Falko Weigt

Kategorien-Konzepte und ihre spieltheoretische Verallgemeinerung

Münster 2007

Meinen Eltern

Vorwort

Professor Pohlers danke ich für die Aufgabenstellung und seine geduldige Begleitung dieser Arbeit. Christoph Heinatsch, Christoph Duchhardt und Philipp Schlicht danke ich für ihre stets offenen Ohren für mathematische Fragestellungen. Meinen Eltern, Tanten und Onkeln danke ich für vieles andere.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Zur Erfassung unserer anschaulichen Vorstellung von der *Größe* eines Objektes, genauer einer Teilmenge der reellen Zahlen oder eines anderen topologischen Raumes, gibt es in der Mathematik eine Reihe unterschiedlicher Konzepte. In Anlehnung an das von René Baire im Jahr 1899 in [Bai99] veröffentlichte Größenkonzept, in dem er von Mengen *von 1.* und *von 2. Kategorie* spricht, wollen wir solche Konzepte allgemein als *Kategorien-Konzepte* bezeichnen.
Derartige mathematischen Größenbegriffe spielen etwa in der Maß- und Integrationstheorie, der Mengenlehre und in der Topologie eine wesentliche Rolle. Mit ihrer Hilfe lassen sich in einem mathematisch exakt formulierten Sinne *unscharfe Begriffsbildungen* vornehmen. Beispielsweise definiert man in der Maß- und Integrationstheorie, für einen *Maßraum*[1] $(\Omega, \underline{A}, \mu)$ und eine Eigenschaft $E \subset \Omega$ von Elementen aus Ω, daß die Eigenschaft E auf einer Menge $A \in \underline{A}$ *μ-fast überall* besteht, falls E in A gilt bis auf eine *μ-Nullemenge*[2]: $\exists\, N \in \underline{A}\ (\mu(N) = 0 \wedge A \cap N^c \subset E)$. Dies ist entscheidend für die Formulierung von Eindeutigkeitsaussagen, die in der Maß- und Integrationstheorie in der Regel nur bis auf μ-Nullmengen gelten.
In dieser Arbeit soll der Schwerpunkt auf der Untersuchung zweier Kategorien-Konzepte liegen, die sich beide mittels topologischer Begriffe bilden lassen: Die *Baire-Kategorie* und die *σ-Kategorie*.
Für die spieltheoretische Charakterisierung betrachten wir beide Kategorien auf dem *Baireraum*. Das ist der Raum ω^ω aller unendlichen Folgen natürlicher Zahlen mit den Mengen der Form $O_u := \{f \in \omega^\omega \mid u \text{ ist ein endl. Anfangsstück von } f\}$ als den offenen Basismengen [☞ Kapitel 3.5].

[1] **Maßraum:** Ein Tripel $(\Omega, \underline{A}, \mu)$ wobei Ω eine nicht-leere Menge, $\underline{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und μ ein Maß auf $(\Omega, \underline{A})$ ist [☞ Konventionen S. 145].
[2] **μ-Nullmenge:** Eine Menge $A \in \underline{A}$ mit $\mu(A) = 0$ für einen Maßraum $(\Omega, \underline{A}, \mu)$.

Unter der *Baire-Kategorie* wollen wir das Größenkonzept von R. Baire verstehen: Als *kleine* Teilmengen eines topologischen Raumes oder speziell des Baire-Raumes ω^ω werden die *mageren* Teilmengen ausgezeichnet. Eine Menge bezeichnet man als *mager*, wenn sie sich als abzählbare Vereinigung *nirgends dichter* Teilmengen (d.h. Teilmengen, die in keiner offenen Menge dicht sind oder äquivalent dazu: Teilmengen, deren Komplemente jeweils eine offene dichte Menge enthalten) schreiben läßt.

Die *σ-Kategorie* definieren wir direkt für den Baireraum. Sie zeichnet als *kleine* Teilmengen die sogenannten *σ-beschränkten* Teilmengen des Baireraumes aus. Eine Teilmenge A des Baireraumes wird als *σ-beschränkt* bezeichnet, falls es im Baireraum eine Folge $(f_i)_{i<\omega}$ gibt so, daß

$$\forall\ f \in A\ \exists\ i < \omega\ (f \leq f_i)$$

wobei für $f, g \in \omega^\omega$ genau dann $f \leq g$ gelte, wenn $\forall\ n < \omega\ (f(n) \leq g(n))$ gilt (dabei sei $f(n)$ die n-te Stelle von f). Eine solche Folge von Elementen aus ω^ω bezeichnet man auch als eine *σ-Schranke*.

Der rote Faden in dieser Arbeit ist die Behandlung der in Kapitel 1.3 aufgeworfene Frage nach einer Vereinheitlichung der beiden Größenkonzepte *Baire-* und *σ-Kategorie*. Die Antwort darauf soll in einer spieltheoretisch definierten verallgemeinerten Kategorie bestehen, die die beiden erstgenannten als Spezialfälle umfaßt. Dazu werden zunächst in den Kapiteln 3 und 4 die Baire- und die σ-Kategorie definiert und ihre grundlegenden Eigenschaften untersucht. Wie sich dabei herausstellt, lassen sich Baire- und σ-Kategorie in ganz ähnlicher Weise spieltheoretisch charakterisieren: Dazu wird für jedes der beiden Kategorien-Konzepte ein mathematisches Zwei-Personen-Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ bzw. $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ für Teilmenge A des Baireraumes definiert, mit dem sich ein Zusammenhang zwischen dem Kleinheitsbegriff des jeweiligen Kategorien-Konzeptes und den Gewinnstrategien in den jeweiligen Spielen herstellen läßt [☞ Theoreme 3.6.4 und 4.5.3]. In beiden Fällen wird der jeweilige Kleinheitsbegriff dadurch charakterisiert, daß eine Menge A *klein* ist, genau dann, wenn Spieler II eine *Gewinnstrategie* für das entsprechende Spiel mit Gewinnmenge A hat. Zusätzlich zu den Spielen $\mathrm{G}^{**}(A)$ und $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ werden jeweils projektive Versionen $\mathrm{G}^{**}_p(B)$ bzw. $\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$ zur Charakterisierung der jeweiligen Kategorien-Konzepte für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ für eine Menge $B \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ bzw. $B \subset \omega^\omega \times \lambda$ für eine unendliche Ordinalzahl λ definiert [☞ Definitionen 3.6.5 sowie 4.5.5]. Analog zu den nicht-projektiven Charakterisierungen entsprechen sich auch die Charakterisierungen für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ [☞ Theoreme 3.6.7 sowie 4.5.8].

Die *Kompaktheit* läßt sich für abgeschlossene Teilmengen A des Baireraumes wie folgt charakterisieren [☞ Satz 4.1.2]:

$$\forall\ s \in T_A\ \exists\ k < \omega\ \forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_A \Rightarrow t(0) \not> k) \tag{1.1}$$

wobei T_A die Menge aller endlichen Anfangsstücke von Elementen aus A ist, $\omega^{<\omega}$ die Menge aller endlichen Sequenzen natürlicher Zahlen und $\omega_*^{<\omega}$ gleich $\omega^{<\omega}$ ohne die leere Sequenz. Die *σ-Beschränktheit* einer Menge $A \subset \omega^\omega$ ist laut Satz 4.2.4 (ii) gleichbedeutend mit:

$$A \subset \bigcup_{i<\omega} A_i \text{ für eine Folge kompakter } (A_i \subset \omega^\omega)_{i<\omega}. \tag{1.2}$$

Für ein allgemeineres Kategorien-Konzept auf dem Baireraum nimmt man nun die beiden Charakterisierungen (1.1) und (1.2) für Kompaktheit bzw. σ-Beschränktheit als Vorlagen für die allgemeineren Begriffe von einer *$\mathcal{B}$-nirgends dichten* bzw. einer *$\mathcal{B}$-mageren* Teilmenge des Baireraumes (oder etwas allgemeiner des Raumes X^ω mit einer Menge X mit wenigstens zwei Elementen [☞ Definitionen 5.2.1 und 5.2.2]. Die *$\mathcal{B}$-mageren* Teilmengen, da als Teilmengen abzählbarer Vereinigungen *$\mathcal{B}$-nirgends dichter* Mengen definiert, bilden ein σ-Ideal. Die *$\mathcal{B}$-mageren* Teilmengen stehen also für einen neuen *Kleinheitsbegriff* den wir als *verallgemeinertes Kategorien-Konzept* bezeichnen oder (in Anlehnung an die Begriffe von der *Baire*- und der *σ-Kategorie*) als die *verallgemeinerte Kategorie*. Es zeigt sich, daß sich die Theoreme 3.6.4, 3.6.7, sowie 4.5.3 und 4.5.8 zur spieltheoretischen Charakterisierung der Kleinheitsbegriffe *mager* bzw. *σ-beschränkt* in entsprechenden Versionen auch für die verallgemeinerte Kategorie zeigen lassen [☞ Theoreme 5.4.1 und 5.4.4].

Neben den *Kleinheitsbegriffen* charakterisieren die angesprochenen Theoreme auch Begriffe von *großen* Mengen (d.h. von Komplementen kleiner Mengen) wie den *komageren Mengen* bzw. von *relativ großen* Mengen (d.h. von anschaulich

„großen“ Mengen, die aber nicht unbedingt Komplemente kleiner Mengen sind) wie etwa den *superperfekten Mengen*.
Im Falle der spieltheoretischen Charakterisierung der Baire-Kategorie [☞ Theoreme 3.6.4, 3.6.7] werden im Sinne der Baire-Kategorie *lokal große* Mengen (d.h. *in einer offenen Menge komagere* Mengen) charakterisiert.
Im Fall der spieltheoretischen Charakterisierung der σ-Kategorie [☞ Theoreme 4.5.3 und 4.5.8] werden im Sinne der σ-Kategorie *relativ große* Mengen (d.h. Mengen, die eine nicht-leere *superperpfekte* Teilmenge enthalten). Als *superperfekt* bezeichnet man Teilmengen A des Baireraumes, deren Baum T_A (d.h. die Menge der endlichen Anfangsstücke von Elementen in A) die Eigenschaft hat, daß es für jedes Element des Baumes eine endliche Erweiterung im Baum gibt, die im nächsten Schritt unendlich oft verzweigt. Nicht-leere superperfekte Mengen (und deren Obermengen) stehen zwar für anschaulich „große“ Mengen, sind aber nicht unbedingt *groß* im Sinne der σ-Kategorie, d.h. sie sind i.a. nicht Komplement einer *σ-beschränkten* Menge [☞ Beispiel 4.3.2]. Die *Superperfektheit* wird in Kapitel 5.3 zum Begriff der *$\mathcal{B}$-Perfektheit* verallgemeinert [☞ Definition 5.3.6 und Beispiel 5.3.10].
Die spieltheoretischen Charakterisierungen von Baire- und σ-Kategorie sowie der verallgemeinerten Kategorie entsprechen sich im Hinblick auf diese Größenbegriffe insofern, als Spieler I in dem jeweiligen (nicht projektiven) Spiel eine Gewinnstrategie hat genau dann, wenn auf die Gewinnmenge *lokal groß* bzw. *relativ groß* (jeweils im obigen Sinne) ist. (Für die entsprechenden projektiven Spiele gelten die analaogen Aussagen jeweils nur in der Hinrichtung).

Neben der spieltheoretischen Charakterisierung von Kleinheits- und Größenbegriffen der σ- und der Baire-Kategorie in den Kapiteln 3.6 und 4.5 sowie deren Verallgemeinerung in Kapitel 5 leisten die Kapitel 3.1 bis 3.5 eine Einordnung der Baire-Kategorie und des Baireraumes in den allgemeineren topologischen Zusammenhang:
Um die Eigenschaft, daß in $\mathbb{R}$ kein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (oder äquivalent dazu: kein offenes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$) mit $a < b$ als Vereinigung einer Folge von Mengen von erster Kategorie dargestellt werden kann [☞ Beispiel 3.1.17], für topologische Räume zu verallgemeinern, bezeichnet man einen Raum als *Baire'sch*, wenn er

keine nicht-leere offene magere Menge enthält [☞ Kapitel 3.3].
Eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset X$ ist mager genau dann, wenn jede Teilmenge von X *mager (und komager) in* U ist [☞ Definitionen 3.1.8 und 3.2.1]. Die Baire'schen Räume sind daher gerade diejenigen, in denen die *Lokalisierung* der Begriffe *mager* und *komager* sinnvoll ist.
Der *Baire'sche Kategoriensatz* identifiziert die Klassen der lokal kompakten sowie der vollständig metrisierbaren Räume als Baire'sche Räume und wird in 3.3.11 bewiesen.
In Satz 3.6.8 stellen wir einen Zusammenhang her zwischen der *Determiniertheit* und der *Baire-Eigenschaft* projektiver Mengen. Anschaulich besagt die Baire-Eigenschaft über eine Teilmenge eines topologischen Raumes, daß sie „fast offen" – d.h. offen bis auf eine magere Menge ist.
In Kapitel 4 zeigen wir außerdem, daß sich einige Resultate für perfekte und abzählbare Teilmengen des Baireraumes analog auch für superperfekte und σ-beschränkte Teilmengen herleiten lassen – vorrangig der *Satz von Cantor und Bendixson*. Die Übertragung 4.4.1 des Satzes von Cantor und Bendixson für σ-beschränkte und superperfekte Teilmengen des Baireraumes besagt, daß sich jede abgeschlossene Teilmenge des Baireraumes eindeutig als disjunkte Vereinigung einer superperfekten und einer σ-beschränkten Teilmenge darstellen läßt.
In Kapitel 4.5 beweisen wir mittels der spieltheoretischen Charakterisierung der σ-Kategorie durch Theorem 4.5.8 und eines Resultates von Y.N. Moschovakis sowie eines von D.A. Martin einige Definierbarkeits-Aussagen über σ-Schranken [☞ Sätze 4.5.11 und 4.5.12].

In den Kapiteln 3.6, 4 und 5 beziehen wir uns weitgehend auf Sätze und Ideen, die Alexander Kechris 1977 in seinem Artikel *„On a notion of smallness for subsets of the Baire space"* [Kec77] formuliert hat.

Inhaltsübersicht

Kapitel 1 gibt zunächst eine Einführung in die Ideen zu dieser Arbeit. Unsere anschauliche Vorstellung von der „Größe" eines Objektes spiegelt sich im Begriff des *σ-Ideals* auf einer Menge wieder [☞ Kapitel 1.1]. Eine solche mathematische Formulierung unserer anschaulichen Größenvorstellung nennen wir ein

Kategorien-Konzept. In Kapitel 1.2 werden drei klassische Kategorien-Konzepte – die Cantor- die Lebesgue- und die Baire-Kategorie – vorgestellt. Mittels solcher Konzepte lassen sich in der Mathematik *unscharfe Begriffe* (oder auch *Fuzzy-Begriffe*) formulieren, wie etwa der Begriff von einer *fast offenen Teilmenge* eines toplogischen Raumes [☞ Kapitel 1.2]. Dabei weisen die Größenbegriffe der unterschiedlichen Kategorien-Konzepte strukturelle Gemeinsamkeiten auf. Viele Sätze über den einen Größenbegriff kann man in der entsprechenden Version auch für andere Größenbegriffe zeigen. In Kapitel 1.3 stellen wir daher die Frage nach der Vereinheitlichung derartiger Konzepte. Speziell geht es uns dabei um die Vereinheitlichung von Baire- und σ-Kategorie in einer verallgemeinerten spieltheoretisch konzipierten Kategorie.

Kapitel 2 führt die wichtigsten spieltheoretischen Grundbegriffe ein: *topologische Spiele*, *Gewinnstrategie* und *Determiniertheit*. Die *topologischen Spiele* dienen speziell dazu, topologische Eigenschaften spieltheoretisch zu beschreiben. Dazu wird ein Zusammenhang zwischen einer topologischen Eigenschaft der Gewinnmenge des Spieles und der Determiniertheit des Spiels hergestellt. *Determiniert* nennt man ein Spiel, für das einer der beiden Spieler eine Gewinnstartegie hat. Ein Spieler hat eine *Gewinnstrategie*, falls es für ihn unabhängig von den Zügen seines Gegners immer einen Weg gibt, das Spiel zu gewinnen. Nimmt man mit dem *Determiniertheitsaxiom* (in Kurzschreibweise **AD**) an, daß alle Spiele der Grundversion determiniert sind, so ist dies unverträglich mit dem *Auswahlaxiom*, jedoch verträglich mit dem *abzählbaren Auswahlaxiom* sowie mit dem *Axiom der abhängigen Auswahl* [☞ Kapitel 2.3]. Um Inkonsistenzen zu vermeiden darf also zusammen mit dem Determiniertheitsaxiom nicht das volle Auswahlaxiom vorausgesetzt werden.

Kapitel 3 stellt die Baire-Kategorie vor. Die Baire-Kategorie läßt sich allgemein für topologische Räume definieren. Die *kleinen* Mengen der Baire-Kategorie sind die *mageren* Mengen. Sie setzen sich aus *nirgends dichten* Mengen zusammen, die sich gleichsam „dünn machen“, indem ihre Komplemente offene dichte Mengen enthalten [☞ Kapitel 3.1]. Beispiel 3.1.10 verdeutlicht, daß man die Kleinheitsbegriffe verschiedener Kategorien-Konzepte keinesfalls durcheinanderwürfeln darf – *klein* in dem einen Konzept bedeutet nicht unbedingt auch *klein* in einem ande-

ren.
Die *komageren* Mengen stehen in Baire's Kategorien-Konzept für die *großen* Mengen und werden daher als die Komplemente *magerer* Mengen definiert [☞ Kapitel 3.2]. Daher haben die komageren Mengen die zu den mageren Mengen dualen Eigenschaften. Außerdem wird definiert, wann eine Menge *mager* bzw. *komager in einer offenen Menge* ist.
In einer offenen mageren Menge sind alle Teilmengen mager und komager. Sinnvollerweise betrachtet man dieses Konzept daher nur auf topologischen Räumen, die keine offenen mageren Mengen enthalten. Derartige Räume nennt man *Baire'sche Räume* [☞ Kapitel 3.3]. Der Baire'sche Kategoriensatz 3.3.11 identifiziert zwei große Klassen topologischer Räume als Baire'sch: die lokal kompakten Räume und die vollständig metrisierbaren Räume.
Für spieltheoretische Charakterisierungen betrachten wir in dieser Arbeit die Baire-Kategorie auf dem *Baireraum* (s.o.). In Kapitel 3.5 ordnen wir den Baireraum in den allgemeineren topologischen Zusammenhang ein. Unter anderem zeigen wir, daß der Baireraum ein *polnischer* Raum ist und somit nach dem Baire'schen Kategoriensatz 3.3.11 (i) insbesondere ein Baire'scher Raum.
In Kapitel 3.6 wird dann die Baire-Kategorie mittels des Spieles $\mathrm{G}^{**}(A)$ für beliebige Teilmengen A des Baireraumes und mittels $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ $(B \subset \omega^\omega \times \omega^\omega)$ charakterisiert [☞ Theoreme 3.6.4 und 3.6.7]: Es zeigt sich, daß eine Teilmenge A des Baireraumes genau dann *klein* im Sinne der Baire-Kategorie ist, wenn Spieler II in dem Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ eine Gewinnstrategie besitzt und *groß* (in einer offenen Teilmenge des Baireraumes) genau dann, wenn Spieler I eine Gewinnstartegie für das Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ hat [☞ Theorem 3.6.4]. Für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ einer Menge $B \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ erhält man ein entsprechendes Resultat mit dem Spiel $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ in dem allerdings nur die Hinrichtungen gelten [☞ Theorem 3.6.7]. Andererseits bieten die Spiele $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ mit $A = \mathrm{p}(B)$ den entscheidenden Vorteil einer gegenüber A einfacher (mit einem $\exists$-Quantor weniger) definierten Gewinnmenge B.
Kapitel 3 abschließend wird als eine direkte Anwendung von Theorem 3.6.7 ein hinreichendes Kriterium für die Baire-Eigenschaft projektiver Mengen angegeben [☞ 3.6.8].

Kapitel 4 stellt die σ-Kategorie vor. Die kompakten Teilmengen des Baireraumes werden in Kapitel 4.1 als abgeschlossen und überall endlich verzweigt charakterisiert [☞ Satz 4.1.2]. Diese Charakterisierung der kompakten Mengen dient dann im späteren Kapitel 5.2 als Vorlage für den allgemeineren Begriff der $\mathcal{B}$*-nirgends dichten* Teilmengen [☞ Definition 5.2.1].
In Kapitel 4.2 wird der Kleinheits-Begriff der σ*-Beschränktheit* eingeführt (s.o.). Die Charakterisierung der σ-beschränkten Mengen in Satz 4.2.4 (*ii*) als Teilmengen σ-kompakter Mengen dient wiederum im späteren Kapitel 5.2 als Vorlage für den allgemeineren Begriff der $\mathcal{B}$*-mageren* Teilmengen [☞ Definition 5.2.2].
Kapitel 4.3 führt mit dem Begriff der *superperfekten* und nicht-leeren Teilmenge (s.o.) eine Beschreibung für *relativ große* Teilmengen des Baireraumes ein. Aus dem Cantor-Bendixson-Analog in Kapitel 4.4 folgt, daß der Abschluß des Komplementes einer σ-beschränkten Teilmenge stets eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthält [☞ Korollar 4.4.2]. Unter der Annahme von **AD** enthält schon das Komplement einer σ-beschränkten Teilmenge eine nicht-leere superperfekte Teilmenge [☞ Korollar 4.5.4].
In Kapitel 4.4 wird der Satz von Cantor und Bendixson für höchstens abzählbare und perfekte auf die σ-beschränkten und superperfekten Teilmengen des Baireraumes übertragen.
In Kapitel 4.5 wird dann die σ-Kategorie mittels des Spieles $\tilde{\mathrm{G}}\,(A)$ für beliebige Teilmengen A des Baireraumes und mittels $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ (für ein $B \subset \omega^\omega \times \lambda^\omega$ und eine unendliche Ordinalzahl λ) charakterisiert [☞ Theoreme 4.5.3 und 4.5.8]: Analog zu den Theoremen 3.6.4 und 3.6.7 für die Baire-Kategorie erhält man, daß eine Teilmenge A des Baireraumes genau dann *klein* im Sinne der σ-Kategorie ist, wenn Spieler II in dem Spiel $\tilde{\mathrm{G}}\,(A)$ eine Gewinnstrategie besitzt und *relativ groß* (in dem Sinne, daß A eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthält) genau dann, wenn Spieler I eine Gewinnstartegie für das Spiel $\tilde{\mathrm{G}}\,(A)$ hat [☞ Theorem 4.5.3]. Für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ (für eine Menge $B \subset \omega^\omega \times \lambda^\omega$ und eine unendliche Ordinalzahl λ) erhält man ein entsprechendes Resultat mit dem Spiel $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$, in dem allerdings nur die Hinrichtungen gelten [☞ Theorem 4.5.8]. Wie schon die Spiele $\mathrm{G}_p^{**}\,(B)$ bieten die Spiele $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ mit $A = \mathrm{p}(B)$ den entscheidenden Vorteil einer gegenüber A einfacher (mit einem $\exists$-Quantor weniger) definierten Gewinnmenge B.

Mittels dieser Charakterisierung (in Form von Korollar 4.5.9) sowie eines Resultates von D.A. Martin (☞ Kapitel 4.5 Fußnote 10 bzw. [KS85, 196ff] oder [Kan03, 30.10]) und eines weiteren Resultates von Y.N. Moschovakis (☞ Kapitel 4.5 Fußnote 9 bzw. [Mos80, 6E.1.]) lassen sich nun einige Definierbarkeitsresultate für σ-Schranken (s.o.) ableiten [☞ Sätze 4.5.11 und 4.5.12][3].

Kapitel 5 definiert auf der Grundlage der Untersuchung von Baire- und σ-Kategorie in den vorangegangenen Kapiteln eine verallgemeinerte Kategorie und zeigt, daß die Theoreme 3.6.4 und 3.6.7 sowie 4.5.3 und 4.5.8 in analoger Form auch in der verallgemeinerten Kategorie herleitbar sind.
Zunächst definieren wir dazu in Kapitel 5.1 ein *verallgemeinertes Spiel* $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ für Teilmengen A des Raumes X^ω. In $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ werden die vorherigen Spiele $\mathrm{G}^{**}(A)$ und $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ dahingehend verallgemeinert, daß Spieler II nun keine endlichen Sequenzen oder natürliche Zahlen mehr spielt, sondern *Bedingungen* für den weiteren Spielverlauf.
In Kapitel 5.2 dienen anschließend die Charakterisierungen aus Satz 4.1.2 für kompakte und aus Satz 4.2.4 (*ii*) für σ-beschränkte Teilmengen des Baireraumes als Vorlagen für die Definition der allgemeineren Begriffe *$\mathcal{B}$-dirgends dicht* und *$\mathcal{B}$-mager* [☞ Definitionen 5.2.1 und 5.2.2].
In Kapitel 5.3 wird der Begriff der *$\mathcal{B}$-perfekten* Teilmenge des Bairerauems eingeführt. Beispiel 5.3.10 zeigt, daß die nicht-leeren $\mathcal{B}$-perfekten Teilmengen eine Verallgemeinerung von Teilmengen des Baireraumes sind, die eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthalten.
Kapitel 5.4 definiert zusätzlich zum Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ für beliebige Teilmengen $A \subset \mathcal{N}$ ein entsprechendes projektives Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}_p(C)$ für Projektionen $A = \mathrm{p}(C)$ (für eine Menge $C \subset \mathcal{N} \times \lambda$ und eine beliebige unendliche Ordinalzahl λ) und zeigt, daß sich die Theoreme aus den Kapiteln 3.6 und 4.5 zur spieltheoretischen Charakterisierung der Baire- bzw. der σ-Kategorie analog auf die verallgemeinerte Kategorie übertragen lassen: Analog zu den Theoremen 3.6.4 und 4.5.3 für die Baire-Kategorie bzw. die σ-Kategorie erhält man, daß eine Teilmenge $A \subset X^\omega$ genau dann *klein* im Sinne der verallgemeinerten Kategorie ist, wenn Spieler II in dem Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ eine Gewinnstrategie besitzt und *relativ groß* (in dem Sinne,

[3] ☞ *„On a notion of smallness for subsets of the Baire space“* von A. Kechris [Kec77, 4].

daß A eine nicht-leere $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge enthält) genau dann, wenn Spieler I eine Gewinnstartegie für das Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ hat [☞ Theorem 5.4.1]. Für Projektionen $A = \mathrm{p}(C)$ (für eine Menge $C \subset \omega^\omega \times \lambda^\omega$ und eine unendliche Ordinalzahl λ) erhält man als Verallgemeinerung der Theoreme 3.6.7 und 4.5.8 ein entsprechendes Resultat mit dem Spiel $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$ [☞ Theorem 5.4.4].

1.1 Kleine und große Mengen

Unsere anschauliche Vorstellung von der „Größe“ eines Objektes, genauer einer Teilmenge der reellen Zahlen oder eines anderen topologischen Raumes, läßt sich in folgenden Forderungen zusammenfassen:

1) Die leere Menge $\varnothing$ ist klein,

2) Teilmengen kleiner Mengen sind klein,

3) Das Komplement kleiner Mengen ist groß – und umgekehrt: das Komplement großer Mengen ist klein,

4) Endliche Vereinigungen kleiner Mengen sind klein und wegen 3) somit auch: endliche Durchschnitte großer Mengen sind groß,

5) Abzählbare Vereinigungen kleiner Mengen sind klein und wegen 3) somit auch: abzählbare Durchschnitte großer Mengen sind groß.

Um dies mathematisch noch präzieser zu formulieren, repräsentieren wir die Begriffe „klein“ und „groß“ als Systeme $\underline{K}$ bzw. $\underline{G}$ von Teilmengen von X. Die Elemente des Systems $\underline{K}$ nennen wir dann die **kleinen** Teilmengen von X und die Elemente des Systems $\underline{G}$ die **großen** Teilmengen von X. Da in 3) gefordert wird, daß die großen Mengen gerade die Komplemente von kleinen Mengen sein sollen, brauchen wir nur $\underline{K}$ zu definieren so, daß Punkt 1), 2) und 5) erfüllt sind. Punkt 4) folgt dann bereits aus 5), da endlche Vereinigungen $A_0 \cup \ldots \cup A_n$ auch als abzählbare Vereinigungen $A_0 \cup \ldots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots$ aufgefasst werden können. Eine Präzisierung für $\underline{K}$ so, daß die Punkte 1), 2) und 5) erfüllt sind, leistet der Begriff des σ-Ideals auf einer Menge X.

Definition 1.1.1. (σ-Ideal)
Sei X eine Menge. Ein nicht-leeres System $\underline{I}$ von Teilmengen von X heißt ein **σ-Ideal**[4] auf X, wenn es abgeschlossen ist gegenüber Teilmengenbildung und abzählbaren Vereinigungen, d.h. wenn gilt:

1) $A \in \underline{I}$ und $B \subset A \Rightarrow B \in \underline{I}$,

[4] **σ-Ideal:** ☞ etwa [KM76, I 5 (11)].

2) $\underline{S} \subset \underline{I}$ abzählbar $\Rightarrow (\bigcup_{S \in \underline{S}} S) \in \underline{I}$.

Die Elemente von $\underline{I}$ heißen **klein in X** oder einfach **klein**. Die Komplemente kleiner Mengen in X heißen **groß in** X oder einfach **groß**.

Ist das Mengensystem $\underline{I}$ nur abgeschlossen gegenüber Teilmengen und endlichen Vereinigungen, spricht man von einem **Ideal**.

Bis auf die Abgeschlossenheit gegenüber abzählbaren Vereinigungen, verkörpert also auch der Begriff des *Ideals* unsere Anschauung von *kleinen Mengen* (obige Punkte 1), 2) und 4) sind erfüllt). Für die Auszeichnung *der kleinen Teilmengen* einer Menge X werden wir nachfolgend jedoch in den meisten Fällen auf σ-Ideale zurückgreifen.

Insbesondere ist die leere Menge in jedem (σ-)Ideal auf einer Menge X enthalten. Ist $\underline{I}$ eine Ideal auf einer Menge X, so erhält man mit

$$\begin{aligned} \underline{I}^\sigma :=& \{A \subset X \mid A = \bigcup_{i<\omega} A_i \text{ für eine Folge } (A_i \in \underline{I})_{i<\omega}\} \\ =& \{A \subset X \mid A \subset \bigcup_{i<\omega} A_i \text{ für eine Folge } (A_i \in \underline{I})_{i<\omega}\} \end{aligned}$$

das kleinste σ-Ideal auf X, das $\underline{I}$ enthält.

Vielfach ist der Ausgangspunkt für einen Begriff von einer *kleinen* Menge die anschauliche Vorstellung, daß sie sich in der gegebenen Obermenge gleichsam „dünn macht“. Um dies mathematisch formulieren zu können, müssen die betrachteten Mengen erst mit einer geeigneten Struktur versehen werden. Eine solche Struktur liefert die Theorie der **topologischen Räume**. An dieser Stelle scheint es daher angebracht, zunächst einige topologische Grundbegriffe zu erläutern. Anschließend werden dann in Abschnitt 1.2 drei klassische mathematische Größenkonzepte kurz umrissen.

Topologie

Ein wichtiges Konstruktions- und Hilfsmittel aus der Analysis ist der Begriff der *Konvergenz einer Folge* . Anschaulich bedeutet die Konvergenz einer Folge gegen einen Punkt, daß in jeder „Umgebung" des Punktes „fast alle" Folgenglieder zu finden sind.

Um diese Anschauung mathematisch exakt fassen zu können, zeichnet man für jeden Punkt x einer Menge X gewisse Teilmengen als „Umgebungen" dieses Punktes aus, die den folgenden sogenannten **Hausdorff'schen Umgebungsaxiomen**[5] genügen:

1) x gehört zu jeder seiner Umgebungen.

2) Jede Obermenge einer Umgebung von x ist wieder eine Umgebung von x. X ist eine Umgebung von x.

3) Der Durschnitt zweier Umgebungen von x ist wieder eine Umgebung von x.

4) Jede Umgebung U von x enthält eine Umgebung V von x so, daß U auch eine Umgebung eines jeden Punktes von V ist.

Auf dieser Grundlage definiert man eine Teilmenge von X als **offen**, falls sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist (z.B. eine Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ ohne ihren Rand). Offen sind also genau diejenigen Teilmengen, die nur aus „inneren" Punkten (und weder „äußeren Punkten" noch „Randpunkten") bestehen in dem Sinne, daß um jeden Punkt der offenen Menge eine Umgebung gelegt werden kann, die schon ganz in der offenen Menge enthalten ist. Damit lassen sich nun folgende Sätze ableiten:

Satz 1. Die leere Menge und der Raum selbst sind offen.

Satz 2. Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen.

Satz 3. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.

Satz 4. Eine Teilmenge U ist genau dann eine Umgebung von x, wenn es eine offene Menge O gibt mit $x \in O \subset U$.

Verwendet man nun anstelle der Hausdorff'schen Umgebungsaxiome die Sätze 1 bis 3 als Axiome und Satz 4 als Definition für den Umgebungs-Begriff, gelangt man zu der heute üblichen (gleichwertigen) Definition einer Topologie:

[5]**Hausdorff'sche Umgebungsaxiome**: Benannt nach Felix Hausdorff (1868–1942). 1914 veröffentlich in [Hau14, 7].

Definition 1.1.2. (Topologie)
Sei X eine Menge. Ein System $\underline{X}$ von Teilmengen von X heißt eine **Topologie** auf X, wenn gilt:

1) $\varnothing \in \underline{X}$, $X \in \underline{X}$,

2) $O_1, O_2 \in \underline{X} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \underline{X}$,

3) $\underline{S} \subset \underline{X} \Rightarrow (\bigcup_{S \in \underline{S}} S) \in \underline{X}$.

Das Paar $(X, \underline{X})$ heißt ein **topologischer Raum** oder (falls klar ist, was gemeint ist) auch einfach **Raum**. Statt $(X, \underline{X})$ schreibt man auch nur X. Die Elemente von $\underline{X}$ heißen **offen in X** oder einfach **offen**. Die Komplemente offener Mengen in X heißen **abgeschlossen in** X oder einfach **abgeschlossen**.

Die beiden einfachsten Beispiele einer Topoogie $\underline{X}$ auf einer Menge X sind die **diskrete** und die **indiskrete Topologie**. Erstere besteht aus allen Teilmengen von X (also $\underline{X} = \mathbf{P}(X)$), letztere lediglich aus der leeren Menge und X selber (also $\underline{X} = \{\varnothing, X\}$).

Ein Standardverfahren, um eine Topologie auf einer Mengen X zu erhalten, ist das „Erzeugen" aus einem System $\underline{Y}$ von Teilmengen von X: Ist das System $\underline{Y}$ **schnittstabil** (d.h. mit $A, B \in \underline{Y}$ ist auch $A \cap B \in \underline{Y}$) und läßt sich X als Vereinigung von Mengen aus $\underline{Y}$ schreiben, so ist das System $\underline{X}$ bestehend aus beliebigen Vereinigungen von Mengen aus $\underline{Y}$ eine Topologie auf X. Man nennt $\underline{X}$ dann die von $\underline{Y}$ **erzeugte** Topoplogie.

Lassen sich alle offenen Mengen einer Topologie $\underline{X}$ als Vereinigung von Mengen eines Systems $\underline{Y} \subset \underline{X}$ darstellen, so nennt man $\underline{Y}$ eine **Basis** der Topologie $\underline{X}$. Die Elemente aus $\underline{Y}$ heißen dann **offene Basismengen**. (Dabei braucht die leere Menge nicht notwendig unter den offenen Basismengen zu sein, da man die leere Menge auch als leere Vereinigung $\varnothing = \bigcup_{i \in \varnothing} O_i$ offener Basismengen O_i erhält.)

Alle Teilmengen eines topologischen Raumes $(X, \underline{X})$ werden automatisch wieder zu topologischen Räumen, wenn man die „Spuren" der Topologie $\underline{X}$ auf den Teilmengen als offene Mengen auszeichnet. Unter den „Spuren" von $\underline{X}$ auf einer Teilmenge $Y \subset X$ sind dabei die Schnitte der in X offenen Mengen mit der

Teilmenge Y zu verstehen. Die so definierte **Spurentopologie** $\underline{Y} := \{O \cap Y \mid O \subset X \text{ offen}\}$ auf Y nennt man auch die von $\underline{X}$ **induzierte Topologie** oder **Relativtopologie**.

Häufig sind topologische Räume aus anderen topologischen Räumen „zusammengesetzt". Auf dem kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier Räume $(X, \underline{X})$ und $(Y, \underline{Y})$ ist die Menge $\underline{B} := \{U \times V \mid U \in \underline{X} \text{ und } V \in \underline{Y}\}$ zwar keine Topologie, aber ein schnittstabiles System von Teilmengen, das $X \times Y$ enthält. Die von diesem System erzeugte Topologie $\underline{X} \times \underline{Y} := \{O \subset X \times Y \mid O = \bigcup_i B_i \text{ für } \{B_i\}_i \subset \underline{B}\}$ nennt man die **Produkttopologie**. Dies ist gerade die kleinste Topologie auf der Menge $X \times Y$ so, daß die Pojektionen $p_X : X \times Y \longrightarrow X$ und $p_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ stetig (d.h. für alle O offen in X und O' offen in Y sind $p_X^{-1}(O)$ und $p_X^{-1}(O)$ wieder offen in $X \times Y$) sind. Daher nennt man die Produkttopologie auch die **von den Projektionen p_X, p_Y erzeugte Topologie**.

1.2 Kategorien-Konzepte

> ≪Dans de nombreux problèmes de Topologie, le rôle de la notation d'ensemble de I. catégorie est analogue à celui d'ensemble de mesure nulle dans la théorie de la mesure (ensembles *négligeables*).≫[6] (C. Kuratowski in [Kur58, 10 III])

Konzepte, die mathematisch exakte Begriffe unserer anschaulichen Vorstellung von der „Größe" eines Objektes liefern, sollen hier in Anlehnung an R. Baires Begriffe von der *1.* und *2. Kategorie* (☞ 3.1) **Kategorien-Konzepte** genannt werden. Ein solches Konzept muß den in 1.1 formulierten Anforderungen genügen. In der Mathematik gibt es drei klassische Kategorien-Konzepte, die hier kurz umrissen werden sollen.

Cantor-Kategorie

Das einfachste Kategorien-Konzept geht zurück auf Georg Cantor (1845–1918) [Can83]. Eine Menge A heißt **abzählbar**, wenn sie gleichmächtig zu den natürli-

[6] In vielen Problemen der Topologie spielt der Begriff einer Menge von I. Kategorie eine ähnliche Rolle wie der einer Menge vom Maß Null in der Maßtheorie (*‚vernachlässigbare'* Mengen).

chen Zahlen ist, sie heißt **höchstens abzählbar**, falls sie endlich oder abzählbar ist. Letzteres ist gleichbedeutend damit, daß es eine injektive Abbildung $f : A \longrightarrow \omega$ in die natürlichen Zahlen gibt. Eine Menge heißt **überabzählbar**, wenn sie nicht höchstens abzählbar ist.

Betrachtet man die höchstens abzählbaren als die *kleinen* Mengen und die Komplemente höchstens abzählbarer Mengen als die *großen* Mengen, so genügt dieses Konzept den oben in 1.1 formulierten Anforderungen. Die höchstens abzählbaren Mengen bilden ein σ-Ideal, da höchstens abzählbare Vereinigungen höchstens abzählbarer Mengen wieder höchstens abzählbar sind.

Lebesgue-Kategorie

Ein weiterer klassischer Größenbegriff ist das **Volumen** eines Körpers. Die Formulierung dieses Konzepts geht zurück auf Henri-Léon Lebesgue (1875–1941) [Leb04][7].

Für das **Lebesgue-Maß** werden zunächst die Volumen von einfach zu messenden Ausgangsmengen bestimmt. Für $a = (a_1, \ldots, a_n), b := (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ gelte $a \leq b$ genau dann, wenn $a_i \leq b_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Für beliebige $a, b \in \mathbb{R}^n$ sei $(a, b] := \{z \in \mathbb{R}^n \mid a < z \leq b\}$. Für *n-dimensionale (links offene) Quader* $I \in \underline{I}^n := \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n$ definiert man ihr Volumen

$$\lambda^n(I) := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Für *n-dimensionale Figuren* $F := \sum_{j=1}^{d} I_j \in \underline{F}^n := \{\sum_{j=1}^{d}(a^{(j)}, b^{(j)}] \mid a^{(j)}, b^{(j)} \in$

[7]**Lebesguesche Integartionstheorie:** In *„Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives"* (Paris 1904) veröffentlicht Lebesgue eine Vorlesung über Integrationstheorie, die er im akademischen Jahr 1903–1904 am Collège de France hielt. Im Mittelpunkt steht die Frage, unter welchen Bedingungen das unbestimmte Integral eine Stammfunktion des Integranden ist. Im letzten Kapitel geht er kurz auf seinen eigenen Integralbegriff ein: Analog zum Maßproblem formuliert er das Integrationsproblem. Dieses führt er auf das Maßproblem zurück und gelangt mit Hilfe des Begriffs der meßbaren Funktion zur Definition des Lebesgue-Integrals. Mit diesem Buch wurde die Lebesguesche Integartionstheorie allgemein zugänglich.

$\mathbb{R}^n$ für $1 \leq j \leq d, d \geq 1\} \subset \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\lambda^n(F) := \sum_{j=1}^{d} \lambda^n(I_j). \tag{1.3}$$

Dabei ist λ^n durch (1.3) auf $\underline{F}^n$ wohldefiniert (☞ [Als98, 4.2]).

In der Maßtheorie zeigt man, daß λ^n eindeutig zu einem Maß (der Einfachheit halber ebenfalls mit λ^n bezeichnet) auf der von $\underline{F}^n$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\underline{F}^n) =: \underline{B}$ fortgesetzt werden kann.[8] Die *(lebesgue-)meßbaren Teilmengen* von $\mathbb{R}^n$ erhält man durch *Vervollständigung* der σ-Algebra $\underline{B}$ bzgl. des Maßes λ^n, d.h. indem man übergeht zur σ-Algebra $\underset{\sim}{B} := \{A \cup N \mid A \in \underline{B}, N \subset B$ für ein $B \in \underline{B}$ mit $\lambda^n(B) = 0\}$, das Maß λ^n wird auf $\underset{\sim}{B}$ fortgesetzt durch $\underset{\sim}{\lambda}^n(A \cup N) := \lambda^n(A)$ für $A \in \underline{B}$ und $N \subset B$ für ein $B \in \underline{B}$ mit $\lambda^n(B) = 0$ (☞ etwa [Els05, II 6.3]).

Eine meßbare Menge $A \in \underset{\sim}{B}$ heißt **Lebesgue-Nullmenge** oder einfach **Nullmenge**, wenn $\underset{\sim}{\lambda}^n(A) = 0$ gilt. Der Einfachheit halber werde $\underset{\sim}{\lambda}^n$ von nun an ebenfalls mit λ^n bezeichnet. Statt λ^1 schreiben wir auch λ.

