma ist die natürliche Konsequenz von Satz 5.1.11 angewandt auf unsere partielle Ordnung.

Lemma 5.2.4: *Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl, $\mathbb{P}_\kappa$ der stat. Turm. Sei $X \in V_\kappa$ nicht leer, und sei $f \in {}^{\mathcal{P}(X)}V$ regressiv auf einer stationären Menge $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, dann ist folgende Menge dicht.*

$$D := \{R \in \mathbb{P}_\kappa | X \subseteq \bigcup R \wedge \exists x \forall z \in R \downarrow X : f(z) = x\}$$

BEWEIS: Sei $R \in \mathbb{P}_\kappa$ beliebig. O.B.d.A. ist $X \subseteq \bigcup R$.(Sonst gehe zu $R \uparrow (X \cup \bigcup R)$ über). Definiere $f^* : \mathcal{P}(\bigcup R) \to Y$ durch $f^*(z) = f(z \cap X)$. Auf der nach Lemma 5.1.10 stationären Menge $A \uparrow \bigcup R$ ist f^* dann regressiv. Wegen Normalität (Satz 5.1.11) ist dann f^* konstant auf einer stationären Menge $R^* \subseteq R$ mit Wert x. Ist dann $y \in R^* \downarrow X$ beliebig, so ist $y = z \cap X$ für ein $z \in R^*$, also

$$f(y) = f^*(z) = x$$

d.h. $R^* \in D$. Da $R^* \leq R$ folgt die Behauptung. $\dashv$

Fixiere für den Rest dieses Abschnittes einen über V generischen Filter $G \subseteq \mathbb{P}_\kappa$, wobei κ irgendeine unerreichbare Kardinalzahl sei.

Wir werden zeigen, daß ein solcher Filter eine generische Einbettung erzeugt, und zwar indem wir zeigen, daß G im Endeffekt aus vielen Ultrafiltern zusammengesetzt ist, deren Einbettungen wir zu einer kombinieren können.

Proposition 5.2.5: *Sei $X \in V_\kappa$ eine nichtleere Menge. Dann ist*

$$U_X := \{S \in G | \bigcup S = X\} = \{T \downarrow X | T \in G \wedge X \subseteq \bigcup T\}$$

ein normaler V-Ultrafilter auf $\mathcal{P}(X)$ der den Clubfilter erweitert.

Beweis: $\{S \in G | \bigcup S = X\} = \{T \downarrow X | T \in G \wedge X \subseteq \bigcup T\}$ folgt aus Lemma 5.1.10, und daß $T \leq T \downarrow X$.

1. Um zu zeigen, daß U_X den Clubfilter erweitert, reicht es zu sehen, daß wenn $C \in \mathrm{CF}(\bigcup C)$ ist, dann ist es mit allen $S \in \mathbb{P}_\kappa$ kompatibel. Nach Lemma 5.1.9 ist $C \uparrow (\bigcup S \cup \bigcup C) \in \mathrm{CF}(\bigcup S \cup \bigcup C)$, und damit ist dann auch $S \wedge C$ wieder stationär. Nach Lemma 5.2.3 folgt damit schließlich, daß S und C kompatibel sind.

2. Ist $S \in U_X$ und $S \subseteq T$ mit $T \in V$ und $\bigcup T = X$, so ist $T \in \mathbb{P}_\kappa$ und $T \leq S$. Damit $T \in U_X$, da G ein Filter ist.

3. Seien $S, T \in U_X$, da dann $S, T \in G$, so ist nach Lemma 5.2.3 auch $S \wedge T \in G$. Aber da $\bigcup S = \bigcup T = X$, so ist $S \cap T = S \wedge T \in U_x$.

4. Sei $S \subseteq \mathcal{P}^V(X)$ mit $S \in V$ beliebig. Um zu zeigen, daß U_X ein Ultrafilter ist, reicht es zu zeigen, daß

   $$D := \{T \in \mathbb{P}_\kappa | X \subseteq \bigcup T \wedge [T \downarrow X \subseteq S \vee T \downarrow X \subseteq \mathcal{P}(X) \backslash S]\}$$

   dicht ist. Sei dazu $T \in \mathbb{P}_{<\kappa}$ beliebig. O.B.d.A. sei $X \subseteq \bigcup T$ (sonst gehe zu $T \uparrow \bigcup T \cup X$ über). Definiere

   $$T^0 := \{Z \subseteq \bigcup T | Z \cap X \in S\} \quad T^1 := \{Z \subseteq \bigcup T | Z \cap X \notin S\}$$

   dann ist $T^0 \cup T^1 = T$. Angenommen, sowohl T^0 als auch T^1 wären nicht stationär, dann finden wir $C_i \in \mathrm{CF}(\bigcup T)$ mit $C_i \cap T^i = \varnothing$ $(i < 2)$. Dann gilt aber $C_0 \cap C_1 \cap T = \varnothing$, aber $C_0 \cap C_1 \in \mathrm{CF}(\bigcup T)$ und T war stationär. Widerspruch!

   Ist jetzt also etwa T^0 stationär, so ist $T^0 \in \mathbb{P}_\kappa$ und $T^0 \leq T$, und ferner per Konstruktion $T^0 \downarrow X \subseteq S$. Also $T^0 \in D$. Analog ist natürlich auch $T^1 \in D$ und $T^1 \leq T$, so es stationär ist. Also ist D dicht.

5. Das U_X normal ist folgt aus Lemma 5.2.4. ⊣

Es ist jetzt klar, daß wir viele Ultrafilter erhalten, die aber natürlich auf verschiedenen Mengen leben. Dennoch können wir sie vergleichen.

Lemma 5.2.6: *Sei $\varnothing \neq X \subseteq Y$. Sei $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, dann ist $S \in U_X$ genau dann wenn $S \uparrow Y \in U_Y$.*

Beweis:

„⇒“ Sei $S \in U_X$. Wir betrachten $D := \{T \leq S | Y \subseteq \bigcup T\}$. Sei $T \leq S$ beliebig, dann ist $T \uparrow (\bigcup T \cup Y) \leq T$ und $T \uparrow (\bigcup T \cup S) \in D$. Es ist also D dicht unter S. Da $S \in G$, finden wir also auch ein $T \in D \cap G$. Für ein solches T gilt $T \downarrow Y \in U_Y$. Sei $x \in T \downarrow Y$ beliebig, es ist also $x = y \cap Y$ für ein $y \in T$. Da nach Wahl von T $T \subseteq S \uparrow \bigcup T$, ist dann $y \cap X \in S$. Damit ist auch

$$x \cap X = [y \cap Y] \cap X \overset{X \subseteq Y}{=} y \cap X \in S$$

also $x \in S \uparrow Y$. Damit folgt schließlich, daß $T \downarrow Y \leq S \uparrow Y$, also $S \uparrow Y \in U_Y$.

„⇐“ Sei jetzt $S \uparrow Y \in U_Y$. Wir müssen zeigen, daß dann $S \in G$. Dies folgt umgehend daraus, daß $S \uparrow Y \leq S$. ⊣

Die Einbettung und Normalität

Wir wollen also jetzt die Einbettung definieren, und werden jetzt ganz ähnlich wie man das bei den bereits bekannten Ultrapotenzen gemacht hat, aus der Normalität unserer Filter eine Methode herleiten kann, die Forcingrelation des stationären Turmes mit der Einbettung in Verbindung bringen kann.

Für ein nichtleeres $X \in V_\kappa$ setzen wir dann $M_X := \mathrm{Ult}(V; U_X)$, bezeichne $[f]_X$ für ein $f \in {}^{\mathcal{P}(X)}V$ die Äquivalenzklasse bezüglich U_X, und E_X die übliche Ordnung auf diesen Äquivalenzklassen. Ferner setzen wir $M_\varnothing = V$.

Für $X \subseteq Y \in V_\kappa$ definieren wir ferner Funktionen

$$j_Y^X : M_X \longrightarrow M_Y$$

wie folgt: Ist $X = \varnothing$ so sei $j_Y^\varnothing$ kurz j_Y die Ultrapotenzeinbettung. Ist dagegen $X \neq \varnothing$, so definiere

$$j_Y^X : M_X (= \mathrm{Ult}(V; U_X)) \longrightarrow M_Y (= \mathrm{Ult}(V; U_Y)) \qquad [f]_X \longmapsto [f_Y]_Y$$

wobei für ein $f \in {}^{\mathcal{P}(X)}V$

$$f_Y : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow V \qquad Z \longmapsto f(Z \cap X)$$

Proposition 5.2.7: *Sei $X \subseteq Y \in V_\kappa$, dann ist j_Y^X elementar.*

Beweis: Für $X = \varnothing$ ist dies klar. Sei also $\varnothing \neq X \subseteq Y$ und $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine beliebige Formel der Mengenlehre. Dann gilt für alle $f_1, \ldots, f_n \in {}^{\mathcal{P}(X)}V$:

$$\begin{aligned} M_X \models \varphi([f_1]_X, \ldots, [f_n]_X) &\overset{\text{Łoś}}{\Leftrightarrow} \{Z \subseteq X | \varphi(f_1(Z), \ldots, f_n(Z))\} \in U_X \\ &\overset{5.2.6}{\Leftrightarrow} \{Z \subseteq X | \varphi(f_1(Z), \ldots, f_n(Z))\} \uparrow Y \in U_Y \\ &\Leftrightarrow \{Z \subseteq Y | \varphi(f_1(Z \cap X), \ldots, f_n(Z \cap X))\} \in U_Y \\ &\overset{\text{Łoś}}{\Leftrightarrow} M_Y \models \varphi([(f_1)_Y]_Y, \ldots, [(f_n)_Y]_Y) \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß j_Y^X wohldefiniert und Elementar ist. ⊣

Proposition 5.2.8: *Sei $X \subseteq Y \subseteq Z \in V_\kappa$, dann ist $j^Y_Z \circ j^X_Y = j^X_Z$.*

Beweis:

1.Fall: Angenommen $X = \varnothing$. Dann ist $j_Y(x) = [c_x]_Y$, wobei c_x die Konstante Funktion mit Wert x auf $\mathcal{P}(Y)$ bezeichne. Man sieht dann, daß $(c_x)_Z$ die Konstante Funktion mit Wert x auf $\mathcal{P}(Z)$ ist, d.h.

$$j^Y_Z(j_Y(x)) = j^Y_Z([c_x]_Y) = [(c_x)_Z]_Z = j_Z(x)$$

2.Fall: Sei jetzt X nichtleer. Es reicht dann zu zeigen, daß $(f_Y)_Z = f_Z$ für alle $f \in {}^{\mathcal{P}(X)}V$ ist. Dies folgt da für $z \subseteq \mathcal{P}(Z)$

$$f_Z(z) = f(z \cap X) = f((z \cap Y) \cap X) = f_Y(z \cap Y) = (f_Y)_Z(z)$$ ⊣

Wir erhalten also ein gerichtetes System $\langle (M_X; E_X), j^X_Y : X \subseteq Y \in V_\kappa \rangle$. Den direkten Limes dieses Systems bezeichnen wir fortan mit $(M; E)$ die Limeseinbettungen mit $j^X_\infty : M_X \to M$. Wir schreiben $[f]_G$ für $j^X_\infty([f]_X)$, wenn $f : \mathcal{P}(X) \to V$. Nach Definition des Limesmodells gilt dann

$$M := \{[f]_G \,|\exists \varnothing \neq X \in V_\kappa : f : \mathcal{P}(X) \to V\}$$

$j^\varnothing_\infty : V \to M$ nennen wir der Einfachheit halber einfach j.

Der nächste Satz (dessen Beweis auf dem nachfolgenden Lemma basiert) ist vergleichbar mit dem Resultat Proposition 0.0.3.

Lemma 5.2.9: *Sei $\varnothing \neq X \subseteq Y \in V_\kappa$. Sei $i^X_Y : \mathcal{P}(Y) \to Y$ diejenige Funktion mit $i^X_Y(z) = z \cap X$. Dann gilt*

$$j_Y\text{''}\,[X] = \{a \in M_Y | a\, E_Y\, \left[i^X_Y\right]_Y\}$$

Beweis:

„$\subseteq$“ Sei $x \in X$, dann ist

$$A := \{z \subseteq Y | c_x(z) \in i^X_Y(z)\} = \{z \subseteq Y | x \in z \cap X\} = \{z \subseteq Y | x \in z\}$$

Betrachte jetzt $F : [Y]^{<\omega} \to Y$, mit für alle $z \in [Y]^{<\omega}$ $F(z) = x$. Dann ist A gerade C_F, also in CF(Y) und damit nach Proposition 5.2.5 in U_Y. Also ist $[c_x]_Y\, E_Y \left[i^X_Y\right]_Y$.

„$\supseteq$“ Sei $a \in M_Y$ mit $a\, E_Y \left[i^X_Y\right]_Y$. $a = [f]_Y$ für ein geeignetes $f \in {}^{\mathcal{P}(Y)}V$. Es folgt dann unmittelbar, daß

$$A := \{z \subseteq Y | f(z) \in z \cap X\} \in U_Y$$

also ist $f \restriction A$ regressiv. Wir wollen zeigen, daß es ein $x \in X$ gibt, sodaß

$$\{z \subseteq Y | f(z) = x\} \in U_Y$$

$D := \{R \in \mathbb{P}_\kappa | Y \subseteq \bigcup R \wedge \exists x \in X \forall z \in R \downarrow Y : f(z) = x\}$ ist jetzt dicht wegen Lemma 5.2.4. Also finden wir ein $R \in G \cap D$, d.h. $R \downarrow Y \in U_Y$, und f ist konstant auf $R \downarrow Y$ mit Wert $x \in X$. Also ist $[f]_Y = j_Y(x)$. ⊣

Satz 5.2.10: *Sei $\varnothing \neq X \subseteq Y \in V_\kappa$. Sei $i_Y^X : \mathcal{P}(Y) \to Y$ diejenige Funktion mit $i_Y^X(z) = z \cap X$. Dann ist*

$$j\text{''}\left[X\right] = \{a \in M | a \; E \left[i_Y^X\right]_G\}$$

Beweis: Wir wissen wegen Lemma 5.2.9 daß $j_Y\text{''}\left[X\right] = \{a \in M_Y | a \, E_Y \left[i_X^Y\right]_Y\}$. Sei jetzt $a \in M$ beliebig. Dann ist nach Definition des direkten Limes $a = j_\infty^Z(a^*)$ für ein $a^* \in M_Z$, für ein geeignetes $Z \in V_\kappa$.O.B.d.A. sei $Y \subseteq Z$, sonst gehe zu $Z \cup Y$ über. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a \in j\text{''}\left[X\right] &\Leftrightarrow \exists x \in X : a = j(x) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in X : j_\infty^Z(a^*) = j_\infty^Z(j_Z(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \in X : a^* = j_Z(x) \\
&\Leftrightarrow a^* \in j_Z\text{''}\left[X\right] \\
&\overset{5.2.9}{\Leftrightarrow} a^* \; E_X \left[i_X^Z\right]_Z \\
&\Leftrightarrow a \; E \; j_\infty^Z(\left[i_Z^X\right]_Z) \\
&\Leftrightarrow a \; E \; j_\infty^Z(j_Z^Y(\left[i_Y^X\right]_Y)) \\
&\Leftrightarrow a \; E \; j_\infty^Y(\left[i_Y^X\right]_Y)
\end{aligned}$$

⊣

Lemma 5.2.11: *Sei $\varnothing \neq X \in V_\kappa$, und i_X^X die Identität auf $\mathcal{P}(X)$ dann gilt*

$$U_X = \{Z \subseteq \mathcal{P}(X) | \left[i_X^X\right]_G E \; j(z)\}$$

Beweis: Sei $Z \subseteq \mathcal{P}(X)$ stationär, dann gilt

$$\begin{aligned}
Z \in U_X &\Leftrightarrow \{z \subseteq X | z \in c_Z(z)\} \in U_X \\
&\Leftrightarrow \{z \subseteq X | i_X^X(z) \in c_Z(z)\} \in U_X \\
&\overset{\text{Łos}}{\Leftrightarrow} \left[i_X^X\right]_X E_X \; j_X(z) \\
&\Leftrightarrow \left[i_X^X\right]_G E \; j(z)
\end{aligned}$$

⊣

Korrolar 5.2.12: *Angenommen M wäre fundiert, wir wollen dann M mit seinem transitiven Kollaps identifizieren. Es gilt dann für alle stationären $S \in V_\kappa$:*

$$S \in G \Leftrightarrow j\text{''}\left[\bigcup S\right] \in j(S)$$

Beweis: Nach Satz 5.2.10 wird natürlich $\left[i_X^X\right]_G$ auf $j\text{''}\left[X\right]$ abgebildet. Das Ergebnis von Lemma 5.2.11 stellt sich dann wie folgt dar

$$S \in G \Leftrightarrow S \in U_{(\bigcup S)} \Leftrightarrow j\text{''}\left[\bigcup S\right] \in j(S)$$

⊣

So nun wissen wir, was wir noch zu tun haben. Wir hätten gerne ein fundiertes M. Im allgemeinen wissen wir aber nicht mehr als dies.