Für eine anschauliche Charakterisierung des Lebesgue-Maßes definiert man für beliebige Teilmengen A von $\mathbb{R}^n$ das *innere Maß* $\lambda_*(A)$ und das *äußere Maß* $\lambda^*(A)$ wie folgt:
Für das innere Maß λ_* wird A von innen her mit Borelmengen approximiert bzw. „ausgeschöpft“:

$$\lambda_*(A) := \sup\{\lambda^n(B) \mid A \supset B \text{ mit } B \in \underline{B}\}.$$

Umgekehrt wird für das äußere Maß λ^* die zu messende Menge A von außen mit Borelmengen approximirt bzw. „verpackt“:

$$\lambda^*(A) := \inf\{\lambda^n(B) \mid A \subset B \text{ mit } B \in \underline{B}\}.$$

[8] Man zeigt, daß λ^n ein *Prämaß* (d.h. ein Maß, das auf einem Ring [☞ Konventionen S. 145] definiert ist) auf dem *Ring* $\underline{F}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist. Nach dem *Fortsetzungssatz* der Maßtheorie (☞ [Als98, 3.5] bzw. [Bau74, 5.2]) kann λ^n auf wenigstens eine Art zu einem Maß auf der von $\underline{F}^n$ *erzeugten σ-Algebra* [☞ Konventionen S. 145] $\sigma(\underline{F}^n) =: \underline{B}$ (genannt σ-Algebra der *Borelmengen*) fortgesetzt werden. Da das Prämaß λ^n *σ-endlich* ist (d.h. es gibt eine aufsteigende Folge $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$ von Teilmengen von Ω so, daß $\bigcup_{i \geq 1} \Omega_i = \Omega$ und $\lambda^n(\Omega_i) < \infty$), ist diese Fortsetzung nach dem *Eindeutigkeitssatz* der Maßtheorie (☞ [Als98, 3.6]) eindeutig bestimmt.

Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^*(A) < \infty$ gilt nun:

$$\lambda_*(A) = \lambda^*(A) \Leftrightarrow A \in \underset{\sim}{B}$$

und in diesem Fall ist $\lambda_*(A) = \lambda^*(A) = \lambda^n(A)$ (☞ [Coh82, 1.5.5]).

Betrachtet man die Nullmengen in $\mathbb{R}^n$ als *kleine* Mengen und die Komplemente von Nullmengen als *große* Mengen, so genügt dieses Konzept erneut den Anforderungen, die wir in Kapitel 1.1 an ein Konzept von kleinen und großen Mengen gestellt haben. Ein Beweis für die σ-Idealeigenschaft der Nullmengen findet sich etwa in [Els05, II,1.9].

Baire-Kategorie

Im Jahr 1899 formulierte R. L. Baire sein Kategorien-Konzept [Bai99]. Zunächst werden **nirgends dichte** Teilmengen A der reellen Zahlen charakterisiert als Mengen, die in keinem Intervall dicht sind oder damit gleichbedeutend als Mengen, für die jedes Intervall I ein Teilintervall $J \subset I$ besitzt, das im Komplement von A enthalten ist. Eine solche Menge stellt man sich am besten als Menge „mit lauter Löchern" vor. Weitere äquivalente Formulierungen sind: Eine Menge A ist nirgends dicht genau dann, wenn das Komplement von A eine offene dichte Teilmenge enthält und genau dann, wenn der Abschluß $\overline{A}$ von A keine inneren Punkte enthält – also $\overline{A}^\circ = \varnothing$. Mit diesen äquivalenten Formulierungen erhält man eine allgemeine Definition für beliebige topologische Räume (☞ Kapitel 3.1).

Eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist i.a. nicht wieder nirgends dicht: z.B. sind die rationalen Zahlen eine abzählbare Vereinigung von Singleton-Mengen (also von Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen) und solche Singleton-Mengen $\{x\}$ sind in $\mathbb{R}$ nirgends dicht (das Komplement $\mathbb{R} - \{x\}$ ist eine dichte offene Teilmenge), andererseits liegen die rationalen Zahlen aber auch dicht in den reellen Zahlen. Daher wird auf den Begriff einer nirgends dichten Menge aufbauend eine Teilmenge der reellen Zahlen als **von erster Kategorie** bezeichnet, falls sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen von $\mathbb{R}$ ist. Teilmengen der reellen Zahlen, die nicht von erster Kategorie sind, heißen **von zweiter Kategorie**.

Eine Menge A von erster Kategorie ist nicht notwendig selber eine Menge mit „lauter Löchern" in dem Sinne, daß jede offene Menge das Komplement von A in einer offenen Menge schneidet, kann aber durch derartige Mengen approximiert werden. Eine Menge von ertser Kategorie enthält anschaulich eine dichte Menge von „Lücken" – damit ist gemeint, daß kein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ als Vereinigung einer Folge von Mengen von erster Kategorie dargestellt werden kann [☞ Beispiel 3.1.17].

Mit den Teilmengen der reellen Zahlen von erster Kategorie als *kleine* Mengen und den Komplementen kleiner Mengen als *große* Mengen beschreibt auch dieses Konzept kleine und große Mengen im Sinne von Kapitel 1.1. Die Teilmengen der reellen Zahlen von erster Kategorie bilden ein σ-Ideal, da abzählbare Vereinigungen abzählbarer Vereinigungen wieder abzählbar sind.

Fuzzy-Begriffe

> ≪Pour qu'une fonction bornée $f(x)$ soit intégrable, il faut et il suffit que l'ensemble de ses points de discontinuité soit de mesure nulle.≫[9] (H. Lebesgue in [Leb72, S. 45])
>
> ≪...je dirai qu'une condition est remplie *presque partout* lorsqu'elle est vérifiée en tout point, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.≫[10] (H. Lebesgue in [Leb72, S. 200])

Ideale und σ-Ideale erlauben die Definition von **Fuzzy-Begriffen**. Darunter sind Begriffsbildungen zu verstehen, die in einem bestimmten mathematisch exakt formulierten Sinne „unscharf" sind. Typischerweise definiert man dabei, wann ein Objekt eine vorgegebene Eigenschaft „fast" hat, indem man mittels der kleinen Objekte die gerade noch zulässige Abweichung von dieser Eigenschaft festlegt. Hierzu sollen nun einige Beispiele gegeben werden:

Ein klassisches Beispiel für eine solche „unscharfe" Begriffsbildung ist der Kon-

[9] Dafür, daß eine beschränkte Funktion $f(x)$ [Riemann-]integrierbar ist, ist es notwendig und hinreichend, daß die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen vom Maß Null ist.

[10] ...ich werde sagen, daß eine Bedingung *fast überall* erfüllt ist, wenn sie für jeden Punkt gilt bis auf Punkte einer Menge vom Maß Null.

vergenzbegriff der Analysis: Eine Folge $(x_i)_{i<\omega}$ reeller Zahlen *konvergiert* gegen eine reelle Zahl x, falls für jedes reelle $\epsilon > 0$ **fast alle** Folgenglieder einen Abstand $< \epsilon$ zu x haben. Damit ist gemeint, daß alle bis auf endlich viele Folgenglieder in einem Abstand $< \epsilon$ zu x liegen. Alternativ läßt sich dies so formulieren: Für alle offenen ϵ-Umgebungen $O_\epsilon := \{y \in \mathbb{R} \mid |x - y| < \epsilon\} \subset \mathbb{R}$ von x gibt es eine endliche Menge $N \subset \mathbb{R}$ so, daß gilt:

$$\{x_i \mid i < \omega\} - N \subset O_\epsilon.$$

Eine formal gesehen ganz ähnliche (freilich inhaltlich völlig verschiedene) Definition taucht nun in der Maß- und Integrationstheorie auf:

In der Maß- und Integrationstheorie müssen viele Aussagen im Hinblick auf ihre Eindeutigkeit mit einer Einschränkung versehen werden, bei der der Begriff der *Lebesgue-Nullmenge* eine wichtige Rolle spielt[11]: Sei A eine Lebesgue-meßbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $E \subset \mathbb{R}$ eine Eigenschaft von Elementen aus $\mathbb{R}$. Dann sagt man, die Eigenschaft E **gilt Lebesgue-fast überall** auf A, wenn es eine Lebesgue-Nullmenge N gibt so, daß gilt:

$$A - N \subset E.$$

Dies erlaubt es nun, Begriffe und Aussagen in der Integrationstheorie zu formulieren, die im obigen Sinne eindeutig bis auf Lebesgue-Nullmengen sind. Beispielsweise wird die Gleichheit von Funktionen f, g auf $\mathbb{R}$ ausgedrückt durch:

$$f = g \text{ Lebesgue-fast überall}$$

oder die Endlichkeit der Werte einer Funktion f auf $\mathbb{R}$ durch:

$$|f| < \infty \text{ Lebesgue-fast überall.}$$

Dies ist notwendig, da es für die Aussagen in der Integrationstheorie i.a. auf Nullmengen nicht ankommt.

[11] **Eindeutigkeit in der Integrationstheorie:** Dies gilt nicht nur für die Lebesgue'sche Integrationstheorie, sondern allgemeiner für Aussagen der Integrationstheorie in beliebigen Maßräumen (☞ etwa [Als98, 10]).

In der deskriptiven Mengenlehre sagt man, eine Teilmenge A eines Baire'schen Raumes X habe die **Baire-Eigenschaft**, falls sie **fast offen** ist, d.h.:

$A \triangle O$ ist mager.

für eine offene Teilmenge O von X.

Allgemeiner läßt sich dies für eine Menge X mit einem σ-Ideal $\underline{I} \subset \mathbf{P}(X)$ und einer Eigenschaft $\underline{E} \subset \mathbf{P}(X)$ von Teilmengen von X definieren: Eine Teilmenge A von X habe **$\underline{I}$-fast** die Eigenschaft $\underline{E}$, falls es eine Menge $B \in \underline{E}$ (d.h. B hat die Eigenschaft $\underline{E}$) gibt so, daß gilt: $A \triangle B \in \underline{I}$ (d.h. $A \triangle B$ ist $\underline{I}$-klein). Für eine Eigenschaft $E \subset X$ von Elementen von X läßt sich allgemein formulieren: Eine Teilmenge A von X hat **$\underline{I}$-fast überall** die Eigenschaft E, falls es eine Menge $N \in \underline{I}$ gibt so, daß gilt: $A - N \subset E$.

Unscharfe Begriffe spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle, wenn es um die präzise Formulierung von Aussagen geht, für die es „auf kleine Abweichungen nicht ankommt“.

Nach diesen Beispielen von Kategorien-Konzepten wollen wir nun die Frage nach der Vereinheitlichung derartiger Konzepte stellen. Dabei beschränken wir uns auf Kategorien-Konzepte für den Baireraum.

1.3 Vereinheitlichungsproblem

> ≪It is natural to ask whether these notions of smallness are related.≫ (J.C. Oxtoby in [Oxt80, S. 4])[12]

In den Kapiteln 3 und 4 werden das Kategorien-Konzept von Baire und die σ-Kategorie vorgestellt. Es zeigt sich dass die Grössenbegriffe viele strukturelle Gemeinsamkeiten aufweisen. Viele Sätze über einen Grössenbegriff kann man in der entsprechenden Version auch für andere Grössenbegriffe zeigen [☞ die Kapitel 3.6 und 4.5]. Daher stellt sich nun folgende Frage:

[12] Oxtoby bezieht sich dabei auf das Verhältnis zwischen Nullmengen und Mengen von erster Kategorie im Raum der reellen Zahlen. Wir wollen diese Frage nun übertragen auf Mengen von erster Kategorie und σ-beschränkte Mengen im Baireraum.

Frage

Wie lassen sich Baire- und σ-Kategorie in einem allgemeineren Kategorien-Konzept vereinheitlichen so, daß sich darin die wichtigsten Ergebnisse zu den beiden Konzepten reproduzieren lassen?

Vorgehensweise

Für die Erstellung eines allgemeineren Kategorien-Konzeptes, wird hier zunächst nur die Frage nach einer vereinheitlichten Fassung der Baire- und der σ-Kategorie gestellt. In den Kapiteln 3 und 4 werden dann die Baire- und die σ-Kategorie spieltheoretisch charakterisiert. Auf den Gemeinsamkeiten dieser Charakterisierungen aufbauend wird anschließend in Kapitel 5 ein verallgemeinertes Kategorien-Konzept vorgestellt, das die beiden erstgenannten vereinheitlicht und auch noch weitere Spezialfälle umfasst. In dem allgemeineren Konzept erhält man Theoreme analog zu denen der Kapitel 3 und 4.

Die spieltheoretischen Charakterisierungen werden dabei mit Hilfe spezieller topologischer Spiele vorgenommen – den sogenannten *Banach-Mazur-Spielen*.

Derartige Spiele erlauben dann eine spieltheoretische Charakterisierung topologischer Eigenschaften E_1 und E_2 der Menge A, indem ein Zusammenhang zu den den Gewinnstrategien der Spieler für ein Spiel mit Gewinnmenge A hergestellt wird – etwa derart, daß gilt: „Spieler I hat eine Gewinnstrategie für das Spiel mit Gewinnmenge A genau dann, wenn die Mange A die topologische Eigenschaft E_1 besitzt. Spieler II hat eine Gewinnstrategie für das Spiel mit Gewinnmenge A genau dann, wenn die Menge A die topologische Eigenschaft E_2 besitzt.“

Im nachfolgenden Kapitel werden nun derartige topologischen Spiele vorgestellt und einige wichtige Eigenschaften besprochen.

2 Topologische Spiele

Die Spieltheorie ist eine eigenständige mathematische Disziplin und dient als wissenschaftliche Grundlage für zahlreiche empirisch arbeitende Wissenschaften. In den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften werden mit spieltheoretischen Methoden wirtschaftliche, gesellschaftliche und militärische Vorgänge modelliert, in der Biologie nutzt man Spieltheorie zur Analyse von Phänomenen wie der Ausbreitung von Genen oder Spezies. In der Informatik und im Maschinenbau kommen spieltheoretische Methoden etwa bei der Verifikation *reaktiver Systeme*[1] zum Einsatz.

Die mathematische Spieltheorie betrachtet eine Vielzahl von Spielen unterschiedlichster Typen. Ein allgemeiner Spielbegriff findet sich etwa in [vNM44, 7].

Die *topologischen Spiele* dienen im allgemeinen dazu, topologische Eigenschaften spieltheoretisch zu beschreiben. Dazu wird ein Zusammenhang zwischen einer topologischen Eigenschaft der Gewinnmenge und den Gewinnstrategien des Spiels hergestellt.

In einem *topologischen Spiel* wählen die Spieler Objekte, die in Zusammnheng stehen mit der Toplogie eines Raumes – dies können etwa Punkte, offene oder abgeschlossene Teilmengen, abgeschlossene Hüllen oder dergleichen sein (☞ etwa [Tel87]). Zu dieser Art Spiel gehören auch die später noch zu definierenden

[1] **Reaktive Systeme:** Computer-Systeme, die in ständiger Interaktion mit ihrer Umgebung stehen, indem sie Reize aus ihrer Umgebung empfangen und verarbeiten und als Reaktion darauf steuernd und regelnd auf diese Umgebung einwirken. Sie werden eingesetzt bei unterschiedlichsten Anwendungen wie Überwachung und Steuerung von medizinischen Geräten, Fahrzeugen, Produktionsanlagen und Kraftwerken. Da viele dieser Anwendungen sicherheitskritisch sind, ist man sehr daran interessiert, schon im Vorfeld bei der Entwicklung – etwa durch Methoden der spieltheoretischen Verifikation – Fehlerquellen auszuschließen.

Spiele $G^{**}(A)$ und $G_p^{**}(B)$ aus Kapitel 3, $\tilde{G}(A)$ und $\tilde{G}_p(B)$ aus Kapitel 4 und $G^{\mathcal{B}}(A)$ und $G_p^{\mathcal{B}}(C)$ aus Kapitel 5. Der gemeinsame Grundtyp dieser Spiele sind die *unendlichen Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information*[2] aus Kapitel 2.1.

In Kapitel 2.3 wird das *Determiniertheitsaxiom* eingeführt. Dieses besagt, daß gewisse mathematische Spiele immer determinieren (d.h. es gibt stets eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler). Das Determiniertheitsaxiom ist nicht verträglich mit dem so elementar erscheinenden *Auswahlaxiom* [☞ Lemma 2.3.4]. Das Auswahlaxiom besagt, daß es für jedes System nicht-leerer Mengen möglich ist, aus jeder Menge dieses Systems ein Element auszuwählen. Allerdings ist das Determiniertheitsaxiom verträglich mit dem schwächeren *abzählbaren Auswahlaxiom* [☞ Lemma 2.3.6]. Dieses garantiert die Auswahl von Elementen für abzählbare Mengensysteme. Um Inkonsistenzen zu vermeiden, muß man also stets darauf achten, das Determiniertheitsaxiom nicht zusammen mit dem vollen Auswahlaxiom zu verwenden.

Bevor jedoch auf diese Zusammenhänge in Kapitel 2.3 näher eingegangen wird, sollen hier zunächst in den Kapiteln 2.1 und 2.2 die nachfolgend immer wieder benötigten grundlegenden spieltheoretischen Begriffe eingeführt werden.

2.1 Unendliche Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information

Die Grundvariante eines unendlichen Zwei-Personenspieles mit perfekter Information sieht wie folgt aus:

Definition 2.1.1. (Das Spiel G(A))
Sei X eine beliebige Menge. Zu einer beliebigen Teilmenge $A \subset X^\omega$ definiert man

[2] **Unendliche Zwei-Personen-Spiele mit perfekter Information:** Die Spiele heißen „unendlich“, da unendlich viele Spielzüge gemacht werden. Sie heißen „mit perfekter Information“, da die Spieler jederzeit über alle gemachten Spielzüge im Bilde sind. Dies wäre z.B. nicht der Fall, wenn die Spieler einige ihrer Züge verdeckt oder gleichzeitig abgäben.

das **Spiel G**(A) wie folgt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
I: & k_0 \arrow[dr] & & k_2 \arrow[dr] & & k_4 \arrow[dr] & \\
II: & & k_1 \arrow[ur] & & k_3 \arrow[ur] & & \dots
\end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd – Spieler I spielt ein $k_0 \in X$, Spieler II spielt eine $k_1 \in X$, Spieler I spielt ein $k_2 \in X$, Spieler II spielt ein $k_3 \in X$ u.s.w.. Sei nun $f = (k_0, k_1, \dots) \in X^\omega$ – man nennt f auch die **Spielfolge** oder **Partie**. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

$$f \in A.$$

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. A nennt man dabei auch die **Gewinnmenge**. Hat die Gewinnmenge eine Eigenschaft $\underline{E} \subset \mathbf{P}(X)$ (etwa A offen, abgeschlossen, $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n(X)$ für einen polnischen Raum $X\dots$), so sagt man auch: **das Spiel G**(A) **hat die Eigenschaft** $\underline{E}$ oder bezeichnet $\mathrm{G}(A)$ als ein $\underline{E}$**-Spiel**.

Ein solches Spiel bezeichnet man auch als **unendliches Zwei-Personen-Spiel mit perfekter Information**, da es nicht nach endlich vielen Spielzügen endet und jeder der beiden Spieler zu jedem Zeitpunkt die komplette Information darüber hat, wie der bisherige Spielverlauf aussieht – insbesondere wie der andere Spieler gespielt hat.

Definition 2.1.2. ((Gewinn-)Strategie für I)
Eine Strategie für Spieler I ist eine Funktion

$$\sigma: \{s \in X^{<\omega} \mid \mathrm{lng}(s) \text{ ist gerade}\} \longrightarrow X\,.$$

Statt $\sigma(s)$ schreiben wir auch kurz σs. Man sagt, Spieler I **spielt nach der Strategie** σ, falls gilt:

$$k_0 = \sigma()$$
$$k_2 = \sigma(k_0, k_1)$$
$$k_4 = \sigma(k_0, k_1, k_2, k_3)$$
$$\dots$$

Die $k_0, k_2, k_4 \ldots$ nennt man dann auch **σ-gespielt**. Falls Spieler I nach der Strategie σ spielt, ist die Spielfolge bereits festgelegt durch σ und $p := (k_1, k_3, k_5, \ldots)$ und wird mit $\sigma * p$ bezeichnet.

σ ist eine **Gewinnstrategie für I**, falls

$$\forall\ p \in \omega^{<\omega}\ (\sigma * p \in A).$$

Analog definiert man (Gewinn-)Strategien für Spieler II:

Definition 2.1.3. ((Gewinn-)Strategie für II)
Eine Strategie für Spieler II ist eine Funktion

$$\tau :\ \{s \in X^{<\omega} \mid \mathrm{lng}(s) \text{ ist ungerade}\} \longrightarrow X\ .$$

Statt $\tau(s)$ schreiben wir auch kurz τs. Man sagt, Spieler II **spielt nach der Strategie** τ, falls gilt:

$$k_1 = \tau(k_0)$$
$$k_3 = \tau(k_0, k_1, k_2)$$
$$k_5 = \tau(k_0, k_1, k_2, k_3, k_4)$$
$$\ldots$$

Die $k_1, k_3, k_5 \ldots$ nennt man dann auch **τ-gespielt**. Falls Spieler II nach der Strategie τ spielt, ist die Spielfolge bereits festgelegt durch τ und $q := (k_0, k_2, k_4, \ldots)$ und wird mit $q * \tau$ bezeichnet.

τ ist eine **Gewinnstrategie für II**, falls

$$\forall\ q \in \omega^{<\omega}\ (q * \tau \in A^c).$$

2.2 Banach-Mazur-Spiele

Die Banach-Mazur-Spiele sind spezielle unendlichen Zwei-Personenspiele mit perfekter Information. Da die Spieler in ihnen topologische Objekte (z.B. offene Basismengen) spielen, zählen sie zu den topologischen Spielen. Die Grundvariante der Banach-Mazur-Spiele sieht wie folgt aus [3]:

[3] **Banach-Mazur-Spiel:** Der polnische Mathematiker Stanisłav Mazur (1905–1981) entwickelte 1935 folgendes Spiel: Zu einer beliebigen vorgegebenen Teilmenge A des Einheitsintervalls

Definition 2.2.1. (Das Spiel BM(X, A))
Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum. Zu einer beliebigen Teilmenge $A \subset X$ definiert man das **Banach-Mazur-Spiel BM**(X, A) wie folgt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
I: & U_0 \arrow[dr] & & U_1 \arrow[dr] & & U_2 \arrow[dr] & \\
II: & & V_0 \arrow[ur] & & V_1 \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd offene nicht-leere Mengen U_n und $V_n \subset X$ wobei $U_n \supset V_n \supset U_{n+1}$. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

$$\bigcap_{n<\omega} U_n \cap A \neq \varnothing \text{ oder gleichbedeutend: } \bigcap_{n<\omega} V_n \cap A \neq \varnothing$$

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**.

Falls klar ist, in welchem Raum X gespielt wird, bezeichnet man das Spiel auch einfach mit **BM**(A).

Die topologischen Spiele $\mathrm{G}^{**}(A)$ und $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ aus Kapitel 3 sowie $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ und $\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$ aus Kapitel 4 werden weiter unten für Teilmengen A des Baire-Raumes bzw. Teilmengen B von $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ (im Falle von $\mathrm{G}_p^{**}(B)$) und Teilmengen B von $\mathcal{N} \times \lambda^\omega$ für eine unendliche Ordinalzahl λ (im Falle von $\mathrm{G}_p^{**}(B)$) mit $A = \mathrm{p}(B)$ definiert. Sie lassen sich auch als Varianten dieses Grundtypes formulieren. Beispielsweise entsprechen in dem Spiel $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ [☞ Definietion 4.5.1] die von I gespielten endlichen Sequenzen $u_n \in \omega^{<\omega}$ offenen Basismengen $U_n := O_{u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n} \subset \omega^\omega$ und die von II gespielten natürlichen Zahlen k_n entsprechen den offenen Mengen $V_n := \bigcup_{u(0)>k_n} O_{u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_{n-1}{}^\frown u} \subset \omega^\omega$.

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ spielen Spieler I und Spieler II abwechselnd Intervalle I_n und $J_n \subset [0,1]$ wobei $I_n \supset J_n \supset I_{n+1}$. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

$$\bigcap_{n<\omega} I_n \cap A \neq \varnothing \text{ oder gleichbedeutend: } \bigcap_{n<\omega} J_n \cap A \neq \varnothing$$

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. Die unter 2.2.1 gegebene Definition ist eine Verallgemeinerung dieses Spiels für beliebige topologische Räume von John C. Oxtoby (1910–1991).

2.3 Determiniertheit und Auswahl

Die Determiniertheit von Spielen in Abhängigkeit von ihrer Gewinnmenge ist ein entscheidendes Thema in der Spieltheorie. Dabei beziehen wir uns mit dem Begriff *Determiniertheit* stets auf die in Kapitel 2.1 defnierten Spiele $\mathrm{G}(A)$ für eine Teilmenge $A \subset \omega^\omega$. Reden wir über die Determiniertheit von anderen Spielen, so gehen wir davon aus, daß diese auf den Grundtyp $\mathrm{G}(A)$ zurückgeführt werden können (bei einem Spiel, in dem endliche Sequenzen natürlicher Zahlen gespielt werden: etwa durch die Kodierung dieser Sequenzen in natürliche Zahlen).

Definition 2.3.1. ($\mathbf{G}(A)$ determiniert)
Sei $A \subset X^\omega$. Das Spiel $\mathrm{G}(A)$ heißt **determiniert**, falls einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat.

Definition 2.3.2. (Determiniertheitsaxiom AD)
Das **Determiniertheitsaxiom AD** besagt, daß für jedes $A \subset \omega^\omega$ das zugehörige Spiel $\mathrm{G}(A)$ determiniert ist[4].

Das Auswahlaxiom wird manchmal auch als *volles Auswahlaxiom* bezeichnet, um den Unterschied zu schwächeren Formen der Auswahl deutlich zu machen. Das volle Auswahlaxiom ist wie folgt definiert:

Definition 2.3.3. (Auswahlsaxiom AC)
Das **Auswahlsaxiom AC** besagt, daß für jede Familie S von Mengen mit $\varnothing \notin S$ eine Auswahlfunktion

$$f:\ S \longrightarrow \bigcup S$$

[4]**Determiniertheitsaxiom:** 1962 von Jan Mycielski und Hugo Steinhaus in ihrem Aufsatz *„A mathematical axiom contradicting the axiom of choice“* (☞ [MS62]) formuliert als „Axiom of Determinateness“: „Every set of reals is determined“ (☞ auch [Ste65]). Unter der Annahme von **AD** läßt sich zeigen, daß jede Menge reeller Zahlen *lebesgue-meßbar* ist und die *Baire-Eigenschaft* sowie die *Perfekte-Mengen-Eigenschaft* besitzt (☞ etwa [Jec03, 33.]). Diese Resultate aus dem Jahr 1964 waren ursprünglich der Hauptanreiz für eine Beschäftigung mit **AD**. Nachdem Robert M. Solovay gezeigt hatte, daß $\aleph_1$ unter der Annahme von **AD** eine meßbare Kardinalzahl ist, richtete sich dann die Aufmerksamkeit auf das Verhältnis zwischen **AD** und *großen Kardinalzahlen* (☞ etwa [Kan03, 28.]).

mit $\forall\, X \in S\ (f(X) \in X)$ existiert[5].

Das Determiniertheitsaxiom **AD** und das volle Auswahlaxiom **AC** sind nicht miteinander verträglich:

Lemma 2.3.4. (Inkonsistenz von AD mit AC)
Wenn **AC** *gilt, dann gibt es ein $A \subset \omega^\omega$ so, daß das zugehörige Spiel* $\mathrm{G}(A)$ *nicht determiniert ist.*

Beweis. Seien $\{\sigma_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ und $\{\tau_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ die Mengen der Strategien für Spieler I bzw. II (in Spielen $\mathrm{G}(A)$ mit $A \subset \mathcal{N}$ beliebig). Dann konstruiert man die Mengen

$$X := \{x_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$$
$$Y := \{y_\alpha \mid \alpha < 2^{\aleph_0}\}$$

wie folgt:
Für gegebene $\{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$ und $\{y_\xi \mid \xi < \alpha\}$ wähle man mit Hilfe von **AC** ein $y_\alpha := \sigma_\alpha * b \notin \{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$ für ein $b \in \mathcal{N}$ (solch ein y_α existiert, da die Kardinalität von $\{\sigma_\alpha * b \mid b \in \mathcal{N}\}$ gleich $2^{\aleph_0} > \alpha$ ist). Danach wählt man ein $x_\alpha := a * \tau_\alpha \notin \{y_\xi \mid \xi \leq \alpha\}$ (dies existiert aus demselben Grund, wie das y_α).

1) Es gilt $X \cap Y = \varnothing$: Angenommen es gibt ein $z \in X \cap Y$ – etwa

$$z = y_\alpha = \sigma_\alpha * b \notin \{x_\xi \mid \xi < \alpha\} \text{ und}$$
$$z = x_{\alpha'} = a * \tau_{\alpha'} \notin \{y_\xi \mid \xi \leq \alpha'\}.$$

Wegen $z = x_{\alpha'} \notin \{x_\xi \mid \xi < \alpha\}$ gilt dann $\alpha' \geq \alpha$ und wegen $z = y_\alpha \notin \{y_\xi \mid \xi \leq \alpha'\}$ gilt $\alpha' < \alpha$ – Widerspruch.

2) Es gilt $\forall\, \alpha < 2^{\aleph_0}\ \exists\, (a,b) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}\ (a * \tau_\alpha \in X \wedge \sigma_\alpha * b \notin X)$: Nach der Konstruktion von X und Y gibt es für jedes $\alpha < 2^{\aleph_0}$ ein $a * \tau_\alpha \in X$ und ein $\sigma_\alpha * b \in Y$. Da $X \cap Y = \varnothing$ muß dann gelten $\sigma_\alpha * b \notin X$.

2) bedeutet, daß weder Spieler I noch II eine Gewinnstrategie für das Spiel $\mathrm{G}(X)$ haben. Das Spiel $\mathrm{G}(X)$ ist also nicht determiniert. $\Diamond$

[5] **Auswahlaxiom:** 1904 durch Ernst Zermelo (1871–1953) in [Zer04] formuliert, um zu zeigen, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.

Eine schwächere Form der Auswahl ist die abzählbare Auswahl:

Definition 2.3.5. (Axiom der abzählbaren Auswahl $\mathbf{AC}^\omega$)
Das **Axiom der abzählbaren Auswahl $\mathbf{AC}^\omega$** besagt, daß für jede abzählbare Familie S von Mengen mit $\varnothing \notin S$ eine Auswahlfunktion

$$f: \ S \longrightarrow \bigcup S$$

mit $\forall\ X \in S\ (f(X) \in X)$ existiert.
Sei M eine Menge. Das **Axiom der abzählbaren Auswahl auf** M $\mathbf{AC}^\omega_M$ besagt, daß für jede abzählbare Familie S von Teilmengen in M mit $\varnothing \notin S$ eine Auswahlfunktion

$$f: \ S \longrightarrow \bigcup S$$

mit $\forall\ X \in S\ (f(X) \in X)$ existiert.

Das Axiom der abzählbaren Auswahl $\mathbf{AC}^\omega_{\mathcal{N}}$ ist verträglich mit dem Determiniertheitsaxiom **AD** – es folgt sogar daraus:

Lemma 2.3.6. (Konsistenz von AD mit $\mathbf{AC}^\omega_{\mathcal{N}}$)
Aus **AD** *folgt* $\mathbf{AC}^\omega_{\mathcal{N}}$.

Beweis. Sei $S = \{X_n \mid n < \omega\}$ eine Familie nicht-leerer Teilmengen in $\mathcal{N}$.

Es gilt $\exists\ f: \ S \longrightarrow \bigcup S \ \ (f(X_n) \in X_n)$**:**
Um dies zu zeigen, wird zunächst das Spiel G_S wie folgt definiert:

Spieler I spielt $(a_0, a_1, a_2, \dots) \in \mathcal{N}$,
Spieler II spielt $(b_0, b_1, b_2, \dots) =: b \in \mathcal{N}$.

Spieler II gewinne genau dann, wenn $b \in X_{a_0}$ gilt. (Mit $A := \{(a_0, b_0, a_1, b_1, \dots) \mid (b_0, b_1, b_2, \dots \in X_{a_0})\}$ läßt sich G_S als Spiel $\mathrm{G}(A)$ der Grundvariante aus Definition 2.1.1 auffassen und es ist klar, daß aus **AD** folgt, daß G_S determiniert ist.)
Spieler I kann für G_S keine Gewinnstrategie haben, da Spieler II zu a_0 nur ein $b \in X_{a_0} \neq \varnothing$ zu spielen braucht, um zu gewinnen (Spieler I hat nach seinem ersten

Zug a_0 keinerlei Einfluß mehr auf den Ausgang des Spieles). Wegen **AD** hat somit Spieler II eine Gewinnstrategie τ. Mit dieser läßt sich dann eine Auswahlfunktion

$$f(X_n) := \langle (n, 0, 0, \ldots) * \tau \rangle_{\mathrm{II}}$$

für S definieren, wobei $\langle (a_0, a_1, a_2, \ldots) * \tau \rangle_{\mathrm{II}} := b$ mit $b \in X_{a_0}$ die Züge von Spieler II in G_S seien. Es gilt $f(X_n) \in X_n$ da τ eine Gewinnstrategie von II für G_S ist. $\diamondsuit$

Um nicht in Widersprüche zu geraten, ist also darauf zu achten, **AD** und **AC** niemals gleichzeitig vorauszusetzen. $\mathbf{AC}^\omega$ ist jedoch für die Untersuchung von Spielen des Typs $\mathrm{G}(A)$ für eine Teilmenge $A \subset \omega^\omega$ in der Regel schon ausreichend. Eine andere schwächere Form der Auswahl ist das Axiom der *abhängigen Auswahl* **DC**. Die abhängige Auswahl folgt aus $\mathbf{AC}^\omega$ und ist ebenfalls verträglich mit **AD** (☞ vgl. Kapitel 4 Fußnote 10). An den Stellen, an denen wir **AD** annehmen, soll dies jedesmal ausdrücklich erwähnt werden.

3 Baire-Kategorie

In diesem Kapitel soll nun die Baire-Kategorie vorgestellt werden. Die Baire-Kategorie läßt sich allgemein für topologische Räume definieren. Die *kleinen* Mengen der Baire-Kategorie sind die *mageren* Mengen. Sie setzen sich aus *nirgends dichten* Mengen zusammen, die sich gleichsam „dünn machen", indem ihre Komplemente offene dichte Mengen enthalten [☞ Kapitel 3.1]. Die nirgends dichten Mengen sind anschaulich gesehen Mengen mit „lauter Löchern", da jede offene Menge das Komplement von A in einer offenen Menge schneidet. Eine magere Menge A ist in dem Sinne nicht notwendig selber eine Menge mit „lauter Löchern", kann aber durch derartige Mengen approximiert werden. Offene Intervalle $(a, b) \neq \varnothing$ in $\mathbb{R}$ sind nie mager [☞ Beispiel 3.1.17]. Diese Eigenschaft motiviert die Definition *Baire'scher Räume* [☞ Definition 3.3]: Ein Raum heißt *Baire'sch*, falls er keine nicht-leeren mageren offenen Mengen enthält.
Beispiel 3.1.10[1] verdeutlicht, daß man die Kleinheitsbegriffe verschiedener Kategorien-Konzepte keinesfalls durcheinanderwürfeln darf – *klein* in dem einen Konzept bedeutet nicht unbedingt auch *klein* in einem anderen.
Die *komageren* Mengen stehen in Baire's Kategorien-Konzept für die *großen* Mengen und werden daher als die Komplemente *magerer* Mengen definiert [☞ Kapitel 3.2]. Daher haben die komageren Mengen die zu den mageren Mengen dualen Eigenschaften. Außerdem wird definiert, wann eine Menge *mager* bzw. *komager in einer offenen Menge* ist.
Eine magere Menge in $\mathbb{R}$ enthält anschaulich eine dichte Menge von „Lücken" – damit ist gemeint, daß keine Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (oder äquivalent dazu: kein offenes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$) mit $a < b$ als Vereinigung einer Folge von Mengen von erster Kategorie dargestellt werden kann [☞ Beispiel 3.1.17]. Um diese Eigen-

[1]Bis auf Beispiel 3.1.10 (aus [Jec03, 11.8]), 3.1.12, 3.1.13 und 3.1.16 stammen die Beispiele in Kapitel 3.1 aus [Kö88, II 6, VI 2]

schaft für topologische Räume zu verallgemeinern, bezeichnet man einen Raum als *Baire'sch*, wenn er keine nicht-leere offene magere Menge enthält [☞ Kapitel 3.3].
Eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset X$ ist mager genau dann, wenn jede Teilmenge von X mager (und komager) in U ist. Die Baire'schen Räume sind daher gerade diejenigen, in denen die *Lokalisierung* der Begriffe *mager* und *komager* sinnvoll ist.
Der Baire'sche Kategoriensatz 3.3.11[2] identifiziert zwei große Klassen topologischer Räume als Baire'sch: die lokal kompakten Räume und die vollständig metrisierbaren Räume.
Für spieltheoretische Charakterisierungen betrachten wir in dieser Arbeit die Baire-Kategorie auf dem *Baireraum*. In Kapitel 3.5 ordnen wir den Baireraum in den allgemeineren topologischen Zusammenhang[3] ein. Unter anderem zeigen wir, daß der Baireraum ein *polnischer* Raum ist und somit nach dem Baire'schen Kategoriensatz 3.3.11 (i) insbesondere ein Baire'scher Raum.
In Kapitel 3.6 wird dann die Baire-Kategorie mittels des Spieles $\mathrm{G}^{**}(A)$ für beliebige Teilmengen A des Baireraumes und mittels $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ $(B \subset \omega^\omega \times \omega^\omega)$ charakterisiert [☞ Theoreme 3.6.4 und 3.6.7][4] . Es zeigt sich, daß eine Teilmenge A des Baireraumes genau dann *klein* im Sinne der Baire-Kategorie ist, wenn Spieler II in dem Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ eine Gewinnstrategie besitzt und *lokal groß* (*groß* in einer offenen Teilmenge des Baireraumes) genau dann, wenn Spieler I eine Gewinnstartegie für das Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ hat [☞ Theorem 3.6.4]. Für Projektionen $A = \mathrm{p}(B)$ einer Menge $B \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ erhält man ein entsprechendes Resultat mit dem Spiel $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ [☞ Theorem 3.6.7].
Kapitel 3 abschließend wird als eine direkte Anwendung von Theorem 3.6.7 ein hinreichendes Kriterium für die Baire-Eigenschaft projektiver Mengen angegeben [☞ Satz 3.6.8][5].

[2] Der Bairesche Kategoriensatz 3.3.11 findet sich in dieser Form etwa in [HM77, II.2], Teil (ii) findet sich auch in [Pre70, 7.3.12].

[3] Bei Begriffen wie *quasikompakt*, *kompakt* und *lokal (quasi-) kompakt* halten wir uns an die Definitionen von [Pre70, 7.1, 7.3]. ☞ etwa [Pre70, 4] für die *Trennungsaxiome* und den Begriff *regulär*.

[4] ☞ etwa [Jec03, III 33] für Theorem 3.6.4. ☞ [Kec77, S. 194] für Theorem 3.6.7.

[5] ☞ [Kec77, S. 193] für Satz 3.6.8.

3.1 Magere Mengen

Die *kleinen* Mengen der Baire-Kategorie sind die *mageren* Mengen. Sie setzen sich aus *nirgends dichten* Mengen zusammen, die sich gleichsam „dünn machen“. Im Gegensatz dazu stehen die *überall dichten* Mengen, die sich gleichsam „breit machen“, indem sie jede offene Menge schneiden:

Definition 3.1.1. (überall dicht)
Eine Menge $A \subset X$ heißt **überall dicht** oder einfach **dicht** genau dann, wenn sie mit jeder offenen nicht-leeren Menge $U \subset X$ einen nicht-leeren Schnitt hat.

Definition 3.1.2. (dicht in einer offenen Menge U)
Eine Menge $A \subset X$ heißt **dicht in** U für eine offene Menge $U \subset X$ genau dann, wenn sie in U dicht bezüglich der Relativtopologie ist.

Beispielsweise liegen die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen: Jede reelle Zahl läßt sich als unendliche Dezimalzahl darstellen. Diese läßt sich als unendliche Reihe im Sinne der Analysis auffassen. Die Partialsummen dieser Reihe sind rationale Zahlen. Also läßt sich jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen approximieren.

Im Gegensatz dazu machen sich die nirgends dichten Mengen gleichsam „dünn“ dadurch, daß ihr Komplement eine offene dichte Menge enthält:

Definition 3.1.3. (nirgends dicht)
Eine Menge $A \subset X$ heißt **nirgends dicht** genau dann, wenn A^c eine offene dichte Menge $G \subset X$ enthält.

Anschaulich erhält man eine *nirgends dichte* Teilmenge $\tilde{Y}$ eines Raumes X, indem man aus einer Teilmenge Y von X iterativ aus jeder X-offenen Menge $U \subset Y$ eine offene Teilmenge V aus U entfernt. Eine nirgends dichte Menge stellt man sich daher am besten als eine Menge „mit lauter Löchern“ vor.

Aus Definition 3.1.3 folgt direkt, daß Teilmengen nirgends dichter Mengen ebenfalls nirgends dicht sind. Die leere Menge $\varnothing$ ist nirgends dicht, da $\varnothing^c = X$ offen und dicht ist. Das Innere A° einer nirgends dichten Menge A ist leer, da A keine offene Menge enthalten kann (eine offene Menge in A könnte ja nicht die dichte

Menge $G \subset A^c$ schneiden). Insbesondere ist A also nicht offen. Außerdem kann ein nirgends dichtes A nicht dicht sein in einer Menge $B \subset X$, die die dichte Menge $G \subset A^c$ schneidet, da A sonst $G \cap B \subset A^c$ schneiden müsste – insbesondere kann A somit nicht dicht sein in X oder einer offenen Teilmenge U von X. Eine abgeschlossene Menge $A \subset X$, die das Komplement einer dichten Menge ist, muß nirgends dicht sein, da ihr Komplement offen und dicht ist. Es gilt also: Ist $\overline{A}^\circ = \varnothing$, so ist A (als Teilmenge der nirgends dichten Menge $\overline{A}$) nirgends dicht. Insbesondere ist A nirgends dicht, falls abgeschlossen und $A^\circ = \varnothing$.