Bemerkung 5.2.13: $\kappa \subseteq \mathrm{wfp}(M)$

Beweis: Sei $\alpha < \kappa$ beliebig. Sei $i : \mathcal{P}(\alpha) \to \mathcal{P}(\alpha)$ die Identität. Nach Satz 5.2.10 repräsentiert $[i]_G$ dann $j" [\alpha]$. Da M ein ZFC-Modell ist finden wir Funktionen g, h in V, sodaß

$$M \models [g]_G : [i]_G \to [h]_G \text{ ist der Mostovski-Kollaps}$$

Wir definieren dann $f : \alpha \to M$, sodaß gilt

$$f(x) = y \Leftrightarrow M \models [g]_G (j(x)) = y$$

Da j insbesondere ein Monomorphismus ist, sieht man jetzt, daß f bezeugt, daß $[h]_G$ in M korrekt α wiedergibt. $\dashv$

Es bleibt also noch übrig, Bedingungen zu finden, unter denen M vollkommen fundiert ist, um diese zu formulieren benötigen wir allerdings einige zugegebenermaßen technische Begriffe, die wir in den nächsten zwei Abschnitten besprechen wollen.

5.3 Semiproperness

Definition 5.3.1: Sei X eine nichtleere Menge, λ eine überabzählbare Kardinalzahl mit $\lambda \leq \mathrm{Card}(X)$. Dann bezeichne

$$\mathrm{CF}_\lambda(X) = \{Z \cap \mathcal{P}_\lambda(X) | Z \in \mathrm{CF}(X)\}$$

den Clubfilter auf $\mathcal{P}_\lambda(X)$.

Definition 5.3.2: Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl. $D \subseteq \mathbb{P}_\kappa$. Bezeichne $\mathrm{sp}(D)$ die Menge aller $X \prec V_{\kappa+1}$, sodaß

1. $\mathrm{Card}(X) < \kappa$
2. $D \in X$
3. Es existiert ein $Y \prec V_{\kappa+1}$, sodaß
   - $X \subseteq Y$
   - $X \cap V_\kappa \trianglelefteq Y \cap V_\kappa$
   - $\exists B \in Y \cap D : Y \cap (\bigcup B) \in B$

Ferner heißt D semiproper genau dann, wenn $\mathrm{sp}(D) \in \mathrm{CF}_\kappa(V_{\kappa+1})$.

Bemerkung: Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl, und $Y \prec V_{\kappa_1}$ und $Z \in Y$, sowie $F : [Z]^{<\omega} \to Z$ in Y. Dann ist $Y \cap Z \in C_F$. (Man sollte sich das merken, da es im Folgenden ständig benutzt wird).

Proposition 5.3.3: *Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl.$A \subseteq \mathbb{P}_\kappa$. Sei $Y \prec V_{\kappa+1}$ mit $A \in Y$. Seien dann $B_1, B_2 \in Y \cap A$ mit $Y \cap (\bigcup B_i) \in B_i$ $(i < 2)$, dann sind B_1 und B_2 kompatibel.*

Beweis: Es gilt nach Voraussetzung.

$$Y \cap ((\bigcup B_1) \cap (\bigcup B_2)) \in B_1 \wedge B_2 \tag{5.1}$$

Angenommen es gälte $B_1 \perp B_2$, also nach Lemma 5.2.3, daß $B_1 \wedge B_2$ nicht stationär ist. Nach Voraussetzung gilt dann

$$Y \models B_1 \wedge B_2 \text{ ist nicht stationär}$$

wir finden also ein $F \in Y$, sodaß

$$C_F \cap B_1 \wedge B_2 = \varnothing \tag{5.2}$$

Da $F \in Y$ ist, gilt aber auch $Y \cap ((\bigcup B_1) \cap (\bigcup B_2)) \in C_F$. Widerspruch!(siehe (5.1) und (5.2)) ⊣

Lemma 5.3.4: *Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl und $D \subseteq \mathbb{P}_\kappa$ semiproper. Dann ist D prädicht, d.h. für alle $S \in \mathbb{P}_\kappa$ ex. ein $B \in D$ sodaß B und S kompatibel sind.*

Beweis: Sei $S \in \mathbb{P}_\kappa$ beliebig. Setze

$$T := \{X \prec V_{\kappa+1} | \operatorname{Card}(X) < \kappa \wedge X \cap (\bigcup S) \in S \wedge \bigcup S \in X\}$$

$T \subseteq \mathcal{P}_\kappa(V_{\kappa+1})$ ist stationär. Denn wenn wir $C_0 := \{X \subseteq V_{\kappa+1} | X \prec V_{\kappa+1}\}$ und $C_1 := \{X \subseteq V_{\kappa+1} | \bigcup S \in X\}$ setzen, dann können wir T auch folgendermaßen schreiben

$$T = \underbrace{C_0}_{\in \operatorname{CF}(V_{\kappa+1})} \cap \underbrace{C_1}_{\in \operatorname{CF}(V_{\kappa+1})} \cap \underbrace{\mathcal{P}_\kappa(V_{\kappa+1}) \cap S \uparrow V_{\kappa+1}}_{\text{stat.}}$$

(Wir merken an, daß das gleiche Argument, daß zeigt, daß $S \uparrow V_{\kappa+1}$ stationär ist, auch zeigt, daß $\mathcal{P}_\kappa(V_{\kappa+1}) \cap S \uparrow V_{\kappa+1}$ stationär ist.)

Also ist $\operatorname{sp}(D) \cap T \neq \varnothing$. Sei dann $X \in T \cap \operatorname{sp}(D)$. Es existiert also ein $Y \prec V_{\kappa+1}$ mit

- $X \subseteq Y$
- $X \cap V_\kappa \trianglelefteq Y \cap V_\kappa$
- $\exists B \in Y \cap D : Y \cap (\bigcup B) \in B$

Nehmen wir uns also $B \in Y \cap D$ mit $Y \cap (\bigcup B) \in B$. Da $X \in T$, gilt $X \cap (\bigcup S) \in S$, und da $X \cap V_\kappa \trianglelefteq Y \cap V_\kappa$ und $\bigcup S \in X$, gilt damit

$$Y \cap (\bigcup S) = X \cap (\bigcup S) \in S$$

Nach Proposition 5.3.3 sind dann B und S kompatibel. ⊣

Lemma 5.3.5: *Sei κ eine unerreichbare Kardinalzahl und $V_\kappa \ni D \subseteq \mathbb{P}_\kappa$ prädicht. Dann existiert für jedes $X \prec V_\kappa$ mit $D \in X$ ein $B \in D \cap X$ mit $X \cap (\bigcup B) \in B$.*

Beweis: Sei $X \prec V_\kappa$ beliebig mit $D \in X$. Sei jetzt α minimal mit $D \in V_\alpha$ (man bemerke, daß dann $\alpha \in X$ folgt). Setze

$$S := \{Z \subseteq V_\alpha | \forall B \in Z \cap D : Z \cap (\bigcup B) \notin B\}$$

Behauptung: *S ist nicht stationär in $\mathcal{P}(V_\alpha)$.*

Beweis der Behauptung: Angenommen doch. Dann existiert nach Voraussetzung ein $B \in D$, sodaß S und B kompatibel sind. Also ist $S \wedge B$ stationär. Man erinnere sich, daß $C := \{Z \subseteq V_\alpha | B \in Z\} \in \mathrm{CF}(V_\alpha)$.

Also ist $C \cap S \wedge B \neq \varnothing$. Sei $Z \in C \cap S \wedge B$, dann ist zum einen $B \in Z \cap D$ und zum anderen $Z \cap (\bigcup B) \in B$, also $Z \notin S$. Widerspruch! □

Da S also nicht stationär ist, finden wir ein $F : [V_\alpha]^{<\omega} \to V_\alpha$, sodaß $C_F \subseteq \mathcal{P}(V_\alpha) \backslash S$. Solch ein F finden wir auch in X und somit ist $X \cap V_\alpha \in C_F$. Es ist also $X \cap V_\alpha \notin S$, daß heißt

$$\exists B \in (X \cap V_\alpha) \cap D : X \cap (\bigcup B) = (X \cap V_\alpha) \cap (\bigcup B) \in B$$ ⊣

Lemma 5.3.6: *Sei γ unerreichbar. Sei $D \subseteq \mathbb{P}_\gamma$. Dann sind äquivalent.*

(a) D ist semiproper.

(b) Für jedes transitive Modell von $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Ers} +$"$\forall\alpha\exists x : x = V_\alpha$" mit $M \supset V_{\gamma+2}$, für jede Substruktur $X \prec M$ mit $\mathrm{Card}(X) < \gamma$ und $D \in X$, sodaß entweder $\mathrm{cof}(\mathrm{On} \cap M) > \gamma$ oder $\mathrm{On} \cap X$ kofinal in $\mathrm{On} \cap M$ ist, existiert eine Substruktur $Y \prec M$ mit

- $X \subseteq Y$
- $X \cap V_\gamma \trianglelefteq Y \cap V_\gamma$
- $\exists B \in Y \cap D : Y \cap (\bigcup B) \in B$

Beweis:

(a) ⇒ (b) Sei M wie gefordert, und $X \prec M$ mit $\mathrm{Card}(X) < \gamma$ und $D \in X$.

1.Fall Sei $\mathrm{Card}(D) < \gamma$, wegen Lemma 5.3.4 und der Vor. ist D prädicht, wegen Lemma 5.3.5 existiert, dann zu $X \cap V_\gamma \prec V_\gamma$ ein $B \in D \cap X$ mit $X \cap (\bigcup B) \in B$. Man sieht jetzt leicht ein, daß dann $Y := X$ wie gewünscht ist.

2.Fall Sei $\mathrm{Card}(D) = \gamma$, insbesondere ist dann $\gamma \in X$. Nach Voraussetzung gilt $M \models \mathrm{sp}(D) \in \mathrm{CF}_\gamma(V_{\gamma+1})$, also auch $X \models \mathrm{sp}(D) \in \mathrm{CF}_\gamma(V_{\gamma+1})$. Damit existiert ein $F \in X$ mit $C_F \cap \mathcal{P}_\gamma(V_{\gamma+1}) \subseteq \mathrm{sp}(D)$. Aus $X \cap V_{\gamma+1} \in C_F \cap \mathcal{P}_\delta(V_{\gamma+1})$, folgt dann, daß ein $Y^* \prec V_{\gamma+1}$ existiert, sodaß

* $X \subseteq Y^*$
* $X \cap V_\gamma \trianglelefteq Y^* \cap V_\gamma$
* $\exists B \in Y^* \cap D : Y^* \cap (\bigcup B) \in B$

Fast wie gewünscht, bloß Substruktur des falschen Models, das werden wir noch korrigieren.

BEHAUPTUNG 1: $Y := \{f(y) | f : V_\gamma \to M \wedge f \in X \wedge y \in Y^* \cap V_\gamma\} \prec M$

BEWEIS DER BEHAUPTUNG: Wir benutzen das Tarski-Voight-Kriterium. Sei also $\varphi(z, a)$ eine beliebige Formel der Mengenlehre, sodaß $M \models \exists z \varphi(z, a)$, wobei $a \in Y$, d.h. $a = f(y)$ für $f \in x$ und $y \in Y^* \cap V_\gamma$. Es gilt, daß wir ein $\eta \in X \cap \mathrm{On}$ finden, sodaß $M \models \exists z \in V_\eta : \varphi(z, a)$.

1.Fall Ist $\mathrm{cof}(M \cap \mathrm{On}) > \gamma$, so gilt

$$M \models \exists \eta \in \mathrm{On}\, \forall s \in V_\gamma (\exists z \varphi(z, f(s)) \to \exists z \in V_\eta \varphi(z, f(s)))$$

demnach gilt dies auch in X. Ein Zeuge dafür in X ist dann wie gewünscht.

2.Fall Ist dagegen $X \cap \mathrm{On}$ kofinal in $M \cap \mathrm{On}$, so gilt zumindest

$$M \models \exists \eta \in \mathrm{On}\, \exists z \in V_\eta \varphi(z, f(s))$$

Ist dann η^* ein Zeuge dafür in M, so wähle einfach $\eta > \eta^*$ mit $\eta \in X$.

wegen der Auswahl in M finden wir dann schließlich auch eine Funktion $g : V_\delta \to M$ mit

$$M \models \forall s \in V_\gamma \exists z \in V_\eta \varphi(z, f(s)) \to \varphi(g(s), f(s))$$

Nach Vor. finden wir dann solch ein g auch in X, also folgt, daß wenn $M \models \varphi(g(y), f(y))$, daß $\exists z \in Y : M \models \varphi(g(y), f(y))$,da $g(y) \in Y$. □

Nun zeigen wir noch, daß

BEHAUPTUNG 2: $Y \cap V_\gamma = Y^* \cap V_\gamma$

BEWEIS DER BEHAUPTUNG: $Y^* \cap V_\gamma \subseteq Y \cap V_\gamma$ ist klar. Sei also $z \in Y \cap V_\gamma$, etwa $z = f(y)$ für ein $(f : V_\gamma \to M) \in X$ und $y \in Y^* \cap V_\gamma$. Da $X \cap V_{\gamma+1} \subseteq Y^*$, ist $(f \cap V_\gamma) \in Y^*$, also $f(y) = (f \cap V_\gamma)(y) \in Y^*$. □

Also verlieren wir nichts von den bereits erreichten, wenn wir Y^* durch Y ersetzen, kriegen aber $Y \prec M$ wie gewünscht.

(b) $\Leftarrow$ (a) Setzen wir $M := V_{\gamma+\omega}$. Dies erfüllt die Vorraussetzungen von (b), und wir setzen weiter

$$C_0 := \{X \subseteq V_{\gamma+1} | X \prec V_{\gamma+1}\} \in \mathrm{CF}(\mathcal{P}(V_{\gamma+1}))$$
$$C_1 := \{X \subseteq V_{\gamma+\omega} | X \prec V_{\gamma+\omega}\} \in \mathrm{CF}(\mathcal{P}(V_{\gamma+\omega}))$$

und schließlich $C := C_0 \cap (C_1 \downarrow V_{\gamma+1}) \cap \mathcal{P}_\gamma(V_{\gamma+1}) \in \mathrm{CF}_\gamma(\mathcal{P}(V_{\gamma+1}))$.

BEHAUPTUNG 3: $C \subseteq \mathrm{sp}(D)$

BEWEIS DER BEHAUPTUNG: Sei $X \in C$, dann existiert nach Konstruktion von C ein $X^* \prec V_{\gamma+\omega}$, sodaß $X^* \cap V_{\gamma+1} = X$. Nach der Voraussetzung existiert dann für X^* ein $Y^* \prec V_{\gamma+\omega}$ mit

- $X^* \subseteq Y^*$
- $X^* \cap V_\gamma \trianglelefteq Y^* \cap V_\gamma$
- $\exists B \in Y^* \cap D : Y^* \cap (\bigcup B) \in B$

Es bezeugt dann $Y := Y^* \cap V_{\gamma+1} \prec V_{\gamma+1}$, daß $X \in \mathrm{sp}(D)$. □

Also ist $\mathrm{sp}(D) \in \mathrm{CF}_\gamma(V_{\gamma+1})$. ⊣

Bemerkung 5.3.7: Seien X und M und D wie im obigen Lemma Teil (b). Existiert ein Y wie dort beschrieben, so können wir annehmen, daß $\mathrm{Card}(Y) < \gamma$.