Satz 3.1.4. (Ideal der nirgends dichten Mengen)
Die nirgends dichten Teilmengen eines topologischen Raumes bilden ein Ideal.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, daß die Vereinigung endlich vieler nirgends dichter Mengen nirgends dicht ist. Sei also $\bigcup_{i=1}^n A_i$ die Vereinigung endlich vieler nirgends dichter Teilmengen A_i eines topologischen Raumes X. Dann liegt im Komplement dieser Vereinigung der endliche Schnitt $\bigcap_{i=1}^n G_i$ offener dichter Teilmengen $G_i \subset X$. Endliche Durchschnitte offener dichter Teilmengen sind aber stets selbst wieder offen und dicht. $\diamondsuit$

Satz 3.1.5. (nirgends dicht)
Für eine Menge $A \subset X$ sind äquivalent:

(i) *A nirgends dicht.*

(ii) *$\overline{A}^c$ dicht.*

(iii) *A ist in keiner offenen nicht-leeren Menge $U \subset X$ dicht.*

(iv) *Für jede offene nicht-leere Menge $U \subset X$ gibt es eine offene nicht-leere Menge $V \subset X$ so, daß $V \subset U$ und $V \cap A = \varnothing$.*

(v) *$\overline{A}^\circ = \varnothing$.*

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei A nirgends dicht. Dann ist $\overline{A}^\circ = \varnothing$. $\overline{A}$ enthält also keine offene nicht-leere Menge. Folglich gilt für jede offene nicht-leere Menge $U \subset X$: $U \cap \overline{A}^c \neq \varnothing$. Das heißt, $\overline{A}^c$ ist dicht.
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $\overline{A}^c$ dicht. Angenommen A ist dicht in einer offenen nicht-leeren Menge $U \subset X$. Da $\overline{A}^c$ dicht ist, ist dann $U \cap \overline{A}^c \neq \varnothing$. Da $\overline{A}^c$ und U offen sind,

ist $U \cap \overline{A}^c$ offen. Und da A dicht in U und $U \cap \overline{A}^c$ offen ist, muß $A \cap U \cap \overline{A}^c \neq \varnothing$ gelten. Widerspruch, da $\overline{A}^c \subset A^c$.

Die Annahme war also falsch und es gilt: A ist in keiner offenen nicht-leeren Menge $U \subset X$ dicht.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* Sei U eine offene nicht-leere Teilmenge von X und gelte *(iii)*. Angenommen alle offenen nicht-leeren Mengen $V \subset U$ haben einen nicht-leeren Schnitt mit A. Das heißt A liegt dicht in der offenen nicht-leeren Menge U – im Widerspruch zu *(iii)*.

Die Annahme war also falsch, d.h. es gibt eine offene nicht-leere Menge $V \subset U$ mit $V \cap A = \varnothing$.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* Gelte *(iv)*. Angenommen A ist nicht nirgends dicht. Dann gilt $\overline{A}^\circ \neq \varnothing$. Da $\overline{A}^\circ \subset A$ gilt dann

$$\forall\ V \subset \overline{A}^\circ \text{ offen } \neq \varnothing\ (V \cap A \neq \varnothing)$$

und da $\overline{A}^\circ$ offen ist, widerspricht dies *(iv)*.

Die Annahme war also falsch und A ist somit nirgends dicht.

(v) $\Leftrightarrow$ *(ii)* In $\overline{A}$ ist keine offene Menge enthalten genau dann, wenn sich jede offene Menge mit $\overline{A}^c$ schneidet. $\Diamond$

Beispiel 3.1.6. *Der Graph* $\mathrm{G}_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = y\}$ *einer stetigen, reellwertigen Funktion* f *ist eine im euklidischen Raum*[6] $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}^2)$ *nirgends dichte Menge.*

Beweis. Nach Satz 3.1.5 genügt es zu zeigen, daß $\overline{\mathrm{G}_f}$ keine offene Menge enthählt.

Um zu zeigen, daß G_f gleich $\overline{\mathrm{G}_f}$, genügt es zu zeigen, daß $\mathrm{G}_f \supset \overline{\mathrm{G}_f}$. Sei $a = (x,y) \in \overline{\mathrm{G}_f}$ beliebig. Da $\overline{\mathrm{G}_f}$ abgeschlossen ist gibt es dann eine Folge $(a_i)_i = (x_i, y_i)_i$ in G_f, die gegen a konvergiert und es gilt $\lim_i(x_i) = x$ und $\lim_i(y_i) = y$. Da f stetig ist, gilt dann

$$f(x) = \lim_i f(x_i) = \lim_i y_i = y$$

[6]**euklidischer Raum:** ☞ Konventionen S. 146.

und somit muß $a = (x, y)$ in G_f liegen.

Nun genügt es zu zeigen, daß G_f keine offene ϵ-Kugel $\mathrm{K}(a, \epsilon) := \{b \in \mathbb{R} \mid \mathrm{d}^2(a, b) < \epsilon\}$ für $\epsilon > 0$ enthält. Dies ist aber klar, da der Graph G_f von f mit einer ϵ-Kugel $\mathrm{K}(a = (x, y), \epsilon)$ auch die Menge

$$L := \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid x' = x \wedge y - \epsilon < y' < y + \epsilon\} \subset \mathrm{K}(a, \epsilon)$$

enthalten müßte (was nicht geht, da $\epsilon > 0$ und f eine Funktion ist).

Insgesamt ist damit gezeigt, daß $\overline{\mathrm{G}_f}^{\circ} = \varnothing$. Somit ist G_f nach Satz 3.1.5 nirgends dicht. ◊

Eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen kann dicht in einer offenen Menge sein und somit nicht wieder nirgends dicht (Beispiel: Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ ist eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen $\{q\} \subset \mathbb{R}$ aber dicht in $\mathbb{R}$. Nirgends dichte Mengen bilden also i.a. kein σ-Ideal – um ein solches zu erhalten definiert man:

Definition 3.1.7. (mager)
Eine Menge $A \subset X$ heißt **mager in** X oder einfach **mager** genau dann, wenn A als abzählbare Vereinigung $\bigcup_{i \geq 0} A_i$ von nirgends dichten Mengen A_i geschrieben werden kann. Magere Mengen bezeichnet man auch als **von erster Kategorie** und nicht magere Mengen als **von zweiter Kategorie** [7].

Der Begriff *mager* läßt sich wie folgt lokalisieren:

Definition 3.1.8. (mager in einer offenen Menge U)
Sei U eine offene Menge in X, dann heißt eine Menge $A \subset X$ **mager in** U genau dann, wenn $A \cap U$ mager ist. Da U offen ist, ist dies äquivalent dazu, daß $A \cap U$ mager bezüglich der Relativtopologie von U ist.

[7] **mager:** Bei R. L. Baire heißt es in [Bai99] **ensemble de première catégorie** bzw. **ensemble de deuxième catégorie**, korrekt übersetzt also **Mengen von erster Kategorie** bzw. **Mengen von zweiter Kategorie**. Üblich ist aber auch die Kurzform **1. Kategorie** bzw. **2. Kategorie**. Die französische Mathematikergruppe Bourbaki hat vorgeschlagen, die sprachlich etwas schwerfälligen und unanschaulichen Ausdrucksweisen **von 1. Kategorie** und **von 2. Kategorie** fallenzulassen, und stattdessen eine Menge von 1. Kategorie **mager** zu nennen. Der Vorschlag setzte sich aber nicht recht durch, und so sind bis heute beide Bezeichnungsweisen gebräuchlich.

Nirgends dichte Mengen sind also mager – insbesondere die leere Menge. Abzählbare Vereinigungen magerer Mengen sind ebenfalls mager, da eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Vereinigungen von Mengen wieder abzälbar ist. Teilmengen magerer Mengen sind mager – sei etwa $B \subset A$ und A mager, dann ist $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ mit A_i nirgends dicht und somit $B = \bigcup_{i \geq 0} B \cap A_i$ mit $B \cap A_i \subset A_i$ nirgends dicht. Mithin gilt:

Satz 3.1.9. (σ-Ideal der mageren Mengen) *Die mageren Teilmengen eines topologischen Raumes bilden ein σ-Ideal.*

Die mageren Mengen erfüllen also die natürlichen Eigenschaften kleiner Mengen.

Obwohl *mager* wie *Lebesgue-Nullmenge* jeweils für „vernachlässigbar klein“ stehen, läßt sich $\mathbb{R}$ als Vereinigung einer mageren Menge und einer Nullmenge darstellen. Die Kleinheitsbegriffe sind also wohl zu trennen – „klein“ in dem einen Sinne bedeutet nicht automatisch auch „klein“ in einem anderen Sinne:

Beispiel 3.1.10. *Es gibt eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ und eine magere Menge $M \subset \mathbb{R}$ so, daß $\mathbb{R} = N \cup M$ gilt.*

Beweis. Sei $q_1, q_2, \ldots$ eine Aufzählung der rationalen Zahlen. Für jedes $n \geq 1$ und $k \geq 1$ sei $I_{n,k}$ das offene Intervall mit Mittelpunkt q_n von der Länge $\frac{1}{k2^n}$. Sei $D_k := \bigcup_{n \geq 1} I_{n,k}$ und $A = \bigcap_{k \geq 1} D_k$. Da die $I_{n,k}$ offen sind ist dann jedes D_k offen. Außerdem ist jedes D_k auch dicht in $\mathbb{R}$, weil $\mathbb{Q} \subset D_k$ gilt und $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist. Somit ist A^c mager. A ist eine Nullmenge, da $\lambda(D_k) \leq \frac{1}{k}$ und somit $\lambda(A) = 0$ gilt (mit Lebesgue-Maß λ). $\Diamond$

Um eine Anschauung zu bekommen, wie „alltägliche“ magere Mengen aussehen können und auf welche Weise sie sich „dünn machen“, sollen abschließend noch einige weitere Beispiele betrachtet werden.

Beispiel 3.1.11. *Jede höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist mager in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Dies ergibt sich sofort daraus, daß einelementige Teilmengen von $\mathbb{R}$ nirgends dicht in $\mathbb{R}$ sind. Eine einelementige Teilmenge $\{x\}$ von $\mathbb{R}$ ist stets nirgends dicht in $\mathbb{R}$, weil ihr Komplement $\{x\}^c$ offen und dicht in $\mathbb{R}$ ist. $\Diamond$

Beispiel 3.1.12. *Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist mager in $\mathbb{R}$ und die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$ ist nicht mager in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ abzählbar ist, ist $\mathbb{Q}$ nach Beispiel 3.1.11 mager. Da $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ gilt und $\mathbb{R}$ nicht mager ist, ist $\mathbb{I}$ nicht mager. (In Satz 3.3.11 (i) zeigen wir, daß in vollständig metrisierbaren Räumen der Durchschnitt von offenen dichten Teilmengen wieder dicht ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig metrisierbar ist folgt daraus, daß $\mathbb{R}$ nicht mager sein kann, da sonst: $\mathbb{R} = \bigcup_{i<\omega} \underset{\text{nirg. dicht}}{A_i} \Rightarrow \varnothing = \mathbb{R}^c \supset \bigcap_{i<\omega} \underset{\text{off. dicht}}{G_i} \underset{3.3.11\ (i)}{\neq} \varnothing$ – Widerspruch). $\Diamond$

In Beispiel 3.1.11 wurde lediglich benutzt, daß $\mathbb{R}$ keine isolierten Punkte besitzt und das *erste Trennungsaxiom* (je zwei Punkte besitzen Umgebungen, die den jeweils anderen Punkt nicht enthalten [☞ späteres Kapitel 3.3 Formel (3.2)] erfüllt. Mit der Argumentation aus Beispiel 3.1.11 erhält man somit auch:

Beispiel 3.1.13. *Sei X ein topologischer Raum, der das erste Trennungsaxiom erfüllt und keine isolierten Punkte besitzt. Dann ist jede höchstens abzählbare Teilmenge von X mager.*

Beispiel 3.1.14. *Die Vereinigungsmenge G der Graphen aller Polynome f mit rationalen Koeffizienten ist mager im euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. Jedes der Polynome f ist eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion. Nach Beispiel 3.1.6 sind somit die Graphen G_f der Polynome nirgends dicht in $\mathbb{R}^2$. Da die Menge $L := \bigcup_{i<\omega} \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_i]$ der Polynome mit rationalen Koeffizienten abzählbar ist, ist dann $G = \bigcup_{f \in L} \mathrm{G}_f$ als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen eine magere Menge. $\Diamond$

Beispiel 3.1.15. *Sei $A \subset \mathbb{R}$ dicht und die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in A stetig*[8]*. Dann ist die Menge M der Unstetigkeitsstellen von f mager.*

Beweis. Sei M die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Dann läßt sich M schreiben als $M = \bigcup_{n \geq 1} M_n$, wobei eine reelle Zahl x genau dann zu M_n gehöre,

[8] **stetig in $A \subset \mathbb{R}$:** Eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **stetig in** $A \subset \mathbb{R}$, falls f stetig in allen Punkten $x \in A$ ist. Für ein $x \in \mathbb{R}$ heißt f **stetig im Punkt** x, falls $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ (d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon)$.

wenn es eine Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ gibt, die in $\mathbb{R}$ gegen x konvergiert und für die $|f(x_k) - f(x)| > \frac{1}{n}$ für alle $k \geq 1$.
Die M_n sind nirgends dicht (für alle $n \in \mathbb{N}$): Angenommen für ein $n_0 \geq 1$ ist M_{n_0} in $\mathbb{R}$ *nicht* nirgends dicht. Wegen $\overline{A} = \mathbb{R}$ gibt es einen Stetigkeitspunkt $y_0 \in A$ von f, der Berührungspunkt von M_{n_0} (d.h. in M_{n_0} gibt es eine gegen y_0 konvergente Folge) ist. Da f in y_0 stetig ist, gibt es zu $\frac{1}{2n_0}$ ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\ y \in \mathbb{R}\ (|y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(y_0)| < \frac{1}{2n_0}).$$

Da y_0 Berührungspunkt von M_{n_0} ist, gibt es ein $x_0 \in M_{n_0}$ so, daß $|x_0 - y_0| < \delta$. Sei nun (x_k) die oben genannte Folge, die in M_{n_0} gegen x_0 konvergiert (existiert laut Definition von M_{n_0}). Dann gilt für hinreichend großes $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} |f(x_k) - f(x_0)| &\leq \underbrace{|f(x_k) - f(y_0)|}_{<\frac{1}{2n_0}} + \underbrace{|f(y_0) - f(x_0)|}_{<\frac{1}{2n_0}} \\ &< \frac{1}{n_0} \end{aligned}$$

Insgesamt gilt dann für hinreichend großes $k \geq 1$:

$$|f(x_k) - f(x_0)| > \frac{1}{n_0} \text{ und } |f(x_k) - f(x_0)| < \frac{1}{n_0}.$$

Widerspruch – also gibt es kein $n_0 \in \mathbb{N}$, für das M_{n_0} nicht nirgends dicht wäre. Somit ist dann $M = \bigcup_{n\geq 1} M_n$ mit nirgends dichten M_n – also ist M mager. $\Diamond$

Beispiel 3.1.16. *In einem metrischen Raum (X, d) mit nur endlich vielen Elementen ist jede nicht-leere Teilmenge $A \subset X$ und insbesondere X selber von 2. Kategorie.*

Beweis. Dies ergibt sich sofort daraus, daß in einem metrischen Raum X mit nur endlich vielen Punkten jede Singulum-Menge $\{x\} \subset X$ offen ist. $\Diamond$

Allgemeiner gilt (nach der selben Argumentation), daß jede Teilmenge eines topologischen Raumes X, die nur aus isolierten Punkten (d.h. aus Punkten in X, gegen die keine Folge in X konvergiert [☞ Kapitel 4] besteht, von 2. Kategorie ist.

Beispiel 3.1.17. *Sei I ein Intervall (also I gleich $(a, b), (a, b], [a, b)$ oder $[a, b]$ mit $a \lneq b$ in $\mathbb{R}$) des euklidischen Raumes $\mathbb{R}$. Dann ist I von 2. Kategorie in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Der Baire'sche Kategoriensatz [☞ Satz 3.3.11(i)] zeigt, daß in vollständigen metrischen Räumen (wie $\mathbb{R}$) offene Mengen niemals mager sind. Ist I also offen, so kann I nicht mager in $\mathbb{R}$ sein. Ist I abgeschlossen oder halboffen, so enthält es ein offenes Intervall und kann daher ebenfalls nicht mager sein. $\Diamond$

3.2 Komagere Mengen

Die *komageren* Mengen stehen in Baire's Kategorien-Konzept für die „großen" Mengen und werden daher als die Komplemente „kleiner" Mengen definiert. Analog zur Lokalisierung des Begriffes einer *mageren* Mengen wird auch definiert, wann eine Menge *komager in einer offenen Menge* ist:

Definition 3.2.1. (komager in X, komager in $U \subset X$)
Eine Menge $A \subset X$ heißt **komager in** X oder einfach **komager** genau dann, wenn A^c mager ist. Eine Menge $A \subset X$ heißt **komager in** U für eine offene Menge $U \subset X$ genau dann, wenn $U - A$ mager ist – das ist gleichbedeutend damit, daß A^c mager in U ist.

Lemma 3.2.2. (komager in $U \subset X$)
Sei $U \subset X$ offen. Dann ist $A \subset X$ komager in U genau dann, wenn es eine Folge $(G_i)_{i<\omega}$ offener dichter Mengen in X gibt so, daß

$$U \cap A \supset \bigcap_{i<\omega} U \cap G_i$$

gilt.

Beweis. Seien $U \subset X$ offen und $A \subset X$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
A \text{ komager in U } &\Leftrightarrow U \cap A^c \text{ mager} \\
&\Leftrightarrow U \cap A^c = \bigcup_{i<\omega} U \cap A_i \text{ mit } A_i \text{ nirgends dicht} \\
&\Leftrightarrow U \cap A = \bigcap_{i<\omega} U \cap A_i^c \\
&\Leftrightarrow U \cap A \supset \bigcap_{i<\omega} U \cap G_i \text{ mit } G_i \subset A_i^c \text{ offen und dicht.}
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Insbesondere gilt, daß $A \subset X$ genau dann komager ist, wenn A einen abzählbaren Schnitt $\bigcap_{i<\omega} G_i$ offener dichter Teilmengen G_i von X enthält.

In Kapitel 3.1 wurde bereits gezeigt, daß magere Mengen *klein* im Sinne von Kapitel 1.1 sind (d.h. sie bilden ein σ-Ideal). Als Komplemente magerer Mengen verhalten sich die komageren Mengen somit genau so, wie wir es in Kapitel 1.1 von *großen* Mengen gefordert haben: Sie sind abgeschlossen gegenüber Obermengen und abzählbaren Schnitten.

3.3 Baire'sche Räume

Für die spieltheoretischen Untersuchungen werden wir in dieser Arbeit fast ausschließlich den Baire-Raum verwenden. Dieser wird in Abschnitt 3.5 eingeführt und einige seiner grundlegenden Eigenschaften umrissen. Da die Baire-Kategorie jedoch nicht bloß für den Baire-Raum, sondern für allgemeine topologische Räume definiert ist, erscheint eine Einordnung in den allgemeineren Zusammenhang der Topologie angebracht.

In diesem Abschnitt werden die Bair'schen Räume allgemein definiert und einige ihrer grundlegende topologischen Eigenschften vorgestellt. Der Baire'sche Kategoriensatz 3.3.11 identifiziert zwei große Klassen von Topologischen Räumen als Baire'sch: die lokal kompakten und die vollständig metrisierbaren Räume.

Offene (nicht-leere) Intervalle in $\mathbb{R}$ und somit beliebige nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind niemals mager [☞ Beispiel 3.1.17]. Um diese Eigenschaft für topologische Räume zu verallgemeinern definiert man:

Definition 3.3.1. (Baire'scher Raum)
Ein topologischer Raum X heißt **Baire'sch** genau dann, wenn er keine nicht-leere offene magere Menge enthält.

Eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset X$ ist mager genau dann, wenn jede Teilmenge von X mager (und komager) in U ist. Die Baire'schen Räume sind daher gerade diejenigen, in denen die *Lokalisierung* der Begriffe *mager* und *komager* sinnvoll ist.

Lemma 3.3.2. (Baire'scher Raum)
Für einen topologischen Raum X ist äquivalent

(i) *X ist Baire'sch.*

(ii) *Für jede Folge $(D_i)_{i<\omega}$ offener dichter Teilmengen von X ist der Schnitt $\bigcap_{i\geq 0} D_i$ dicht in X.*

(iii) *Jede komagere Menge in X ist dicht.*

(iv) *Für jede Folge $(A_i)_{i<\omega}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit $A_i^\circ = \varnothing$ ist das Innere der Vereinigung $(\bigcup_{i<\omega} A_i)^\circ$ ebenfalls leer.*

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* : Sei X Baire'sch und sei $(D_i)_{i<\omega}$ eine Folge offener nicht-leerer dichter Teilmengen in X. Angenommen $\bigcap_{i<\omega} D_i$ ist nicht dicht in X. Sei etwa $U \subset X$ offen nicht-leer und schnittfremd mit $\bigcap_{i<\omega} D_i$. Dann gilt

$$U = U - \bigcap_{i<\omega} D_i = \bigcup_{i<\omega}(U - D_i)$$

und die $U - D_i$ sind nirgends dicht (laut Definition 3.1.3, denn das Komplement enthält die offene in X dichte Teilmenge D_i). Somit ist U mager und offen – im Widerspruch dazu, daß X als Baire'sch vorausgestzt war.
Also ist obige Annahme falsch, d.h. $\bigcap_{i<\omega} D_i$ ist dicht in X.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* : Sei $A \subset X$ komager und es gelte *(ii)*. Angenommen es gibt eine offene nicht-leere Menge $U \subset X$ mit $U \cap A = \varnothing$. Da A komager ist, gilt laut Lemma 3.2.2: $A \supset \bigcap_{i<\omega} G_i$ für einige $G_i \subset X$ offen und dicht. Wegen $U \cap A = \varnothing$ gilt dann auch

$$U \cap \bigcap_{i<\omega} G_i = \varnothing.$$

Da die G_i offen und dicht sind, ist jedoch $\bigcap_{i<\omega} G_i$ nach *(ii)* dicht – es gilt also

$$U \cap \bigcap_{i<\omega} G_i \neq \varnothing.$$

Widerspruch.
Somit war obige Annahme falsch – es gibt also keine offene nicht-leere Menge $U \subset X$, die A nicht schneidet. Das heißt A ist dicht.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Sei $(A_i)_{i<\omega}$ eine Folge abgeschlossener Teilmengen von X mit $A_i^\circ = \varnothing$ und es gelte (iii). Angenommen $(\bigcup_{i<\omega} A_i)^\circ \neq \varnothing$. Sei etwa $U \subset \bigcup_{i<\omega} A_i$ offen und nicht-leer. Dann gilt für das Komplement

$$(\bigcup_{i<\omega} A_i)^c \text{ nicht dicht.}$$

Andererseits ist aber $\bigcup_{i<\omega} A_i$ mager (da A_i abgeschlossen mit $A_i^\circ = \varnothing$ also A_i^c offen und dicht also A_i nirgends dicht) und somit gilt nach (iii):

$$(\bigcup_{i<\omega} A_i)^c \text{ dicht.}$$

Widerspruch.

Obige Annahme war also falsch und es gilt $(\bigcup_{i<\omega} A_i)^\circ = \varnothing$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sei $U \subset X$ offen nicht-leer und es gelte (iv). Angenommen U ist mager – etwa $U = \bigcup_{n<\omega} A_i$ mit A_i nirgends dicht. Dann ist das Innere des Abschlusses $\overline{A_i}^\circ$ leer für alle A_i. Nach (iv) gilt dann

$$(\bigcup_{i<\omega} A_i)^\circ = \varnothing.$$

Da $U = \bigcup_{i<\omega} A_i$ offen und nicht-leer ist gilt aber auch

$$(\bigcup_{i<\omega} A_i)^\circ \neq \varnothing.$$

Widerspruch.

Obige Annahme war also falsch, es gibt also keine offene magere Menge $U \subset X$ – das heißt X ist Baire'sch. $\Diamond$

Endliche topologische Räume sind immer Baire'sch, da sie nur endlich viele offene Mengen besitzen und Schnitte endlich vieler offener dichter Mengen immer dicht sind. Wichtige Beispiele für Baire'sche Räume sind lokal kompakte Hausdorff-Räume und vollständig metrisierbare Räume – insbesondere die polnischen Räume. Zunächst ist es jedoch notwendig einige weitere topologische Grundbegriffe zu definieren:

Definition 3.3.3. (Hausdorff'scher Raum oder T_2-Raum)
Ein topologischer Raum $(X, \underline{X})$ heißt **Hausdorff'sch** oder **T_2-Raum**, wenn je zwei verschiedene Punkte von X disjunkte Umgebungen besitzen (äquivalent: disjunkte offene Umgebungen besitzen), d.h.:

$$\forall\ x \neq y\ \exists\ U, V \in \underline{X}\ (x \in U \wedge y \in V \wedge U \cap V = \varnothing). \tag{3.1}$$

Die Formel (3.1) nennt man auch die **Hausdorff-Eigenschaft** oder das **zweite Trennungsaxiom** (auch kurz T_2 genannt).

Für den Beweis des Baire'schen Kategoriensatzes in diesem Kapitel spielen für uns neben dem zweiten Trennungsaxiom auch noch das sogenannte **erste** und das **dritte Trennungsaxiom** eine gewisse Rolle. Sei wie oben $(X, \underline{X})$ ein topologischer Raum. Nach dem **ersten Trennungsaxiom** (auch kurz T_1 genannt) haben je zwei unterschiedliche Punkte offene Umgebungen, die den jeweils anderen Punkt nicht enthalten, d.h.:

$$\forall\ x \neq y\ \exists\ U, V \in \underline{X}\ (x \in U \wedge y \in V \wedge x \notin V \wedge y \notin U). \tag{3.2}$$

Das **dritte Trennungsaxiom** (auch kurz T_3 genannt) besagt, daß jede abgeschlossene Menge und jeder Punkt, der nicht in dieser Menge liegt, schnittfremde offene Umgebungen besitzen, d.h.:

$$\forall\ A \text{ abg. } \forall\ x \notin A\ \exists\ U, V \in \underline{X}\ (A \subset U \wedge x \in V \wedge U \cap V = \varnothing). \tag{3.3}$$

Einen Raum, der das erste und dritte Trennungsaxiom erfüllt, nennt man **regulär**.

Lokal kompakte Räume

Der Begriff der **Kompaktheit** ist in der Topologie von zentraler Bedeutung. Dabei werden gewisse Endlichkeitseigenschaften von Überdeckungen gefordert. Auf diese Weise erhält man die **kompakten** bzw. die **lokal kompakten** Räume. Zugrunde liegt diesen Begriffen die für die reelle Analysis wichtige topologische

Eigenschaft, daß man abgeschlossene und beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ durch Überdeckungen charakterisieren kann (Heine-Borel'scher Überdeckungssatz[9]).

Eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen einer Menge X heißt eine **Überdeckung** von X, wenn $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ gilt. Der Bequemlichkeit halber nennt man manchmal auch die Darstellung $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ eine **Überdeckung** von X. Ist I endlich (abzählbar), so heißt die Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ **endlich (abzählbar)**. Ist $(X, \underline{X})$ ein topologischer Raum, $(A_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung von X und sind alle A_i offen (abgeschlossen), so heißt die Überdeckung $(A_i)_{i\in I}$ **offen (abgeschlossen)**. Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Überdeckung einer Menge X, $J \subset I$ und $(A_j)_{j\in J}$ ebenfalls eine Überdeckung von X, so heißt $(A_j)_{j\in J}$ eine **Teilüberdeckung** von $(A_i)_{i\in I}$.

Ein topologischer Raum heißt **quasikompakt**, falls jede offene Überdeckung des Raumes eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Ein quasikompakter T_2-Raum heißt **kompakt**[10]. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt **(quasi-) kompakt**, wenn sie als Unterraum (quasi-)kompakt ist.

In einem quasikompakten Raum $(X, \underline{X})$ läßt sich wie folgt von lokalen auf globale Eigenschaften schließen: Sei $\underline{E} \subset \underline{X}$ eine Eigenschaft von offenen Teilmengen von X so, daß für beliebige offene Teilmengen U, V von X gilt:

$$U, V \in \underline{E} \Rightarrow U \cup V \in \underline{E}.$$

Hat dann X die Eigenschaft $\underline{E}$ **lokal** (d.h. für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U_x von x mit der Eigenschaft $\underline{E}$), dann hat schon der ganze Raum X die Eigenschaft $\underline{E}$. Diese Schlußweise ist deshalb korrekt, weil die Vereinigung

[9] **Heine-Borel'scher Überdeckungssatz:** In der deutschen Literatur nach Émile Borel (1871–1956) und Eduard Heine (1821–1881) benannter Überdeckungssatz, nach dem die kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ gerade die beschränkt und abgeschlossenen sind. Allerdings formulierte und bewies Borel diesen Satz lediglich für abzählbare Überdeckungen und weist in einer Notiz über seine wissenschaftlichen Arbeiten selbst darauf hin, daß H. Lebesgue den Beweis für beliebige Überdeckungen erbracht hat. Daher wird dieser Satz in der französischen Literatur zurecht als Satz von Borel und Lebesgue bezeichnet. (☞ vgl. [Bou98a, IV, 2,2])

[10] **(quasi-)kompakt:** Viele Autoren verwenden den Begriff **kompakt** anstelle von **quasikompakt**. Wir halten uns hier an die Notation von [Pre70] und fordern für **kompakt** zusätzlich noch die Hausdorff-Eigenschaft.

$\bigcup_{x\in X} U_x \supset X$ aller U_x mit jeweils der Eigenschaft $\underline{E}$ eine Überdeckung von X ist. Da X quasikompakt ist, gibt es dazu eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{j=1}^n U_{x_j} \supset X$ die die Eigenschaft $\underline{E}$ auf X überträgt.

Quasikompakte Räume sind alternativ durch folgende Eigenschaft charakterisiert:

Lemma 3.3.4. (quasikompakt)
Für einen topologischen Raum $(X, \underline{X})$ ist äquivalent:

(i) $(X, \underline{X})$ *ist quasikompakt.*

(ii) *In jeder Familie $(A_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Teilmengen von X mit $\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$ gibt es endlich viele Glieder $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ mit $\bigcap_{k=1}^n A_k = \varnothing$.*

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) sind zueinander dual: Die Behauptung, daß der Durchschnitt abgeschlossener Teilmengen $\bigcap_i A_i$ leer ist, ist gleichbedeutend damit, daß $\bigcup_i A_i^c$ gleich X ist, d.h.: daß die Komplemente der abgschlossenen Mengen eine offene Überdeckung von X sind. $\Diamond$

Für den Beweis des Baire'schen Kategoriensatzes 3.3.11 sollen nun schnell noch einige weitere Lemmata bewiesen werden.

Lemma 3.3.5. (hinr. Krit. für abgeschlossen)
Kompakte Teilmengen von T_2-Räumen sind abgeschlossen.

Beweis. Sei X ein T_2-Raum und $K \subset X$ kompakt.

Es genügt zu zeigen: K^c ist offen bzw.: für jedes $y \in K^c$ liegt eine offene Umgebung V_y von y in K^c.

Sei $y \in K^c$ beliebig. Da X ein T_2-Raum ist, gibt es zu jedem $x \in K$ schnittfremde offene Umgebungen O_x von x und V_y^x von y. Es gilt dann $K \subset \bigcup_{x\in K} O_x$ und

$$\bigcup_{x\in K} O_x \cap \bigcap_{x\in K} V_y^x = \varnothing.$$

Da K kompakt ist, gibt es dazu schon eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{i=1}^n O_{x_i} \supset K$ und es gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n O_{x_i} \cap \bigcap_{i=1}^n V_y^{x_i} = \varnothing.$$

Da $\bigcap_{i=1}^n V_y^{x_i}$ eine offene Umgebung von y ist und ganz in K^c liegt, folgt dann die Behauptung. $\Diamond$

Anders als in $\mathbb{R}^n$ reicht in kompakten Räumen die Abgeschlossenheit zur Charakterisierung kompakter Teilmengen aus:

Lemma 3.3.6. (hinr. Krit. für (quasi-)kompakt)
Abgeschlossene Teilmengen von (quasi-)kompakten Räumen sind (quasi-)kompakt.

Beweis. Sei X ein quasikompakter Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $\bigcup_i U_i \supset A$ eine beliebige offene Überdeckung von A. Dann ist

$$\bigcup_i U_i \cup A^c = X$$

eine offene Überdeckung von X. Da X quasikompakt ist existiert dazu eine endliche offene Teilüberdeckung

$$\bigcup_{i=1}^n U_i \cup A^c = X$$

von X. Dann muß $\bigcup_{i=1}^n U_i \supset A$ eine endliche Teilüberdeckung von A zu $(U_i)_i$ sein. Da die offene Überdeckung $(U_i)_i$ beliebig gewählt war, ist A somit quasikompakt.

Da sich die Hausdorff-Eigenschaft auf Teilmengen überträgt, gilt die Aussage analog auch für abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume. $\Diamond$

Lemma 3.3.7. (regulär)
Ein kompakter Raum ist immer auch regulär.

Beweis. Sei X ein kompakter Raum.

X **erfüllt** T_1**:** Ein kompakter (d.h. quasikompakter und Hausdorff'scher) Raum erfüllt immer das erste Trennungsaxiom, weil $T_2 \Rightarrow T_1$ gilt [☞ Formeln (3.1) und (3.2)].

X **erfüllt** T_3**:** Sei $A \subset X$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von X und sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt in X, der nicht in A liegt. Dann gibt es nach T_2

für jeden Punkt $y \in A$ schnittfremde Umgebungen U_y von y und U_x^y von x. Die Vereinigung $\bigcup_{y \in A} U_y$ ist eine offene Überdeckung von A und

$$\bigcup_{y \in A} U_y \cup A^c = X$$

ist eine offene Überdeckung von X. Da X quasikompakt ist gibt es zu dieser Überdeckung schon eine endliche Teilüberdeckung von X:

$$\bigcup_{j=1}^{n} U_{y_j} \cup A^c = X.$$

Mit $U_A := \bigcup_{j=1}^n U_{y_j}$ und $U_x := \bigcap_{j=1}^n U_x^{y_j}$ erhält man so zwei schnittfremde offene Umgebungen von A und x. D.h. X erfüllt T_3. $\Diamond$

Einen Raum, der lokal aussieht wie ein kompakter Raum, nennt man **lokal kompakt**:

Definition 3.3.8. (lokal (quasi-)kompakt, relativ kompakt)
Ein topologischer Raum $(X, \underline{X})$ heißt **lokal quasikompakt**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine quasikompakte Umgebung (d.h. eine quasikompakte Teilmenge, die Umgebung des Punktes ist) besitzt.

Ein lokal quasikompakter T_2-Raum heißt **lokal kompakt**

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \underline{X})$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{A}$ kompakt ist.

In einem lokal kompakten Raum enthält jede Umgebung eines Punktes schon eine kompakte Umgebung dieses Punktes:

Lemma 3.3.9. (lokal kompakt)
In einem lokal kompakten Raum $(X, \underline{X})$ gilt:

$$\forall\ x \in X\ \forall\ U\ \textit{Umgeb. von}\ x\ \exists\ \textit{komp. Umgeb.}\ K\ \textit{von}\ x\ (K \subset U).$$

Beweis. Sei $(X, \underline{X})$ ein lokal kompakter Raum und sei $x \in X$ beliebig mit einer beliebigen offenen Umgebung U von x. Zu x gibt es dann eine kompakte Umgebung K von x. Sei $V := (U \cap K)^\circ$. V ist also eine in K enthaltene X-offene Umgebung von x ($x \in V$, da K komp. Umgebung von x – etwa $x \in G \subset K$ mit G

offen, somit folgt $x \in G \cap U \subset (U \cap K)^{\circ})$. K ist kompakt also nach Lemma 3.3.7 auch regulär – erfüllt also insbesondere T_3. Nun ist $K - V$ abgeschlossen in K und x liegt nicht in $K - V$. Demnach gibt es nach T_3 eine in K offene Umgebung O_{K-V} von der K-abgeschlossenen Menge $K - V$ und eine K-offene Umgebung $H \subset V$ vom Punkt x so, daß $O_{K-V} \cap H = \varnothing$. Sei O_{K-V} etwa gleich $O \cap K$ für $O \subset X$ offen. Dann ist $W := O^c \cap K$ eine K-abgeschlossene Umgebung von x in K (W ist in K eine Umgebung von x, da $H \subset W$ K-offen). Die Menge W ist eine kompakte Umgebung von x in X:

W **ist kompakt:** Da W eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes K ist, ist W nach Lemma 3.3.6 quasikompakt. Die Hausdorff-Eigenschaft überträgt sich von K auf W. Also ist W insgesamt kompakt.

W **ist eine Umgebung von** x **in** X**:** Da W eine Umgebung von x in K ist, gibt es eine in X offene Menge $G \subset X$ mit $x \in G \cap K \subset W \subset V \subset K$. Dann ist $G \cap K \cap V \underset{G \cap V \subset K}{=} G \cap V$ und wegen $G \cap K \subset W$ in W enthalten und eine in X offene Umgebung von x. Es gilt also: W ist ein Umgebung von x in X. $\Diamond$

Nun fehlen nur noch einige Grundbegriffe über metrische Räume, und der Baire'schen Kategoriensatz kann bewiesen werden.

Vollständig metrisierbare Räume

In der Mathematik wird die anschauliche Vorstellung vom „Abstand“ zweier Punkte durch den Begriff der **Metrik** beschrieben. Für eine Menge X ist eine Abbildung $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ in die reellen Zahlen eine Metrik, falls gilt:

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

für alle $x, y, z \in X$. Das Paar (X, d) nennt man einen **metrischen Raum**[11]. Für je zwei Elemente $x, y \in X$ heißt $d(x, y)$ der **Abstand** von x und y.

[11] **metrischer Raum:** Von Maurice Fréchet 1906 in [Fré06] eingeführt (ebenda eine Axiomatisierung des Begriffes der *Konvergenz*).

Beispielsweise ist $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n)$ für $n < \omega$ mit

$$\mathrm{d}^n((x, \ldots, x_n), (y, \ldots, y_n)) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

ein metrischer Raum. $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n)$ heißt der n-dimensionale **euklidische Raum** und die Metrik d^n die zugehörige **euklidische Metrik**.

Die Begriffe Metrik und Topologie stehen miteinander in einem engen Zusammenhang, denn jeder metrische Raum ist gleichzeitig auch ein topologischer Raum. Die offenen ϵ-Kugeln $O_\epsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \epsilon\}$ für Elemente $x \in X$ und reelle $\epsilon > 0$ bilden die Basis einer Topologie auf X. Man nennt diese Topologie auch die **von d induzierte Topologie**.

Umgekehrt läßt sich nicht selten für eine gegebene Topologie $\underline{X}$ auf einer Menge X eine Metrik d auf X angeben, die die Topologie $\underline{X}$ induziert. In diesem Fall nennt man den topololgischen Raum $(X, \underline{X})$ **metrisierbar**. Ist ein Raum metrisierbar, lassen sich also alle topologischen Aussagen wahlweise auch in der Sprache der Metrik formulieren.

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig**, wenn in ihm jede Cauchyfolge konvergiert. Dabei bezeichnet man eine Folge von Punkten $(x_i)_{i \in I}$ in X als **Cauchyfolge**[12], wenn

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 < \omega\ \forall\, n, m > n_0\ (d(x_n, x_m) < \epsilon).$$

Ein topololgischer Raum $(X, \underline{X})$ heißt **vollständig metrisierbar**, wenn es eine Metrik d auf X gibt so, daß d die Topologie $\underline{X}$ induziert und (X, d) vollständig ist. Ein topologischer Raum heißt **separabel**, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Einen separabelen und vollständig metrisierbaren Raum nennt man auch einen **polnischen Raum**[13].

Anschließend soll der Baire'schen Kategoriensatzes für die vollständig metrisierbaren und die lokal kompakten Räume bewiesen werden. Der Beweis für die

[12] **Cauchyfolge:** Benannt nach Augustin Cauchy (1789-1857).

[13] **polnischer Raum:** Äquivalent: Vollständig metrisierbar und mit einer abzählbaren Basis (da für metrische Räume X gilt: X separabel $\Rightarrow$ X hat abzählbare Basis).

vollständig metrisierbaren Räume beruht auf dem sogenannten „Schachtelungsprinzip“ (für den lokal kompakten Fall benötigen wir an entsprechender Stelle die Charakterisieung quasikompakter Räume durch Lemma 3.3.4). Das Schachtelungsprinzip besagt, daß in vollständig metrisierbaren Räumen eine absteigende Folge abgeschlossener Teilmengen, deren Durchmesser gegen null geht, genau ein Element enthält – insbesondere also nicht leer ist.

Für Teilmengen Y eines metrischen Raumes (X, d) definiert man den **Durchmesser** von Y als

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in Y\}.$$

Lemma 3.3.10. (Schachtelungsprinzip)
Sei $(X, \underline{X})$ ein vollständig metrisierbarer Raum und $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ eine absteigende Folge abgeschlossener Teilmengen von X, für die $\operatorname{diam}(A_i)$ gegen 0 geht. Dann ist $\bigcap_{i<\omega} A_i = \{x\}$ und insbesondere:

$$\bigcap_{i<\omega} A_i \neq \varnothing.$$

Beweis. Sei $(x_i)_i$ eine Folge mit $(x_i \in A_i)_{i<\omega}$ (eine solche Folge erhält man bereits mittels $\mathbf{AC}^{\omega}_{X}$). Dann ist $(x_i)_{i<\omega}$ eine Cauchy-Folge, da gilt:

$$d(x_m, x_n) \leq \operatorname{diam}(A_N) \text{ für } n, m \geq N.$$

Da X vollständig ist, konvergiert $(x_i)_{i<\omega}$ gegen ein $x \in X$. Da die A_i abgeschlossen sind ist auch $\bigcap_{i<\omega} A_i$ abgeschlossen und x muß in $\bigcap_{i<\omega} A_i$ liegen. Also gilt $\bigcap_{i<\omega} A_i \neq \varnothing$. Da nun die Durchmesser der A_i gegen null gehen, kann kein weiteres Element $y \in X$ im Schnitt der A_i liegen. Also $\bigcap_{i<\omega} A_i = \{x\}$ $\Diamond$

Baire'scher Kategoriensatz

Die vollständig metrisierbaren und die lokal kompakten Räume sind zwei sehr unterschiedliche Klassen topologischer Räume. Dennoch zeigt der folgende Satz, daß sie beide zur Klasse der Baire'schen Räume gehören. Dies ist auch ein Grund dafür, daß man sich in der Topologie für Baire'sche Räume an sich interessiert (☞ etwa [Bou98b, IX, 5,3]).

Satz 3.3.11. (Baire'scher Kategoriensatz)

(i) Jeder vollständig metrisierbare Raum ist Baire'sch.

(ii) Jeder lokal kompakte Raum ist Baire'sch.

Beweis. (i) Sei X ein vollständig metrisierbarer Raum. Sei $(D_n)_n$ eine beliebige Folge offener dichter Teilmengen in X.

Es ist zu zeigen: $\forall\, O \subset X$ offen, nicht-leer $(O \cap \bigcap_n D_n \neq \varnothing)$.

Sei $U_1 \subset X$ offen und nicht-leer. Dann ist $U_1 \cap D_1 \neq \varnothing$ (da D_1 dicht ist). Sei etwa $x_1 \in U_1 \cap D_1$, d.h. $U_1 \cap D_1$ ist eine offene Umgebung von x_1. Da X metrisch ist, gibt es dann eine abgeschlossene Kugel $U_2 := \overline{O_{\epsilon_2}(x_1)} \subset U_1 \cap D_1$. Dann ist $U_2^\circ \cap D_2 \neq \varnothing$ (da D_2 dicht ist). Sei etwa $x_2 \in U_2^\circ \cap D_2$. Da X metrisch ist, gibt es dann erneut eine abgeschlossene Kugel $U_3 := \overline{O_{\epsilon_3}(x_2)} \subset U_2^\circ \cap D_2$.