BEWEIS: Wählen wir erstmal irgendein $Y^* \prec M$ mit

- $X \subseteq Y^*$
- $X \cap V_\gamma \trianglelefteq Y^* \cap V_\gamma$
- $\exists B \in Y^* \cap D : Y^* \cap (\bigcup B) \in B$

Sei Y dann eine Skolemhülle von $X \cup (\bigcup B \cap Y^*)$ in Y^*. Da $\mathrm{Card}(X) < \gamma$ und $\mathrm{Card}(\bigcup B) < \gamma$, können wir Y so wählen, daß $\mathrm{Card}(Y) < \gamma$. Dann gilt ferner noch, daß $Y \prec Y^* \prec M$, also $Y \prec M$ und

- $X \subseteq Y$
- Schreiben wir $\eta = \mathrm{rank}(X \cap V_\gamma)$, dann

$$\begin{tikzcd} X \cap V_\delta \cap V_\eta \arrow[r, "\subseteq"] & Y \cap V_\delta \cap V_\eta \arrow[d, "\subseteq"] \\ & Y^* \cap V_\delta \cap V_\eta \arrow[ul, "\subseteq"] \end{tikzcd}$$

  also $X \cap V_\gamma \trianglelefteq Y \cap V_\gamma$.

- Man stellt fest, daß nach Wahl von Y

$$\begin{tikzcd} & Y \cap (\bigcup B) \arrow[dr, "\subseteq"] & \\ Y^* \cap (\bigcup B) \arrow[ur, "\subseteq"] \arrow[rr, "="] & & Y^* \cap (\bigcup B) \end{tikzcd}$$

  also $Y \cap (\bigcup B) = Y^* \cap (\bigcup B) \in B$.

Damit ist also Y wie gewünscht. ⊣

5.4 Fundiertheit

Theorem 5.4.1: *Sei δ eine Woodin-Kardinalzahl. Sei $\mathbb{P}_\delta$ der stationäre Turm und $G \subseteq \mathbb{P}_\delta$ ein generischer Filter über V. Bezeichne $j : V \to (M; E) \subset V[G]$ die vom stationären Turm induzierte Einbettung. Dann ist $(M; E)$ fundiert, und wenn wir M mit seinem transitiven Kollaps identifizieren, dann gilt ${}^{<\delta}M \cap V[G] \subset M$.*

Korrolar 5.4.2: *Sei δ eine Woodin-Kardinalzahl. Sei $\mathbb{P}_\delta$ der stationäre Turm und $G \subseteq \mathbb{P}_\delta$ ein generischer Filter über V. Bezeichne $j : V \to (M; E) \subset V[G]$ die vom stationären Turm induzierte Einbettung. Es ist dann $(M; E)$ fundiert, und wenn wir per Konvention M mit seinem transitiven Kollaps identifizieren, dann gilt*

$$(V_\delta)^M = (V_\delta)^{V[G]}$$

Das ist natürlich genau das, was wir uns gewünscht haben, und den Beweis werden wir jetzt durch zwei Lemmata erbringen. Dazu wollen wir aber noch einen weiteren Begriff einführen.

Definition 5.4.3: Sei δ eine unerreichbare Kardinalzahl. Wir sagen δ reflektiere prädichte Mengen genau dann wenn, für alle $\eta < \delta$ und alle Folgen $\langle D_\xi : \xi < \eta \rangle$ von prädichten Teilmengen von $\mathbb{P}_\delta$ eine unerreichbare Kardinalzahl γ existiert, sodaß $D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma$ für alle $\xi < \eta$ prädicht und semiproper ist.

Bemerkung: Reflektiere δ prädichte Mengen und sei $\langle D_\xi : \xi < \eta \rangle$ für ein $\eta < \delta$ gegeben. Sei $\alpha < \delta$ beliebig. Dann finden wir auch ein $\gamma > \alpha$, sodaß $D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma$ für alle $\xi < \eta$ prädicht und semiproper ist. (Man füge einfach $D := \mathbb{P}_\delta \backslash V_\alpha$ zur Folge $\langle D_\xi : \xi < \eta \rangle$ hinzu.)

Lemma 5.4.4: *Sei δ eine unerreichbare Kardinalzahl die prädichte Mengen reflektiert. Sei $G \subset \mathbb{P}_\delta$ ein generischer Filter. Bezeichne $j : V \to (M; E) \subset V[G]$ die vom stationären Turm induzierte Einbettung. Dann gilt ${}^{<\delta}M \cap V[G] \subset M$, soll heißen für alle $\eta < \delta$ und alle $\langle a_\xi : \xi < \eta \rangle \subseteq M$, existiert ein $S \in V_\delta$ und ein $f : S \to V$ in V, so daß*

$$M \models [f]_G \text{ ist eine Funktion mit Domain } \eta$$

und für alle $\xi < \eta$ gilt $(M \models [f]_G(\xi) = a_\xi)$. Damit ist $(M; E)$ insbesondere fundiert.

Beweis: Seien $S_0 \in \mathbb{P}_\delta$ und τ ein $\mathbb{P}_\delta$-Name, sodaß

$$S_0 \Vdash (M; E) \models \tau : \check{\eta} \to \mathrm{On}$$

für ein $\eta < \delta$. Wir haben jetzt zu zeigen, daß die Menge

$$D := \{S \leq S_0 | \exists f \in {}^S V : S \Vdash \tau = [\check{f}]_\Gamma\}$$

dicht ist. Sei also $S \leq S_0$ beliebig. Wähle für jedes $\xi < \eta$ eine in der Menge

$$\{S^* \in \mathbb{P}_\delta | \exists f \in {}^{S^*} V : S^* \Vdash \tau(\check{\xi}) = [\check{f}]_\Gamma\}$$

maximale Antikette A_ξ. Dann ist also $\langle A_\xi : \xi < \eta\rangle$ eine Folge von prädichten Mengen, und nach Vor. erhalten wir ein unerreichbares $\gamma < \delta$, sodaß

$$\forall \xi < \eta : A_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma \text{ ist prädicht und semiproper}$$

wegen der Bemerkung können wir noch annehmen, daß $S, \eta \in V_\gamma$. Setze jetzt:

$$T := \{X \prec V_{\gamma+1} | \operatorname{Card}(X) < \gamma \wedge X \cap (\bigcup S) \in S \wedge \forall \xi \in X \cap \eta \exists B \in X \cap A_\xi : X \cap (\bigcup B) \in B\}$$

Behauptung 1: *$T \subset \mathcal{P}_\gamma(V_{\gamma+1})$ ist stationär.*

Beweis der Behauptung: Sei $H : [V_{\gamma+1}]^{<\omega} \to V_{\gamma+1}$ beliebig. Wir bemerken als Erstes, daß

$$C := \{X \prec V_\delta | S, \gamma, H, \langle A_\xi : \xi < \eta\rangle \in X\} \in \operatorname{CF}(V_\delta)$$

Also ist auch $C \downarrow (\bigcup S) \cap S \neq \varnothing$.

Sei erstmal $X^* \in C \downarrow (\bigcup S) \cap S$ beliebig, indem wir in X^* eine Skolemhülle von $S, \gamma, H, \langle A_\xi : \xi < \eta\rangle, \bigcup S \cap X^*$ bilden, erhalten wir ein $X_0 \in C \downarrow (\bigcup S) \cap S$ das zusätzlich noch $\operatorname{Card}(X_0) < \gamma$ erfüllt.