Induktiv fortfahrend erhält man so eine absteigende Folge $U_2 \supset U_3 \supset \ldots$ nicht-leerer abgeschlossener Kugeln in X mit Radien $(0 < \epsilon_i < \epsilon_{i-1}/2)_{i>2}$, d.h. $\operatorname{diam}(U_i)$ geht gegen 0, für die gilt:

$$U_n \subset U_{n-1}^\circ \cap D_{n-1} \tag{3.4}$$

für $n \geq 2$. Da wir die U_n für $n \geq 2$ so gewählt haben, daß sie abgeschlossen sind und auch die übrigen Voraussetzungen des Schachtelungsprinzips 3.3.10 erfüllen, gilt dann $\bigcap_{n\geq 2} U_n \neq \varnothing$ und wegen $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ auch:

$$\bigcap_{n\geq 1} U_n \neq \varnothing. \tag{3.5}$$

Wegen (3.4) gilt $U_1 \supset U_2 \supset U_2^\circ \supset U_3 \supset U_3^\circ \supset \ldots$ $(*)$ und somit $\bigcap_{n\geq 1} U_n \underset{(*)}{=} \bigcap_{n\geq 1} U_n^\circ \underset{(3.4)}{\subset} U_1 \cap \bigcap_n D_n$. Wegen (3.5) gilt dann

$$U_1 \cap \bigcap_n D_n \neq \varnothing.$$

Es folgt also die Behauptung.

(ii) Sei X ein lokal kompakter Raum. Sei $(D_n)_n$ eine beliebige Folge offener dichter Teilmengen in X.

Es ist zu zeigen: $\forall\, O \subset X$ offen, nicht-leer $(O \cap \bigcap_n D_n \neq \varnothing)$.

Sei $O_1 \subset X$ offen und nicht-leer. Dann ist $O_1 \cap D_1 \neq \varnothing$ (da D_1 dicht ist). Sei etwa $x \in O_1 \cap D_1$, d.h. $O_1 \cap D_1$ ist eine offene Umgebung von x. Dann gibt es eine kompakte Umgebung K_1 von x (d.h. eine kompakte Menge K_1, die eine offene Umgebung U von x enhält) mit $K_1 \subset O_1 \cap D_1$ (da X lokal kompakt ist und Lemma 3.3.9). Sei

$$O_2 := K_1^\circ.$$

Dann gilt:

$$\overline{O_2} \underset{\text{Def.}}{=} \overline{K_1^\circ} \subset \overline{K_1} \underset{K_1 \text{ abg.}}{=} K_1 \subset O_1 \cap D_1$$

denn K_1 ist als kompakte Teilmenge eines T_2-Raumes abgeschlossen [☞ Lemma 3.3.5]. Dabei ist $\overline{O_2}$ als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes K_1 kompakt [☞ Lemma 3.3.6], d.h. O_2 ist relativ kompakt.

Wendet man die gleiche Überlegung auf O_2 und D_2 an, erhält man eine relativ kompakte offene Umgebung O_3 von x mit $\overline{O_3} \subset O_2 \cap D_2$.
Induktiv fortfahrend ergibt sich so eine absteigende Folge $(O_n)_n$ relativ kompakter offener (nicht-leerer) Umgebungen O_n von x mit

$$\overline{O_n} \subset O_{n-1} \cap D_{n-1} \tag{3.6}$$

für $n \geq 2$. Da für $n \geq 2$ alle $\overline{O_n}$ als abgeschlossene Teilmengen des kompakten Raumes $\overline{O_2}$ aufgefaßt werden können und je endlich viele Glieder der Folge $(O_n)_n$ einen nicht leeren Durchschnitt haben (die Folge ist absteigend), gilt nach Lemma 3.3.4, daß $\bigcap_{n\geq 2} \overline{O_n} \neq \varnothing$ und wegen $\overline{O_1} \supset \overline{O_2} \supset \dots$ auch:

$$\bigcap_{n\geq 1} \overline{O_n} \neq \varnothing. \tag{3.7}$$

Wegen (3.6) gilt $\overline{O_1} \supset O_1 \supset \overline{O_2} \supset O_2 \supset \dots$ $(*)$ und somit $\bigcap_{n\geq 1} \overline{O_n} \underset{(*)}{=} \bigcap_{n\geq 1} O_n \underset{(3.6)}{\subset} O_1 \cap \bigcap_n D_n$. Wegen (3.7) gilt dann

$$O_1 \cap \bigcap_n D_n \neq \varnothing.$$

Es folgt also die Behauptung. $\Diamond$

Der Baire-Raum ω^ω (mit der Topologie, die durch die diskreten Topologien auf den ω induziert wird) ist ein Beispiel für einen nicht lokal kompakten Baire'schen Raum [☞ Kapitel 3.5]. Auch sind Baire'sche Räume nicht unbedingt Hausdorff'sch (Beispiel: der topologische Raum X mit mindestens zwei Punkten und der indiskreten Topologie $\{X, \varnothing\}$ ist Baire'sch jedoch nicht Hausdorff'sch).

3.4 Die Baire-Eigenschaft

Die anschauliche Vorstellung einer „fast offenen“ Menge wird durch den Begriff der *Baire-Eigenschaft* beschrieben:

Definition 3.4.1. (Baire-Eigenschaft)
Sei X ein Baire'scher Raum. Eine Menge $A \subset X$ habe die **Baire-Eigenschaft**, falls es eine offene Menge $U \subset X$ gibt so, daß $A \triangle U$ mager ist. Dazu äquivalent ist, daß $A = U \triangle P$ für eine offene Menge U und eine magere Menge P in X ist (setze $P = A \triangle U$).

Jede magere Menge hat die Baire-Eigenschaft, da sie in diesem Sinne fast leer und die leere Menge offen ist. Offene Mengen haben die Baire-Eigenschaft, da die leere Menge nirgends dicht und somit mager ist.

Ein System $\underline{A}$ von Teilmengen einer Menge X nennt man eine **σ-Algebra**, falls $\underline{A}$ die Menge X enthält und abgeschlossen ist gegenüber Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen, d.h. wenn gilt:

1) $X \in \underline{A}$,

2) $A \in \underline{A} \Rightarrow A^c \in \underline{A}$,

3) $\underline{S} \subset \underline{A}$ abzählbar $\Rightarrow (\bigcup_{S \in \underline{S}} S) \in \underline{A}$.

Damit gilt nun folgendes Lemma:

Lemma 3.4.2. *Die Teilmengen eines topologischen Raumes X, die die Baire-Eigenschaft besitzen, bilden eine σ-Algebra.*

Beweis. **Es ist zu zeigen:** X selber hat die Baire-Eigenschaft und die Teilmengen von X, die die Baire-Eigenschaft besitzen, sind abgeschlossen gegenüber Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen.

X ist offen und hat somit die Baire-Eigenschaft.

Da beliebige (insbesondere abzählbare) Vereinigungen offener Mengen offen sind, überträgt sich die Abgeschlossenheit magerer Mengen gegenüber abzählbaren Vereinigungen direkt auf Mengen mit der Baire-Eigenschaft.

Es bleibt die Abschlußeigenschaft gegenüber der Komplementbildung zu zeigen. Habe $A \subset X$ die Baire-Eigenschaft – etwa $A \triangle U$ mager für ein $U \subset X$ offen. Dann ist auch $A \triangle \overline{U}$ mager:
Zunächst folgt aus U offen, daß $\overline{U} - U$ nirgends dicht ist, da $(\overline{U} - U)^\circ = \varnothing$ gilt und $(\overline{U} - U)^c$ offen aus U offen folgt. Sei etwa $A \triangle \overline{U} = (A \triangle U) \cup B$ mit $B \subset \overline{U} - U$ nirgends dicht. Dann ist $A \triangle \overline{U}$ mager.
Somit hat auch A^c die Baire-Eigenschaft, da $(A^c) \triangle (\overline{U}^c) = ((A \triangle \overline{U})^c)^c = A \triangle \overline{U}$ mager ist und $\overline{U}^c$ offen. ◊

In einem Baire'schen Raum bilden die Mengen mit der Baire-Eigenschaft die kleinste σ-Algebra, die die Borelmengen und die mageren Mengen enthält. Die Baire-Eigenschaft läßt sich für den Baireraum auch gut spieltheoretisch charakterisieren: in Satz 3.6.8 geben wir ein hinreichendes Kriterium für die Baire-Eigenschaft projektiver Mengen an.

3.5 Der Baire-Raum

Der Baireraum ω^ω und der Cantorraum 2^ω werden in der Mengenlehre anstelle der reellen Zahlen untersucht[14]. Die Zuordnung einer reellen Zahl $x \in [0, 1]$ zur Folge $b \in n^\omega$ ihrer Nachkommastellen einer g-adischen Darstellung ist i.a. nicht eindeutig. So bezeichnen bei Dezimaldarstellung die Folgen $0,0999\ldots$ und $0,1000\ldots$ dieselbe reelle Zahl. Diese Uneindeutigkeiten treten weder im Baire- noch im Cantor-Raum auf. Diese Folgenräume haben auf der anderen Seite ganz ähnliche

[14]**Baire- und Cantorraum:** Benannt nach René Baire (1874–1932) bzw. Georg Cantor (1845–1918).

Eigenschaften wie die reellen Zahlen: Wie man eine reelle Zahl durch Angabe von immer mehr Nachkommastellen immer genauer bestimmt, so werden auch Elemente f der Folgenräume durch Angabe von immer längeren Anfangsstücken immer besser approximiert. Dabei werden im Gegensatz zur p-adischen Darstellung einer reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ zwei Folgen $(f(0), f(1), \ldots)$ und $(g(0), g(1), \ldots)$ aus Baire- oder Cantor-Raum wirklich nur dann miteinander identifiziert, wenn sie Glied für Glied übereinstimmen, d.h. $f(n) = g(n)$ für alle $n < \omega$.

Zwei Folgen f und g aus dem Baire- oder Cantor-Raum sind intuitiv ähnlich, wenn sie in einem langen Anfangsstück übereinstimmen. Auf diese Weise erhält man einen Begriff von f **liegt nahe bei** g für zwei Folgen aus dem Baire- oder Cantor-Raum, wie man ihn auch von den reellen Zahlen her kennt. Die mathematische Präzisierung dieser Vorstellung liefert dann Räume, die den reellen Zahlen sehr ähneln, und die zudem für die Untersuchungen in der Mengenlehre besser geeignet sind.

Darüberhinaus übertragen sich aber viele Resultate, die man im Baire-Raum erhält nicht nur auf die reellen Zahlen, sondern zusätzlich auch auf polnische Räume. In der deskriptiven Mengenlehre zeigt man, daß je zwei überabzählbare polnische Räume (insbesondere der Baireraum ☞ Satz 3.5.9 und jeder andere polnische Raum) zueinander *borel-isomorph*[15] sind (☞ etwa [Kec95]).

Ein Modell V von **ZF** enthält mit ω stets natürliche Zahlen im Sinne der Peano'schen Axiome und somit auch den Baire-Raum ω^ω. Dieser ist homöomorph zum Raum der Irrationalzahlen aufgefaßt als Teilraum der reellen Zahlen (☞ etwa [Ale94, 4.6.2]).

Sei $\omega^{<\omega}$ die Menge der endlichen Sequenzen natürlicher Zahlen:

$$\omega^{<\omega} := \bigcup_{n<\omega} \omega^n$$

[15]**borel-isomorph:** Zwei topologische Räume heißen *borel-isomorph*, falls es zwischen ihnen einen *Borel-Isomorphismus* gibt. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *Borel-Isomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} *borel-meßbar* sind. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen heißt *borel-meßbar*, falls für eine Borelmenge $A \subset Y$ ihr Urbild $f^{-1}A$ stets wieder eine Borel-Menge in X ist (☞ etwa [Kec95, 11]).

und $\omega_*^{<\omega}$ die Menge der nicht-leeren endlichen Sequenzen natürlicher Zahlen. Sei $\operatorname{lng}(u)$ die Länge der endlichen Sequenz $u \in \omega^{<\omega}$:

$$\operatorname{lng}(u) := m \text{ für } u = (u(0), \ldots, u(m-1)).$$

Für $u, v \in \omega^{<\omega}$ bedeute $u \prec v$, daß u ein Anfangsstück von v ist:

$$u \prec v :\Leftrightarrow u = (v(0), \ldots, v(\operatorname{lng}(u) - 1))$$

wobei $\operatorname{lng}(u) \leq \operatorname{lng}(v)$ sei – d.h. u ist ein echtes Anfangsstück von v oder u ist gleich v.[16] Ist $f \in \omega^\omega$ und $u \in \omega^{<\omega}$ ein endliches Anfangsstück der unendlichen Sequenz f, schreibt man ebenfalls $u \prec f$.

Für eine unendliche Sequenz $f \in \omega^\omega$ bezeichne $f|_n$ das endliche Anfangsstück von f der Länge n:

$$f|_n := (f(0), \ldots, f(n-1)).$$

Definition 3.5.1. (Baireraum)
Der **Baire-Raum** ist der Raum $\mathcal{N} := \omega^\omega$ aller unendlichen Folgen natürlicher Zahlen mit der Topologie, die durch die offenen Basismengen $O_s := \{f \in \mathcal{N} \mid s \prec f\}$ mit $s \in \omega^{<\omega}$ definiert ist. Die Mengen O_s nennt man auch **elementare offene Teilmengen**. Da der Baireraum $\mathcal{N} = O_{()}$ selber eine elementare offene Menge ist, und das System der elementaren offenen Teilmengen des Baireraumes schnittstabil ist, bilden die elementaren offenen Teilmengen tatsächlich die Basis einer Topologie.

Das ist gerade die Produkttopologie der diskreten Topologien auf den ω.

Nachfolgend werden nun einige elementare topologische Eigenschaften des Baireraumes dargestellt. Außerdem wird der Baireraum als polnischer Raum der Klasse der Baire'schen Räume zugeordnet [☞ Sätze 3.5.9 und 3.5.10].

[16] A. Kechris definiert in [Kec77, S. 192] davon abweichend $u \prec v :\Leftrightarrow \operatorname{lng}(u) \gneq \operatorname{lng}(v) \wedge \forall\, i \leq \operatorname{lng}(v)\ (u(i) = v(i))$ – d.h. v ist ein echtes Anfangsstück von u.

Topologische Eigenschaften

Singleton-Mengen des Baireraumes sind nirgends dicht: Das Komplement einer Singleton-Menge $\{f\} \subset \mathcal{N}$ läßt sich schreiben als $\{f\}^c = \bigcup_{u \not\prec f} O_u$. Also ist $\{f\}^c$ offen. Da jede offene Basismenge O_v des Baireraumes ein $g \neq f$ enthält, gilt $g \in O_u$ für ein $u \not\prec f$ und somit $g \in \{f\}^c$. Also ist $\{f\}^c$ nicht nur offen sondern auch dicht. Die Singleton-Menge $\{f\}$ ist also nirgends dicht.

Der Baireraum selber ist eine offene Basismenge, da er sich schreiben läßt als $\mathcal{N} = O_{()}$. Hingegen läßt sich die leere Menge nicht als offene Basismenge auffassen: Angenommen die leere Menge ist eine offene Basismenge. Gelte etwa $\varnothing = O_u$ für ein $u \in \omega^\omega$. Dann folgt $\neg\exists\ f \in \omega^\omega\ (f \succ u)$ – Widerspruch.

Für die Arbeit im Baireraum spielen die offenen Basismengen eine besondere Rolle. Sie sind nicht nur offen sondern immer auch abgeschlossen und haben einige weitere besondere Eigenschaften:

Lemma 3.5.2. *Je zwei offene Basismengen in $\mathcal{N}$ liegen entweder ineinander oder haben einen leeren Durschnitt - genauer: Seien O_s und O_t offene Basismengen in $\mathcal{N}$ mit $O_s \cap O_t \neq \varnothing$, dann gilt*

$$O_s \subset O_t \text{ oder } O_t \subset O_s.$$

Beweis. Seien O_s und O_t beliebige offene Basismengen des Baireraumes und gelte $O_s \cap O_t \neq \varnothing$. Sei etwa $f \in O_s \cap O_t$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &s \prec f \text{ und } t \prec f \\ \Rightarrow &s \prec t \text{ oder } t \prec s \\ \Rightarrow &O_s \supset O_t \text{ oder } O_t \supset O_s \end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung. ◊

Für zwei beliebige offene Basismengen gilt stets

$$O_s \subset O_t \Leftrightarrow s \succ t.$$

Liegen zwei offene Basismengen O_s und O_t nicht ineinander, schreibt man auch

$$O_s \perp O_t \text{ oder } s \perp t.$$

Lemma 3.5.3. *Die offenen Basismengen des Baireraumes sind auch abgeschlossen.*

Beweis. Das Komplement einer offene Basismenge $O_u \subset \mathcal{N}$ ist offen, da es sich schriebenläßt als $\bigcup_{s \perp u} O_s$. Daher ist O_u abgeschlossen. $\Diamond$

Lemma 3.5.4. *Die nicht-leeren offenen Teilmengen des Baireraumes sind nicht kompakt.*

Beweis. Eine offene Basismenge O_s des Baireraumes ist nicht kompakt, da es zur offenen Überdeckung $(O_{s^\frown(m)})_{m<\omega}$ keine endliche Teilüberdeckung gibt. Somit sind auch beliebige offene Teilmengen U des Baireraumes nicht kompakt, da es für eine beliebige offene Basismenge $O_s \subset U$ zur offenen Überdeckung $(O_{s^\frown(m)})_{m<\omega} \cup U - O_s$ keine endliche Teilüberdeckung von U gibt. $\Diamond$

Insbesondere ist wegen $\mathcal{N} = O_{()}$ der Baireraum nicht kompakt. Außerdem sieht man, daß kompakte Mengen $A \subset \mathcal{N}$ nirgends dicht sind, da $\forall\, O_u\ (O_u \not\subset A)$ gelten muß ($O_u \subset A$ abgeschlossen und A kompakt würde sonst nach Lemma 3.3.6 folgen: O_u kompakt – im Widerspruch zu Lemma 3.5.4).

Eine gegenüber der Kompaktheit schwächere Anforderung stellt man an einen Lindelöf-Raum. Ein topologischer Raum X heißt **Lindelöf-Raum** oder **Lindelöf'sch** genau dann, wenn es zu jeder offenen Überdeckung $\bigcup_{i\in I} U_i$ von X eine abzählbare Teilüberdeckung $\bigcup_{i<\omega} U_i$ gibt. Beispiele sind Räume mit abzählbarer Basis:

Satz 3.5.5. (Lindelöf)
Sei X ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis und $U \subset X$. Dann ist U mit der Relativtopologie ein Lindelöf-Raum. Insbesondere ist jeder topologische Raum mit abzählbarer Basis ein Lindelöf-Raum.

Beweis. Sei das System $\underline{B}$ eine abzählbare Basis der Topologie von X. Sei weiter $(O_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von X.

Es ist zu zeigen: Es gibt eine abzählbare Teilüberdeckung von $(O_i)_{i\in I}$.

Jedes O_i läßt sich darstellen als Vereinigung von Mengen aus $\underline{B}$. Bestehe $\underline{B}^*$ aus allen offenen Basismengen, die zu Darstellung von den O_i benötigt werden. Dann ist $\underline{B}^*$ abzählbar, da $\underline{B}^* \subset \underline{B}$. Zu jedem $B^* \in \underline{B}^*$ läßt sich nun ein $i_{B^*} \in I$ so auswählen, daß $B^* \subset O_{i_{B^*}}$. Dann ist $(O_j)_{j \in J}$ mit $J := \{i_{B^*} \mid B^* \in \underline{B}^*\} \subset I$ eine abzählbare Teilüberdeckung von $(O_i)_{i \in I}$. $\Diamond$

Lemma 3.5.6. *Der Baire-Raum hat eine abzählbare Basis.*

Beweis. Da $\omega^{<\omega}$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ω^n mit $n \in \omega$ abzählbar ist, ist auch die Menge $\{O_u \mid u \in \omega^{<\omega}\}$ der offenen Basismengen des Baire-Raumes abzählbar. $\Diamond$

Daraus ergibt sich nun:

Korollar 3.5.7. *Der Baire-Raum ist ein Lindelöf-Raum.*

Beweis. Nach Lemma 3.5.6 hat der Baire-Raum eine abzählbare Basis und ist somit wegen Satz 3.5.5 Lindelöff'sch. $\Diamond$

Lemma 3.5.8. *Jeder topologische Raum mit einer abzählbaren Basis ist separabel.*

Beweis. Sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Wählt man aus jeder offenen Basismenge B ein x_B (hierzu verwendet man AC^ω), so ist $D = \{x_B \mid B \text{ offene Basismenge}\}$ abzählbar und jede nicht leere offene Menge schneidet sich mit D. $\Diamond$

Satz 3.5.9. *Der Baire-Raum ist polnisch.*

Beweis. **$\mathcal{N}$ ist separabel:** Nach Lemma 3.5.6 und Satz 3.5.8 muß $\mathcal{N}$ separabel sein (dies sieht man auch direkt, da die Teilmenge $\{u^\frown(0,0,0\ldots) \in \mathcal{N} \mid u \in \omega^\omega\}$ dicht in $\mathcal{N}$ und abzählbar ist).

$\mathcal{N}$ ist metrisierbar: Falls die Abbildung $d:\ \omega^\omega \times \omega^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \delta(f(n), g(n)) \qquad\qquad \delta(i,j) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

wohldefiniert ist (d.h. die Reihe $d(f,g)$ konvergiert für beliebige $f, g \in \omega^\omega$), dann definiert sie eine Metrik auf ω^ω. Für beliebige $f, g, h \in \omega^\omega$ gilt nämlich:

1) $d(f,f) = 0$,
   da $\delta(f(n), f(n)) = 0$ gilt,

2) $d(f,g) = d(g,f)$,
   da $\delta(f(n), g(n)) = \delta(g(n), f(n))$ gilt,

3) $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$,
   da $\delta(f(n), h(n)) \leq \delta(f(n), g(n)) + \delta(g(n), h(n))$ gilt.

Dabei ist bei Punkt 3) zu beachten, daß $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}(\delta(f(n), g(n)) + \delta(g(n), h(n)))$ absolut konvergiert und daher beliebig umgeordnet werden kann.

d **ist wohldefiniert:** Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ hat nur nicht-negative Glieder und konvergiert (gegen 1). Wegen $0 \leq \delta(f(n), g(n)) \leq 1$ gilt:

$$\left| \frac{1}{2^{n+1}} \delta(f(n), g(n)) \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Daher bezeichnet man die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ auch als eine **Majorante** von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \delta(f(n), g(n))$. Nach dem **Majorantenkriterium** aus der Analysis konvergiert dann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \delta(f(n), g(n))$ absolut und somit auch im gewöhnlichen Sinne.

Die Metrik d erzeugt die Topologie des Baireraumes: Die Topologie des Baireraumes wird erzeugt von den offenen Basismengen $O_u = \{f \in \mathcal{N} \mid u \prec f\}$ mit $u \in \omega^{<\omega}$. Es genügt also zu zeigen, daß sich jede offene Basismenge O_u eine Darstellung als eine Vereinigung offener ϵ-Kugeln $\mathrm{K}(f, \epsilon_f)$ hat:

$$O_u = \bigcup_f \mathrm{K}(f, \epsilon_f).$$

Sei O_u eine beliebige offene Basismenge und $u = (u(0), \ldots, u(n))$ d.h. $\operatorname{lng}(u) = n + 1$. Wählen wir

$$\epsilon \leq 1 - \sum_{0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}},$$

so gilt:

$$O_u = K := \bigcup_{f \in O_u} \mathrm{K}(f, \epsilon).$$

Es gilt $K \supset O_u$: Weil $\forall\ f \in O_u\ (f \in \mathrm{K}(f,\epsilon) \subset K)$.

Es gilt $K \subset O_u$: Sei $g \in K$ beliebig.

$$\Rightarrow \exists\ f \in O_u\ (g \in \mathrm{K}(f,\epsilon))$$

$$\Rightarrow \exists\ f \in O_u\ (d(f,g) < \epsilon \leq 1 - \sum_{0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}})$$

$$\Rightarrow u \prec g$$

$$\Rightarrow g \in O_u.$$

Somit erzeugt d die Topologie des Baireraumes.

Der metrische Raum $(\mathcal{N}, d)$ ist vollständig: Es ist zu zeigen, daß jede Cauchy-Folge in $(\mathcal{N}, d)$ bezüglich d konvergiert. Sei $(f_i)_i < \omega$ eine beliebige Cauchy-Folge in $(\mathcal{N}, d)$ – das heißt:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N < \omega\ \forall\ i,j \geq N\ (d(f_i, f_j) < \epsilon).$$

Wählt man nun:

$$\epsilon \leq 1 - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^{i+1}},$$

dann gilt

$$\exists\ N < \omega\ \forall\ i,j \geq N\ ((f_i(0), \ldots, f_i(n)) = (f_j(0), \ldots, f_j(n)))$$

Für immer kleiner werdendes ϵ erhalten wir auf diese Weise immer länger werdende Anfangsstücke, die fast allen (allen bis auf endlich vielen) Folgengliedern f_i gemeinsam sind.

Diese immer länger werdenden jeweils fast allen f_i gemeinsamen endlichen Anfangsstücke definieren ein $f \in \mathcal{N}$, gegen das die Cauchy-Folge konvergiert. $\Diamond$

Als metrischer Raum ist der Baire-Raum somit auch Hausdorff'sch: Für zwei beliebige Punkte f, g des Baire-Raumes sind $\mathrm{K}(f, \epsilon_f)$ und $\mathrm{K}(g, \epsilon_g)$ mit $\epsilon_f, \epsilon_g < \frac{1}{2}d(f,g)$ schnittfremde offene Umgebungen von f bzw. g (angenommen $h \in \mathrm{K}(f,\epsilon_f) \cap \mathrm{K}(g, \epsilon_g)$, dann $d(f,h) + d(h,g) \leq \epsilon_f + \epsilon_g < d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$ – Widerspruch).

Der Baire-Raum ist weder endlich (klar) noch lokal kompakt: Angenommen der Baireraum ist lokal kompakt. Das heißt: für jeden Punkt des Baireraumes gibt es eine kompakte Teilmenge, die eine offene Basisumgebung dieses Punktes enthält [☞ Definition 3.3.8]. Diese offene Basisumgebung ist nach Lemma 3.5.3 auch abgeschlossen und somit nach Lemma 3.3.6 als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge selber kompakt. Offene Teilmengen des Baireraumes sind aber niemals kompakt [☞ Lemma 3.5.4].

Wie für alle polnischen Räume gilt nach dem Bairesch'en Kategorienatz 3.3.11 für den Baire-Raum:

Satz 3.5.10. *Der Baire-Raum ist Baire'sch.*

BEWEIS. Der Baire-Raum ist nach Satz 3.5.9 insbesondere vollständig metrisierbar und somit nach Satz 3.3.11 Baire'sch. ◊

Bäume

Ein wichtiges kombinatorisches Hilfsmittel zur Untersuchung von Folgenräumen X^ω wie etwa des Baireraumes ω^ω oder des Cantorraumes 2^ω ist das Konzept von Bäumen. In der deskriptiven Mengenlehre wie auch in der Graphtheorie und etwa in der theoretischen Informatik spielen Konzepte von Bäumen eine grundlegende Rolle.

An dieser Stelle sollen nun Bäume $T \subset X^\omega$ allgemein auf beliebigen nicht-leeren Mengen X definiert werden. In den nachfolgenden Kapiteln gebrauchen wir dieses Baum-Konzept zunächst nur für den Fall $X = \omega$. Im letzten Kapitel, in dem allgemeinere Folgenräume X^ω vorkommen, werden wir dann von den Bäumen auf beliebigen nicht-leeren Mengen X gebrauch machen.

Sei nun $X^{<\omega}$ die Menge der endlichen Sequenzen und $X_*^{<\omega}$ die Menge der nicht-leeren endlichen Sequenzen von Elementen in X. Für $u, v \in X^{<\omega}$ und $f \in X^\omega$ seien die Ausdrücke $u \prec v$, $\mathrm{lng}(u)$, $u \prec f$ und $f|_n$ analog zu den Definitionen für den Baireraum [☞ S. 59].

Für eine beliebige nicht-leere Menge X ist die **Standardtopologie** für den Folgenraum X^ω analog zu der Topologie des Baireraumes definiert. Die offenen Basismengen sind die Teilmengen der Gestalt

$$O_u := \{f \in X^\omega \mid u \prec f\}.$$

Analog zum Baireraum gilt für zwei beliebige offene Basismengen stets $O_s \subset O_t \Leftrightarrow s \succ t$. Liegen zwei offene Basismengen O_s und O_t nicht ineinander, schreibt man auch $O_s \perp O_t$ oder $s \perp t$.

Als einen **Baum** auf einer nicht-leeren Menge X bezeichnet man nun eine Teilmenge $T \subset X^{<\omega}$, die abgeschlossen ist bezüglich Anfangsstücken:

$$u \in T \wedge v \prec u \Rightarrow v \in T.$$

Die Elemente von T heißen auch **Knoten**. Ein **unendlicher Ast** oder **unendlicher Pfad** in T ist eine unendliche Sequenz $f \in X^\omega$ so, daß $f|_n \in T$ für alle $n < \omega$.

Die zu einem Baum T gehörige Teilmenge $[T]$ von X^ω oder auch der **Körper** von T ist die Menge aller unendlichen Pfade in T:

$$[T] := \{f \in X^\omega \mid \forall\, n < \omega\ (f|_n \in T)\}.$$

Einen Knoten $u \in T$, der keine echte Erweiterung $v \succ u$, $v \neq u$ in T besitzt, nennt man einen **endlichen Pfad** oder auch **Blatt** in T. Ein Baum T heißt **blattlos** oder **beschnitten**, falls er keine endlichen Pfade enthält:

$$\forall\, u \in T\ \exists\, v \in T\ (u \prec v \wedge u \neq v).$$

Nicht beschnittene Bäume nennt man auch Bäume **mit Blättern**.

Für eine Teilmenge A des Folgenraumes X^ω sei $T_A \subset \omega^{<\omega}$ die Menge aller endlichen Anfangsstücke von Elementen in A:

$$T_A := \{u \in X^{<\omega} \mid \exists\, f \in A\ \forall\ \ n < \operatorname{lng}(u)(f(n) = u(n))\}.$$

T_A heißt der **Baum der Menge** A.

Durch die Abbildung $[\,\_\,] :\ \{\text{Bäume auf } X\} \longrightarrow \mathbf{P}\,(X^\omega)$ geht für nicht beschnittene Bäume die Information der endlichen Pfade verloren. Für nicht beschnittene Bäume T ist $T_{[T]} \subset T$ daher eine echte Inklusion.

Umgekehrt gilt für die Abbildung $T_{_} : \mathbf{P}(X^\omega) \longrightarrow \{$Bäume auf $X\}$ und für nicht abgeschlossenen Teilmengen $A \subset X^\omega$, daß $[T_A] \supset A$ eine echte Inklusion ist. Da A nämlich nicht abgeschlossen ist, gibt es eine Folge $(g_n)_{n<\omega}$ in A, die gegen ein $f \notin A$ konvergiert. In $[T_A]$ ist nun aber auch f enthalten, da die endlichen Anfangsstücke von f gleichzeitig endliche Anfangsstücke der g_n sind, die in T_A liegen.

Beschränkt man nun die Abbildung $[\ \_\ ]$ auf die Menge der beschnittenen Bäume auf X und die Abbildung $T_{\_}$ auf die abgeschlossenen Teilmengen von X^ω, so ergibt sich eine Bijektion. Die abgeschlossenen Teilmengen des Folgenraumes entsprechen also genau den blattlosen Bäumen:

Lemma 3.5.11. *Die Abbildungen*

$$\{\textit{blattlose Bäume} \subset X^{<\omega}\} \underset{T_{\_}}{\overset{[\ \_\ ]}{\rightleftarrows}} \{\textit{abg. Teilm.} \subset X^\omega\}$$

sind zueinander invers.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $T = T_{[T]}$ für beliebige blattlose Bäume $T \subset X^{<\omega}$ und $A = [T_A]$ für beliebige abgeschlossene Teilmengen A von X^ω.

Für $T \subset X^{<\omega}$ blattloser Baum gilt $T \supset T_{[T]}$: Jedes $u \in X^{<\omega}$, das ein endliches Anfangsstück eines unendlichen Pfades in T ist, liegt in T: Die unendlichen Pfade f in T sind ja gerade dadurch definiert, daß ihre endlichen Anfangsstücke $f|_n$ für alle $n < \omega$ in T liegen.

Für $T \subset X^{<\omega}$ blattloser Baum gilt $T \subset T_{[T]}$: Da T keine endlichen Pfade hat, ist jedes $u \in T$ ein endliches Anfangsstück eines unendlichen Pfades $f \in [T]$. Dann gilt aber $u \in T_{[T]}$.

Für $A \subset X^\omega$ abgeschlossen gilt $A \supset [T_A]$: Für ein $f \in [T_A]$ gilt $f|_n \in T_A$ für alle $n < \omega$. Also kann f beliebig gut durch unendliche Sequenzen $g_n \in A$ mit $f|_n \prec g_n$ approximiert werden. Anders ausgedrückt: es gibt immer eine Folge $(g_n)_n$ in A, die gegen f konvergiert. Da A abgeschlossen ist, muß dann f in A liegen.

Für $A \subset X^\omega$ abgeschlossen gilt $A \subset [T_A]$: Für ein f aus A enthält T_A alle endlichen Anfangsstücke $f|_n$ mit $n < \omega$ von f. Also muß $[T_A]$ auch wieder f enthalten. ◊

Demnach ist eine Menge $A \subset X^\omega$ genau dann abgeschlossen, wenn die Relation $f \in A$ schon durch die endlichen Anfangsstücke von f charakterisiert ist, d.h. genau dann, wenn

$$\forall\ i < \omega\ (f|_i \in T_A) \Rightarrow f \in A.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn $A = [T]$ für einen Baum T auf X gilt.

Eine aufsteigende Folge endlicher Sequenzen $s_0 \prec s_1 \prec s_2 \prec \ldots$ in $X^{<\omega}$ definiert stets eine Cauchyfolge $f_0 \succ s_0, f_1 \succ s_1, f_2 \succ s_2, \ldots$ in X^ω die nach Satz 3.5.9 gegen ein $f \in X^\omega$ konvergiert. In diesem Fall sagen wir dann ebenfalls von der aufsteigenden Folge $(s_n)_{n<\omega}$, daß sie gegen f **konvergiert**.

3.6 Charakterisierung durch Banach-Mazur Spiele

Die Baire-Kategorie soll nun spieltheoretisch charakterisiert werden. Theorem 3.6.4 charakterisiert die Baire-Kategorie mittels der Banach-Mazur-Spiele $\mathrm{G}^{**}(A)$ für beliebige Teilmengen A des Baireraumes. In Theorem 3.6.7 wird dann die Baire-Kategorie mittels der Banach-Mazur-Spiele $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ speziell für sogenannte projektive Teilmengen $A = \mathrm{p}(B)$ des Baireraumes charakterisiert[17].

An dieser Stelle erscheint es daher angebracht den von nun an immer wieder benutzten Begriff der projektiven Menge im Zusammenhang mit den Boldface-Punktklassen einzuführen. Bei dieser Gelegenheit werden auch gleich die analytischen Mengen und die Lightface-Punktklassen definiert, die später für die Definierbarkeitsresultate in Kapitel 4.5 gebraucht werden.

Boldface-Punktklassen

Mit den Boldface-Punktklassen wird eine Systematik für gewisse Teilmengen polnischer Räume eingeführt. Die Boldface-Punktklassen teilen sich ein in die Borel-Hierarchie und die projektive Hierarchie (auch Lusin-Hierarchie).

[17] **Banach-Mazur-Spiele $\mathbf{G}^{**}(A)$ und $\mathbf{G}_p^{**}(B)$:** Die $**$-Notation für diese Varianten des Banach-Mazur-Spieles kommt von J. Mycielski (☞ [Myc64]). Die Notation $_p$ kennzeichnet **projektive** Spiele – auch genannt Spiele **mit Zeugen**.

Die Borel-Hierarchie beginnt mit den offenen Teilmengen und deren Komplementen und wird mittels abzählbarer Vereinigung und Komplementbildung induktiv fortgeführt.

Für jedes $n < \omega$ sind die Klassen $\utilde{\Sigma}^0_n$, $\utilde{\Pi}^0_n$ und $\utilde{\Delta}^0_n$ von Teilmengen polnischer Räume wie folgt definiert[18]:

$$
\begin{aligned}
\utilde{\Sigma}^0_1 &= \text{ Klasse aller offenen Mengen,}\\
\utilde{\Pi}^1_0 &= \text{ Klasse aller abgeschlossenen Mengen,}\\
\utilde{\Sigma}^0_{n+1} &= \text{ Klasse der } A = \textstyle\bigcup_{i<\omega} A_i \text{ für } \utilde{\Pi}^0_n\text{-Mengen } A_i,\\
\utilde{\Pi}^0_n &= \text{ Klasse der Komplemente von } \utilde{\Sigma}^0_n\text{-Mengen in } X,\\
&= \text{ Klasse der } A = \textstyle\bigcap_{i<\omega} A_i \text{ für } \utilde{\Sigma}^0_n\text{-Mengen,}\\
\utilde{\Delta}^0_n &= \utilde{\Sigma}^0_n \cap \utilde{\Pi}^0_n.
\end{aligned}
$$

Die Elemente aus $\utilde{\Sigma}^0_n$ oder $\utilde{\Pi}^0_n$ heißen **Borel-Mengen**. Es ergibt sich eine Hierarchie $\utilde{\Delta}^0_n \subset \utilde{\Sigma}^0_n \subset \utilde{\Delta}^0_{n+1}$ sowie $\utilde{\Delta}^0_n \subset \utilde{\Pi}^0_n \subset \utilde{\Delta}^0_{n+1}$ mit echten Inklusionen (☞ etwa [Jec03, 11, S.140f]). Diese bezeichnet man als die **Borel-Hierarchie**. Die einzelnen Klassen $\utilde{\Sigma}^0_n$, $\utilde{\Pi}^0_n$ und $\utilde{\Delta}^0_n$ bezeichnet man als **Borel-Punktklassen**. Für die Borel-Punktklassen eines polnischen Raumes X schreibt man entsprechend $\utilde{\Sigma}^0_n(X)$, $\utilde{\Pi}^0_n(X)$ und $\utilde{\Delta}^0_n(X)$.

Die Klasse

$$\mathbf{B} := \bigcup_{n<\omega} \utilde{\Sigma}^0_n = \bigcup_{n<\omega} \utilde{\Pi}^0_n$$

ist abgeschlossen gegenüber abzählbaren Vereinigungen, abzählbaren Schnitten und Komplementbildung. ☞ etwa [Mos80, 1D], [Kan03, 3.12, S. 146f] oder [Jec03, 11, S. 140f] zur Definition der Borel-Hierarchie.

Die projektive Hierarchie beginnt mit den analytischen Teilmengen und deren Komplementen und wird mittels Projektionen und Komplementbildung induktiv

[18] **F_σ und G_δ:** Entsprechend der alten Notation der Borel-Hierarchie schreibt man auch G_δ anstatt $\utilde{\Pi}^0_2$ und F_σ anstatt $\utilde{\Sigma}^0_2$ (☞ etwa [KM76, VII.4]). Eine G_δ-Menge ist also ein abzählbarer Schnitt offener Mengen und eine F_σ-Menge eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen.

fortgeführt. Eine Teilmenge A eines polnischen Raumes X heißt **analytisch**, falls A die Projektion einer abgeschlossenen Teilmenge B von $X \times \mathcal{N}$ ist:

$$A = \mathrm{p}(B) := \{f \in X \mid \exists\, g \in \mathcal{N}\ ((f,g) \in B)\}$$

für eine abgeschlossene Teilmenge $B \subset X \times \mathcal{N}$. Das ist äquivalent dazu, daß A das stetige Bild einer Borel-Menge eines polnischen Raumes ist (☞ etwa [Jec03, S. 142]). Also sind die Borel-Mengen und insbesondere die offenen und die abgeschlossenen Teilmengen eines polnischen Raumes analytisch.

Für jedes $n < \omega$ sind die Klassen $\undertilde{\Sigma}^1_n$, $\undertilde{\Pi}^1_n$ und $\undertilde{\Delta}^1_n$ von Teilmengen polnischer Räume wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\undertilde{\Sigma}^1_1 &= \text{ Klasse aller analytischen Mengen,}\\
\undertilde{\Pi}^1_1 &= \text{ Klasse der Komplemente analytischer Mengen,}\\
\undertilde{\Sigma}^1_{n+1} &= \text{ Klasse der Projektionen von } \undertilde{\Pi}^1_n\text{-Mengen in } X \times \mathcal{N},\\
\undertilde{\Pi}^1_n &= \text{ Klasse der Komplemente von } \undertilde{\Sigma}^1_n\text{-Mengen in } X,\\
\undertilde{\Delta}^1_n &= \undertilde{\Sigma}^1_n \cap \undertilde{\Pi}^1_n.
\end{aligned}$$

Die Elemente aus $\undertilde{\Sigma}^1_n$ oder $\undertilde{\Pi}^1_n$ heißen **projektive Mengen** (oder auch **Lusin-Mengen**). Es ergibt sich eine Hierarchie $\undertilde{\Delta}^1_n \subset \undertilde{\Sigma}^1_n \subset \undertilde{\Delta}^1_{n+1}$ sowie $\undertilde{\Delta}^1_n \subset \undertilde{\Pi}^1_n \subset \undertilde{\Delta}^1_{n+1}$ mit echten Inklusionen (☞ etwa [Jec03, 11, S.145]). Diese bezeichnet man als die **projektive Hierarchie** (oder auch **Lusin-Hierarchie**[19]). Die einzelnen Klassen $\undertilde{\Sigma}^1_n$, $\undertilde{\Pi}^1_n$ und $\undertilde{\Delta}^0_1$ bezeichnet man als **projektive Punktklassen** (oder auch **Lusin-Punktklassen**). Für die projektiven Punktklassen eines polnischen Raumes X schreibt man entsprechend $\undertilde{\Sigma}^1_n(X)$, $\undertilde{\Pi}^1_n(X)$ und $\undertilde{\Delta}^1_n(X)$.

Eine projektive Menge A aus $\undertilde{\Sigma}^1_{n+1}(\mathcal{N})$ ist also die Projektion $\mathrm{p}(B)$ einer Menge B aus $\undertilde{\Pi}^1_n(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$:

$$A = \mathrm{p}(B) = \{f \in \mathcal{N} \mid \exists\, g \in \mathcal{N}\ ((f,g) \in B)\}.$$

☞ etwa [Mos80, 1E], [Kan03, 3.12, S. 148f] oder [Jec03, 11, S. 144f] zur Definition der projektiven Hierarchie.

[19]**Lusin-Hierarchie**: Von Nikolai Lusin (1883–1950) und Wacław Sierpiński (1882–1969).

Gelegentlich (etwa für Satz 3.6.8 oder die Definierbarkeitsresultate in Kapitel 4.5) benötigen wir noch das folgende Lemma über die Abschlußeigenschaften der projektiven Punktklassen.

Lemma 3.6.1. (Abschlußeigenschaften)

(i) *Die $\underset{\sim}{\Sigma}^1_n$ sind abgeschlossen gegen stetige Urbilder, abzählbare Vereinigungen (d.h. $\exists$-Quantifizierung über ω), abzählbare Schnitte (d.h. $\forall$-Quantifizierung über ω) und stetige Bilder (insbesondere gegen Projektionen, d.h. $\exists$-Quantifizierung über polnischen Räumen).*

(ii) *Die $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ sind abgeschlossen gegen stetige Urbilder, abzählbare Vereinigungen (d.h. $\exists$-Quantifizierung über ω), abzählbare Schnitte (d.h. $\forall$-Quantifizierung über ω) und Urbilder von Projektionen (d.h. $\forall$-Quantifizierung über polnischen Räumen).*

☞ etwa [Kec95, 37.1].

Banach-Mazur-Spiel ohne Zeugen G$^{**}(A)$

Um eine spieltheoretische Charakterisierung der Baire-Kategorie zu erhalten, definiert man für beliebiges $A \subset \mathcal{N}$ ein Spiel G$^{**}(A)$, in dem Spieler I genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn A komager in einer nicht-leeren offenen Menge ist, und II eine Gewinnstrategie hat genau dann, wenn A mager ist.

Definition 3.6.2. (Banach-Mazur-Spiel ohne Zeugen G$^{**}(A)$)
Zu einer beliebigen Menge $A \subset \mathcal{N}$ definiert man das **Banach-Mazur-Spiel G$^{**}(A)$** wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
I: & u_0 \arrow[dr] & & u_2 \arrow[dr] & & u_4 \arrow[dr] & \\
II: & & u_1 \arrow[ur] & & u_3 \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd – Spieler I spielt eine nicht-leere endliche Sequenz natürlicher Zahlen $u_0 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $u_1 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler I spielt eine nicht-leere endliche Sequenz

$u_2 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $u_3 \in \omega_*^{<\omega}$ u.s.w.. Sei nun $f := u_0{}^\frown u_1{}^\frown u_2{}^\frown \ldots \in \mathcal{N}$. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

$$f \in A.$$

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. A nennt man dabei auch die **Gewinnmenge**.

Die Begriffe **(Gewinn-)Strategie für I (bzw. für II)** und **determiniert** sind für die Spiele $\mathrm{G}^{**}(A)$ analog zu den Definitionen 2.1.2 (bzw. 2.1.3) und 2.3.1 definiert.

Mit einer Kodierung der in $\mathrm{G}^{**}(A)$ gespielten Sequenzen in die natürlichen Zahlen läßt sich dieses Spiel auch als ein Spezialfall der Grundvariante [☞ Definition 2.1.1] auffassen und es gilt:

Lemma 3.6.3. (Determiniertheit)
Falls **AD** *gilt, so sind auch die obigen Spiele* $\mathrm{G}^{**}(A)$ *determiniert.*

Beweis. Kodiert man die in $\mathrm{G}^{**}(A)$ gespielten endlichen Sequenzen natürlicher Zahlen in natürliche Zahlen, so gibt es eine Menge $C \subset \omega^\omega$ so, daß Spieler I (bzw. II) eine Gewinnstrategie in $\mathrm{G}^{**}(A)$ hat genau dann, wenn Spieler I (bzw. II) eine Gewinnstrategie in dem Spiel $\mathrm{G}(C)$ hat. ♢

In dem Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ spielen Spieler I und II also abwechselnd endliche Sequenzen s_i – Spieler I strebt dabei an, daß $f := s_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots$ in A liegt und Spieler II, daß f in A^c liegt. Dadurch läßt sich nun ein Zusammenhang herstellen zwischen den Gewinnstrategien der Spieler I und II in dem Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ und den topologischen Eigenschaften der Menge A bzgl. der Baire-Kategorie:

Theorem 3.6.4. (Charakterisierung durch Spiele ohne Zeugen)
Sei $A \subset \mathcal{N}$*. Dann gilt:*

(i) *I hat Gewinnstrategie in* $\mathrm{G}^{**}(B) \Leftrightarrow A$ *ist komager in einer offenen nicht-leeren Menge* G*.*

(ii) *II hat Gewinnstrategie in* $\mathrm{G}^{**}(B) \Leftrightarrow A$ *ist mager.*

Beweis. $(i) \Leftrightarrow$: Spieler I hat eine Gewinnstrategie für $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ genau dann, wenn es eine endliche Sequenz $s_0 \in \omega_*^{<\omega}$ gibt so, daß Spieler II eine Gewinnstrategie für folgendes Spiel hat: I spielt $s_1 \succ s_0$ nicht-leer, II spielt $s_2 \succ s_1$ nicht-leer, I spielt $s_3 \succ s_2$ nicht-leer etc. und I gewinnt, wenn $f := s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots \in O_{s_0} - A$. Nach Theorem 3.6.4 (ii) hat II eine Gewinnstrategie in diesem Spiel genau dann, wenn $O_{s_0} - A$ mager ist – also A komager in der offenen Menge O_{s_0} ist.

$(ii) \Leftarrow$: Sei A mager. Dann gilt nach Lemma 3.2.2:

$$A^c \supset \bigcap_{i<\omega} G_i$$

mit offnen dichten Mengen $G_i \subset \mathcal{N}$. Der Schnitt endlich vieler offener dichter Mengen ist stets wieder offen und dicht $(*)$. Dann kann II folgendermaßen spielen:

$$
\begin{aligned}
&\quad \text{I spielt beliebiges } s_0 \\
&\Rightarrow O_{s_0} \cap G_0 \neq \varnothing \text{ offen (wegen } G_0 \text{ offen und dicht)} \\
&\Rightarrow \exists\, O_{s_0{}^\frown s_1}\ (O_{s_0{}^\frown s_1} \subset O_{s_0} \cap G_0) \\
&\quad \text{II spielt } s_1 \\
&\quad \text{I spielt beliebiges } s_2 \\
&\underset{(*)}{\Rightarrow} O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_2} \cap G_0 \cap G_1 \neq \varnothing \text{ offen} \\
&\Rightarrow \exists\, O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_2{}^\frown s_3}\ (O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_3} \subset O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_2} \cap G_0 \cap G_1) \\
&\quad \text{II spielt } s_3 \\
&\quad \ldots \\
&\quad \text{I spielt beliebiges } s_{2n} \\
&\underset{(*)}{\Rightarrow} O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n}} \cap G_0 \cap \ldots \cap G_n \neq \varnothing \text{ offen} \\
&\Rightarrow \exists\, O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n}{}^\frown s_{2n+1}}\ (O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n}{}^\frown s_{2n+1}} \subset O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n}} \cap G_0 \cap \ldots \cap G_n) \\
&\quad \text{II spielt } s_{2n+1} \\
&\quad \ldots
\end{aligned}
$$

Das Spielen von $s_1, s_3, \ldots$ in dieser Weise bedeutet für II eine Gewinnstrategie, da

$$s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2{}^\frown \ldots \in \bigcap_{i<\omega} G_i \subset A^c.$$

(ii) $\Rightarrow$: Habe II eine Gewinnstrategie τ.

Gute Sequenz: Eine Sequenz $u := (s_0, s_1, \ldots, s_{2n}, s_{2n+1})$ mit $s_i \in \omega_*^{<\omega}$ für $i = 0, \ldots, 2n+1$ heiße **gut**, falls für alle $i = 0, \ldots, n$ die s_{2i+1} gemäß der Gewinnstrategie τ gespielt wurden. Die leere Sequenz sei definitionsgemäß gut.

Sei nun $f \in A$ beliebig. Dann muß es eine Sequenz $u = (s_0, s_1, \ldots, s_{2n}, s_{2n+1})$ (eventuell $u = ()$) geben mit:

$$\begin{aligned}
&u \text{ gut } \wedge \\
&s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1} \prec f \ \wedge \\
&\neg\exists\ (s_{2n+2}, s_{2n+3})\ (u^\frown(s_{2n+2}, s_{2n+3}) \text{ gut } \ \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+3} \prec f)
\end{aligned}$$

Ansonsten könnte Spieler I gewinnen, obwohl Spieler II mit seiner Gewinnstrategie τ spielt (Widerspruch). Dann gilt $f \in K_u$ mit

$$\begin{aligned}
K_u := \{f' \in \omega^\omega\ |s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1} \prec f' \wedge \\
&\neg\exists\ (s_{2n+2}, s_{2n+3}) \\
&(u^\frown(s_{2n+2}, s_{2n+3}) \text{ gut} \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+3} \prec f')\} \qquad (3.8) \\
= \{f' \in \omega^\omega\ |s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1} \prec f' \wedge \\
&\neg\exists\ (s_{2n+2}, s_{2n+3}) \\
&(s_{2n+3}\ \tau\text{-gesp.} \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+3} \prec f')\} \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

wobei s_{2n+3} „τ-gesp.“ heißt $s_{2n+3} = \tau(u^\frown(s_{2n+2}))$. Damit gilt dann

$$A \subset \bigcup_{u \text{ gut}} K_u.$$

Die Vereinigung ist abzählbar (weil $\omega^{<\omega}$ abzählbar ist). Um zu zeigen, daß A mager ist, genügt es nun zu zeigen, daß die K_u nirgends dicht sind (denn dann ist A als Teilmenge der mageren Menge $\bigcup_u K_u$ mager). Das ist äquivalent dazu, daß die K_u abgeschlossen sind und $K_u^\circ = \varnothing$ gilt (nach Satz 3.1.5 (v)).

Die K_u sind abgeschlossen: Sei K_u wie oben konstruiert mit $u = (s_0, s_1, \ldots, s_{2n}, s_{2n+1})$. Dann läßt sich K_u^c nach (3.9) darstellen als

$$K_u^c = O^c_{(s_0, \ldots, s_{2n+1})} \cup \bigcup_{\substack{(s_{2n+2}, s_{2n+3}) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N} \\ s_{2n+3}\ \tau\text{-gespielt}}} O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1}{}^\frown s_{2n+2}{}^\frown s_{2n+3}}.$$

Also ist K_u^c offen und somit K_u abgeschlossen.

Das Innere der K_u ist leer: Angenommen eine offene Basismenge liegt in K_u:

$$O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1}{}^\frown s_{2n+2}} \subset K_u.$$

Dann gilt für $s_{2n+3} := \tau(u^\frown(s_{2n+2}))$, daß $s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+3} \prec f'$ für ein $f' \in O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1}{}^\frown s_{2n+2}} \subset K_u$ ist. Es gibt also ein $f' \in K_u$ mit:

$$\exists\ (s_{2n+2}, s_{2n+3})\ (s_{2n+3} = \tau(u^\frown(s_{2n+2}) \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+3} \prec f')$$

im Widerspruch zur Definition von K_u.

Also liegt keine offene Menge in K_u, d.h. $K_u^\circ = \varnothing$.

Damit ist die Hinrichtung von (ii) bewiesen. $\Diamond$

Banach-Mazur-Spiel mit Zeugen $\mathbf{G}_p^{**}(B)$

Manchmal ist es nützlich, eine gegenüber der zu charakterisierenden Menge A vereinfachte Gewinnmenge B betrachten zu können [☞ etwa Satz 3.6.8]. Um eine spieltheoretische Charakterisierung der Baire-Kategorie speziell für Teilmengen A des Bairerauems mit $A = \mathrm{p}(B)$ für eine Teilmenge $B \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ zu erhalten, definiert man daher ein Spiel $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ auf B mit der Eigenschaft, daß A komager in einer offenen nicht-leere Menge ist, falls Spieler I eine Gewinnstrategie hat, und daß A mager ist, falls II eine Gewinnstrategie hat.

Definition 3.6.5. (Banach-Mazur-Spiel mit Zeugen $\mathbf{G}_p^{**}(B)$)
Sei $A \subset \mathcal{N}$ und $B \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ und es gelte:

$$A = \mathrm{p}(B).$$

Dann definiert man das **Banach-Mazur-Spiel $\mathbf{G}_p^{**}(B)$** wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
I: & (n_0, u_0) \arrow[dr] & & (n_2, u_2) \arrow[dr] & & (n_4, u_4) \arrow[dr] & \\
II: & & u_1 \arrow[ur] & & u_3 \arrow[ur] & & \ldots
\end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd – Spieler I spielt eine natürliche Zahl $n_0 \in \omega$ und eine nicht-leere endliche Sequenz natürlicher Zahlen $u_0 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler

II spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $u_1 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler I spielt eine natürliche Zahl $n_2 \in \omega$ und eine nicht-leere endliche Sequenz $u_2 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $u_3 \in \omega_*^{<\omega}$ u.s.w.. Sei nun $g = (n_0, n_2, \ldots) \in \mathcal{N}$ und $f = u_0{}^\frown u_1{}^\frown u_2{}^\frown \ldots \in \mathcal{N}$. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

$$(f, g) \in B.$$

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. B nennt man dabei auch die **Gewinnmenge**.
Da Spieler I nicht nur endliche Sequenzen sondern auch Elemente aus ω spielt, die zu einem *Zeugen* $g \in \omega^\omega$ zusammengesetzt werden – wobei Spieler I $(f, g) \in B$ anstrebt – gehört das Spiel $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ zu den Banach-Mazur-Spielen **mit Zeugen**.

Die Begriffe **(Gewinn-)Strategie für I (bzw. für II)** und **determiniert** sind für die Spiele $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ analog zu den Definitionen 2.1.2 (bzw. 2.1.3) und 2.3.1 definiert.

Mit einer Kodierung der in $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ gespielten Sequenzen in die natürlichen Zahlen läßt sich dieses Spiel auch als ein Spezialfall der Grundvariante [☞ Definition 2.1.1] auffassen und es gilt:

Lemma 3.6.6. (Determiniertheit)
Falls **AD** *gilt, so sind auch die obigen Spiele* $\mathrm{G}_p^{**}(B)$ *determiniert.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.6.3. ◊

Für die Mengen A und B aus obiger Definition gilt dann:

Theorem 3.6.7. (Charakterisierung durch Spiele mit Zeugen)
Sei $A \subset \mathcal{N}$ *und und* $A = \mathrm{p}(B)$ *für ein* $B \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. *Dann gilt:*

(i) I hat Gewinnstrategie in $\mathrm{G}_p^{**}(B) \Rightarrow A$ *komager in einer offenen nicht-leeren Menge* G.

(ii) II hat Gewinnstrategie in $\mathrm{G}_p^{**}(B) \Rightarrow A$ *mager.*

Beweis. (i) Habe Spieler I eine Gewinnstrategie σ für das Spiel $\mathrm{G}_p^{**}(B)$. Wegen $A = \mathrm{p}(B)$ hat Spieler I dann eine Gewinnstrategie $\tilde{\sigma}$ für das Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$. Mit

Theorem 3.6.4 (i) folgt dann, daß A komager in einer offenen nicht-leeren Menge G ist.

(ii) Habe II eine Gewinnstrategie τ.

Gute Sequenz: Eine Sequenz $u := (k_0, s_0, s_1, \ldots, k_{2n}, s_{2n}, s_{2n+1})$ mit $s_0 \in \omega_*^{<\omega}$, $s_i \in \omega_*^{<\omega}$ für $i = 1, \ldots, 2n+1$ und $k_{2i} \in \omega$ für $i = 0, \ldots, n$ heiße **gut**, falls für alle $i = 0 \ldots n$ die s_{2i+1} gemäß der Gewinnstrategie τ gespielt wurden. Die leere Sequenz sei definitionsgemäß gut.

Sei nun $(f, g) \in B$ beliebig. Dann muß es eine Sequenz $u = (\underbrace{k_0, s_0}_{I}, \underbrace{s_1}_{II}, \ldots, \underbrace{k_{2n}, s_{2n}}_{I}, \underbrace{s_{2n+1}}_{II})$ (eventuell $u = ()$) geben mit:

$$\begin{aligned}
&u \text{ gut} \wedge \\
&(k_0, \ldots, k_{2n}) = (g(0), \ldots, g(n)) \prec g \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1} \prec f \wedge \\
&\neg\exists\ (k_{2n+2}, s_{2n+2}, s_{2n+3})\ (u^\frown(k_{sn+2}, s_{2n+2}, s_{2n+3}) \text{ gut} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge (k_0, \ldots, k_{2n}, k_{2n+2}) \prec g \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{sn+3} \prec f)
\end{aligned}$$

Ansonsten könnte Spieler I gewinnen, obwohl Spieler II mit seiner Gewinnstrategie τ spielt (Widerspruch). Sei $m := k_{2n+2} := g(n+1)$, dann gilt $f \in M_{(u,m)}$ mit

$$\begin{aligned}
M_{(u,m)} \quad &:= \{f' \in \omega^\omega \mid s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1} \prec f' \wedge \\
&\qquad \neg\exists\ (s_{2n+2}, s_{2n+3}) \\
&\qquad (u^\frown(m, s_{2n+2}, s_{2n+3}) \text{ gut} \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+3} \prec f')\} \qquad (3.10) \\
&= \{f' \in \omega^\omega \mid s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+1} \prec f' \wedge \\
&\qquad \neg\exists\ (s_{2n+2}, s_{2n+3}) \\
&\qquad (s_{2n+3}\ \tau\text{-gesp.} \wedge s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_{2n+3} \prec f')\} \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

wobei s_{2n+3} „τ-gesp.“ heißt $s_{2n+3} = \tau(u^\frown(m, s_{2n+2}))$. Damit gilt dann

$$A \subset \bigcup_{(u,m)} M_{(u,m)}$$

wobei über alle $(u, m) \in \omega^{<\omega} \times \omega$ mit u gut und m wie oben vereinigt wird. Die Vereinigung ist abzählbar (weil $\omega^{<\omega} \times \omega$ abzählbar ist).

Da wir die Mengen $M_{(u,m)}$ ganz ähnlich wie die Menge K_u im Beweis der Hinrichtung von (ii) von Theorem 3.6.4 definiert haben, können wir von nun an analog dazu fortfahren.

Um zu zeigen, daß A mager ist, genügt es (wie im Beweis von Theorem 3.6.4) zu zeigen, daß die $M_{(u,m)}$ nirgends dicht sind (denn dann ist A als Teilmenge der mageren Menge $\bigcup_{(u,m)} M_{(u,m)}$ mager). Das ist äquivalent dazu, daß die $M_{(u,m)}$ abgeschlossen sind und $M^\circ_{(u,m)} = \varnothing$ gilt (nach Satz 3.1.5 (v)).

Die $M_{(u,m)}$ sind abgeschlossen: Sei $M_{(u,m)}$ wie oben konstruiert mit $u = (k_0, s_0, s_1, \ldots, k_{2n}, s_{2n}, s_{2n+1})$ und $m = k_{2n+2} \in \omega$. Dann läßt sich $M^c_{(u,m)}$ nach (3.11) darstellen als

$$M^c_{(u,m)} = O^c_{(s_0,\ldots,s_{2n+1})} \cup \bigcup_{\substack{(s_{2n+2},s_{2n+3})\in\mathcal{N}\times\mathcal{N} \\ s_{2n+3}\ \tau\text{-gespielt}}} O_{s_0{}^\frown\ldots{}^\frown s_{2n+1}{}^\frown s_{2n+2}{}^\frown s_{2n+3}}.$$

Also ist $M^c_{(u,m)}$ offen und somit $M_{(u,m)}$ abgeschlossen.

Das Innere der $M_{(u,m)}$ ist leer: Angenommen eine offene Basismenge liegt in $M_{(u,m)}$:

$$O_{s_0{}^\frown\ldots{}^\frown s_{2n+1}{}^\frown s_{2n+2}} \subset M_{(u,m)}.$$

Dann gilt für $s_{2n+3} := \tau(u^\frown(m, s_{2n+2}))$, daß $s_0{}^\frown\ldots{}^\frown s_{2n+3} \prec f'$ für ein $f' \in O_{s_0{}^\frown\ldots{}^\frown s_{2n+1}{}^\frown s_{2n+2}} \subset M_{(u,m)}$ ist. Es gibt also ein $f' \in M_{(u,m)}$ mit:

$$\exists\ (s_{2n+2}, s_{2n+3})\ (s_{2n+3} = \tau(u^\frown(m, s_{2n+2}) \wedge s_0{}^\frown\ldots{}^\frown s_{2n+3} \prec f')$$

im Widerspruch zur Definition von $M_{(u,m)}$.

Also liegt keine offene Menge in $M_{(u,m)}$, d.h. $M^\circ_{(u,m)} = \varnothing$.

Damit ist (ii) bewiesen. $\Diamond$

Determiniertheit und Baire-Eigenschaft

Nun lassen sich auch Begriffe wie etwa die Baire-Eigenschaft [☞ Definition 3.4.1], die mittels magerer Mengen definiert wurden, gut spieltheoretisch charakterisieren: Der folgende Satz gibt ein hinreichendes Kriterium für die Baire-Eigenschaft projektiver Mengen an.

Satz 3.6.8. (Determiniertheit und Baire-Eigenschaft)
Wenn jede $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n}$-Menge in $\mathcal{N}$ determiniert ist, dann hat jede $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$-Menge in $\mathcal{N}$ die Baire-Eigenschaft.

Beweis. Die Idee für den Beweis besteht darin, die die Baire-Eigenschaft definierenden Begriffe mager und komager für $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$-Mengen in $\mathcal{N}$ auf die Determiniertheit von $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n}$-Mengen in $\mathcal{N}$ zurückzuführen. Dies geschieht mittels des Spieles $\mathrm{G}^{**}_p(B)$. Falls nicht anders erwähnt seien hier alle Mengen in $\mathcal{N}$.

Sei $A \in \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}(\mathcal{N})$ beliebig, $B \in \underset{\sim}{\Pi}^1_{2n}(\mathcal{N} \times \mathcal{N})$ mit $\pi(B) = A$ und es sei jede $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n}$-Menge determiniert (und somit auch jede $\underset{\sim}{\Pi}^1_{2n}$-Menge). Für das Spiel $\mathrm{G}^{**}_p(B)$ hat dann entweder Spieler I oder Spieler II eine Gewinnstrategie. Nach obigem Lemma ist A dann entweder mager und hat somit auch die Baire-Eigenschaft, oder A ist komager auf einer offenen nicht-leeren Menge G. Für den letzteren Fall bleibt also zu zeigen: A hat die Baire-Eigenschaft, d.h.: $\exists \ U$offen $(A-U)\cup(U-A)$ mager.

Sei $\tilde{G} = \bigcup\{O_s \mid A \text{ komager auf } O_s\}$, dann ist $(A-\tilde{G})\cup(\tilde{G}-A)$ mager, da $(A-\tilde{G})$ und $(\tilde{G}-A)$ mager sind:
$\tilde{G} - A$ **mager:**

$$\begin{aligned}
\tilde{G} - A &= \tilde{G} \cap A^c \\
&= (\bigcup_{abzb.} O_s) \cap A^c \\
&= \bigcup_{abzb.} (O_s \cap A^c) \\
&= \bigcup_{abzb.} (\underbrace{O_s - A}_{mager}),
\end{aligned}$$

wobei die Ausdrücke $O_s - A$ mager sind (da A komager in N_s). Die Vereinigung ist endlich, da $s \in \omega^{<\omega}$ und $\omega^{<\omega}$ abzählbar ist.

$A - \tilde{G}$ **mager:** Zunächst muß mit $A \in \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$ auch $(A - \tilde{G}) \in \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$ gelten, weil $\tilde{G}$ offen ist ($\tilde{G}$ offen $\Rightarrow \tilde{G} \in \underset{\sim}{\Sigma}^0_1$ und $\tilde{G}^c \in \underset{\sim}{\Pi}^0_1 \subset \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$, da nun $A \in \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$ und $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{n+1}$ nach Lemma 3.6.1 schnittstabil ist, folgt $A \cap \tilde{G}^c \in \underset{\sim}{\Sigma}^1_{2n+1}$).

Auf $A - \tilde{G}$ treffen nun wieder die Voraussetzungen des obigen Lemmas zu – allerdings kann $A - \tilde{G}$ nicht komager auf einer offenen nicht-leeren Menge U sein, weil sonst $U-(A-\tilde{G})$ und somit auch $U-A$ mager wäre – laut Definition von $\tilde{G}$ gälte dann $U\subset\tilde{G}$. Damit ließe sich folgern $U-(A-\tilde{G})$ mager $\Rightarrow U-(A-U)(=U)$ mager. U ist aber offen und nicht-leer und kann somit nicht mager sein.

Also gilt nach obigem Lemma $A-\tilde{G}$ mager. $\Diamond$

4 σ-Kategorie

In diesem Kapitel sollen unter anderem einige Ergebnisse für das Begriffpaar *höchstens abzählbar* und *perfekt* analog auf die Begriffe *σ-beschränkt* und *superperfekt* übertragen werden.

Der Begriff eines perfekten Raumes ist ein sehr anschaulicher: Ein Raum heißt **perfekt**, wenn er keine *isolierten* Punkte enthält. Dabei bezeichnet man einen Punkt eines Raumes als **isoliert**, falls es eine Umgebung des Punktes gibt, die außer dem Punkt selber keinen weiteren Punkt des Raumes enthält. Ein solcher Punkt ist dann auch im anschaulichen Sinne „isoliert" von den übrigen Punkten des Raumes. Äquivalente Formulierungen für einen Punkt x eines topologischen Raumes X sind:

(i) x ist isoliert.

(ii) x ist kein Häufungspunkt von X.

(iii) $\{x\}$ ist offen in X.

(iv) Es gibt keine Folge $(y_n)_n$ in X, die gegen x konvergiert (☞ S. 12, 20).

Dabei bezeichnet man einen Punkt x als einen **Häufungspunkt** von X, falls jede Umgebung von x einen Punkt $y \neq x$ aus X enthält. Dazu äquivalent ist, daß x mit Punkten $y \neq x$ aus X approximiert werden kann.

Eine Teilmenge eines Raumes heißt **perfekt** , falls sie ein perfekter Raum und zusätzlich abgeschlossen ist.

Zunächst werden in Kapitel 4.1 die kompakten Teilmengen des Baireraumes charakterisiert als abgeschlossen und überall endlich verzweigt [☞ Satz 4.1.2]. Diese Charakterisierung der kompakten Mengen dient dann im späteren Kapitel 5.2

als Vorlage für den allgemeineren Begriff der $\mathcal{B}$-nirgends dichten Teilmengen [☞ Definition 5.2.1].

In Kapitel 4.2 wird der Kleinheits-Begriff der *σ-Beschränktheit* eingeführt. Laut Satz 4.2.2 bilden die σ-beschränkten Mengen ein σ-Ideal – verhalten sich also wirklich wie *kleine* Mengen. Bis auf die leere Menge gibt es im Baireraum keine offene Menge, die σ-beschränkt ist [☞ Satz 4.2.3]. Das ist eine weitere Gemeinsamkeit der σ-beschränkten mit den mageren Teilmengen des Baireraumes. Die Charakterisierung der σ-beschränkten Mengen in Satz 4.2.4 (*ii*) als Teilmengen σ-kompakter Mengen dient dann im späteren Kapitel 5.2 als Vorlage für den allgemeineren Begriff der $\mathcal{B}$-mageren Teilmengen [☞ Definition 5.2.2].

Kapitel 4.3 führt mit dem Begriff der *superperfekten* (und nicht-leeren) Teilmenge eine Beschreibung für *relativ große* Teilmengen des Baireraumes ein. Jedoch sind nicht alle superperfekten Teilmengen des Baireraumes *groß* im Sinne der σ-Kategorie (d.h. Komplemente σ-beschränkter Mengen) [☞ Beispiel 4.3.2]. Aus dem Cantor-Bendixson-Analog in Kapitel 4.4 folgt jedoch, daß der Abschlusses des Komplementes einer σ-beschränkten Teilmenge stets eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthält [☞ Korollar 4.4.2]. Unter der Annahme von **AD** enthält schon das Komplement einer σ-beschränkten Teilmenge eine nicht-leere superperfekte Teilmenge [☞ Korollar 4.5.4].

In Kapitel 4.4 wird der Satz von Cantor und Bendixson für höchstens abzählbare und perfekte auf die σ-beschränkten und superperfekten Teilmengen des Baireraumes übertragen.[1]

Abschließend wird in Kapitel 4.5 das Begriffspaar *σ-beschränkt* und *Obermenge einer nicht-leeren superperfekten Menge* dann auf zwei verschiedene Arten spieltheoretisch charakterisiert [☞ Theoreme 4.5.3 und 4.5.8][2].
Mittels dieser Charakterisierung (in Form von Korollar 4.5.9) sowie eines Resultates von D.A. Martin (☞ Kapitel 4.5 Fußnote 10 bzw. [KS85, 196ff] oder [Kan03, 30.10]) und eines weiteren Resultates von Y.N. Moschovakis (☞ Kapitel 4.5 Fuß-

[1] ☞ [Kec77, 2B].
[2] ☞ [Kec77, 3.3, 3.1] für Theorem 4.5.3 sowie die Aussage des Theorems 4.5.8.

note 9 bzw. [Mos80, 6E.1.]) werden dann noch einige Definierbarkeitsresultate für σ-Schranken abgeleitet [☞ Sätze 4.5.11 und 4.5.12][3].

Die Definitionen sowie teilweise auch die Aussagen der Lemmata und Sätze (bis auf das Cantor-Bendixson-Analog 4.4.1 und die Definierbarkeits-Resultate 4.5.11 und 4.5.12 ohne Beweise) finden sich in *„On a notion of smallness for subsets of the Baire space“* von A. Kechris [Kec77, 2–4]. Theorem 4.5.3 sowie die Aussage von Theorem 4.5.8 finden sich in [Kec77, 3.1, 3.3].

4.1 Heine-Borel-Analog

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ größer 0) sind die *kompakten* Teilmengen vollständig charakterisiert als *beschränkt und abgeschlossene* Teilmengen. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt **beschränkt**, falls

$$\operatorname{diam}(A) < \infty \qquad \text{wobei } \operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x,y) \in \mathbb{R} \mid x, y \in A\}. \tag{4.1}$$

Mit dieser Definition ist dann in einem metrischen Raum (X, d) z.B. jede abgeschlossene Kugel $\overline{\mathrm{K}(x,r)} := \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$ beschränkt und abgeschlossen (wobei $x \in X$ und $r \in \mathbb{R}$ größer 0).

Im Baireraum hingegen lassen sich die kompakten Teilmengen nicht als beschränkt und abgeschlossen charakterisieren. Metrisiert man den Baire'schen Raum $\mathcal{N}$ mittels der Metrik $d : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(f,g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \delta(f(n), g(n)) \qquad\qquad \delta(i,j) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

so sind die offenen Basismengen $O_u \subset \mathcal{N}$ beschränkt, da

$$\forall\ f, g \in \omega^\omega\ (d(f,g) \leq 1)$$

gilt und abgeschlossen [☞ Lemma 3.5.3]. Nun sind im Baireraum aber offene Mengen nicht kompakt [☞ Lemma 3.5.4].

[3]☞ [Kec77, 4].

Insbesondere sind also die beschränkten und abgeschlossenen O_u im Baireraum nicht kompakt. Für Teilmengen A des Baire-Raumes kann *kompakt* somit nicht gleichbedeutend mit *beschränkt* (im Sinne von (4.1)) und *abgeschlossen* sein. Die kompakten Teilmengen des Baire-Raumes $\mathcal{N}$ können jedoch mit Hilfe einer partiellen Ordnung als $\leq$-beschränkt und abgeschlossen charakterisiert werden.

Eine Teilmenge A des Baireraumes heiße **$\leq$-beschränkt**, falls es ein $f \in \mathcal{N}$ gibt mit $g \leq f$ für alle $g \in A$ – dabei sei

$g \leq f$ genau dann, wenn für jedes $n < \omega$ gilt, daß $g(n) \leq f(n)$.

Ein solches f heißt eine **$\leq$-Schranke für** A. Nun erhält man folgende Charakterisierung kompakter Teilmengen des Baireraumes:

Satz 4.1.1. (Heine-Borel-Analog)
Eine Menge $A \subset \mathcal{N}$ ist kompakt genau dann, wenn sie $\leq$-beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. **$\Rightarrow$:** Sei $A \subset \mathcal{N}$ kompakt.

A **ist abgeschlossen:** Da der Baireraum metrisierbar ist [☞ Satz 3.5.9], ist der Baireraum ein Hausdorff-Raum. In einem Hausdorff-Raum sind kompakte Mengen jedoch immer abgeschlossen [☞ Lemma 3.3.5].

A **ist $\leq$-beschränkt:** Da A kompakt ist, gibt es für die offene Überdeckung von A mit allen offenen Basismengen O_u des Baireraumes eine endliche Teilüberdeckung. Daraus folgt, daß sich der Baum T_A von A auf überall nur endlich oft verzweigt – genauer: für jedes $u \in T_A$ ist die Menge $\{m \in \omega \mid u^\frown(m) \in T_A\}$ endlich. Sei T_A^n die Menge der endlichen Sequenzen in T_A der Länge $n \in \omega$. Dann ist $f \in \mathcal{N}$ mit $f(n) = \max\{m \in \omega \mid u^\frown(m) \in T_A^n \text{ für ein } u \in T_A\}$ eine Schranke für A.

$\Leftarrow$: Sei umgekehrt $A \subset \mathcal{N}$ $\leq$-beschränkt und abgeschlossen.

A **ist kompakt:** Angenommen es gibt eine offene Überdeckung von A zu der es keine endliche Teilüberdeckung gibt. Liege diese offene Überdeckung ohne Einschränkung in Form offener Basismengen $(O_{u_i})_{i \in I}$ vor (gibt es keine endliche

Teilüberdeckung der beliebigen offenen Überdeckung so auch keine der sie erzeugenden offenen Basismengen). Da A $\leq$-beschränkt ist, verzweigt sich der Baum T_A auf jeder Stufe nur endlich oft (s.o.). Dann läßt sich aus den endlich vielen Sequenzen einer Länge $n < \omega$ ein $v_1 \in T_A$ heraussuchen so, daß $O_{v_1} \cap A$ keine endliche Teilüberdeckung hat (ansonsten gäbe es eine endliche Teilüberdeckung für ganz A). Aus dem so definierten Teilbaum $T_A \cap T_{O_{v_1}}$ läßt sich dann analog eine endliche Sequenz $v_2 \succ v_1$ heraussuchen so, daß $A \cap O_{v_2}$ ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung besitz und so fort. (Dabei sind die O_{v_i} i.a. nicht unbedingt aus der obigen Überdecklung $(O_{u_i})_{i \in I}$.) Sei $f \in \mathcal{N}$ mit $f|_n := v_n$ für $n \in \omega$ und seien $g_1 \in O_{v_1} \cap A, g_2 \in O_{v_2} \cap A, \ldots$. Dann konvergiert die Folge $(g_n)_{n<\omega}$ gegen f. Da $g_n \in A$ für $n < \omega$ und A abgeschlossen ist, muß also f in A liegen. Somit liegt f aber schon in einer der offenen Basismengen O_{u_f}aus der Überdeckung $(O_{u_i})_{i \in I}$ und es gibt ein $N \in \omega$ so, daß $u_f \prec v_n$ für alle $n \geq N$. Für $n > N$ haben die $O_{v_n} \cap A$ dann aber die endliche Teilüberdeckung O_{u_f} – Widerspruch. ♢

Eine Teilmenge A des Baireraumes ist $\leq$-beschränkt genau dann, wenn ihr Baum überall (d.h. für jedes $s \in T_A$) endlich verzweigt ist. Eine andere Formulierung des obigen Satzes lautet daher:

Satz 4.1.2. (Heine-Borel-Analog 2)
Eine Menge $A \subset \mathcal{N}$ ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und überall endlich verzweigt ist – das heißt: A ist abgeschlossen und es gilt:

$$\forall\ s \in T_A\ \exists\ k < \omega\ \forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_A \Rightarrow t(0) \not> k) \tag{4.2}$$

wobei $\omega_*^{<\omega}$ gleich $\omega^{<\omega}$ ohne die leere Sequenz sei.[4]

Die Formulierung (4.2) wird in Kapitel 5.2 als Vorlage für eine verallgemeinerte Definition der Kompaktheit dienen.

4.2 σ-beschränkte Mengen

Die kleinen Mengen der σ-Kategorie sind die σ-beschränkten Teilmengen des Baireraumes. Sie werden wie folgt definiert:

[4]Für die Definition von $\omega^{<\omega}$ und $\omega_*^{<\omega}$ ☞ S. 65 oder Anhang S. 148.

Definition 4.2.1. (σ-beschränkt)
Eine Teilmenge $A \subset \mathcal{N}$ heißt **σ-beschränkt** genau dann, wenn es eine Folge $(f_i)_{i<\omega}$ in $\mathcal{N}$ gibt so, daß es für jedes $f \in A$ ein $i < \omega$ gibt mit $f \leq f_i$.

Teilmengen einer σ-beschränkten Menge $A \subset \mathcal{N}$ sind σ-beschränkt, da eine σ-Schranke für A auch eine σ-Schranke für jede Teilmenge von A ist. Eine abzählbare Vereinigung $A = \bigcup_{i<\omega} A_i$ σ-beschränkter Mengen $A_i \subset \mathcal{N}$ ist σ-beschränkt, da die abzählbare Vereinigung $(f_{ij})_{i,j<\omega}$ der σ-Schranken $(f_{ij})_{j<\omega}$ der A_i abzählbar und somit eine σ-Schranke für A ist. Es gilt also:

Satz 4.2.2. *Die σ-beschränkten Teilmengen des Baireraumes bilden ein σ-Ideal.*

In der Definition eines Baire'schen Raumes wird gefordert, daß es keine nicht-leeren mageren offenen Teilmengen gibt. In Theorem 3.3.11 und Satz 3.5.10 wurde dann gezeigt, daß der Baireraum ein Baire'scher Raum ist. Hierzu analog gilt der folgende Satz:

Satz 4.2.3. (offen, nicht-leer $\Rightarrow$ nicht σ-beschränkt)
Im Baireraum gibt es keine nicht-leeren offenen σ-beschränkten Teilmengen.

Beweis. Mit einem Diagonalargument sieht man zunächst, daß offene Basismengen des Baire-Raumes niemals σ-beschränkt sind:

Sei O_u eine offene Basismenge des Baire-Raumes (mit $u \in \omega^{<\omega}$). Sei $(f_i)_{i<\omega}$ eine beliebige Folge von Elementen des Baireraumes (eine potentielle σ-Schranke von O_u). Dann liegt g mit

$$\begin{aligned} g &:= u^\frown(n, f_{\mathrm{lng}(u)+1}(\mathrm{lng}(u)+1)+1, f_{\mathrm{lng}(u)+2}(\mathrm{lng}(u)+2)+1, \ldots) \\ n &:= \max(f_0(\mathrm{lng}(u))+1, \ldots, f_{\mathrm{lng}(u)}(\mathrm{lng}(u))+1) \end{aligned}$$

in O_u. Falls nun $i \leq \mathrm{lng}(u)$ ist, so gilt:

$$f_i(\mathrm{lng}(u)) < \max(f_0(\mathrm{lng}(u))+1, \ldots, f_{\mathrm{lng}(u)}(\mathrm{lng}(u))+1) = g(\mathrm{lng}(u))$$

und falls $i > \mathrm{lng}(u)$, so gilt:

$$f_i(i) < f_i(i)+1 = g(i).$$

Insgesamt gilt damit $\forall\ i < \omega\ (g \not\leq f_i)$. Das bedeutet, daß $(f_i)_i$ keine σ-Schranke von O_u und somit O_u (da $(f_i)_i$ beliebig gewählt war) nicht σ-beschränkt sein kann.

Dann gibt es aber keine nicht-leere offene Teilmenge des Baireraumes, die σ-beschränkt ist. Denn Teilmengen σ-beschränkter Mengen sind ja wieder σ-beschränkt und die nicht-leeren offenen Teilmengen des Baireraumes enthalten offene Basismengen (diese sind aber wie eben gesehen nicht σ-beschränkt). $\Diamond$

Die Begriffe *σ-beschränkt* und *mager* beschreiben beide kleine Mengen (im Sinne von Kapitel 1.1). Darüber hinaus teilen sie nach Satz 4.2.3 die Eigenschaft, daß ihre σ-Ideale mit der Topologie des Baireraumes nur die leere Menge gemeinsam haben.

Zur besseren Handhabe wird nun der Begriff der σ-Beschränktheit durch einige äquivalente Formulierungen charakterisiert. Anschließend sollen einige Beispiele den Begriff veranschaulichen.

Topologisch lassen sich σ-beschränkte Mengen als Teilmengen σ-kompakter Mengen beschreiben. Eine **σ-kompakte** Teilmenge eines topologischen Raumes ist eine abzählbare Vereinigung kompakter Teilmengen.

Mittels einer partiellen Ordnung $\leq_{\text{fin}}$ lassen sich die σ-beschränkten Teilmengen des Baireraumes auch als die $\leq_{\text{fin}}$-beschränkten Teilmengen beschreiben. Dabei gelte für Elemente f, g des Baireraumes $f \leq_{\text{fin}} g$ genau dann, wenn für alle bis auf endlich viele $n < \omega$ gilt $f(n) \leq g(n)$ – genauer:

$$f \leq_{\text{fin}} g \text{ genau dann, wenn } \exists\ n_0 < \omega\ \forall\ n \geq n_0\ (f(n) \leq g(n)).$$

Eine Menge $A \subset \mathcal{N}$ heißt **$\leq_{\text{fin}}$-beschränkt**, falls es ein $f \in \mathcal{N}$ gibt mit $g \leq_{\text{fin}} f$ für alle $g \in A$. Ein solches f heißt eine **$\leq_{\text{fin}}$-Schranke für** A.

Damit läßt sich nun die σ-Beschränktheit wie folgt charakterisieren:

Satz 4.2.4. (σ-beschränkt)
Für eine Teilmenge A des Baireraumes ist äquivalent:

(i) *A ist σ-beschränkt.*

(ii) $A \subset B$ *für eine* σ*-kompakte Menge* $B \subset \mathcal{N}$.