Wir konstruieren nun rekursiv eine elementare Kette $\langle X_\alpha : \alpha \in X_0 \cap \eta\rangle$ von Substrukturen von V_δ, sodaß

(a) $\forall \alpha \in X_0 \cap \eta : \operatorname{Card}(X_\alpha) < \gamma$

(b) $\forall \alpha < \beta \in X_0 \cap \eta : X_\alpha \cap V_\gamma \trianglelefteq X_\beta \cap V_\gamma$

(c) $\forall \alpha \in X_0 \cap \eta \exists B \in X_{\alpha+1} \cap A_\alpha \cap \mathbb{P}_\gamma : X_{\alpha+1} \cap (\bigcup B) \in B$

Für X_0 ist all das trivial erfüllt, widmen wir uns also den Rekursionsschritten:

1.Fall Sei X_α bereits konstruiert, dann ist $\operatorname{Card}(X_\alpha) < \gamma$ und $X \prec M$ wobei $M = V_\delta$. Dieses M und X_α erfüllen damit die Voraussetzungen von Lemma 5.3.6. Da ferner nach Voraussetzung $A_\alpha \cap \mathbb{P}_\gamma$ semiproper ist, erhalten wir nach Lemma 5.3.6 ein $Y \prec V_\delta$, sodaß

- $X_\alpha \subseteq Y$
- $X_\alpha \cap V_\gamma \trianglelefteq Y \cap V_\gamma$
- $\exists B \in Y \cap A_\alpha \cap \mathbb{P}_\gamma : Y \cap (\bigcup B) \in B$

ferner können wir nach Bemerkung 5.3.7 Y mit $\operatorname{Card}(Y) < \gamma$ wählen.

Setzen wir also $X_{\alpha+1} := Y$.

2.Fall Sei α eine Limeszahl. Dann setzen wir $X_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} X_\xi$, da $\alpha < \gamma$ sind damit (a) und (b) automatisch erfüllt. Bei (c) ist nichts zu zeigen.

Wir setzen dann schließlich $X := \bigcup_{\alpha \in X_0 \cap \eta} X_\alpha$. Es folgt sofort, daß $X \prec V_\delta$ und $H \in X$ damit

$$X \cap V_{\gamma+1} \in C_H$$

Wenn wir noch zeigen, daß $X \cap V_{\gamma+1} \in T$ so sind wir fertig:

- $\mathrm{Card}(X) < \prod_{\alpha \in X_0 \cap \eta} \underbrace{\mathrm{Card}(X_\alpha)}_{<\gamma} < \gamma \cdot \gamma = \gamma$

- Da nach (b) induktiv folgt, daß $X_0 \cap V_\gamma \trianglelefteq X \cap V_\gamma$ gilt
$$X \cap (\bigcup S) = X_0 \cap (\bigcup S) \in S$$

- Sei $\alpha \in X \cap \eta$ beliebig; wegen $X_0 \cap V_\gamma \trianglelefteq X \cap V_\gamma$ ist $\alpha \in X_0 \cap \eta$. Wegen (c) existiert dann ein $B \in X_{\alpha+1} \cap A_\alpha \cap \mathbb{P}_\gamma$ mit $X_{\alpha+1} \cap (\bigcup B) \in B$. Da $X_{\alpha+1} \cap V_\gamma \trianglelefteq X \cap V_\gamma$ muß folgen
$$X \cap (\bigcup B) = X_{\alpha+1} \cap (\bigcup B) \in B$$ □

Um den Beweis zu beenden beabsichtigen wir nun zu zeigen, daß $T \in D$ ist. Konstruieren wir nun also eine geeignete Funktion $f : T \to V$. Sei $X \in T$ und $\alpha \in X \cap \eta$; wir finden also ein $B \in X \cap A_\alpha \cap \mathbb{P}_\gamma$, sodaß $X \cap (\bigcup B) \in B$. Wegen Proposition 5.3.3 und da A_α eine Antikette ist, ist dieses B eindeutig, nennen wir es also $B_{(X,\alpha)}$.

Da $B_{(X,\alpha)} \in A_\alpha$ finden wir insbesondere eine Funktion $f_{(X,\alpha)}$, sodaß
$$B_{(X,\alpha)} \Vdash \tau(\check{\alpha}) = \left[\check{f}_{(X,\alpha)}\right]_\Gamma$$

Wir definieren dann für $X \in T$
$$\begin{aligned} f(X) :& X \cap \eta \longrightarrow V \\ & \alpha \longmapsto f_{(X,\alpha)}(X \cap (\bigcup B_{(X,\alpha)})) \end{aligned}$$

Es ist also $f(X)$ für jedes $X \in T$ eine Funktion mit Domain $X \cap \eta$. Man erinnere sich, daß für jedes $X \in V_\delta$, für jeden generischen Filter G nach Satz 5.2.10 j" $[\eta]$ von $[g]_G$ repräsentiert wird, wobei
$$g : T \longrightarrow V \qquad X \longmapsto X \cap \eta$$

Das heißt ($T \Vdash [f]_\Gamma$ ist eine Funktion mit Domain j" $[\eta]$) insofern ist nun folgende Behauptung sinnvoll

Behauptung 2: $\forall \alpha < \eta : T \Vdash \left[\check{f}\right]_\Gamma (j(\check{\alpha})) = \tau(\check{\alpha})$

Beweis der Behauptung: Sei $\alpha < \eta$ beliebig. Sei G ein generischer Filter mit $T \in G$. Wir bemerken, dann daß
$$T_\alpha = T \cap \underbrace{\{Z \subseteq \bigcup T | \alpha \in Z\}}_{\in \mathrm{CF}(\bigcup T)}$$
also, daß T gleich T_α modulo einer Clubmenge. Damit folgt, daß auch $T_\alpha \in G$.

Wegen Lemma 5.2.4 ist dann

$$D^* = \{T^* \leq T_\alpha | \exists B^* \forall Y \in T^* : B_{(Y \cap \bigcup T, \alpha)} = B^*\}$$

dicht unter T_α, denn die Zuordnung $X \mapsto B_{(X,\alpha)}$ ist regressiv.

Demnach finden wir dann T_1 eine Verstärkung von T_α in $D^* \cap G$. Nach Definition von D^* gibt es dann ein $B_1 \in T_1$ mit

$$\forall Y \in T_1 : B_{(Y \cap \bigcup T_\alpha, \alpha)} = B_1$$

Nach Definition von B_1 gilt dann wegen $\bigcup B_1 \subset V_\gamma \subset V_{\gamma+1} = \bigcup T_\alpha$, daß

$$\forall Y \in T_1 : Y \cap (\bigcup B_1) = Y \cap (\bigcup B_1) \cap (\bigcup T_\alpha) \in B_1 \tag{5.3}$$

Nun da G generisch ist existiert ein $B^* \in G \cap A_\alpha$. Angenommen es wäre $B^* \neq B_1$, dann wäre bereits $B^* \perp B_1$, also $B^* \wedge B_1$ nicht stationär.

Wähle eine Funktion $F : [\bigcup B^* \cup \bigcup B_1]^{<\omega} \to \bigcup B^* \cup \bigcup B_1$, mit $B^* \wedge B_1 \cap C_F = \varnothing$. Da $T_1, B^* \in G$, existiert eine gemeinsame Verstärkung $R \in G$. Mit R ist dann auch $R \downarrow (\bigcup B^* \cup \bigcup B_1)$ stationär, also existiert ein $Y \in R$, sodaß $Y \cap (\bigcup B^* \cup \bigcup B_1)$ unter F abgeschlossen ist.

Es gilt dann aber zum einen $Y \cap (\bigcup B^*) \in B^*$ (wegen $R \leq B^*$) und $Y \cap (\bigcup B_1) \in B_1$ (wegen $Y \cap (\bigcup T_1) \in T_1$ kombiniert mit (5.3)). Also $Y \cap (\bigcup B^* \cup \bigcup B_1) \in B_1 \wedge B^*$. Widerspruch!