(iii) A *ist* $\leq_{\mathit{fin}}$*-beschränkt.*

Beweis. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*: Sei A etwa durch $(f_i)_{i<\omega}$ σ-beschränkt. Sei $A_i := \{g \in A \mid g \leq f_i\}$. Dann sind die A_i $\leq$-beschränkt und wegen

$$A_i^c = \bigcup_{\exists\ n<\mathrm{lng}(u)\ (u(n)>f_i(n))} O_u$$

auch abgeschlossen – nach Satz 4.1.1 also kompakt. Somit ist $A \subset \bigcup_{i<\omega} A_i$ σ-kompakt.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*: Sei $A \subset B$ für eine σ-kompakte Menge $B \subset \mathcal{N}$ und etwa $B = \bigcup_{i<\omega} B_i$ mit kompakten $B_i \subset \mathcal{N}$ $(i < \omega)$. Dann sind die einzelnen B_i jeweils $\leq$-beschränkt (Heine-Borel-Analog) – etwa durch $f_i \in \mathcal{N}$. Definiert man $f \in \mathcal{N}$ durch: $f(i) := \max(f_0(i), \ldots, f_i(i))$ für $i < \omega$, dann gilt $\forall\ g \in B\ (g \leq_{\mathrm{fin}} f)$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*: Sei A $\leq_{\mathrm{fin}}$-beschränkt durch ein $f \in \mathcal{N}$, d.h. es gilt

$$\forall\ g \in A\ \exists\ n_0 < \omega\ \forall\ n \geq n_0\ (g(n) \leq f(n)).$$

Mit $A_m := \{g \in A \mid \forall\ n \geq m\ (g(n) \leq f(n))\}$ die Menge der $g \in A$, die ab $m < \omega$ durch f majorisiert werden, gilt dann

$$A = \bigcup_{m<\omega} A_m.$$

Dabei kann das endliche Anfangsstück $u := (g(0), \ldots, g(m-1))$ eines $g \in A_m$ Werte in ω^m – also nur abzählbar viele – annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{m<\omega} A_m \\ &= \bigcup_{m<\omega} \bigcup_{u<\omega^m} (A_m \cap O_u). \end{aligned}$$

Diese Vereinigung ist abzählbar (als abzählbare Vereinigung abzählbar Vereinigungen) und jedes der $A_m \cap O_u$ ist beschränkt durch $f^u := u^\frown(f(m), f(m+1), \ldots)$. Insgesamt ist A also σ-beschränkt. $\Diamond$

Punkt (*ii*) des Satzes 4.2.4 wird in Kapitel 5.2 als Vorlage einer verallgemeinerten Definition kleiner Mengen dienen – den **$\mathcal{B}$-nirgends dichten** Mengen für eine vorgegebene Bedingungsmenge $\mathcal{B}$ [☞ Kapitel 5.2].

Die σ-Beschränktheit charakterisiert laut Satz 4.2.4 (*ii*) genau die Teilmengen des Baireraumes, die Teilmenge einer σ-kompakten Menge sind. Ein solcher Begriff kann nur in solchen Räumen sinnvoll sein, die nicht selber σ-kompakt sind (denn in einem σ-kompakten Raum sind alle Teilmengen ebenfalls σ-kompakt). Metrische Räume X, in denen die abgeschlossenen Kugeln $\overline{\mathrm{K}(x,\epsilon)}$ (mit $x \in X$ und $\epsilon > 0$ in $\mathbb{R}$) kompakt sind, sind stets σ-kompakt, da dann gilt $X = \bigcup_{r\geq 1} \overline{\mathrm{K}(x,r)}$. Dies trifft z.B. auf den Raum der reellen Zahlen zu. Der Umstand, daß die abgeschlossenen ϵ-Kugeln $\mathrm{K}(f,\epsilon) = \overline{\mathrm{K}(f,\epsilon)}$ des Baireraumes nicht kompakt sind [☞ S. 83], ist also notwendig dafür, daß der Begriff σ-beschränkt im Baireraum überhaupt sinnvoll ist. In einem σ-kompakten Raum wie den reellen Zahlen würde ein Kleinheitsbegriff, der wie die σ-Beschränktheit in Satz 4.2.4 (*ii*) charakterisiert ist, eben keinen rechten Sinn ergeben.

Um den Begriff der σ-Kompaktheit noch etwas zu veranschaulichen, sollen nun noch einige Beispiele gegeben werden.

Beispiel 4.2.5. *Der euklidische Raum $\mathbb{R}$ ist σ-kompakt aber nicht kompakt.*

Beweis. Die Menge der reelen Zahlen läßt sich schreiben als $\mathbb{R} = \bigcup_{n<\omega}[-n,n]$, wobei die $[-n,n]$ für $n \in \mathbb{N}$ abgeschlossene und beschränkte also kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ sind.
Da $\mathbb{R} = \bigcup_{n<\omega}(-n,n)$ eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}$ ist, zu der es keine endliche Teilüberdeckung gibt, ist $\mathbb{R}$ nicht kompakt. $\lozenge$

Beispiel 4.2.6. *Jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathcal{N}$ ist σ-beschränkt.*

Beweis. A bildet eine σ-Schranke für sich selbst. $\lozenge$

Beispiel 4.2.7. *Jede Teilmenge $A \subset \mathcal{N}$, die eine offene Menge $U \subset \mathcal{N}$ enthält, ist nicht σ-beschränkt.*

Beweis. Wäre A σ-beschränkt so auch die in A enthaltene offene Menge U. Das kann nach Satz 4.2.3 nicht sein. $\lozenge$

Beispiel 4.2.8. *Lokal quasikompakte Räume mit abzählbarer Basis sind σ-kompakt.*

Beweis. Sei der Raum X lokal quasikompakt und habe eine abzählbare Basis. Für jedes $x \in X$ gibt es dann [laut Definition 3.3.8, S. 50] eine kompakte Umgebung K_x von x, die eine offene Umgebung U von x enhält. U enthält eine offene Basismenge O_x von x. Da X eine abzählbare Basis besitzt, läßt sich X dann so schreiben:

$$X = \bigcup_{x \in X} O_x$$

und wegen $O_x \subset K_x$ gilt dann

$$X = \bigcup_{x \in X} K_x.$$

Da die offenen Basismengen O_x abzählbar sind, ist diese Vereinigung abzählbar und somit X σ-kompakt. ◊

In den Baire'schen Räumen, die eine abzählbare Basis besitzen (wie der Baireraum) und zudem noch lokal quasikompakt sind, macht also ebenfalls ein wie in Satz 4.2.4 (*ii*) charakterisierter Kleinheitsbegriff keinen Sinn. In Kapitel 3.5 hatten wir allerdings bereits gesehen, daß der Baireraum nicht lokal quasikompakt sein kann.

4.3 Superperfekte Mengen

Die *großen* Mengen der σ-Kategorie sind die Komplemente σ-beschränkter Teilmengen des Baireraumes. Der Begriff der *superperfekten* (und nicht-leeren) Teilmenge des Bairerauems kennzeichnet *relativ große* Teilmengen des Baireraumes, die jedoch nicht unbedingt *groß* im Sinne der σ-Kategorie sein müssen, d.h. sie müssen in $\mathcal{N}$ nicht Komplemente von σ-beschränkten Mengen sein [☞ Beispiel 4.3.2].

Definition 4.3.1. (superperfekt)
Sei X eine beliebige Menge und T ein Baum über X. Ein $v \in T$ heißt **σ-Knoten**

in T, falls v unendlich viele direkte Erweiterungen in T hat – genauer: $\{m \in X \mid v^\frown m \in T\}$ ist unendlich.

Ein Baum T über X heißt **superperfekt** genau dann, wenn es für jedes $u \in T$ eine Erweiterung $v \succ u$ in T gibt, die ein σ-Knoten in T ist. Eine solche Erweiterung $v \in T$ heißt eine **σ-Erweiterung von u in T**. Eine Teilmenge $A \subset X^\omega$ heißt **superperfekt** genau dann, wenn $A = [T]$ für einen Baum T auf X und der Baum T superperfekt ist.

Die leere Menge $\varnothing$ ist superperfekt, da $T_\varnothing = \{u \in X^{<\omega} \mid \exists\, f \in \varnothing\ (u \prec f)\} = \varnothing$. Jede offene Basismenge O_u des Baireraumes ist superperfekt.

Beispiel 4.3.2. (superperfekt $\not\Rightarrow$ Komplement einer σ-beschr. Menge) *Die offenen Basismengen O_u des Baireraumes sind superperfekt aber nicht Komplement σ-beschränkter Mengen.*

Beweis. Die offenen Basismengen $O_u \subset \mathcal{N}$ sind superperfekt, jedoch ist O_u^c nicht σ-beschränkt (beispielsweise ist O_v mit $v \perp u$ Teilmenge von O_u^c und laut Satz 4.2.3 nicht σ-beschränkt – also ist auch O_u^c nicht σ-beschränkt). $\Diamond$

Superperfekte Mengen lassen sich in folgender Weise charakterisieren:

Satz 4.3.3. *Eine Menge $A \subset \mathcal{N}$ ist superperfekt genau dann, wenn A abgeschlossen ist und für jedes $f \in A$ und jede offene Menge $U \subset \mathcal{N}$, die f enthält, $U \cap A$ nicht in einer kompakten Menge $B \subset \mathcal{N}$ enthalten ist.*

Beweis. $\Rightarrow$: Sei $A \in \mathcal{N}$ superperfekt, d.h. A abgeschlossen und T_A superperfekt. Angenommen es existieren ein $f \in A$ und eine offene Basismenge $O_u \subset \mathcal{N}$, die f enthält, d.h. $u \prec f$ (insbesondere ist u dann aus T_A), und $(O_u \cap A) \subset B$ für eine kompakte Menge $B \subset \mathcal{N}$. Da B kompakt ist, ist B nach obigem Lemma beschränkt. Also ist auch $(O_u \cap A) \subset B$ beschränkt – etwa durch $g \in \mathcal{N}$. Dann kann aber keine Erweiterung v von u in T_A unendlich viele direkte Erweiterungen haben, da g sonst keine Schranke für $(O_u \cap A)$ wäre. Das steht aber im Widerspruch dazu, daß T_A superperfekt ist. Statt der offenen Basismenge O_u kann man auch von einer beliebigen offenen Menge U, die f enthält, ausgehen – f muß dann ja schon in einer offenen Basismenge $O_u \subset U$ enthalten sein.

$\Leftarrow$: Sei umgekehrt A abgeschlossen und gelte, daß für jedes $f \in A$ und jede offene Menge $U \subset \mathcal{N}$, die f enthält, $U \cap A$ nicht in einer kompakten Menge $B \subset \mathcal{N}$ liegt. Dann muß T_A superperfekt sein:
Angenommen T_A ist nicht superperfekt, d.h. es gibt ein $u \in T_A$, dessen sämtliche Erweiterungen $v \succ u$ in T_A jeweils wieder nur endlich viele direkte Erweiterungen $v^\frown m \in T_A$ haben. Zunächst ist dann (wegen $u \in T_A$) u ein Anfangsstück eines $f \in A$ – es gibt also ein $f \in (O_u \cap A)$. Weiter ist $(O_u \cap A)$ abgeschlossen (da O_u und A abgeschlossen) und beschränkt:
$T_{(O_u \cap A)}$ kann auf jeder Ebene nur endlich oft verzweigen (da alle Erweiterungen v von u laut Annahme nur endlich viele direkte Erweiterungen in T_A haben). Das heißt die Mengen $T^n_{(O_u \cap A)}$ (alle endlichen Sequenzen in $T_{(O_u \cap A)}$ der Länge $n < \omega$) und damit auch die Mengen $\{m < \omega \mid u^\frown m \in T^n_{(O_u \cap A)}\}$ (mit $n < \omega$) sind jeweils endlich. Somit läßt sich mit $g(n) := \max\{m \in \omega \mid u^\frown m \in T^n_{(O_u \cap A)}\}$ $(n < \omega)$ eine Schranke für $(O_u \cap A)$ definieren.
Nach obigem Satz 4.1.1 ist $(O_u \cap A)$ dann kompakt (da beschränkt und abgeschlossen). Das steht jedoch im Widerspruch zur Vorraussetzung, daß für eine offene Menge $U \subset \mathcal{N}$, die f enthält, $U \cap A$ nicht in einer kompakten Menge enthalten ist. $\Diamond$

Satz 4.3.4. (Zu $\mathcal{N}$ homöomorphe Teilmengen superperfekter Mengen) *Jede nicht-leere superperfekte Menge $A \subset \mathcal{N}$ enthält eine zu $\mathcal{N}$ homöomorphe superperfekte Teilmenge.*

Beweis. Sei A eine superperfekte Teilmenge des Baireraumes. Es ist zu zeigen, daß A eine superperfekte (insbesondere abgeschlossene) Teilmenge B enthält, die zu $\mathcal{N}$ homöomorph ist.

Dazu definieren wir zunächst einen Teilbaum T^ω von T_A wie folgt:

Sei $u_0 \in T_A$ ein beliebiger σ-Knoten. Sei $T^0 := \{s \in \omega^{<\omega} \mid s \prec u_0\} \subset T_A$. Dann enthält T^0 als einziges Blatt u_0, und dieses ist ein σ-Knoten in T_A. Sei der Baum $T^n \subset T_A$ bereits definiert und seien alle Blätter in T^n σ-Knoten in T_A, dann erhält man den Baum $T^{n+1} \supset T^n$ wie folgt: Wir definieren für jedes Baltt $u \in T^n$ eine gegen Anfangsstücke abgeschlossene Menge $A_u \subset T_A$ und setzen dann

$$T^{n+1} := (\bigcup_{u \text{ Blatt in } T^n} A_u) \cup T^n.$$

Dabei erhält man die Menge A_u für ein Blatt u in T^n wie folgt:

Sei u ein Blatt in T^n. Da alle Blätter in T^n σ-Knoten in T_A sind, hat u abzählbar viele direkte Erweiterungen $u^\frown(i)$ $(i < \omega)$ in T_A. Da T_A supeperfekt ist, gilt:

$$\forall\, i < \omega\ \exists\, \sigma(i) \in T_A\ (\sigma(i)\ \sigma\text{-Knoten in } T_A \wedge u^\frown(i) \prec \sigma(i)).$$

Man wähle für jede direkte Erweiterung $u^\frown(i)$ von u in T_A *genau einen* σ-Knoten $\sigma(i) \in T_A$ mit $u^\frown(i) \prec \sigma(i)$ aus. Dann definieren wir A_u als die Menge dieser σ-Erweiterungen von u in T_A zusammen mit ihren Anfangsstücken:

$$A_u := \{s \in \omega^{<\omega} \mid \exists\, i < \omega\ (s \prec \sigma(i))\}.$$

Insbesondere enthält T^{n+1} so wieder nur Blätter, die σ-Knoten in T_A sind.

Sei nun

$$T^\omega := \bigcup_{n<\omega} T^n.$$

Mit dieser Konstruktion sind die Blätter der Teilbäume $T^n \subset T^\omega$ (also σ-Knoten in T_A) auch σ-Knoten in T^ω und bilden die einzigen Verzweigungen in T^ω.

Sei

$$\sigma_{(0)}, \sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \ldots \in T^1$$

eine Abzählung der für T^1 ausgewählten σ-Erweiterungen von $u_0 \in T^0$,

$$\sigma_{(0,0)}, \sigma_{(0,1)}, \sigma_{(0,2)}, \ldots \in T^2$$

eine Abzählung der für T^2 ausgewählten σ-Erweiterungen von $\sigma_{(0)} \in T^1$,

$$\sigma_{(1,0)}, \sigma_{(1,1)}, \sigma_{(1,2)}, \ldots \in T^2$$

eine Abzählung der für T^2 ausgewählten σ-Erweiterungen von $\sigma_{(1)} \in T^1$
u.s.w..

Bildet man nun $f \in \mathcal{N}$ auf dasjenige $g \in [T^\omega]$ ab, gegen das die Folge $\sigma_{(f(0))}, \sigma_{(f(0),f(1))}, \sigma_{(f(0),\ldots,f(2))}, \ldots$ von σ-Erweiterungen von u konvergiert (g liegt in $[T^\omega]$, da $[T^\omega]$ abgeschlossen ist), so ergibt sich auf diese Weise eine Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{N} &\longrightarrow [T^\omega] \\ f &\longmapsto \lim_{n<\omega} \sigma_{(f(0),\ldots,f(n))}. \end{aligned}$$

Da wir im Baum T^ω keinerlei Verzweigungen zwischen den in T^ω liegenden σ-Knoten aufgenommen haben gilt: $\forall\, n < \omega\ (\sigma_{(f(0),\ldots,f(n))} \prec \lim_{i<\omega} \sigma_{(f(0),\ldots,f(i))})$ und jedes $g \in [T^\omega]$ definiert eine eindeutige Folge $(\sigma_{(f(0),\ldots,f(n))} \prec g)_{n<\omega}$. Damit erhalten wir die zu φ inverse Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} :& [T^\omega] \longrightarrow \mathcal{N} \\ & g \longmapsto f \end{aligned}$$

und φ ist somit bijektiv. Ferner gilt:

φ ist stetig: Sei u_0 der σ-Knoten in T^ω mit $\operatorname{lng}(u_0)$ minimal und $O_v \cap [T^\omega]$ beliebige offene Basismenge in $[T^\omega]$ (mit $v \in \omega^{<\omega}$). Dann muß laut Konstruktion von $[T^\omega]$ gelten, daß $v \prec u_0$ oder $v \succ u_0 \wedge v \neq u_0$.

1) Falls $v \prec u$, so ist $O_v \cap [T^\omega] = [T^\omega]$ und somit $\varphi^{-1}(O_v \cap [T^\omega]) = \mathcal{N}$ offen.

2) Falls $v \succ u \wedge v \neq u$, dann ist $\varphi^{-1}(O_v \cap [T^\omega]) = \bigcup_{\sigma_{(i_1,\ldots,i_n)} \succ v} O_{(i_1,\ldots,i_n)}$ offen.

Da die Urbilder aller offenen Basismengen in $[T^\omega]$ offen in $\mathcal{N}$ sind, gilt gleiches für alle offenen Mengen in $[T^\omega]$, φ ist also stetig.

φ^{-1} ist stetig: Sei $O_v \subset \mathcal{N}$ beliebige offene Basismenge. Dann ist $\varphi(O_v) = O_{\sigma_v} \cap [T^\omega]$ und somit offen in $[T^\omega]$:

Es gilt: $\varphi(O_v) \subset O_{\sigma_v} \cap [T^\omega]$:
$v \prec f \Rightarrow \sigma_v \prec g$ mit $(\sigma_{(f_0,\ldots,f_n)})_n$ konvergiert gegen g.

Es gilt: $\varphi(O_v) \supset O_{\sigma_v} \cap [T^\omega]$:
Sei $\sigma_v \prec g$ und $\varphi(f) = g$ für ein $f \in \mathcal{N}$, d.h. $\sigma_{(f(0))} \prec \sigma_{(f(0),f(1))} \prec \sigma_{(f(0),\ldots,f(2))} \prec \ldots$ konvergiert gegen g für $f \in \mathcal{N}$. Dann muß v ein Anfangsstück von f sein und somit auch $f \in \varphi(O_v)$gelten.

Also sind unter φ alle Bilder offener Mengen in $\mathcal{N}$ offen. φ^{-1} ist also stetig.

Insgesamt ist damit bis hierhin gezeigt, daß $\mathcal{N}$ homömorph ist zur Teilmenge $[T^\omega]$ der nicht-leeren superperfekten Menge $A \subset \mathcal{N}$.

Die Menge $[T^\omega]$ ist abgeschlossen und nach Konstruktion von T^ω auch superperfekt. $\Diamond$

4.4 Cantor-Bendixson-Analog

Der Satz von Cantor und Bendixson, der sich auf abzählbare und perfekte Mengen bezieht, läßt sich auf σ-beschränkte und superperfekte Mengen übertragen. Dazu soll im Beweis des folgenden Satzes eine superperfekte Teilmenge aus einer abgeschlossenen Teilmenge A des Baireraumes konstruiert werden. Dies geschieht durch „schrittweises“ Aussortieren von Elementen aus dem Baum von A. Die Klasse aller Ordinalzahlen sei mit **Ord** bezeichnet.

Satz 4.4.1. (Cantor-Bendixson-Analog[5])
Sei $A \subset \mathcal{N}$ abgeschlossen. Dann kann A eindeutig geschrieben werden als $A = P \cup C$ mit P superperfekt, C σ-beschränkt und $P \cap C = \varnothing$.

Beweis. Die Idee ist, durch iteratives „Aussortieren“ mittels einer Funktion ∂ aus dem Baum T eine superperfekte Teilmenge von A zu erhalten. Da man aber im vorhinein nicht weiß, wieviele Aussortierungsschritte ∂ dafür nötig sind, definiert man $\partial^\alpha T$ für alle Ordinalzahlen α – das heißt anschaulich: für jede „Anzahl“ Aussortierungsschritte, die man überhaupt machen kann:

Für einen Baum T definiert man die **Ableitung** ∂T von T als die Menge derjenigen Elemente von T, die in T eine σ-Erweiterung haben:

$$\begin{aligned}\partial T &:= \{u \in T \mid \exists\, v \in T\ (v \text{ ist } \sigma\text{-Erweiterung von } u \text{ in } T)\}\\ &\underset{\text{Def.}}{=} \{u \in T \mid \exists\, v \in T\ (v \succ u \text{ und } \{m < \omega \mid v^\frown(m) \in T\} \text{ unendlich})\}.\end{aligned}$$

Mittels transfiniter Rekursion (☞ etwa [Jec03, 2.15]) definiert man:

$$\begin{aligned}&\partial^0 T = T\\ &\partial^{\alpha+1} T = \partial\partial^\alpha T\ (\alpha \in \mathbf{Ord})\\ &\partial^\lambda T = \bigcap_{\alpha<\lambda} \partial^\alpha T\ (\lambda \text{ Limes-Ordinalzahl}).\end{aligned}$$

Aus der Definition von ∂T und $\partial^\alpha T$ für beliebige $\alpha \in \mathbf{Ord}$ folgt direkt, daß für einen Baum T auch $\partial^\alpha T$ stets wieder ein Baum ist.

Sei nun A abgeschlossen, dann ist also $A = [T]$ für einen Baum T. Bei jedem Inklusions-Schritt „$\supset$“ in der Kette

$$\partial^0 T \supset \partial^1 T \supset \ldots \supset \partial^\lambda T \supset \partial^{\lambda+1} T \supset \ldots \tag{4.3}$$

[5]☞ etwa [Jec03, 4.6] für Cantor-Bendixson.

werden entweder Elemente aussortiert oder die Kette ist an der Stelle konstant, d.h. $\partial^\alpha T = \partial^{\alpha+1} T$ – dann bleibt sie ab dieser Stelle auch konstant (nach obiger induktiver Definition). Sei $\alpha_0 \in \mathbf{Ord}$ minimal mit $\partial^{\alpha_0} T = \partial^\alpha T$ für alle Ordinalzahlen $\alpha > \alpha_0$. Dieses α_0 muß abzählbar sein, da T abzählbar ist und man aus einer abzählbaren Menge nur abzählbar oft Elemente aussortieren kann. Setzt man nun $P := [\partial^{\alpha_0} T]$ und $C := A - P$, so ist $P \cap C = \varnothing$ und es gilt: P ist superperfekt, C ist σ-beschränkt und P sowie C sind eindeutig durch diese Eigenschaften bestimmt:

P **ist superperfekt:** Angenommen P ist nicht superperfekt, dann ist der Baum $\partial^{\alpha_0} T$ nicht superperfekt und es gibt ein $u \in \partial^{\alpha_0} T$ zu dem es keine σ-Erweiterung $v \succ u$ in $\partial^{\alpha_0} T$ gibt. Laut Definition von ∂ wird ein solches u aber im nächsten Schritt $\partial^{\alpha_0} T \supset \partial^{\alpha_0+1} T$ aussortiert, d.h. $\partial^{\alpha_0} T \neq \partial^{\alpha_0+1} T$ im Widerspruch zur Wahl von α_0.

C **ist σ-beschränkt:** In jedem Schritt der absteigenden Kette (4.3) werden gegenüber den Obermengen in der Kette höchstens abzählbar viele Elemente aussortiert – nämlich solche $s \in \partial^\alpha T$, die keine σ-Erweiterung in $\partial^\alpha T$ haben. Für solche s ist dann $O_s \cap [\partial^\alpha T]$ endlich verzweigt.

Die Menge C läßt sich nun wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} C &:= A - P \\ &= A \cap P^c \\ &= A \cap \bigcup_{\alpha < \alpha_0} \bigcup_{\substack{s \text{ ohne} \\ \sigma\text{-Erweiterung} \\ \text{in } \partial^\alpha T}} \underbrace{(O_s \cap [\partial^\alpha T])}_{=: A_{(\alpha,s)}} \end{aligned}$$

wobei die Vereinigungen beide abzählbar sind und die $A_{(\alpha,s)} := O_s \cap [\partial^\alpha T]$ überall endlich verzweigt (s.o.) und abgeschlossen sind. Nach Satz 4.1.2 sind die $A_{(\alpha,s)}$ damit kompakt. Die Menge C ist also in einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen enthalten:

$$C \subset \bigcup_{(\alpha,s)} A_{(\alpha,s)}$$

und somit nach Satz 4.2.4 σ-beschränkt.

P **und** C **eindeutig:** Seien $A = P \cup C = P' \cup C'$ zwei Darstellungen von A mit P, P' superperfekt, C, C' σ-beschränkt und jeweils P und C sowie P' und C'

schnittfremd. Angenommen $P \subsetneq P'$. Etwa $f \in P' - P$. Dann muß $T_{P'}$ damit schon einen superperfekten Teilbaum $T_{sp} \subset T_{P'}$ enthalten mit $T_{sp} \not\subset T_P$. Demnach muß $T_{sp} \subset T_C$ gelten. Das ist ein Widerspruch, da eine σ-beschränkte Menge keine superperfekte Teilmenge enthalten kann. Demnach muß $P = P'$ und somit auch $C = C'$ gelten. $\Diamond$

Korollar 4.4.2. *Sei A das Komplement einer σ-beschränkten Menge $B \subset \mathcal{N}$, dann enthält $\overline{A}$ eine nicht-leere superperfekte Teilmenge.*

Beweis. Sei $A = B^c$ mit B σ-beschränkt. Laut 4.4.1 ist $\overline{A} = P \cup C$ mit einer superperfekten Menge P und einer σ-beschränkten Menge C. Dann kann P nicht leer sein, weil:
Angenommen $P = \varnothing$. Dann ist $\overline{A} = C$ σ-beschränkt und somit $\mathcal{N} = C \cup B$ σ-beschränkt – Widerspruch (der Baire-Raum ist nicht σ-beschränkt). Also muß $P \neq \varnothing$ gelten.
Das heißt $\overline{A}$ enthält eine superperfekte Teilmenge. $\Diamond$

Unter der Annahme von **AD** gilt sogar, daß A als Komplement einer σ-beschränkten Menge eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthält [☞ unten Korollar 4.5.4].
Der Satz 4.4.1 liefert insbesondere, daß abgeschlossene Mengen entweder „groß“ oder „klein“ im Sinne der σ-Kategorie sind:

Korollar 4.4.3. *Sei $A \subset \mathcal{N}$ abgeschlossen und nicht-leer. Dann ist A entweder σ-beschränkt oder enthält eine nicht-leere superperfekte Teilmenge.*

Beweis. Sei $A \subset \mathcal{N}$ abgeschlossen und nicht-leer. Dann kann A nach Satz 4.4.1 geschrieben werden als $A = P \cup C$, wobei P superperfekt und C σ-beschränkt ist, und es gilt:

Fall 1: $P = \varnothing$. Dann ist $A = C$ σ-beschränkt.

Fall 2: $P \neq \varnothing$. Dann enthält A eine nicht-leere superperfekte Teilmenge (nämlich P). $\Diamond$

4.5 Charakterisierung durch Banach-Mazur-Spiele

In Kapitel 3.6 haben wir die Baire-Kategorie mittels der G^{**}- und G_p^{**}-Spiele beschrieben. In ähnlicher Weise soll nun die σ-Kategorie zunächst für beliebige Teilmengen A des Baireraumes mittels der Spiele ohne Zeugen $\tilde{\mathrm{G}}\,(A)$ charakterisiert werden [☞ Theorem 4.5.3]. Um vereinfachte Gewinnmengen zu erhalten definieren wir zusätzlich die Spiele mit Zeugen $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ und erhalten so eine Charakterisierung der σ-Kategorie für Projektionen $A = \pi\,(B) \subset \mathcal{N}$ [☞ Theorem 4.5.5].

Banach-Mazur-Spiel ohne Zeugen $\tilde{\mathbf{G}}\,(A)$

Um eine spieltheoretische Charakterisierung der σ-Kategorie für beliebige Teilmengen A des Baireraumes zu erhalten, definiert man ein Spiel $\tilde{\mathrm{G}}\,(A)$ mit der Eigenschaft, daß Spieler I genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn A eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthält und II eine Gewinnstrategie hat genau dann, wenn A σ-beschränkt ist.

Definition 4.5.1. (Banach-Mazur-Spiel ohne Zeugen $\tilde{\mathbf{G}}\,(A)$)
Zu einer beliebigen Menge $A \subset \mathcal{N}$ definiert man das **Banach-Mazur-Spiel $\tilde{\mathbf{G}}\,(A)$** wie folgt:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] I: & s_0 \arrow[dr] & & s_1 \arrow[dr] & & s_2 \arrow[dr] & \\ II: & & n_1 \arrow[ur] & & n_2 \arrow[ur] & & \dots \end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd – Spieler I spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $s_0 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine natürliche Zahl $n_1 < \omega$, Spieler II spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $s_1 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler I spielt eine natürliche Zahl $n_2 < \omega$ u.s.w.. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

1) $s_0{}^\frown s_1{}^\frown \ldots \in A$,

2) $s_i(0) > k_i$ für $i \geq 1$.

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. A nennt man dabei auch die **Gewinnmenge**.

Die Begriffe **(Gewinn-)Strategie für I (bzw. für II)** und **determiniert** sind für die Spiele $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ analog zu den Definitionen 2.1.2 (bzw. 2.1.3) und 2.3.1 definiert.

Mit einer Kodierung der in $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ gespielten Sequenzen in die natürlichen Zahlen läßt sich dieses Spiel auch als ein Spezialfall der Grundvariante [☞ Definition 2.1.1] auffassen und analog zu Lemma 3.6.6 gilt:

Lemma 4.5.2. (Determiniertheit)
Falls **AD** *gilt, so sind auch die obigen Spiele* $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ *determiniert.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.6.6. ◊

In dem Spiel $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ darf Spieler II also nach jedem Zug von Spieler I endlich viele direkte Nachfolger der bisher von I gebildeten endlichen Sequenz $s_0{}^\frown s_1{}^\frown \dots s_n$ für den weiteren Spielverlauf ausschließen. Dies wirkt sich genau in gewünschter Weise auf die Gewinnstrategien der Spieler I und II in Abhängigkeit von A aus:

Theorem 4.5.3. (Charakterisierung durch Spiele ohne Zeugen)
Sei $A \subset \mathcal{N}$. *Dann gilt:*

(i) Spieler I hat eine Gewinnstrategie in $\tilde{\mathrm{G}}(A) \Leftrightarrow A$ *enthält eine nicht-leere superperfekte Teilmenge* P.

(ii) Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $\tilde{\mathrm{G}}(A) \Leftrightarrow A$ *ist* σ*-beschränkt.*

Beweis. $(i) \Leftarrow$: Enthalte A eine nicht-leere superperfekte Teilmenge P. Spieler I spiele als erstes einen beliebigen σ-Knoten $s_0 \in T_P$ (T_P enthält σ-Knoten, da P superperfekt und nicht-leer ist). Beim nächsten Zug spiele I eine σ-Erweiterung $s_1 \succ s_0$ in T_P mit $s_0 > n_1$ (das ist möglich, da I zuletzt die σ-Erweiterung s_0 gespielt hat) u.s.w.. Dann liegt $s_0{}^\frown s_1{}^\frown \dots$ in A (weil A als superperfekte Menge laut Definition abgeschlossen ist) und $s_i(0) > n_i$ für alle $i < \omega$. Spieler I hat somit eine Gewinnstrategie.

$(i) \Rightarrow$: Habe Spieler I eine Gewinnstartegie σ für $\tilde{\mathrm{G}}(A)$. Sei $T_\sigma := \{s \in T_A \mid s \prec s_0{}^\frown \dots {}^\frown s_n$ für mit σ gespielte $s_0, \dots, s_n\}$. Dann muß die Menge $P := [T_\sigma]$ superperfekt sein: Angenommen P ist nicht superperfekt – das heißt T_σ enthält ein s, zu dem es keine σ-Erweiterung $s^\frown s'$ in T_σ gibt. Für beliebiges $s^\frown s' \in T_\sigma$ kann Spieler II dann

$$\max\{m < \omega \mid s^\frown s'^\frown(m) \in T_\sigma\}$$

spielen und gewinnt. Das steht jedoch im Widerspruch dazu, daß s in T_σ und σ eine Gewinnstrategie von Spieler I ist.

(ii) $\Leftarrow$: Sei A σ-beschränkt. Nach Satz 4.2.4 gilt dann:

$$\exists\ f_0 \in \mathcal{N}\ \forall\ f \in A\ \exists\ n_0 < \omega\ \forall\ n \geq n_0\ (f(n) \leq f_0(n)).$$

Dann gilt für beliebiges Ergebnis $f := s_0{}^\frown s_1{}^\frown s_2 \ldots$ in A:

$$\exists\ n_0 < \omega\ \forall\ n \geq n_0\ (s_n(0) \leq f_0(\sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{lng}(s_i))).$$

Das Spielen von

$$f_0(\operatorname{lng}(s_0)),$$
$$f_0(\operatorname{lng}(s_0) + \operatorname{lng}(s_1)),$$
$$f_0(\operatorname{lng}(s_0) + \operatorname{lng}(s_1) + \operatorname{lng}(s_2)),$$
$$\ldots$$

bedeutet für Spieler II also eine Gewinnstrategie.

(ii) $\Rightarrow$: Habe Spieler II eine Gewinnstrategie τ.

Gute Sequenz: Eine Sequenz $u = (s_0, k_1, s_1, k_2, \ldots, s_n, k_{n+1})$ mit $s_i \in \omega_*^{<\omega}$ für $i = 0, \ldots, n$ sowie $k_i \in \omega$ für $i = 1, \ldots, n+1$ heiße **gut**, falls gilt:

$$s_i(0) > k_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \quad \wedge$$
$$k_j \text{ mit } \tau \text{ gespielt für } j = 1, \ldots, n+1.$$

Die leere Sequenz sei definitionsgemäß gut.

Sequenz gut für $f \in A$: u heiße **gut für** $f \in A$, falls gilt:

$$\exists\ s_{n+1}\ (s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1} \prec f \wedge s_{n+1}(0) > k_{n+1})$$

Insbesondere ist die leere Sequenz gut für jedes $f \in A$.

Sei nun $f \in A$ beliebig. Dann muß es eine Sequenz $u = (s_0, k_1, s_1, k_2, \ldots, s_n, k_{n+1})$ geben (eventuell $u = ()$) mit u ist gut und u ist gut für f und:

$$\neg\exists\ (s_{n+1}, k_{n+2}) \in \mathcal{N} \times \omega\ (u^\frown(s_{n+1}, k_{n+2}) \text{ gut} \wedge \text{ gut für } f)$$

Ansonsten könnte Spieler I gewinnen, obwohl Spieler II mit seiner Gewinnstrategie τ spielt (Widerspruch). Dann gilt $f \in K_u$ mit

$$\begin{aligned} K_u :=& \{f' \in \omega^\omega\ | u \text{ gut für } f' \wedge \\ & \qquad \neg\exists\ (s_{n+1}, k_{n+2})\ (u^\frown(s_{n+1}, k_{n+2}) \text{ gut } \wedge \text{ gut für } f')\} \\ =& \{f' \in \omega^\omega\ |\exists\ s_{n+1}\ (s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1} \prec f' \wedge s_{n+1}(0) > k_{n+1}) \wedge \\ & \qquad \neg\exists\ (s_{n+1}, k_{n+2})\ ((s_{n+1}(0) > k_{n+1} \wedge k_{n+2}\ \tau\text{-gesp.}) \wedge \\ & \qquad \exists\ s_{n+2}\ (s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}{}^\frown s_{n+2} \prec f' \wedge s_{n+2}(0) > k_{n+2}))\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei „k_{n+2} τ-gesp.“ heißt: $k_{n+2} = \tau(u^\frown(s_{n+1}))$. Damit gilt dann

$$A \subset \bigcup_{u \text{ gut}} K_u.$$

Da $u \in \omega^\omega$ und $\omega^{<\omega}$ abzählbar ist, ist die Vereinigung abzählbar.

Um zu zeigen, daß A σ-beschränkt ist, genügt es nun zu zeigen, daß die K_u σ-kompakt sind, denn dann ist die abzählbare Vereinigung $\bigcup_u K_u$ σ-kompakter Mengen σ-kompakt und A als Teilmenge einer σ-kompakten Menge σ-beschränkt.

Die K_u sind σ-kompakt: Sei K_u wie oben konstruiert mit $u = (s_0, k_1, s_1, k_2, \ldots, s_n, k_{n+1})$. Dann läßt sich K_u schreiben als

$$K_u = \bigcup_{\widetilde{s_{n+1}}(0) > k_{n+1}} \underbrace{O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown \widetilde{s_{n+1}}} \cap \Big(\bigcup_{\substack{s_{n+1}(0) > k_{n+1} \\ \exists\ k_{n+2}\ (k_{n+2}\ \tau\text{-gesp.} \wedge s_{n+2}(0) > k_{n+2})}} O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}{}^\frown s_{n+2}} \Big)^c}_{=: L_{\widetilde{s_{n+1}}}}.$$

Nun genügt es zu zeigen, daß die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ kompakt sind. Dies ist nach Satz 4.1.2 genau dann der Fall, wenn die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ abgeschlossen und überall endlich verzweigt sind.

Die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ sind abgeschlossen: Das Komplement einer Menge $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ ist als Vereinigung offener Mengen offen, also ist $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ abgeschlossen.

Die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ sind überall endlich verzweigt: Sei $L := L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ für ein $\widetilde{s_{n+1}} \in \omega^{<\omega}$. Es ist zu zeigen, daß

$$\forall\ s \in T_L\ \exists\ k < \omega\ \forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_L \Rightarrow t(0) \not> k).$$

Fall 1: Sei $s \prec \tilde{s} := s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}$ und $s \neq \tilde{s}$ (d.h. s ist ein echtes Anfangsstück von $\tilde{s}$) – etwa $s = (n_0, \ldots, n_i) \prec \tilde{s} = (n_0, \ldots, n_m)$ mit $i \lneq m$. Sei $k := n_{i+1}$, dann gilt $\forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_L \Rightarrow t(0) \not> k)$.

Fall 2: Sei $s \succ s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}$. Etwa $s = s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s'_{n+1}$ mit $s_{n+1} \prec s'_{n+1}$ (also eventuell auch $s_{n+1} = s'_{n+1}$). Dann gilt wegen $s_{n+1}(0) > k_{n+1}$ und $s_{n+1} \prec s'_{n+1}$: $s'_{n+1}(0) > k_{n+1}$. Spielt nun Spieler II $k'_{n+2} := \tau(u^\frown(s'_{n+1}))$, so muß wegen (4.4) für jedes $t \in \omega_*^{<\omega}$ für alle $f' \in K_u$ gelten:

$$s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s'_{n+1}{}^\frown t \not\prec f' \vee t(0) \not> k'_{n+2}.$$

Also gilt falls $t(0) > k'_{n+2}$, daß $s^\frown t \notin T_L$. Zu s existiert also ein $k := k'_{n+2}$ mit $\forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_L \Rightarrow t(0) \not> k)$.

Somit gilt nach Fall 1 und 2, daß die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ überall endlich verzweigt sind.

Damit ist die Hinrichtung von (ii) bewiesen. $\Diamond$

Im Beweis des Theorems 4.5.3 wurde **AC** nicht benutzt – unter der Annahme von **AD** gilt somit:

Korollar 4.5.4. *Sei A das Komplement einer σ-beschränkten Menge $B \subset \mathcal{N}$ und es gelte* **AD**, *dann enthält A eine nicht-leere superperfekte Teilmenge.*

Beweis. Das Komplement A einer σ-beschränkten Menge B kann nicht σ-beschänkt sein – sonst wäre $\mathcal{N} = A \cup B$ als endliche Vereinigung σ-beschränkter Mengen σ-beschränkt. Nach Theorem 4.5.3 (ii) hat dann Spieler II in dem Spiel $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ keine Gewinnstrategie. Unter der Annahme von **AD** hat somit Spieler I eine Gewinnstrategie. Und nach Theorem 4.5.3 (i) folgt, daß A eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthalten muß. $\Diamond$

Banach-Mazur-Spiel mit Zeugen $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$

Wie schon im Falle der G^{**}-Spiele kann es auch für die $\tilde{\mathrm{G}}$-Spiele von Nutzen sein eine gegenüber der zu charakterisierenden Menge A vereinfachte Gewinnmenge B betrachten zu können [☞ etwa Sätze 4.5.11 und 4.5.12]. Analog zu Theorem 3.6.7 soll daher nun eine spieltheoretische Charakterisierung der σ-Kategorie für Teilmengen A des Baireraumes mit $A = \mathrm{p}(B)$ für eine Teilmenge $B \subset \mathcal{N} \times \lambda$ (für eine unendliche Ordinalzahl λ) gegeben werden. Dazu wird für die Menge B ein Spiel $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ definiert, in dem Spieler I genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn A eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthält und II eine Gewinnstrategie hat genau dann, wenn A σ-beschränkt ist.

Definition 4.5.5. (Banach-Mazur-Spiel mit Zeugen $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$)
Sei $A \subset \mathcal{N}$ und $B \subset \mathcal{N} \times \lambda^\omega$ für eine Ordinalzahl λ und es gelte:

$$A = \mathrm{p}(B) := \{f \in \mathcal{N} \mid \exists\, \xi \in \lambda^\omega\ ((f, \xi) \in B)\}.$$

Dann definiert man das **Banach-Mazur-Spiel $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ mit Zeugen** wie folgt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] I: & (\xi_0, u_0) \arrow[dr] & & (\xi_1, u_1) \arrow[dr] & & (\xi_2, u_2) \arrow[dr] & \\ II: & & n_1 \arrow[ur] & & n_2 \arrow[ur] & & \dots \end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd – Spieler I spielt ein Element $\xi_0 \in \lambda$ und eine nicht-leere endliche Sequenz natürlicher Zahlen $u_0 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine natürliche Zahl $n_1 < \omega$, Spieler I spielt ein Element $\xi_1 \in \lambda$ und eine nicht-leere endliche Sequenz $u_1 \in \omega_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine natürliche Zahl $n_2 < \omega$ u.s.w.. Sei nun $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots) \in \lambda^\omega$ und $f = u_0{}^\frown u_1{}^\frown u_2{}^\frown \ldots \in \mathcal{N}$. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

$$(f, \xi) \in B.$$

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. B nennt man dabei auch die **Gewinnmenge**.
Da Spieler I nicht nur endliche Sequenzen sondern auch Elemente aus λ spielt, die zu einem *Zeugen* $\xi \in \lambda^\omega$ zusammengesetzt werden – wobei Spieler I $(f, \xi) \in B$ anstrebt – nennt man das Spiel $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ auch ein Banach-Mazur-Spiel **mit Zeugen**.

Die Begriffe **(Gewinn-)Strategie für I (bzw. für II)** und **determiniert** sind für die Spiele $\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$ analog zu den Definitionen 2.1.2 (bzw. 2.1.3) und 2.3.1 definiert.

Ist λ abzählbar, läßt sich dieses Spiel mit einer Kodierung der in $\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$ gespielten Sequenzen und Zeugen in die natürlichen Zahlen auch als ein Spezialfall der Grundvariante [☞ Definition 2.1.1] auffassen und analog zu Lemma 3.6.6 und Lemma 4.5.2 gilt:

Lemma 4.5.6. (Determiniertheit)
Falls **AD** *gilt und λ abzählbar ist, so sind auch die obigen Spiele $\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$ determiniert.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.6.6. ◊

Die Begriffe *σ-beschränkt* und *σ-kompakt* lassen sich für beliebige unendliche Ordinalzahlen λ verallgemeinern: Eine Teilmenge $A \subset \mathcal{N}$ heiße **λ-beschränkt** genau dann, wenn es eine Menge $\{f_i \in \mathcal{N} \mid i < \lambda\}$ gibt so, daß es für jedes $f \in A$ ein $i < \lambda$ gibt mit $f \leq f_i$. Die Menge $\{f_i \in \mathcal{N} \mid i < \lambda\}$ heißt dann eine **λ-Schranke** von A. Eine **λ-kompakte** Teilmenge eines Raumes sei eine Vereinigung $|\lambda|$-vieler kompakter Teilmengen.