Da nun B_1 so gewählt war, daß $B_{(X \cap (\bigcup T_\alpha), \alpha)} = B_1$ für alle $X \in T_1$, ist $f(X \cap (\bigcup T_\alpha))(\alpha) = f_{(B_1,\alpha)}(X \cap (\bigcup B_1))$ für alle $X \in T_1$. Da nach Wahl von A_α

$$B_1 \Vdash \left[\check{f}_{(B_1,\alpha)}\right]_\Gamma = \tau(\check{\alpha})$$

gilt also auch $[f]_G(j(\alpha)) = \tau^G(\alpha)$ wegen $B_1 = B^* \in G$ wie gewünscht. □

Nehmen wir uns letzlich ein g, sodaß

$$T \Vdash [\check{g}]_\Gamma \text{ ist der transitive Kollaps von } j\text{"}\,[\eta]$$

dann gilt offensichtlich ($T \Vdash \left[\check{f}\right]_\Gamma \circ ([\check{g}]_\Gamma)^{-1} = \tau$) also $T \in D$. ⊣

Lemma 5.4.5: *Sei δ eine Woodinzahl, dann reflektiert δ prädichte Mengen.*

Beweis: Sei $\eta < \delta$ beliebig, $\langle D_\xi : \xi < \eta \rangle$ eine Folge prädichter Teilmengen von $\mathbb{P}_\delta$.

Behauptung 1: *Es gibt eine monoton steigende Funktion $f : \delta \to \delta$, sodaß*

(a) Ist γ eine unerreichbare Kardinalzahl mit $f\text{"}\,[\gamma] \subseteq \gamma$, dann ist für alle $\xi < \eta : \mathbb{P}_\gamma \cap D_\xi$ prädicht.

(b) Ist γ eine unerreichbare Kardinalzahl mit $f\text{"}\,[\gamma] \subseteq \gamma$, und ist $\xi < \eta$ mit $\mathbb{P}_\gamma \cap D_\xi$ nicht semiproper, dann existiert eine Bedingung $T \in D_\xi \cap \mathbb{P}_{f(\gamma)}$ die kompatibel ist mit

$$S^\xi_\gamma := \{X \prec V_{\delta+1} | \operatorname{Card}(X) < \gamma \wedge X \notin \operatorname{sp}(D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma)\}$$

BEWEIS DER BEHAUPTUNG: Für ein $\gamma < \delta$ bezeichne

$$\alpha_\gamma := \min\{\alpha < \delta | \forall \xi < \eta \forall S \in \mathbb{P}_\gamma \exists T \in \mathbb{P}_\alpha \cap D_\xi : T \parallel S\}$$

Dies ist wohldefiniert, da $\mathrm{Card}(\mathbb{P}_\gamma) < \delta$ und die D_ξ prädicht sind. Ferner bezeichne für $\xi < \eta$

$$\beta_\gamma^\xi := \begin{cases} \min\{\beta < \delta | \exists T \in D_\xi \cap \mathbb{P}_\beta : T \parallel S_\gamma^\xi\} & \mathbb{P}_\gamma \cap D_\xi \text{ ist nicht semiproper} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert, da wenn $\mathbb{P}_\gamma \cap D_\xi$ nicht semiproper ist, ist S_γ^ξ stationär, und somit existiert eine Bedingung in D_ξ die kompatibel ist mit S_γ^ξ. Schreibe $\beta_\gamma = \sup\limits_{\xi<\eta} \beta_\gamma^\xi$ und setze

$$f(\gamma) = \sup_{\xi \leq \gamma} \max(\alpha_\xi, \beta_\xi)$$

Man sieht jetzt leicht, daß f wie gewünscht ist. $\square$

Wende jetzt die Voraussetzung (also δ Woodin) auf $\gamma \mapsto f(\gamma) + \omega$ an. Wir erhalten also eine elementare Einbettung $j : V \to M$, sodaß

- $\mathrm{crit}(j) = \gamma < \delta$
- $f\text{''}\,[\gamma] \subset \gamma$
- $V_{j(f)(\gamma)+\omega} \subseteq M$
- $\forall \xi < \delta : j(\xi) < \delta$

Wir wollen jetzt zeigen, daß für alle $\xi < \eta$

$$D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma \text{ ist prädicht und semiproper}$$

also, daß γ bezeugt, daß δ die $\langle D_\xi : \xi < \eta \rangle$ reflektiert.

Nach Vor. an γ und der Eigenschaft (a) von f wissen wir bereits, daß $D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma$ prädicht ist, für alle $\xi < \eta$. Bleibt zu zeigen, daß es auch semiproper ist. Dazu bemerke man, daß $\mathrm{sp}(D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma)$ das Gleiche ist, unabhängig davon ob wir es in M oder V ausrechnen, denn mit f ist wegen der Elementarität auch $j(f)$ monoton steigend, also ist $\gamma \leq j(f)(\gamma)$ und damit $V_{\gamma+\omega} \subset M$.

Angenommen es wäre für ein $\xi < \eta$

$$D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma \text{ ist nicht semiproper}$$

dann ist $S := \mathcal{P}_\gamma(V_{\gamma+1}) \setminus \mathrm{sp}(D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma)$ stationär, und wegen der Eigenschaft (b) von f und der Elementarität von j finden wir dann ein $T \in j(D_\xi) \cap V^M_{j(f)(\gamma)}$ sodaß

$$M \models S \text{ und } T \text{ sind kompatibel in } \mathbb{P}_{j(\delta)}$$

Daß gefällt uns ehrlich gesagt nicht, aber da nach Vor. γ abgeschlossen unter f ist, ist natürlich auch $j(\gamma)$ abgeschlossen unter $j(f)$, daß heißt da $\gamma < j(\gamma)$

$$j(f)(\gamma) < j(\gamma) < \delta$$

Nun benutzen wir, daß $V_{j(f)(\gamma)+\omega} \subseteq M$ um zu erhalten, daß nicht nur $T \in \mathbb{P}_\delta$ ist, sondern daß S und T auch in der richtigen Welt kompatibel sind. Damit ist also $R := S \wedge T$ stationär.

Als nächstes wählen wir eine reguläre Kardinalzahl ζ, sodaß $V_\delta, D_\xi \in V_\zeta$ und $j(\delta) < \zeta$. Wir interessieren uns dann für

$$C := \{X \prec V_\zeta | S, T, j \upharpoonright V_{\gamma+1}, j(V_{\gamma+1}) \in X\} \in \mathrm{CF}(V_\zeta)$$

denn es ist dann $C \downarrow (\bigcup R) \cap R \neq \varnothing$; fixiere ein X, das dies bezeugt. Nach Definition von R gilt dann auch

$$X \cap V_{\gamma+1} = X \cap \bigcup S \in S \subseteq \mathcal{P}_\gamma(V_{\gamma+1})$$

Also ist $\mathrm{Card}(X \cap V_{\gamma+1}) < \gamma$ also da $\mathrm{crit}(j) = \gamma$

$$j''\,[X \cap V_{\gamma+1}] = j(X \cap V_{\gamma+1})$$

also $j''\,[(X \cap V_{\gamma+1})] \in j(S)$, dem folgt

$$j''\,[(X \cap V_{\gamma+1})] \notin j(\mathrm{sp}(D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma)) \tag{5.4}$$

Man bemerke, daß $j \upharpoonright (X \cap V_{\gamma+1}) \in M$. Wir haben bereits, daß $X \cap V_{\gamma+1} \in M$ nach Eigenschaft (c), und natürlich auch daß $j(X \cap V_{\gamma+1}) \in M$. Sei $\pi_1 \in M$ der transitive Kollaps von $X \cap V_{\gamma+1}$, $\pi_2 \in M$ der transitive Kollaps von $j(X \cap V_{\gamma+1})$. Da j ein $\in$-Isomorphismus zwischen diesen beiden Mengen ist, ist dann folgendes Diagramm kommutativ

$$\begin{tikzcd}
X \cap V_{\gamma+1} \arrow[rr, "j \upharpoonright (X \cap V_{\gamma+1})"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & j(X \cap V_{\gamma+1}) \\
& \pi_1''\,[X \cap V_{\gamma+1}] = \pi_2''\,[j(X \cap V_{\gamma+1})] \arrow[ur, "\pi_2^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Fixiere eine Wohlordnung $<^*$ von $j(V_{\gamma+1})$, die in $M \cap X$ liegt. Da $j \upharpoonright V_{\gamma+1} \in X$ ist auch $j''\,[(X \cap V_{\gamma+1})] \subset X$. Sei jetzt Y die Skolemhülle bzgl $<^*$ von

$$a, b, j \upharpoonright (X \cap V_{\gamma+1}), X \cap (\bigcup R)$$

in $j(V_{\gamma+1})$. Da all diese Mengen in M liegen und $<^* \in M$ ist auch $Y \in M$, analog folgt mit $<^*$ auch $Y \subseteq X$. Wir zeigen jetzt, daß Y bezeugt, daß

$$j(X \cap V_{\gamma+1}) \in j(\mathrm{sp}(D_\xi \cap \mathbb{P}_\gamma))$$

was ein klarer Widerspruch zu (5.3) ist und den Beweis abschließt. Wie üblich sind dabei drei Punkte nachzuweisen.