Analog zu Satz 4.2.4 (ii) gilt:

Satz 4.5.7. (λ-beschränkt)
Für eine unendliche Ordinalzahl λ und eine Teilmenge A des Baireraumes $\mathcal{N}$ ist äquivalent:

(i) A ist λ-beschränkt.

(ii) $A \subset B$ für eine λ-kompakte Menge $B \subset \mathcal{N}$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$: Sei A etwa durch $\{f_i \in \mathcal{N} \mid i < \lambda\}$ λ-beschränkt. Sei $A_i := \{g \in A \mid g \leq f_i\}$. Dann sind die A_i $\leq$-beschränkt und wegen

$$A_i^c = \bigcup_{\exists\, n<\mathrm{lng}(u)\ (u(n)>f_i(n))} O_u$$

auch abgeschlossen – nach Satz 4.1.1 also kompakt. Somit ist $A \subset \bigcup_{i<\lambda} A_i$ λ-kompakt.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei $A \subset \bigcup_{i<\lambda} A_i$ mit kompakten A_i. Dann ist jedes A_i laut Satz 4.1.1 $\leq$-beschränkt – etwa durch f_i. Dann ist $\{f_i \in \mathcal{N} \mid i < \lambda\}$ aber eine λ-Schranke für A. Das heißt A ist λ-beschränkt. $\Diamond$

Aus der Definition für λ-*beschränkt* folgt sofort, daß die λ-beschränkten Teilmengen des Baireraumes abgeschlossen sind gegenüber Teilmengen. Außerdem ist die Vereinigung $|\lambda|$-vieler σ-beschränkter Mengen $|\lambda|$-beschränkt[6].

Damit lassen sich nun λ-*Beschränktheit* und *Enthalten einer nicht-leeren superperfekten Teilmenge* für Mengen $A = \mathrm{p}(B)$ (für ein $B \subset \mathcal{N} \times \lambda^\omega$) spieltheoretisch wie folgt charakterisieren:

Theorem 4.5.8. (Charakterisierung durch Spiele mit Zeugen)
Sei $A \subset \mathcal{N}$ und $A = \mathrm{p}(B)$ für ein $B \subset \mathcal{N} \times \lambda^\omega$ und eine unendliche Ordinalzahl λ. Dann gilt:

(i) Spieler I hat eine Gewinnstrategie in $\tilde{\mathrm{G}}_p(B) \Rightarrow A$ enthählt eine nicht-leere superperfekte Teilmenge P.

(ii) Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $\tilde{\mathrm{G}}_p(B) \Rightarrow A$ ist λ-beschränkt.

Beweis. (i): Habe I eine Gewinnstrategie σ für das Spiel $\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$. Wegen $A = \mathrm{p}(B)$ hat I dann auch eine Gewinnstrategie $\tilde{\sigma}$ für das Spiel $\tilde{\mathrm{G}}(A)$. Nach Theorem 4.5.3 enthält A somit eine nicht-leere superperfekte Teilmenge P.

(ii): Habe Spieler II eine Gewinnstrategie τ.

Gute Sequenz: Eine Sequenz $u = (l_0, s_0, k_1, l_1, s_1, k_2, \ldots, l_n, s_n, k_{n+1})$ mit $s_i \in \omega_*^{<\omega}$ für $i = 0, \ldots, n$ sowie $k_i \in \omega$ für $i = 1, \ldots, n+1$ und $l_j \in \lambda$ für $j = 0, \ldots, n$ heiße **gut**, falls gilt:

$$s_i(0) > k_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \quad \wedge$$
$$k_j \text{ mit } \tau \text{ gespielt für } j = 1, \ldots, n+1.$$

Sequenz gut für $f \in A$: u heiße **gut für** $f \in A$, falls gilt:

$$\exists\, s_{n+1}\ (s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1} \prec f \wedge s_{n+1}(0) > k_{n+1})$$

[6] Für beliebiges $\lambda \in \mathbf{Ord}$ gilt $|\omega \times \lambda| = |\lambda|$ (☞ etwa [Jec03, 3.5]).

Insbesondere ist die leere Sequenz gut für jedes $f \in A$.

Sei nun $(f, g) \in B$ beliebig. Dann muß es eine Sequenz $u = (\underbrace{l_0, s_0}_{I}, \underbrace{k_1}_{II}, \underbrace{l_1, s_1}_{I}, \underbrace{k_2}_{II}, \dots, \underbrace{l_n, s_n}_{I}, \underbrace{k_{n+1}}_{II})$ (eventuell $u = ()$) geben mit:

$$\begin{aligned}
&u \text{ gut } \wedge \text{ gut für } f \wedge \\
&(l_0, \dots, l_n) = (g(0), \dots, g(n)) \prec g \wedge \\
&\neg\exists\ (l_{n+1}, s_{n+1}, k_{n+2})\ (u^\frown(l_{n+1}, s_{n+1}, k_{n+2}) \text{ gut} \wedge \text{ gut für } f \wedge \\
&\qquad\qquad\qquad (l_0, \dots, l_n, l_{n+1}) = (g(0), \dots, g(n), g(n+1)) \prec g)
\end{aligned}$$

Ansonsten könnte Spieler I gewinnen, obwohl Spieler II mit seiner Gewinnstrategie τ spielt (Widerspruch).

Sei nun $r := l_{n+1} := g(n+1)$, dann gilt $f \in M_{(u,r)}$ mit

$$\begin{aligned}
M_{(u,r)} :=& \{f' \in \omega^\omega \mid u \text{ gut für } f' \wedge \\
& \qquad \neg\exists\ (s_{n+1}, k_{n+2})\ (u^\frown(r, s_{n+1}, k_{n+2}) \text{ gut } \wedge \text{ gut für } f'\} \\
=& \{f' \in \omega^\omega \mid \exists\ s_{n+1}\ (s_0{}^\frown \dots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1} \prec f' \wedge s_{n+1}(0) > k_{n+1}) \wedge \\
& \qquad \neg\exists\ (s_{n+1}, k_{n+2})\ ((s_{n+1}(0) > k_{n+1} \wedge k_{n+2}\ \tau\text{-gesp.}) \wedge \\
& \qquad \exists\ s_{n+2}\ (s_0{}^\frown \dots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}{}^\frown s_{n+2} \prec f' \wedge s_{n+2}(0) > k_{n+2}))\}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

wobei „k_{n+2} τ-gesp.“ heißt: $k_{n+2} = \tau(u^\frown(r, s_{n+1}))$. Damit gilt dann

$$A \subset \bigcup_{(u,r)} M_{(u,r)}$$

wobei über die Paare (u, r) vereinigt wird mit u gut und $r \in \lambda$ – da $(u, r) \in \omega^{<\omega} \times \lambda$ und $\omega^{<\omega}$ abzählbar ist, werden $|\lambda|$-viele Mengen vereinigt[7].

Da wir die Mengen $M_{(u,r)}$ [☞ (4.5)] ganz ähnlich wie die Mengen K_u [☞ (4.4)] im Beweis der Hinrichtung von (*ii*) von Theorem 4.5.3 definiert haben (lediglich die Bedeutung von „k_{n+2} τ-gesp.“ ist eine andere), können wir von nun an analog dazu fortfahren.

[7] Für beliebiges $\lambda \in \mathbf{Ord}$ gilt $|\omega \times \lambda| = |\lambda|$ (☞ etwa [Jec03, 3.5], vgl. Fußnote 6).

Um zu zeigen, daß A λ-beschränkt ist, genügt es zu zeigen, daß die $M_{(u,r)}$ λ-kompakt sind, denn dann ist die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{(u,r)} M_{(u,r)}$ λ-kompakter Mengen λ-kompakt und A als Teilmenge einer λ-kompakten Menge λ-beschränkt.

Die $M_{(u,r)}$ sind λ-kompakt: Sei $M_{(u,r)}$ wie oben konstruiert mit $u = (l_0, s_0, k_1, l_1, s_1, k_2, \ldots, l_n, s_n, k_{n+1})$. Dann läßt sich $M_{(u,r)}$ schreiben als

$$M_{(u,r)} = \bigcup_{\widetilde{s_{n+1}}(0)>k_{n+1}} \underbrace{O_{s_0{}^\frown\ldots{}^\frown s_n{}^\frown\widetilde{s_{n+1}}} \cap \Big(\bigcup_{\substack{s_{n+1}(0)>k_{n+1} \\ \exists\ k_{n+2}\ (k_{n+2}\ \tau\text{-gesp.}\wedge s_{n+2}(0)>k_{n+2})}} O_{s_0{}^\frown\ldots{}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}{}^\frown s_{n+2}} \Big)^c}_{=:L_{\widetilde{s_{n+1}}}}.$$

Nun genügt es zu zeigen, daß die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ kompakt sind. Dies ist nach Satz 4.1.2 genau dann der Fall, wenn die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ abgeschlossen und überall endlich verzweigt sind.

Die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ sind abgeschlossen: Das Komplement einer Menge $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ ist als Vereinigung offener Mengen offen, also ist $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ abgeschlossen.

Die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ sind überall endlich verzweigt: Von hier an besteht der einzige Unterschied zum Beweis der Hinrichtung von (ii) von Theorem 4.5.3 in der Definition von $\boxed{k'_{n+2} := \tau(u^\frown(r, s'_{n+1}))}$ im zweiten Fall: Sei $L := L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ für ein $\widetilde{s_{n+1}} \in \omega^{<\omega}$. Es ist zu zeigen, daß

$$\forall\ s \in T_L\ \exists\ k < \omega\ \forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_L \Rightarrow t(0) \not> k).$$

Fall 1: Sei $s \prec \tilde{s} := s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}$ und $s \neq \tilde{s}$ (d.h. s ist ein echtes Anfangsstück von $\tilde{s}$) – etwa $s = (n_0, \ldots, n_i) \prec \tilde{s} = (n_0, \ldots, n_m)$ mit $i \lneq m$. Sei $k := n_{i+1}$, dann gilt $\forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_L \Rightarrow t(0) \not> k)$.

Fall 2: Sei $s \succ s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s_{n+1}$. Etwa $s = s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s'_{n+1}$ mit $s_{n+1} \prec s'_{n+1}$ (also eventuell auch $s_{n+1} = s'_{n+1}$). Dann gilt wegen $s_{n+1}(0) > k_{n+1}$ und $s_{n+1} \prec s'_{n+1}$: $s'_{n+1}(0) > k_{n+1}$. Spielt nun Spieler II $\boxed{k'_{n+2} := \tau(u^\frown(r, s'_{n+1}))}$, so muß wegen (4.5) für jedes $t \in \omega_*^{<\omega}$ für alle $f' \in M_{(u,r)}$ gelten:

$$s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n{}^\frown s'_{n+1}{}^\frown t \not\prec f' \vee t(0) \not> k'_{n+2}.$$

Also gilt falls $t(0) > k'_{n+2}$, daß $s^\frown t \notin T_L$. Zu s existiert also ein $k := k'_{n+2}$ mit $\forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_L \Rightarrow t(0) \not> k)$.

Somit gilt nach Fall 1 und 2, daß die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ überall endlich verzweigt sind.

Damit ist die Hinrichtung von (*ii*) bewiesen. $\Diamond$

Für $\lambda = \omega$ bedeutet λ-*beschränkt* das selbe wie σ-*beschränkt*. In diesem Fall lautet Theorem 4.5.8:

Korollar 4.5.9. (Charakterisierung durch Spiele mit Zeugen)
Sei $A \subset \mathcal{N}$ und $A = \mathrm{p}(B)$ für eine Menge $B \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Dann gilt:

(i) Spieler I hat eine Gewinnstrategie in $\tilde{\mathrm{G}}_p(B) \Rightarrow A$ enthählt eine nicht-leere superperfekte Teilmenge P.

(ii) Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $\tilde{\mathrm{G}}_p(B) \Rightarrow A$ ist σ-beschränkt.

Nach Theorem 4.5.3 folgt aus $A \subset \mathcal{N}$ σ-beschränkt, daß A keine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthält und aus $A \subset \mathcal{N}$ enthält eine nicht-leere superperfekte Teilmenge, daß A nicht σ-beschränkt ist (schließlich können ja nicht gleichzeitig I und II Gewinnstrategien für $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ haben). Unter der Annahme von **AD** gelten daher in Korollar 4.5.9 auch die beiden Rückrichtungen.

Mit Hilfe von Korollar 4.5.9 lassen sich nun im nächsten Kapitel einige Definierbarkeits-Resultate ableiten.

Definierbarkeit

Mittels Korollar 4.5.9 sowie eines Resultates von D.A. Martin und eines weiteren Resultates von Y.N. Moschovakis lassen sich nun Aussagen über die Komplexität von σ-Schranken ableiten.

Relativ einfach einzusehen ist, daß jedes offene (und damit auch jedes abgeschlossene) Spiel $\mathrm{G}(A)$ determiniert ist[8]:

Satz 4.5.10. (Gale-Stewart)
Sei A eine offene Teilmenge des Baireraumes. Dann ist das Spiel $\mathrm{G}(A)$ determiniert.

[8]**Gale-Stewart:** Von David Gale und Frank M. Stewart (☞ [GS53]).

Beweis. Gewinnt Spieler I das Spiel G(A) (ist also das gespielte $f \in A$), so ist Spieler I schon nach endlich vielen Zügen in eine Position gelangt, von der aus er nicht mehr verlieren konnte: Da A offen ist, muß Spieler I die Menge A in irgendeiner offenen Basismenge $O_s \subset A$ treffen. Wenn Spieler I dies geschafft hat, so hat er dafür aber nur endlich viele Züge $\leq \operatorname{lng}(s)$ benötigt. In diesem Fall ist das Spiel also schon nach endlich vielen Zügen entschieden. Ist das Spiel hingegen erst nach unendlich vielen Zügen entschieden, so gewinnt Spieler II, da dies heißt, daß Spieler I die offene Menge A nicht getroffen haben kann.

Angenommen Spieler I hat keine Gewinnstrategie: Eine Gewinnstrategie für Spieler II besteht dann darin, N. Lusins Tip: ≪Avoid losing positions≫ zu befolgen und nur solche Züge abzugeben, die garantieren, daß Spieler I durch seinen nächsten Zug nicht in eine Position gelangt, von der aus er nicht mehr verlieren kann. Spieler II kann auf diese Weise spielen, da sonst Spieler I von Anfang an eine Gewinnstrategie hätte (im Widerspruch zur Annahme, daß Spieler I keine Gewinnstrategie hat). Somit hat Spieler II eine Gewinnstrategie.

Dies zeigt, daß G(A) für offenes A determiniert ist. ◊

Satz 4.5.11. (Definierbarkeit einer σ-Schranke für $\undertilde{\Sigma}^1_1$-Mengen)
Jede $\undertilde{\Sigma}^1_1$-Menge in $\mathcal{N}$ enthält eine nicht-leere superperfekte Teilmenge oder ist σ-beschränkt mit einer σ-Schranke in Δ^1_1.

Beweis. Sei $A \in \undertilde{\Sigma}^1_1(\mathcal{N})$. Dann gilt:

$$f \in A \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{N}\ ((f,g) \in B)$$

für eine abgeschlossene Teilmenge B des Baireraumes. Das Spiel $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ ist also determiniert.

Enthält nun A keine nichtleere superperfekte Teilmenge, dann hat nach Korollar 4.5.9 Spieler II eine Gewinnstrategie in $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$. Nach dem dritten Periodizitätstheorem von Y. N. Moschovakis[9] (☞ [Mos73] oder [Mos80, 6E.1.]) hat Spieler II dann eine Δ^1_1-Gewinnstrategie. Da diese Gewinnstrategie eine σ-Schranke für A definiert folgt, daß A eine σ-Schranke in Δ^1_1 hat. ◊

[9]**Drittes Periodizitätstheorem**: Moschovakis definiert in [Mos80, 6D.] einen **Spielequan-**

Nimmt man ein Resultat von D.A. Martin hinzu, läßt sich die Komplexität von σ-Schranken für $\utilde{\Sigma}^1_{2n+1}$-Mengen abschätzen:

Satz 4.5.12. (Definierbarkeit einer σ-Schranke für $\utilde{\Sigma}^1_{2n+1}$-Mengen) *Ist jede $\utilde{\Delta}^1_{2n}$-Menge in $\mathcal{N}$ determiniert, so enthält jede $\utilde{\Sigma}^1_{2n+1}$-Menge in $\mathcal{N}$ eine nicht-leere superperfekte Teilmenge oder ist σ-beschränkt mit einer σ-Schranke in Δ^1_{2n+1}.*

Beweis. Sei $A \in \utilde{\Sigma}^1_{2n+1}$. Dann gilt:

$$f \in A \Leftrightarrow \exists\, g \in \mathcal{N}\ ((f,g) \in B)$$

für eine $\utilde{\Pi}^1_{2n}$-Menge B. Das Spiel $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ ist also ein $\utilde{\Pi}^1_{2n}$-Spiel.

Sei nun jede $\utilde{\Delta}^1_{2n}$-Menge in $\mathcal{N}$ determiniert. Aus $\utilde{\Delta}^1_{2n}$-Determiniertheit folgt nach einem Resultat von D. A. Martin[10] $\utilde{\Sigma}^1_{2n}$-Determiniertheit. Somit ist dann auch $\tilde{\mathrm{G}}_p\,(B)$ als $\utilde{\Pi}^1_{2n}$-Spiel determiniert. Enthält nun A keine nichtleere superperfekte Teilmenge, dann hat nach Korollar 4.5.9 Spieler II eine Gewinnstrategie in

---

toren $\Game$ für Punktemengen $P \subset \omega \times \mathcal{N}$:

$$\begin{aligned} n \in \Game P &:\Leftrightarrow \Game g((n,g) \in P) \\ &:\Leftrightarrow \text{Spieler I gewinnt das Spiel } \mathrm{G}(A) \text{ mit } A := \{g \in \mathcal{N} \mid (n,g) \in P\} \end{aligned}$$

und für Punktklassen Γ: $\Game\Gamma := \{\Game P \mid P \in \Gamma(\omega \times \mathcal{N})\}$. Der so definierte Spielquantor $\Game$ „verschiebt“ die Lightface-Hierarchie (☞ [Mos80, 6D.]):

$$\Game\Sigma^1_1 = \Pi^1_1, \quad \Game\Pi^1_1 = \Sigma^1_2, \quad \Game\Sigma^1_2 = \Pi^1_3, \quad \Game\Pi^1_3 = \Sigma^1_4, \ldots. \tag{4.6}$$

Unter der Annahme von projektiver Determiniertheit erfüllt die Boldface-Hierarchie die Voraussetzungen des 3. Periodizitätstheorems. Mit $\Gamma = \Sigma^1_{2n}$ gilt $\Game\Gamma = \Game\Sigma^1_{2n} \underset{(4.6)}{=} \Pi^1_{2n+1}$. Hat Spieler I nun eine Gewinnstrategie σ für das Spiel $\mathrm{G}(A)$ mit $A \in \Gamma$, so hat nach dem Dritten Periodizitätstheorem Spieler I eine $\Game\Gamma$-rekursive also Π^1_{2n+1}-rekursive Gewinnstrategie σ (d.h. der Graph G_σ von σ ist Π^1_{2n+1}). Π^1_{2n+1}-rekursive Funktionen liegen aber in Δ^1_{2n+1} (Sei $\sigma:\ \omega \longrightarrow \omega$ eine Strategie und $\mathrm{G}_\sigma \in \Pi^1_{2n+1}$, dann sieht man $\mathrm{G}^c_\sigma = \{(m,n) \mid \exists\, l < \omega\ (\sigma(m) = l \wedge l \neq n)\} \in \Pi^1_{2n+1}$ ☞ etwa [Mos80, 3E.2]). Aus Symmetriegründen erhält man dieses Resultat auch für Spieler II.

[10] **Satz(Martin):** Unter der Voraussetzung von **DC** gilt für alle $n < \omega$: Ist jede $\utilde{\Delta}^1_{2n}$-Menge determiniert, so ist auch jede $\utilde{\Sigma}^1_{2n}$-Menge determiniert. (☞ [KS85, 196ff] oder [Kan03, 30.10])

Das Resultat von D.A. Martin setzt das Axiom der abhängigen Auswahl **DC** voraus. **DC** besagt, daß jeder nicht-leere beschnittene Baum auf einer Menge A einen unendlichen Pfad

$\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$. Nach einem Resultat von Y. N. Moschovakis[11] hat Spieler II dann eine Gewinnstrategie in Δ^1_{2n+1} (☞ [Mos73] oder [Mos80, 6E.1.]). Da diese Gewinnstrategie eine σ-Schranke für A definiert, heißt dies, daß A eine σ-Schranke in Δ^1_{2n+1} hat. $\diamondsuit$

hat (☞ etwa [Kec95, 20.3f, S. 139]). Eine gleichwertige Formulierung lautet:

$$\forall\ X\ \forall\ R\ (X \neq \varnothing \wedge R \subset X \times X \wedge \forall\ x \in X\ \exists\ y \in X\ (\langle x, y\rangle \in R)$$
$$\Rightarrow \exists\ f \in X^\omega\ \forall\ n < \omega\ (\langle f(n), f(n+1)\rangle \in R))$$

(☞ etwa [Jec03, 5.4f] oder [Kan03, 11.1f]).

DC ist stärker als $\mathbf{AC}^\omega$, d.h. **DC** $\Rightarrow$ $\mathbf{AC}^\omega$ (☞ etwa [Jec03, 5.6, S. 60]). Wie $\mathbf{AC}^\omega$ ist jedoch auch **DC** verträglich mit **AD** (☞ etwa [Kan03, 30.29] vgl. Satz 2.3.6).

[11] ☞ Fußnote 9.

5 Verallgemeinerte Kategorie

Die Baire-Kategorie und die σ-Kategorie haben im Baireraum eine ganz ähnliche spieltheoretische Charakterisierung [☞ Kapitel 3.6 und 4.5]. Diese Gemeinsamkeit läßt sich nun dazu nutzen, um die verschiedenen Kategorien-Konzepte des Baire-Raumes in einer spieltheoretischen Definition mittels sogenannter *Bedingungsmengen* zu verallgemeinern [☞ Kapitel 5.2].

Zunächst definieren wir in Kapitel 5.1 für die verallgemeinerte Kategorie ein verallgemeinertes Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ für Teilmengen A des Raumes X^ω. In dem verallgemeinerten Spiel werden die vorherigen Spiele $\mathrm{G}^{**}(A)$ und $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ dahingehend verallgemeinert, daß Spieler II nun keine endlichen Sequenzen oder natürliche Zahlen mehr spielt, sondern *Bedingungen* für den weiteren Spielverlauf.

In Kapitel 5.2 dienen anschließend die Charakterisierungen aus Satz 4.1.2 für kompakte und aus Satz 4.2.4 (*ii*) für σ-beschränkte Teilmengen des Baireraumes als Vorlagen für die Definition der allgemeineren Begriffe *$\mathcal{B}$-dirgends dicht* und *$\mathcal{B}$-mager* [☞ Definitionen 5.2.1 und 5.2.2].

In Kapitel 5.3 wird der Begriff der *$\mathcal{B}$-perfekten* Teilmenge des Bairerauems eingeführt. Beispiel 5.3.10 zeigt, daß die nicht-leeren $\mathcal{B}$-perfekten Teilmengen eine Verallgemeinerung von Teilmengen des Baireraumes sind, die eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthalten.

Abschließend wird in Kapitel 5.4 gezeigt, daß sich die Theoreme aus den Kapiteln 3.6 und 4.5 analog auf die verallgemeinerte Kategorie übertragen lassen [☞ Theoreme 5.4.1 und 5.4.4].

Kapitel 5.5 gibt eine Übersicht über die wichtigsten im Laufe der Arbeit entwickelten Begriffe und wie sie sich zueinander verhalten.

Die Definitionen sowie teilweise auch die Aussagen der Lemmata und Sätze (ohne Beweise) finden sich in *„On a notion of smallness for subsets of the Baire space“* von A. Kechris [Kec77, 6]. Die Beispiele (ohne Beweise) stammen alle aus [Kec77, 6]. Theorem 5.4.1 sowie die Aussage von Theorem 5.4.4 finden sich in [Kec77, 3.1, 3.3].

Sei X in diesem Kapitel eine Menge mit mehr als einem Element, $(X, \mathbf{P}(X))$ der topologische Raum X mit der diskreten Topologie und X^ω der dazugehörige Produktraum der Folgen in X. Für $X = \omega$ erhält man so etwa den Baire-Raum und für $X = \{0, 1\}$ den Cantorraum. Die Menge $X^{<\omega}$ sei analog zum Fall $X = \omega$ definiert als Menge der endlichen Sequenzen von Elementen aus X. Die Menge $X_*^{<\omega}$ bezeichne $X^{<\omega}$ ohne die leere Sequenz $()$. Die offenen Basismengen seien in X^ω analog zu den offenen Basismengen des Baireraumes definiert:

$$O_u := \{f \in X^\omega \mid u \prec f\}$$

mit $u \in X^{<\omega}$.

Mit der Metrik

$$d(f, g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \delta(f(n), g(n)) \qquad \delta(i, j) := \begin{cases} 0 & \text{falls } i = j \\ 1 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

für $f, g \in X^\omega$ läst sich X^ω in gleicher Weise wie der Baireraum vollständig metrisieren. Nach dem Baire'schen Kategoriensatz 3.3.11 ist X^ω daher ein Baire'scher Raum.

Ist X abzählbar, so hat X^ω eine abzählbare Basis (☞ vgl. Lemma 3.5.6) und ist somit nach Lemma 3.5.8 separabel und somit polnisch (☞ vgl. Satz 3.5.9).

In X^ω gilt analog zu Lemma 3.5.2, daß zwei offene Basismengen in X^ω entweder ineinander liegen oder einen leeren Durschnitt haben: Seien O_s und O_t offene Basismengen in X^ω mit $O_s \cap O_t \neq \varnothing$, dann gilt

$$O_s \subset O_t \text{ oder } O_t \subset O_s.$$

Die offenen Basismengen O_u von X^ω sind auch abgeschlossen (analog zu Lemma 3.5.3).

Ist die Menge X nicht endlich, so sind die offenen Teilmengen des Raumes X^ω nicht kompakt (☞ vgl. Lemma 3.5.4).

5.1 Verallgemeinerte Spiele

In den Spielen $\mathrm{G}^{**}(A)$, $\mathrm{G}_p^{**}(B)$, $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ und $\tilde{\mathrm{G}}_p(B)$ läßt sich die Spielweise von II als das Stellen von gewissen Bedingungen an den weiteren Spielverlauf auffassen. Beispielsweise spielt II in der Situation $(s_0, k_1, s_1, \ldots, k_n, s_n)$ des Spieles $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ ein $k_{n+1} < \omega$. Nach den Regeln von $\tilde{\mathrm{G}}(A)$ entspricht dies der Bedingung $s_{n+1}(0) > k_{n+1}$ für den nächsten Zug s_{n+1} von I. In dem verallgemeinerten Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ wird dies nun dahingehend verallgemeinert, daß Spieler II nicht mehr konkrete Bedingungen, sondern nur noch abstrakte Elemente b (genannt *Bedingungen*) aus einer Menge $\underline{B}$ (genannt *Bedingungsmenge*) spielt. Die Bedingungen genügen dabei drei natürlichen Eigenschaften: Monotonie, Unterscheidbarkeit und Reduzierbarkeit (diese Eigenschaften sind *natürlich* in dem Sinne, daß einige bereits aus den vorherigen Kapiteln bekannte Konzepte diese Eigenschaften erfüllen ☞ Beispiele 5.1.3 und 5.1.4).

Zunächst muß an dieser Stelle also der Begriff der „Bedingungsmenge“ präzisiert werden.

Definition 5.1.1. (Bedingungsmenge)
Sei $\underline{B}$ eine nicht-leere Menge – die Elemente von $\underline{B}$ heißen **Bedingungen** – und $\underline{E}$ eine Funktion, die jedem Element $b \in \underline{B}$ eine nicht-leere Menge $\underline{Erf}(b)$ oder $\underline{E}(b)$ von nicht-leeren endlichen Sequenzen von Elementen aus X (mit X wenigstens zweielementig) zuordnet:

$$\underline{E} : \underline{B} \longrightarrow X_*^{<\omega} .$$

Man schreibt auch

$$u \Vdash_{\underline{E}} b \text{ statt } u \in \underline{E}(b) \qquad (u \in X_*^{<\omega}, b \in \underline{B})$$

und sagt u **erfüllt** b. Der Einfachheit halber schreibt man auch $u \Vdash b$. Dann heißt das Paar $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ eine **Bedingungsmenge für** X^ω oder einfach **Bedingungsmenge** wenn gilt:

1) (Monotonie:)
$\forall\, u, v \in X_*^{<\omega}\ \forall\, b \in \underline{B}\ (u \prec v \wedge u \Vdash_{\underline{E}} b \Rightarrow v \Vdash_{\underline{E}} b)$,

2) (Unterscheidbarkeit:)
$\forall\, x \in X\ \exists\, b \in \underline{B}\ \forall\, u \in X_*^{<\omega}\ (u \Vdash_{\underline{E}} b \Rightarrow u(0) \neq x)$.

3) (Reduzierbarkeit:)
Es gibt eine Abbildung $l :\ \underline{B} \longrightarrow \omega$ so, daß gilt

$$\begin{aligned}\forall\, b \in \underline{B}\ \forall\, u, v \in X_*^{<\omega}\ [(u \prec v \wedge u \nVdash_{\underline{E}} b \wedge v \Vdash_{\underline{E}} b) \Rightarrow\\ \exists\, b' \in \underline{B}\ (\underbrace{l(b') \lneqq l(b)}_{!} \wedge \forall\, w \in X_*^{<\omega}\ (w \Vdash_{\underline{E}} b' \Leftrightarrow u^\frown w \Vdash_{\underline{E}} b))].\end{aligned}$$

Die Intuition hierzu ist folgende: Die Bedingungsmenge $\mathcal{B} = (\underline{B}, \underline{E})$ legt für das noch zu definierende Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ (mit $A \subset X^\omega$) fest, welche die weiteren Zugmöglichkeiten von Spieler I einschränkenden Bedingungen Spieler II spielen kann. Für $\mathcal{B}$ fordert die obige Definition dabei im einzelnen:

1) (Monotonie:)
Die Mengen $\underline{E}(b) \subset X_*^{<\omega}$ sind abgeschlossen gegen Erweiterungen $u \prec v$ von Elementen $u \in \underline{E}(b)$.

2) (Unterscheidbarkeit:)
Für jedes $x \in X$ gibt es eine Bedingung $b_x \in \underline{B}$, die aussagt, daß das erste Glied $u(0)$ einer endlichen Sequenz $u \neq ()$ ungleich x ist. Daraus folgt später unter anderem, daß jede einelementige Menge *klein* ist [☞ Satz 5.2.8].

3) (Reduzierbarkeit:)
Im Falle einer Erweiterung v von $u \neq ()$, die eine Bedingung b erfüllt, die u aber nicht erfüllt, gibt es eine Bedingung b', die über endliche Sequenzen $w \neq ()$ aussagt, ob $u^\frown w$ die Bedingung b erfüllt oder nicht. Diese Bedingung b' ist *reduziert* gegenüber b in dem Sinne, daß $l(b') \lneqq l(b)$ gilt.

Von nun an stehen – falls nicht ausdrücklich anders erwähnt – s, t, u, v, w und $s_i, t_i, \ldots$ (mit $i < \omega$) für endliche sowie f, g, h und $f_i, g_i, \ldots$ (mit $i < \omega$) für unendliche Sequenzen von Elementen in einer vorgegebenen Menge X. Außerdem stehen b und b_i (mit $i < \omega$) für Bedingungen (Elemente aus einer vorgegebenen Bedingungsmenge $\underline{B}$).

Beispiel 5.1.2. ($X = \underline{B} = 2$)
Das Tupel $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ mit

$$
\begin{aligned}
X &:= 2 := \{0, 1\}\,, \\
\underline{B} &:= 2, \\
u \Vdash_{\underline{E}} b &:\Leftrightarrow u(0) = b \ (\textit{für } b \in \underline{B}), \\
l(b) &:= 0 \textit{ für alle } b \in \underline{B}
\end{aligned}
$$

ist eine Bedingungsmenge für X^ω.

Beweis. *Monotonie:* $u \prec v \wedge u(0) = b \Rightarrow v(0) = b$.

Unterscheidbarkeit: Sei für beliebiges $x \in 2$

$$
b_x := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 1, \\ 1 & \text{falls } x = 0. \end{cases}
$$

Dann gilt für beliebiges $u \in 2^{<\omega}$: $u \Vdash b_x \Rightarrow u(0) \neq x$.

Reduzierbarkeit: Die Reduzierbarkeit ist trivialerweise erfüllt, da der Fall $u \prec v$ mit $u(0) \neq b \wedge v(0) = b$ nicht eintreten kann. $\Diamond$

Beispiel 5.1.3. (X beliebig*, $\underline{B} = X^{<\omega}$)
Das Tupel $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ mit

$$
\begin{aligned}
&X \textit{ sei beliebig } (* : \textit{mit wenigstens zwei Elementen}), \\
\underline{B} &:= X_*^{<\omega}, \\
u \Vdash_{\underline{E}} b &:\Leftrightarrow u \succ b \ (\textit{für } b \in \underline{B}), \\
l(b) &:= \mathrm{lng}(b) \textit{ für alle } b \in \underline{B}
\end{aligned}
$$

ist eine Bedingungsmenge für X^ω.

Beweis. *Monotonie:* $u \prec v \wedge b \prec u \Rightarrow b \prec v$.

Unterscheidbarkeit: Sei für beliebiges $x \in X$

$$b_x := (y) \text{ mit } y \neq x.$$

Dann gilt für beliebiges $u \in X^{<\omega}$: $u \Vdash b_x \Rightarrow ((y) \prec u \wedge y \neq x) \Rightarrow u(0) \neq x$.

Reduzierbarkeit: Seien $u, v, b \in X_*^{<\omega} = \underline{B}$ mit $u \prec v$ und $b \not\prec u \wedge b \prec v$. Sei dann $b' \in \underline{B}$ das Ergänzugsstück von u zu b:

$$u^\frown b' = b.$$

Dann gilt $\operatorname{lng}(b') \lneq \operatorname{lng}(b)$ ($\operatorname{lng}(b') \neq \operatorname{lng}(b)$ da u nicht leer ist) und für $w \in X_*^{<\omega}$ erhält man:

$$b' \prec w \Leftrightarrow b = u^\frown b' \prec u^\frown w.$$

$\Diamond$

Beispiel 5.1.4. ($X = \underline{B} = \omega$)
Das Tupel $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ mit

$$\begin{aligned} X &:= \omega, \\ \underline{B} &:= \omega, \\ u \Vdash_{\underline{E}} b &:\Leftrightarrow u(0) > b \ (\textit{für } b \in \underline{B}), \\ l(b) &:= 0 \textit{ für alle } b \in \underline{B} \end{aligned}$$

ist eine Bedingungsmenge für X^ω.

Beweis. *Monotonie:* $u \prec v \wedge u(0) > b \Rightarrow v(0) > b$.

Unterscheidbarkeit: Sei für beliebiges $x \in X$

$$b_x := x.$$

Dann gilt für beliebiges $u \in X^{<\omega}$: $u \Vdash b_x \Rightarrow u(0) > x \Rightarrow u(0) \neq x$.

Reduzierbarkeit: Die Reduzierbarkeit ist trivialerweise erfüllt, da der Fall $u \prec v$ mit $u(0) \not> b \wedge v(0) > b$ nicht eintreten kann. $\Diamond$

Nun wird es Zeit für die Definition der verallgemeinerten Spiele:

Definition 5.1.5. (verallgemeinertes Spiel ohne Zeugen $\mathbf{G}^{\mathcal{B}}(A)$)
Sei $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ eine Bedingungsmenge. Für eine beliebige Menge $A \subset X^\omega$ definiert man dann das **verallgemeinerte Banach-Mazur-Spiel $\mathbf{G}^{\mathcal{B}}(A)$** wie folgt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
I: & u_0 \arrow[dr] & & u_1 \arrow[dr] & & u_2 \arrow[dr] & \\
II: & & b_1 \arrow[ur] & & b_2 \arrow[ur] & & \ldots
\end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd – Spieler I spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $u_0 \in X_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine Bedingung $b_1 \in \underline{B}$, Spieler I spielt eine nicht-leere endliche Sequenz $u_1 \in X_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine Bedingung $b_2 \in \underline{B}$ u.s.w.. Sei nun $f := u_0 {}^\frown u_1 {}^\frown u_2 {}^\frown \ldots$. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

1) $f \in A$,

2) $\forall\, i \geq 1\ (u_i \Vdash_{\underline{E}} b_i)$.

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. A nennt man dabei auch die **Gewinnmenge**.

Die Begriffe **(Gewinn-)Strategie für I (bzw. für II)** und **determiniert** sind für die Spiele $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ analog zu den Definitionen 2.1.2 (bzw. 2.1.3) und 2.3.1 definiert.

Sind X und $\mathcal{B}$ abzählbar, läßt sich dieses Spiel mit einer Kodierung der in $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ gespielten Sequenzen und Bedingungen in die natürlichen Zahlen auch als ein Spezialfall der Grundvariante [☞ Definition 2.1.1)] auffassen. Analog zu Lemma 3.6.6, Lemma 4.5.2 und Lemma 4.5.6 gilt:

Lemma 5.1.6. (Determiniertheit)
Falls **AD** *gilt und die Mengen X und $\underline{B}$ abzählbar sind, so sind auch die obigen Spiele $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ determiniert.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.6.6. ◊

Für die Bedingungsmenge $\mathcal{B}$ aus Beispiel 5.1.3, $X := \omega$ und $A \subset \mathcal{N}$ erhält man mit $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ das Spiel $\mathrm{G}^{**}(A)$ (ob nun wie in $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ inneinanderliegende endliche Sequenzen gespielt oder die Fortsetzungen aneinandergereiht werden wie in $\mathrm{G}^{**}(A)$ ist unerheblich). Dieses Spiel diente in Kapitel 3.6 zur Beschreibung der Baire-Kategorie.

Für die Bedingungsmenge $\mathcal{B}$ aus Beispiel 5.1.4 und $A \subset \mathcal{N}$ erhält man mit $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ das Spiel $\tilde{\mathrm{G}}(A)$. Dieses Spiel diente in Kapitel 4.5 zur Beschreibung der σ-Kategorie.

5.2 $\mathcal{B}$-magere Mengen

Die beiden Begriffe *mager* (aus Kapitel 3.1) und *σ-beschränkt* (aus Kapitel 4.2), die in der Baire- bzw. σ-Kategorie die kleinen Mengen (im Sinne von Definition 1.1.1) kennzeichnen, sollen nun in dem allgemeineren spieltheoretischen Begriff *$\mathcal{B}$-mager* vereinheitlicht werden. Dabei gehen wir so vor, daß wir zunächst den Begriff der *kompakten* Teilmenge mittels der Charakterisierung in Satz 4.1.2 zum Begriff der *$\mathcal{B}$-nirgends dichten* Teilmenge verallgemeinern. Darunter fallen dann auch die *nirgends dichten und abgeschlossen* Teilmengen. Die $\mathcal{B}$-nirgends dichten Teilmengen haben die Idealeigenschaft. Um ein σ-Ideal zu erhalten, verallgemeinern wir in einem nächsten Schritt die Charakterisierung der σ-beschränkten Teilmengen aus Satz 4.2.4 (ii) und erhalten den Begriff der *$\mathcal{B}$-mageren* Teilmenge, der sowohl die mageren als auch die σ-beschränkten Teilmengen umfaßt.

Die kompakten Teilmengen des Baireraumes lassen sich nach Satz 4.1.2 vollständig charakterisieren als diejenigen abgeschlossenen Teilmengen A, deren Bäume T_A überall endlich verzweigt sind:

$$\forall\ s \in T_A\ \exists\ k < \omega\ \forall\ t \in \omega_*^{<\omega}\ (s^\frown t \in T_A \Rightarrow t(0) \not> k). \tag{5.1}$$

Als eine Verallgemeinerung dieser Charakterisierung erhält man den Begriff der $\mathcal{B}$-nirgends dichten Teilmengen:

Definition 5.2.1. ($\mathcal{B}$-nirgends dicht)
Sei $A \subset X^\omega$ abgeschlossen und $\mathcal{B} = (\underline{B}, \underline{E})$ eine Bedingungsmenge. Dann heißt A **abgeschlossen $\mathcal{B}$-nirgends dicht** oder einfach **$\mathcal{B}$-nirgends dicht**, falls gilt:

$$\forall\ u \in T_A\ \exists\ b \in \underline{B}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_A \Rightarrow v \not\Vdash b).$$

Die σ-beschränkten Teilmengen des Baireraumes sind nun laut Satz 4.2.4 gerade diejenigen Teilmengen A, die sich als Teilmengen σ-kompakter Mengen darstellen lassen:

$$A \subset \bigcup_{n<\omega} A_n \qquad \text{wobei } \forall\, n < \omega\ (A_n \subset \omega^\omega \text{ kompakt}).$$

Analog dazu definiert man den allgemeineren Begriff der $\mathcal{B}$-mageren Teilmenge:

Definition 5.2.2. ($\mathcal{B}$-mager)
Sei $A \subset X^\omega$ beliebig und $\mathcal{B} = (\underline{B}, \underline{E})$ eine Bedingungsmenge. Dann heißt A **$\mathcal{B}$-mager**, falls A Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung abgeschlossen $\mathcal{B}$-nirgends dichter Teilmengen von X^ω ist:

$$A \subset \bigcup_{n<\omega} A_n \qquad \text{wobei } \forall\, n < \omega\ (A_n \subset X^\omega\ \mathcal{B}\text{-nirgends dicht}).$$

Die abzählbare Vereinigung $\mathcal{B}$-nirgends dichter Teilmengen von X^ω ist i.a. nicht abgeschlossen und somit nicht wieder $\mathcal{B}$-nirgends dicht. Offene Basismengen $O_u \subset X^\omega$ sind nicht $\mathcal{B}$-nirgends dicht, da es sonst für $u \in T_{O_u}$ eine Bedingung $b \in \underline{B}$ gibt, mit $\forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_{O_u} \Rightarrow v \not\Vdash b)$, da nun für alle $v \in X_*^{<\omega}$ gilt, daß $u^\frown v \in T_{O_u}$, ist dies gleichbedeutend mit $\forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (v \not\Vdash b)$ – laut Definition 5.1.1 ist die Menge der $v \in X_*^{<\omega}$, die eine Bedingung $b \in \underline{B}$ erfüllen, aber nie leer. Da Teilmengen $\mathcal{B}$-nirgends dichter Mengen wieder $\mathcal{B}$-nirgends dicht sind (dies folgt direkt aus der Definition 5.2.1), können keine offenen Mengen $\mathcal{B}$-nirgends dicht sein (eine offene Menge enthält ja immer eine offene Basismenge).