- Nach Konstruktion ist $j(X \cap V_{\gamma+1}) \subseteq Y$.
- Man erinnere sich, daß $\mathrm{Card}(X \cap V_{\gamma+1}) < \gamma$, also ist $\mathrm{rank}(X \cap V_\gamma) < \gamma$. Damit erhalten wir

  $$\eta := \mathrm{rank}(j(X \cap V_{\gamma+1}) \cap V_{j(\gamma)}) = \mathrm{rank}(j(X \cap V_\gamma)) = \mathrm{rank}(X \cap V_\gamma) < \gamma$$

  da $\mathrm{crit}(j) = \gamma$.

  Es gilt jetzt $j(X \cap V_{\gamma+1}) \cap V_\eta \subseteq Y \cap V_\eta$, da $j(X \cap V_{\gamma+1}) \subseteq Y$ nach Konstruktion, umgekehrt gilt $Y \cap V_\eta \subseteq X \cap V_\eta = j(X \cap V_{\gamma+1}) \cap V_\eta$, da $Y \subseteq X$.

  Damit haben wir also $j(X \cap V_{\gamma+1}) \cap V_{j(\gamma)} \trianglelefteq Y \cap V_{j(\gamma)}$.
- Da $j(f)(\gamma) < j(\gamma)$ ist $T \in j(\mathbb{P}_\gamma \cap D_\xi)$ und ferner natürlich $T \in Y$. Wir stellen jetzt noch fest, daß

  $$Y \cap (\bigcup T) = X \cap (\bigcup T) \in T$$

  $\dashv$

5.5 Beweis des dritten Hauptsatzes

Sei δ eine Woodinkardinalzahl. Sei $\aleph_2 \leq \mu < \delta$ eine Kardinalzahl und sei $\eta < \mu$ eine reguläre Kardinalzahl. Wir setzen dann

$$S := \{\xi < \mu^+ | \operatorname{cof}(\xi) = \eta\}$$

dann ist S stationär (und zwar unabhängig ob nach der alten oder der neuen Definition dank Proposition 5.1.7).

Wenn $\mathbb{P}_\delta$ den stationären Turm bezeichne, ist S eine Bedingung in $\mathbb{P}$. Wir wollen jetzt zeigen, daß S die gesuchte Bedingung aus dem Hauptsatz ist. Sei dazu $G \subseteq \mathbb{P}_\delta$ generisch über V mit $S \in G$. Sei $j : V \to M$ die Einbettung des stationären Turmes. Nach Korrolar 5.4.2 ist dann nicht nur M fundiert, sondern es gilt zusätzlich

$$V_\delta^M = V_\delta^{V[G]} \tag{5.5}$$

Deswegen ist auch zusätzlich Korrolar 5.2.12 anwendbar und wir erhalten

$$j\text{''}\left[(\mu^+)\right] \in j(S) = \{\xi < j(\mu^+) | \operatorname{cof}(\xi) = j(\eta)\} \tag{5.6}$$

Wegen der Elementarität von j bedeutet dies insbesondere, daß $j\text{''}\,[(\mu^+)]$ eine Ordinalzahl ist, und zwar eine die Isomorph zu μ^+ ist. Also ist $j\text{''}\,[(\mu^+)] = \mu^+$, woraus folgt, daß

$$\forall \alpha \leq \mu : j(\alpha) = \alpha \tag{5.7}$$

Eine Kombination von (5.6) und (5.7) ergibt, dann

$$\operatorname{cof}^{V[G]}((\mu^+)^V) \overset{(5.5)}{=} \operatorname{cof}^M((\mu^+)^V) = \eta$$

und (5.7) ergibt dann

$$\forall \alpha \leq \mu : \operatorname{cof}^{V[G]}(\alpha) \overset{(5.5)}{=} \operatorname{cof}^M(\alpha) = \operatorname{cof}^V(\alpha) \wedge \mathrm{Card}^{V[G]}(\alpha) \overset{(5.5)}{=} \mathrm{Card}^M(\alpha) = \mathrm{Card}^V(\alpha)$$

q.e.d

Glossar

$\langle \mathbb{P}, \leq, \leq^* \rangle$, 12
$\dot{q}_{gut}$, 20
$\mathrm{o}(\kappa)$, 3
$\mathbb{P} * \dot{Q}$, 21
$\mathrm{Tr}(t)$, 10
$\vec{U}$, 5
$\langle \langle \langle \mathbb{P}_\beta, \leq, \leq^* \rangle : \beta \leq \Omega \rangle, \langle \langle \dot{Q}_\beta, \dot{\leq}_\beta, \dot{\leq}^*_\beta \rangle : \beta < \Omega \rangle \rangle$, 27
$(\Theta^p_{\mathbb{P}*\dot{Q}})^{-1}$, 24
$C \upharpoonright Y, C \downarrow X$, 66
$S \wedge T$, 68
T/t , 46
T_t , 46
$U(\alpha, \gamma, t)$, 45
$\Theta_{\mathbb{P}*\dot{Q}}$, 24
$\mathrm{Tr}(\alpha, \gamma, t)$, 46
$\mathrm{CF}(X)$, 63
$\mathrm{CF}_\lambda(X)$, 74
$[f]_G$, 72
$\mathrm{Koh}(\alpha, \gamma)$, 42
$\mathbb{P}(\alpha, \gamma)$, 47
$\mathbb{P}_{\beta+1} * \mathbb{P}_\alpha / \mathbb{P}_{\beta+1}$, 32
$\mathrm{sp}(D)$, 74
b_α , 41
$s^\frown T$, 46
$t \upharpoonright \delta$, 45

Literaturverzeichnis

[Cox09] Sean Cox. *A covering theorem for the core model*. PhD thesis, UC Irvine, 2009.

[Git] Moti Gitik. Prikry type forcings. Kapitel im „Handbook of Set Theory“, zu finden unter http://www.math.tau.ac.il/~gitik/blpwg4.01.pdf.

[Git86] Moti Gitik. Changing cofinalities and the nonstationary ideal. *Israel Journal of Mathematics*, 56(3):280 – 314, 1986.

[Jec06] Thomas Jech. *Set Theory - The Third Millenium Edition,revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 2006.

[Kan05] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite - Large Cardinals in Set Theory from the Beginning*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2005.

[Kun83] Kenneth Kunen. *Set Theory - An Introduction to Independence Proofs*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North Holland, Amsterdam, 1st edition, 1983.

[Lar04] Paul B. Larson. *The Stationary Tower - Notes on a Course by W. Hugh Woodin*, volume 32 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence,R.I., 1st edition, 2004.

[Mit] W.J. Mitchell. The covering lemma. Kapitel im „Handbook of Set Theory“, zu finden unter http://www.math.ufl.edu/~wjm/papers/covering.pdf.

[MS95] W.J. Mitchell and E. Schimmerling. Weak covering without countable closure. *Mathematical Research Letters*, 2(5):595 – 609, 1995. Online unter http://www.math.cmu.edu/~eschimme/papers/Published/Covering2.pdf.

[Zem01] Martin Zeman. *Inner Models and large Cardinals*, volume 5 of *De Gruyter Series in Logic and its applications*. De Gruyter, Berlin;New York, 2001.