Eine Bedingungsmenge $\mathcal{B}$ heiße **gegen $\wedge$ abgeschlossen**, falls:

$$\forall\, b_0, b_1 \in \underline{B}\ \exists\, b \in \underline{B}\ \forall\, f \in X_*^{<\omega}\ [(f \Vdash b_0 \wedge f \Vdash b_1) \Leftrightarrow f \Vdash b]$$

Satz 5.2.3. (Ideal der $\mathcal{B}$-nirgends dichten Teilmengen)
Sei die Bedingungsmenge $\mathcal{B}$ gegen $\wedge$ abgeschlossen. Dann bilden die $\mathcal{B}$-nirgends dichten Teilmengen in X^ω ein Ideal.

Beweis. Seien $A, B \subset X^\omega$.

Mit $B \subset A$ ist auch $T_B \subset T_A$. Aus der Definition 5.2.1 von $\mathcal{B}$-nirgends dicht folgt daher direkt, daß mit A auch B $\mathcal{B}$-nirgends dicht ist.

Wegen $T_{A \cup B} = T_A \cup T_B$ folgt direkt aus der Definition 5.2.1 von $\mathcal{B}$-nirgends dicht, daß mit A, B $\mathcal{B}$-nirgends dicht auch $A \cup B$ $\mathcal{B}$-nirgends dicht sein muß.

Demnach bilden die $\mathcal{B}$-nirgends dichten Teilmengen in X^ω ein Ideal. $\Diamond$

Die $\mathcal{B}$-mageren Teilmengen in X^ω verhalten sich nun so, wie wir es im einführenden Kapitel 1.1 von „kleinen“ Mengen gefordert haben:

Satz 5.2.4. (σ-Ideal der $\mathcal{B}$-mageren Teilmengen)
Die $\mathcal{B}$-mageren Teilmengen in X^ω bilden ein σ-Ideal.

Beweis. Aus der Definition 5.2.2 von $\mathcal{B}$-mager folgt direkt, daß das System $\mathcal{B}$-magerer Teilmengen von X^ω abgeschlossen ist gegenüber Teilmengen.

Da eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Vereinigungen wieder eine abzählbare Vereinigung ergibt, folgt aus der Definition 5.2.2 von $\mathcal{B}$-mager, daß das System $\mathcal{B}$-magerer Teilmengen von X^ω abgeschlossen gegenüber abzählbaren Vereinigungen ist.

Demnach bilden die $\mathcal{B}$-mageren Teilmengen in X^ω ein σ-Ideal. $\Diamond$

Beispiel 5.2.5. (In Bsp. 5.1.2: $\mathcal{B}$-mager $\Leftrightarrow$ abzählbar)
In Beispiel 5.1.2 gilt mit $X := \underline{B} := 2 := \{0,1\}$ und $u \Vdash b :\Leftrightarrow u(0) = b$ für $A \subset 2^\omega$:

(i) A ist $\mathcal{B}$-nirgends dicht genau dann, wenn $A = \{f\}$ für ein $f \in X^\omega$.

(ii) A ist $\mathcal{B}$-mager genau dann, wenn A abzählbar ist.

Beweis. (i) In Beispiel 5.1.2 gilt:

$$\begin{aligned} & A\ \mathcal{B}\text{-nirgends dicht} \\ \underset{\text{Def. 5.2.1}}{\Leftrightarrow} & \ \forall\, u \in T_A\ \exists\, k < 2\ \forall\, v \in 2_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_A \Rightarrow v(0) \neq k) \text{ und } A \text{ abg.} \\ \Leftrightarrow & A = \{f\} \text{ für ein } f \in 2^\omega \end{aligned}$$

Dabei sind Singleton-Mengen in 2^ω abgeschlossen, da ihr Komplement $\{f\}^c = \bigcup_{u \not\prec f} O_u$ offen ist.

(ii) In Beispiel 5.1.2 gilt:

$$\begin{aligned} & A\ \mathcal{B}\text{-mager} \\ \underset{(i)}{\Leftrightarrow} & A \subset \bigcup_{i<\omega} \{f_i\} \text{ für } (f_i \in 2^\omega)_i \\ \Leftrightarrow & A \text{ ist abzählbar} \end{aligned}$$

$\Diamond$

Beispiel 5.2.6. (In Bsp. 5.1.3: $\mathcal{B}$-mager $\Leftrightarrow$ mager)

In Beispiel 5.1.3 gilt mit einer beliebigen Menge X mit wenigstens zwei Elementen, $\underline{B} := X^{<\omega}$ und $u \Vdash b :\Leftrightarrow u \succ b$ für $A \subset X^\omega$:

(i) A ist $\mathcal{B}$-nirgends dicht genau dann, wenn A abgeschlossen und nirgends dicht ist.

(ii) A ist $\mathcal{B}$-mager genau dann, wenn A mager ist.

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$: Sei in Beispiel 5.1.3 A $\mathcal{B}$-nirgends dicht – d.h. (laut Definition 5.2.1):

$$\begin{aligned} & \forall\ u \in T_A\ \exists\ s \in X_*^{<\omega}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_A \Rightarrow s \not\succ v) \text{ und } A \text{ abg.} \\ \Leftrightarrow & \forall\ u \in T_A\ \exists\ s \in X^{<\omega}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_A \Rightarrow u^\frown s \not\succ u^\frown v) \text{ und } A \text{ abg.} \\ \Leftrightarrow & \forall\ O_u\ \exists\ O_{u^\frown s} \subset O_u\ (O_{u^\frown s} \not\subset A) \text{ und } A \text{ abg.} \\ \Leftrightarrow & A \text{ nirgends dicht und } A \text{ abg.} \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$: Nach (i) sind in Beispiel 5.1.3 $\mathcal{B}$-nirgends dichte abgeschlossene Mengen auch nirgends dicht. Also sind in Beispiel 5.1.3 $\mathcal{B}$-magere Mengen (also Teilmengen abzählbarer Vereinigungen $\mathcal{B}$-nirgends dichter Mengen) insbesondere mager (also Teilmengen abzählbarer Vereinigungen nirgends dichter Mengen).

(ii) $\Leftarrow$: In Beispiel 5.1.3 sind magere Mengen auch $\mathcal{B}$-mager, da gilt:

$$A \text{ nirgends dicht} \Rightarrow \overline{A} \text{ nirgends dicht.}$$

Es gilt A nirgends dicht $\Rightarrow$ $\overline{A}$ nirgends dicht: Sei $A \subset X^\omega$ nirgends dicht. Sei etwa $G \subset A^c$ dicht und offen. Dann ist $G \cap \overline{A}^c \subset \overline{A}^c$ dicht und offen. Also ist $\overline{A}$ nirgends dicht.

Insgesamt gilt also, daß in Beispiel 5.1.3 magere Mengen auch $\mathcal{B}$-mager sind. $\Diamond$

Beispiel 5.2.7. (In Bsp. 5.1.4: $\mathcal{B}$-mager $\Leftrightarrow$ σ-beschränkt)
In Beispiel 5.1.4 gilt mit $X := \underline{B} := \omega$ und $u \Vdash b :\Leftrightarrow u(0) > b$ für $A \subset \omega^\omega$:

(i) *A ist $\mathcal{B}$-nirgends dicht genau dann, wenn A kompakt ist.*

(ii) *A ist $\mathcal{B}$-mager genau dann, wenn A σ-beschränkt ist.*

Beweis. (*i*): Da der Kompaktheitsbegriff gerade die Vorlage für unsere Definition von *$\mathcal{B}$-nirgends dicht* war ist klar, daß *$\mathcal{B}$-nirgends dicht* und *kompakt* in Beispiel 5.1.4 äquivalent sind [☞ Satz 4.1.2 und Definition 5.2.1].

(*ii*): Ebenso war der Begriff *σ-beschränkt* unser Vorbild für die Definition des Begriffes *$\mathcal{B}$-mager*:

$$\begin{aligned} &A\ \mathcal{B}\text{-mager} \\ &\underset{\text{Def. 5.2.2}}{\Leftrightarrow} A \subset \bigcup_{n<\omega} A_i \text{ mit } A_i\ \mathcal{B}\text{-nirgends dicht} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &A\ \sigma\text{-beschränkt} \\ &\underset{\text{Satz 4.2.4 }(ii)}{\Leftrightarrow} A \subset \bigcup_{n<\omega} A_i \text{ mit } A_i \text{ kompakt} \end{aligned}$$

Somit folgt (*ii*) dann aus (*i*). ◊

Satz 5.2.8. ($\mathcal{B}$-nirgends dicht, $\mathcal{B}$-mager)
Sei $A \subset X^\omega$ beliebig und $\mathcal{B} = (\underline{B}, \underline{E})$ eine Bedingungsmenge. Dann gilt:

(i) *A einelementig $\Rightarrow$ A $\mathcal{B}$-nirgends dicht.*

(ii) *A abzählbar $\Rightarrow$ A $\mathcal{B}$-mager.*

(iii) *A $\mathcal{B}$-nirgends dicht $\Rightarrow$ A nirgends dicht.*

(iv) *A $\mathcal{B}$-mager $\Rightarrow$ A mager.*

Beweis. **(i) einelementig $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$-nirgends dicht:**
Sei $A \subset X^\omega$ einelementig – etwa $A = \{f\}$ mit $f \in X^\omega$. Einelementige Teilmengen von X^ω sind abgeschlossen (s.o.).

Es bleibt zu zeigen, daß für A gilt:

$$\forall\ u \in T_A\ \exists\ b \in \underline{B}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_A \Rightarrow v \not\Vdash b).$$

Es gilt $T_A = \{u \in X^{<\omega} \mid u \prec f\}$. Dann gibt es nach Definition 5.1.1 2) zu $f(\mathrm{lng}(u)) \in X$ – und somit zu jedem $u \in T_A$ – eine Bedingung b_u mit:

$$\forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (v \Vdash_{\underline{E}} b_u \Rightarrow v(0) \neq f(\mathrm{lng}(u))).$$

Die Bedingung b_u stellt also sicher, daß ein v, das b_u erfüllt, u nicht innerhalb von f fortsetzt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\forall\ u \in T_A\ \exists\ b_u \in \underline{B}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ &(v \Vdash_{\underline{E}} b_u \Rightarrow v(0) \neq f(\mathrm{lng}(u)))\\ \ldots&(v \Vdash_{\underline{E}} b_u \Rightarrow u^\frown v \not\prec f)\\ \ldots&(v \Vdash_{\underline{E}} b_u \Rightarrow u^\frown v \notin T_A)\\ \ldots&(u^\frown v \in T_A \Rightarrow v \not\Vdash_{\underline{E}} b_u)\end{aligned}$$

wobei ja für $u \in X_*^{<\omega}$ gilt: $u = (u(0), \ldots u(\mathrm{lng}(u) - 1))$.

Damit ist laut Definition 5.2.1 gezeigt, daß A $\mathcal{B}$-nirgends dicht.

(ii) abzählbar $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$-mager:
Sei $A \subset X^\omega$ abzählbar. Dann ist A abzählbare Vereinigung einelementiger Teilmengen von X^ω und somit nach (i) abzählbare Vereinigung abgeschlossen $\mathcal{B}$-nirgends dichter Teilmengen von X^ω. Nach Definition 5.2.2 ist A also $\mathcal{B}$-mager.

(iii) $\mathcal{B}$-nirgends dicht $\Rightarrow$ nirgends dicht: Sei A $\mathcal{B}$-nirgends dicht. Also gilt:

$$\forall\ u \in T_A\ \exists\ b \in \underline{B}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_A \Rightarrow v \not\Vdash b). \tag{5.2}$$

Angenommen es gibt ein $O_u \subset A$. Für u sei dann b_u die Bedingung, für die gilt:

$$\forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_A \Rightarrow v \not\Vdash b). \tag{5.3}$$

Solch ein b_u exitiert nach (5.2). Laut Definition 5.1.1 enthält $\underline{E}(b_u)$ dann eine nicht-leere Sequenz $v \in X_*^{<\omega}$, d.h. es gibt eine nicht-leere Sequenz v, die b_u erfüllt. Aus $v \Vdash b_u$ folgt dann aber $u^\frown v \notin T_A$ (nach (5.3)). Da A abgeschlossen ist (da $\underline{B}$-nirgends dicht) ist T_A blattlos und es gibt ein $f \succ u^\frown v$ in $O_u - A$. Widerspruch zu $O_u \subset A$. Es gibt also kein $O_u \subset A$.

Damit ist A° leer und A nach Satz 3.1.5 (*iv*) nirgends dicht.

(iv) $\mathcal{B}$-mager $\Rightarrow$ mager:
Sei A $\mathcal{B}$-mager. Dann ist A laut Definition 5.2.2 Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung abgeschlossen $\mathcal{B}$-nirgends dichter Teilmengen von X^ω, somit wegen (iii) Teilmenge einer abzählbaren Vereinigung nirgends dichter Teilmengen von X^ω und somit als Teilmenge einer mageren Teilmenge von X^ω selber mager (s.o.). $\Diamond$

Korollar 5.2.9. (kompakt $\Rightarrow$ nirgends dicht)
Kompakte Teilmengen des Baireraumes sind nirgends dicht.

Beweis. ☞ Satz 5.2.8 (*iii*) und Beispiel 5.2.7 (*i*). $\Diamond$

5.3 $\mathcal{B}$-perfekte Mengen

Die *großen* Mengen der verallgemeinerten Kategorie sind die Komplemente $\mathcal{B}$-magerer Teilmengen des Baireraumes. Der Begriff der *$\mathcal{B}$-perfekten* Teilmenge des Bairerauems kennzeichnet analog zum Begriff der *superperfekten* (und nicht-leeren) Teilmenge *relativ große* Teilmengen des Baireraumes. Beispiel 5.3.10 zeichnet die nicht-leeren $\mathcal{B}$-perfekten Teilmengen aus als Verallgemeinerung von Teilmengen des Baireraumes, die eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthalten.

Definition 5.3.1. ($\mathcal{B}$-dichte Teilmenge von $X^{<\omega}$)
Eine Menge $Q \subset X_*^{<\omega}$ heißt **$\mathcal{B}$-dicht** genau dann, wenn gilt:

$$\forall\, b \in \underline{B}\ \exists\, u \in X_*^{<\omega}\ \exists\, u' \succ u\ (u \in Q \wedge u' \Vdash b).$$

Für einen Baum J auf $X^{<\omega}$ (also $J \subset (X^{<\omega})^{<\omega}$) bezeichne J_* die Menge J ohne die leere Sequenz $() \in (X^{<\omega})^{<\omega}$.

Definition 5.3.2. ($\mathcal{B}$-perfekter Baum auf $X^{<\omega}$)
Sei J ein Baum auf $X^{<\omega}$. J heiße **$\mathcal{B}$-perfekt**, falls gilt:

1) Für jedes $p \in J_*$ ist die Menge $\{u \in X_*^{<\omega} \mid p^\frown(u) \in J\}$ $\mathcal{B}$-dicht. Das heißt laut Definition 5.3.1:

$$\forall\, p \in J_*\ \forall\, b \in \underline{B}\ \exists\, u \in X_*^{<\omega}\ \exists\, u' \succ u\ (p^\frown(u) \in J \wedge u' \Vdash b).$$

2) Für jedes $p \in J$ gilt: falls $p^\frown(u), p^\frown(v) \in J$ und $u \neq v$, dann sind u und v inkompatibel ($u, v \in X^{<\omega}$ beliebig).

Punkt 2) in Definition 5.3.2 garantiert, daß für ein $f \in X^\omega$ die Sequenz $(s_0, \ldots, s_n) \in J$ der Länge $n+1$ mit $s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n \prec f$ eindeutig bestimmt sind [☞ Definition 5.3.3 und Lemma 5.3.5].

Definition 5.3.3. ($[J]$ für einen $\mathcal{B}$-perfekten Baum J auf $X^{<\omega}$)
Für einen $\mathcal{B}$-perfekten Baum J definiert man

$$[J] = \{f \in X^\omega \mid \forall\, n < \omega\ \exists\, (s_0, \ldots, s_n) \in J\ (s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n \prec f)\}$$

Man beachte den Unterschied zu den herkömmlichen Bäumen T auf einer Menge X [☞ Kapitel 3.5]. Ein Baum T auf X ist eine Teilmenge von $X^{<\omega}$, wohingegen in diesem Kapitel Bäume J auf $X^{<\omega}$ betrachtet werden – also Teilmengen $J \subset (X^{<\omega})^{<\omega}$.

Lemma 5.3.4. (Baum $\mathcal{B}$-perfekt $\Rightarrow$ Baum blattlos)
Sei J ein $\mathcal{B}$-perfekter Baum auf $X^{<\omega}$. Dann enthält J keine Blätter.

Beweis. Sei J ein $\mathcal{B}$-perfekter Baum auf $X^{<\omega}$. Laut Definition 5.3.2 ist für jedes $p \in J_*$ die Menge $\{u \in X_*^{<\omega} \mid p^\frown(u) \in J\}$ $\mathcal{B}$-dicht. Das heißt: Für jedes $p \in J_*$ und für jedes $b \in \underline{B}$ existiert ein $u \in X_*^{<\omega}$ mit $p^\frown(u) \in J$. Da für eine Bedingungsmenge $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ laut Definition 5.1.1 die Menge $\underline{B}$ als nicht-leer vorrausgesetzt wird, enthält J keine Blätter. ◊

Lemma 5.3.5. (Eindeutigkeit der $(s_0, \ldots, s_n)$ in Definition 5.3.3)
Sei J ein $\mathcal{B}$-perfekter Baum auf $X^{<\omega}$ und $f \in [J]$. Dann gilt für $n < m < \omega$ und $(s_0, \ldots, s_n), (t_0, \ldots, t_m) \in J$ mit $s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n \prec f$ sowie $t_0{}^\frown \ldots {}^\frown t_m \prec f$, daß $(s_0, \ldots, s_n) = (t_0, \ldots, t_n)$.

Beweis. Seien $n < m < \omega$ und $(s_0, \ldots, s_n), (t_0, \ldots, t_m) \in J$ mit $s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n \prec f$ sowie $t_0{}^\frown \ldots {}^\frown t_m \prec f$. Dann sind s_0 und t_0 nicht inkompatibel und somit $s_0 = ()^\frown s_0 \underset{5.3.2\ 2)}{=} ()^\frown t_0 = t_0$. Dann sind s_1 und t_1 ebenfalls nicht inkompatibel und somit $s_0{}^\frown s_1 \underset{5.3.2\ 2)}{=} t_0{}^\frown t_1$ und wegen $s_0 = t_0$ gilt $s_1 = t_1$, u.s.w. – insgesamt gilt also $(s_0, \ldots, s_n) = (t_0, \ldots, t_n)$. ◊

Sei J ein $\mathcal{B}$-perfekter Baum auf $X^{<\omega}$ und $g \in [J]$. Dann gibt es laut Definition 5.3.3 für jedes $n < \omega$ ein $(s_0, \ldots, s_n) \in J$ mit $s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n \prec g$ und die $s_i \in X^{<\omega}$ sind gemäß Lemma 5.3.5 unabhängig von n eindeutig bestimmt. Es bezeichne

$$g[i] := s_i$$

die i-te endliche Sequenz in $(s_0, \ldots, s_n) \in J$ mit $s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n \prec g$.

Definition 5.3.6. ($\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge von X^ω)
Eine Teilmenge A von X^ω heißt **$\mathcal{B}$-perfekt**, falls $A = [J]$ für einen $\mathcal{B}$-perfekten Baum J auf $X^{<\omega}$.

Man beachte, daß eine $\mathcal{B}$-perfekte Menge A nicht abgeschlossen sein muß, denn aus $A = [J]$ für einen $\mathcal{B}$-perfekten Baum J folgt (im Gegensatz zu den herkömmlichen Bäumen) i.a. nicht, daß A abgeschlossen ist.

Nachdem wir die folgenden beiden Lemmata gezeigt haben, können wir damit anschließend den Begriff der $\mathcal{B}$-perfekten Teilmenge in einer Reihe von Beispielen zu einigen anderen Begriffen von *relativ großen* Mengen in Beziehung setzen. Insbesondere zeigt Beispiel 5.3.10, daß nicht-leere $\mathcal{B}$-perfekte Teilmengen eine Verallgemeinerung von Teilmengen des Baireraumes sind, die eine nicht-leere superperfekte Teilmenge enthalten.

Lemma 5.3.7. ($\mathcal{B}$-perfekt $\Rightarrow$ G_δ)
Jede $\mathcal{B}$-perfekte Menge A ist eine G_δ-Menge[1].

Beweis. Sei $A = [J]$ für einen $\mathcal{B}$-perfekten Baum J auf $X^{<\omega}$ – dann gilt:

$$\begin{aligned} A &= [J] \\ &\underset{5.3.3}{=} \{f \in X^\omega \mid \forall\, n < \omega\ \exists\, (s_0, \ldots, s_n) \in J\ (s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n \prec f)\} \\ &= \bigcap_{n<\omega} \bigcup_{(s_0,\ldots,s_n)\in J} O_{s_0{}^\frown \ldots {}^\frown s_n}. \end{aligned}$$

$\Diamond$

[1] **G_δ-Menge:** Anstatt $\underset{\sim}{\Pi}^0_2$ schreibt man auch G_δ. Eine G_δ-Menge ist also ein abzählbarer Schnitt offener Mengen [☞ vgl. Kapitel 3.6 Fußnote 18].

Lemma 5.3.8. (Abgeschlossene $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge)
Falls für $\mathcal{B}$ gilt, daß die Erfüllung einer Bedingung $b \in \underline{B}$ durch eine endliche Sequenz $u \in X^{<\omega}$ nur von der ersten Stelle von u abhängt – genauer:

$$\forall\ u \in X^{<\omega}\ (u \Vdash b \Leftrightarrow (u(0)) \Vdash b),$$

dann enthält jede $\mathcal{B}$-perfekte Menge A eine abgeschlossene $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge $B \subset A$ und falls $A \neq \varnothing$ so ist auch $B \neq \varnothing$.

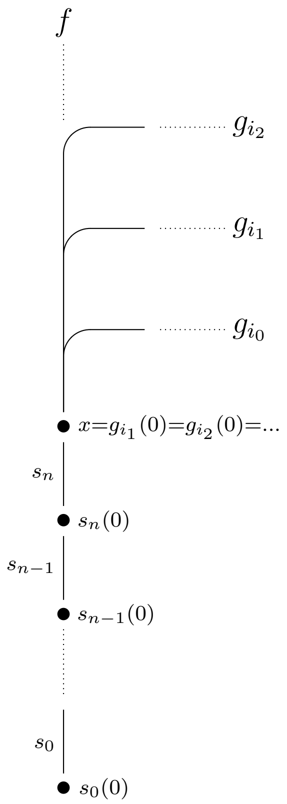
Beweis. Sei $A = [J]$ für einen $\mathcal{B}$-perfekten Baum J auf $X^{<\omega}$. Ist A abgeschlossen, so folgt die Behauptung. Sei nun A nicht abgeschlossen. Das ist gleichbedeutend damit, daß es eine Folge $g_0, g_1, \ldots$ in A gibt, die gegen ein $f \in X^\omega$ konvergiert mit $f \notin A$. Um eine abgeschlossene $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge $B \subset A$ zu erhalten definiert man einen ebenfalls $\mathcal{B}$-perfekten Baum $\widetilde{J}$ so, daß keine Folge mehr in $[\widetilde{J}]$ auftreten kann, die gegen ein Element außerhalb von $[\widetilde{J}]$ konvergiert – dabei benutzen wir das Auswahlaxiom:
Falls eine Folge $(g_i)_i < \omega$ in $[J]$ gegen ein $f \notin [J]$ konvergiert, so muß wegen $f \notin [J]$ (laut Definition von $[J]$) gelten

$$\exists\ n < \omega\ \forall\ (s_0, \ldots, s_n) \in J\ (s_0{}^\frown \ldots s_n \not\prec f),$$

und wegen $\forall\ g \in \{g_i \mid i < \omega\}\ \forall\ n < \omega\ ((g[0], \ldots, g[n]) \in J)$ somit insbesondere

$$\exists\ n < \omega\ \forall\ g \in \{g_i \mid i < \omega\}\ (g[0]^\frown \ldots {}^\frown g[n] \not\prec f). \tag{5.4}$$

Wählt man n in (5.4) minimal, so folgt in J auf $(s_0 \ldots s_{n-1}) \in J$ mit $(s_0 \ldots s_{n-1}) \prec f$ eine unendliche Verzweigung $\{g_i[n] \mid i < \omega\}$ (unendlich viele $g_i[n]$ müssen paarweise verschieden sein, da die g_i gegen f konvergieren).



Um dies für einen Teilbaum $\widetilde{J}$ von J auszuschließen, definiert man für $(s_0, \ldots, s_n) \in J$ und $x \in X$ eine Teilmenge $Y_{(s_0,\ldots,s_n),x} \subset X_*^{<\omega}$:

$$Y_{(s_0,\ldots,s_n),x} := \{s \in X_*^{<\omega} \mid (s_0, \ldots, s_n, s) \in J \wedge s(0) = x\}.$$

Zu jedem $(s_0, \ldots, s_n) \in J$ und der Familie der nicht-leeren $Y_{(s_0,\ldots,s_n),x}$ erhält man nun mittels Auswahlaxiom eine zugehörige Auswahlfunktion

$$\varphi_{(s_0,\ldots,s_n)} : \{Y_{(s_0,\ldots,s_n),x} \neq \varnothing \mid x \in X\} \longrightarrow X_*^{<\omega}\ .$$

Sei nun

$$\widetilde{J} := \{(s_0, \ldots, s_n) \in J \mid \forall\, i \leq n\ (s_i \in \operatorname{img}(\varphi_{(s_0,\ldots,s_{i-1})}))\}.$$

Dann gilt:

$[\widetilde{J}]$ **ist $\mathcal{B}$-perfekt:** Zu zeigen ist, daß $\widetilde{J}$ ein $\mathcal{B}$-perfekter Baum ist. Da J ein $\mathcal{B}$-perfekter Baum ist, ist für jeden Verzweigungspunkt $p \in J_*$ die Menge $\{u \in$

$X_*^{<\omega} \mid p^\frown(u) \in J\}$ der Verzweigungen in J $\mathcal{B}$-dicht. Das heißt:

$$\forall\, p \in J_* \;\forall\, b \in \underline{B} \;\exists\, u \in X_*^{<\omega} \;\exists\, u' \succ u \;(p^\frown(u) \in J \wedge u' \Vdash b).$$

Da laut Vorraussetzung $u \Vdash b$ nur von $u(0) = u'(0)$ abhängt, ist dies äquivalent zu:

$$\forall\, p \in J_* \;\forall\, b \in \underline{B} \;\exists\, u \in X_*^{<\omega} \;(p^\frown(u) \in J \wedge u \Vdash b).$$

Da $u \Vdash b$ nur von $x := u(0)$ abhängt, und wir für die Konstruktion von $\widetilde{J}$ mittels der Auswahlfunktionen an jedem Verzweigungspunkt p in J für jedes $x \in X$, für das in J eine Verzweigung u_x mit $u_x(0) = x$ exisiert, genau ein solches u_x ausgewählt haben, gibt es auch in $\widetilde{J}$ an jedem Verzweigungspunkt $p \in \widetilde{J}_*$ für jede Bedingung $b \in \underline{B}$ eine Verzweigung $u \in X_*^{<\omega}$ mit $p^\frown(u) \in \widetilde{J}$ und $u \Vdash b$. Also ist $\widetilde{J}$ ebenfalls $\mathcal{B}$-perfekt.

$[\widetilde{J}]$ **ist abgeschlossen:** Falls eine Folge $(g_i)_i < \omega$ in $[\widetilde{J}]$ gegen ein $f \notin [\widetilde{J}]$ konvergiert, so muß wegen $f \notin [\widetilde{J}]$ (laut Definition von $[\widetilde{J}]$) gelten

$$\exists\, n < \omega \;\forall\, (s_0, \ldots, s_n) \in \widetilde{J} \;(s_0{}^\frown \ldots s_n \not\prec f),$$

und wegen $\forall\, g \in \{g_i \mid i < \omega\} \;\forall\, n < \omega \;((g[0], \ldots, g[n]) \in \widetilde{J})$ somit insbesondere

$$\exists\, n < \omega \;\forall\, g \in \{g_i \mid i < \omega\} \;(g[0]^\frown \ldots {}^\frown g[n] \not\prec f). \tag{5.5}$$

Wählt man n in (5.5) minimal, so folgt in $\widetilde{J}$ auf $(s_0 \ldots s_{n-1}) \in \widetilde{J}$ mit $(s_0 \ldots s_{n-1}) \prec f$ eine unendliche Verzweigung $\{g_i[n] \mid i < \omega\}$ (unendlich viele $g_i[n]$ müssen paarweise verschieden sein, da die g_i gegen f konvergieren). Da die g_i gegen f konvergieren, müssen auch unendlich viele der $g_i[n]$ die selbe erste Stelle $g_i[n](0)$ haben – im Widerspruch zur Konstruktion von $\widetilde{J}$.

$B \neq \varnothing$ **falls** $A \neq \varnothing$**:** Da wir bei der Konstruktion von $\widetilde{J}$ Elemente aus J ausgewählt haben, falls J nicht leer war, gilt $B \underset{\text{def.}}{=} [\widetilde{J}] \neq \varnothing$ falls $A \underset{\text{def.}}{=} [J] \neq \varnothing$. $\Diamond$

Beispiel 5.3.9. (In Bsp. 5.1.2: $\mathcal{B}$-perfekt $\neq \varnothing \Rightarrow$ enth. perf. Teilm. $\neq \varnothing$) *In Beispiel 5.1.2 gilt mit $X := \underline{B} := 2 := \{0,1\}$ und $u \Vdash b :\Leftrightarrow u(0) = b$ für $A \subset 2^\omega$:*

$$A \neq \varnothing \text{ ist } \mathcal{B}\text{-perfekt} \Rightarrow A \text{ enthält eine perfekte Teilmenge } B \neq \varnothing$$

wobei B perfekt heiße, daß B perfekt ist bzgl. der Relativtopologie und abgeschlossen in 2^ω [☞ S. 81].

Beweis. Sei $A \neq \varnothing$ $\mathcal{B}$-perfekt – etwa $A = [J]$ mit J $\mathcal{B}$-perfekter Baum auf $X^{<\omega}$. In Beispiel 5.1.2 gilt $u \Vdash b \Leftrightarrow (u(0)) \Vdash b$ – nach Lemma 5.3.8 enthält A also eine abgeschlossene $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge $B \subset A$ und $B \neq \varnothing$, da $A \neq \varnothing$. Dann ist B perfekt (d.h. abgeschlossen und perfekt bzgl. der Relativtopologie):

B **abgeschlossen:** Dies gilt nach Lemma 5.3.8.

B **perfekt bzgl. der Relativtopologie:** Sei B $\mathcal{B}$-perfekt – etwa $B = [\widetilde{J}]$. Dann enthält B bezüglich der Relativtopologie in 2^ω keine isolierten Punkte:
Sei ein $f \in O_t \cap B$ für eine offene Basismenge $O_t \subset 2^\omega$. Da $t \in T_B$ eine Anfangssequenz einer Sequenz $p[0]^\frown \ldots {}^\frown p[n]$ mit $p \in \widetilde{J}$ ist und $\widetilde{J}$ $\mathcal{B}$-perfekt ist gilt:

$$\forall\, b \in \underline{B}\ \exists\, u \in X_*^{<\omega}\ \exists\, u' \succ u\ (p^\frown(u) \in J \wedge u' \Vdash b).$$

Da $u \Vdash b \Leftrightarrow (u(0)) = (u'(0)) \Vdash b$ gilt, gibt es zu jedem $b \in \underline{B} = 2$ ein $u \in X_*^{<\omega}$ so, daß $u \Vdash b$ (d.h. $u(0) = b$) und $p^\frown(u) \in J$. Wählt man $b \neq f[n+1](0)$, so ist $p[0]^\frown \ldots {}^\frown p[n]^\frown u \not\prec f$. Da es in $\widetilde{J}$ nach Lemma 5.3.4 keine Blätter gibt ist dann $p[0]^\frown \ldots {}^\frown p[n]^\frown u \prec g$ für ein $g \neq f$ aus $O_t \cap [\widetilde{J}]$. Damit ist gezeigt, daß B bezüglich der Relativtopologie in 2^ω keine isolierten Punkte enthält. $\Diamond$

Beispiel 5.3.10. (In Bsp. 5.1.4: $\mathcal{B}$-perfekt $\neq \varnothing \Rightarrow$ enth. superperf. Teilmenge $\neq \varnothing$) *In Beispiel 5.1.4 gilt mit $X := \underline{B} := \omega$ und $u \Vdash b :\Leftrightarrow u(0) > b$ für $A \subset \omega^\omega$:*

$$A \neq \varnothing \text{ ist } \mathcal{B}\text{-perfekt} \Rightarrow A \text{ enthält eine superperfekte Teilmenge } B \neq \varnothing.$$

Beweis. Sei $A \subset \omega^\omega$ nicht-leer und $\mathcal{B}$-perfekt. In Beispiel 5.1.4 gilt $u \Vdash b \Leftrightarrow (u(0)) \Vdash b$ – nach Lemma 5.3.8 enthält A also eine abgeschlossene $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge $B \subset A$ und $B \neq \varnothing$, da $A \neq \varnothing$. Dann ist B superperfekt (d.h. abgeschlossen und der Baum T_B ist superperfekt):

T_B **superperperfekt:** B ist $\mathcal{B}$-perfekt – etwa $B = [J]$. Somit gilt

$$\forall\, p \in J_*\ \forall\, b \in \underline{B}\ \exists\, u \in X_*^{<\omega}\ \exists\, u' \succ u\ (p^\frown(u) \in J \wedge u' \Vdash b).$$

Da in Bsp. 5.1.4 $u \Vdash b \Leftrightarrow (u(0)) \Vdash b$ gilt, gibt es dann zu jedem $p \in J_*$ und jedem $b \in \underline{B} = \omega$ ein $u \in \omega_*^{<\omega}$ mit $p^\frown(u) \in J$ und $u \Vdash b$ (d.h. $u(0) > b$) – es existieren also unendlich viele Verzweigungen $u \in \omega_*^{<\omega}$ mit $p[0]^\frown \ldots {}^\frown p[n]^\frown u \in T_B$. Da jedes $t \in T_B$ ein Anfangsstück eines $p \in J$ ist, ist T_B superperperfekt. $\Diamond$

5.4 Charakterisierung durch verallgemeinerte Spiele

Abschließend soll nun gezeigt werden, daß sich die Theoreme aus den Kapiteln 3.6 und 4.5 analog auf die verallgemeinerte Kategorie übertragen lassen. Die verallgemeinerten Spiele $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$ ohne Zeugen sind bereits in Kapitel 5.1 definiert worden. Dort wurden die Begriffe *kompakt* und *σ-beschränkt* ja gerade im Hinblick auf dieses Spiel verallgemeinert. Das entsprechende projektive Spiel ist in Kapitel 5.4 noch zu definieren.

Verallgemeinerte Spiele ohne Zeugen $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$

Das folgende Theorem bietet nun eine spieltheoretische Charakterisierung der verallgemeinerten Kategorie analog zu den spieltheoretischen Charakterisierungen der Baire- und der σ-Kategorie durch die Theoreme 3.6.4 bzw. 4.5.3:

Theorem 5.4.1. (Charakterisierung durch Spiele ohne Zeugen)
Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Bedingungsmenge auf X (das heiße: X und $\underline{B}$ abzählbar) und $A \subset X^\omega$. Dann gilt:

(i) Spieler I hat eine Gewinnstrategie in $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A) \Leftrightarrow A$ enthält eine nicht-leere $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge B.

(ii) Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A) \Leftrightarrow A$ ist $\mathcal{B}$-mager.

Beweis. (i)$\Rightarrow$: Habe I eine Gewinnstrategie σ. Sei

$$\begin{aligned} s_0 &:= s_{()} &&:= \sigma() \\ s_1 &:= s_{(b_0)} &&:= \sigma(s_0, b_0) \\ s_2 &:= s_{(b_0,b_1)} &&:= \sigma(s_0, b_0, s_1, b_1) \\ &\ \ \dots \end{aligned}$$

s_i sei also eine abkürzende Schreibweise für $s_{(b_0,\dots,b_{i-1})}$ und hänge von $(b_0,\dots,b_{i-1})$ ab. Dann erfüllt der Baum der σ-gespielten endlichen Sequenzen $J_\sigma := \{(s_0,\dots,s_n) \mid b_0,\dots,b_{n-1} \in \underline{B}\}$ die erste Bedingung für einen $\mathcal{B}$-perfekten Baum auf $X^{<\omega}$ [☞ Definition 5.3.2], weil σ eine Gewinnstrategie von I ist – das heißt ja: an jeder Verzweigungsstelle $p := (s_0,\dots,s_n) \in J_{\sigma*}$ und für jede

Bedingung $b_n \in \underline{B}$ gibt es ein $s \in X_*^{<\omega}$ mit $s \Vdash b_n$ und $p^\frown(s) \in J_\sigma$, insbesondere gilt mit $s' := s$ also Bedingung 1) aus Definition 5.3.2:

$$\forall\, p \in J_{\sigma *}\ \forall\, b \in \underline{B}\ \exists\, s \in X_*^{<\omega}\ \exists\, s' \succ s\ (p^\frown(s) \in J \wedge s' \Vdash b). \tag{5.6}$$

Der Baum J_σ läßt sich nun so beschneiden, daß der daraus entstehende Teilbaum $\widetilde{J_\sigma}$ zusätzlich zur ersten auch die zweite Bedingung aus der Definition eines $\mathcal{B}$-perfekten Baumes erfüllt. Für ein $p \in J_\sigma$, $s \in X_*^{<\omega}$ und $b \in \underline{B}$ sei

$$\varphi(s, b, p) :\equiv \exists\, s' \succ s\ (p^\frown(s) \in J_\sigma \wedge s' \Vdash b).$$

Da J_σ die erste Bedingung (5.6) aus der Definition eines $\mathcal{B}$-perfekten Baumes erfüllt, gilt für alle $p \in J_\sigma$:

$$\forall\, b \in \underline{B}\ \exists\, s \in X_*^{<\omega}\ \varphi(s, b, p).$$

Sei nun $J_\sigma^0 := \{()\} \subset J_\sigma$. Sei $J_\sigma^n \subset J_\sigma$ bereits definiert, dann erhält man den Baum $J_\sigma^{n+1} \supset J_\sigma^n$ wie folgt: Wir definieren für jedes Blatt $p \in J_\sigma^n$ eine Menge $A_p \subset J_\sigma$ und setzen dann

$$J_\sigma^{n+1} := \Big(\bigcup_{p \text{ Blatt in } J_\sigma^n} A_p\Big) \cup J_\sigma^n.$$

Dabei erhält man die Menge A_p für ein Blatt p in J_σ^n wie folgt:

Sei p ein Blatt in J_σ^n und $b_0, b_1, \ldots$ eine Aufzählung der Bedingungen aus $\underline{B}$. Sei zunächst $A_p = \varnothing$. Wir fügen iterativ Knoten aus J_σ zu A_p hinzu:

Schritt 0: Für b_0 gilt $\exists\, s \in X_*^{<\omega}\ \varphi(s, b_0, p)$: wähle ein $s_0 \in X_*^{<\omega}$ mit $\varphi(s_0, b_0, p)$ und füge $p^\frown(s_0)$ zu A_p hinzu.

Schritt i für $i \geq 1$: Für b_i gilt $\exists\, s \in X_*^{<\omega}\ \varphi(s, b_i, p)$ – wähle ein $s_i \in X_*^{<\omega}$ mit $\varphi(s_i, b_i, p)$ und unterscheide:

Fall 1: Gilt $\forall\, p^\frown(s) \in A_p\ (s \perp s_i)$, so füge auch $p^\frown(s_i)$ zu A_p hinzu.

Fall 2: Gilt $\exists\, p^\frown(s) \in A_p\ (s \not\perp s_i)$ – unterscheide:

Fall 2.1: Gilt $\exists\, p^\frown(s) \in A_p\ (s \prec s_i)$: füge $p^\frown(s_i)$ *nicht* zu A_p hinzu.

Fall 2.2: Gilt $\exists\, p^\frown(s) \in A_p\ (s \succ s_i \wedge s \neq s_i)$: entferne alle $p^\frown(s)$ aus A_p, für die gilt, daß $s \succ s_i \wedge s \neq s_i$ und füge statt ihrer $p^\frown(s_i)$ zu A_p hinzu.

Sei nun

$$\widetilde{J_\sigma} := \bigcup_{n<\omega} J_\sigma^n.$$

Mit dieser Konstruktion ist dann sichergestellt, daß $\widetilde{J_\sigma}$ zusätzlich zur ersten auch die zweite Bedingung aus Definition 5.3.2 erfüllt und somit $\mathcal{B}$-perfekt ist.

Da J_σ mit einer Gewinnstrategie von I definiert ist, gilt $J_\sigma \neq \varnothing$ und $[J_\sigma] \subset A$ und somit auch $\widetilde{J_\sigma} \neq \varnothing$ und $[\widetilde{J_\sigma}] \subset A$.

(i)$\Leftarrow$: Enthalte A eine nicht-leere $\mathcal{B}$-perfekte Menge $[J]$ (J $\mathcal{B}$-perfekter Baum auf $X^{<\omega}$). Es ist zu zeigen, daß I eine Gewinnstrategie besitzt:

Spiele I zunächst ein $(u_0) \in J$. Habe I nun bereits $p = (u_0, \dots, u_{n-1}) \in J$ gespielt und II die Bedingungen $(b_1, \dots, b_{n-1})$ und gelte $u_i \Vdash b_i$ für $i = 1, \dots, n-1$. Spielt nun II $b_n \in \underline{B}$, so genügt zu zeigen:

$$\exists\, u_n \in X_*^{<\omega}\ (p^\frown(u_n) \in J \wedge u_n \Vdash b_n), \tag{5.7}$$

denn dann bewegt sich I wegen $[J] \subset A$ weiterhin in der Gewinnmenge A und erfüllt die nächste Bedingung b_n.

Da J $\mathcal{B}$-perfekt ist, gilt für b_n:

$$\exists\, u_n^0 \in X_*^{<\omega}\ \exists\, u' \succ u_n^0\ (p^\frown(u_n^0) \in J \wedge u' \Vdash b_n).$$

Falls $u_n^0 \Vdash b_n$, so gilt (5.7) mit $u_n := u_n^0$.
Falls hingegen $u_n^0 \nVdash b_n$ gilt, folgt wegen der *Reduzierbarkeit* von b_n [☞ Definition 5.1.1 Punkt 3)]:

$$\exists\, b_n^1\ [l(b_n^1) \lneq l(b_n) \wedge \forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (v \Vdash b_n^1 \Leftrightarrow u_n^0{}^\frown v \Vdash b_n)]. \tag{5.8}$$

Da J $\mathcal{B}$-perfekt ist, gilt nun wiederum für b_n^1:

$$\exists\, u_n^1 \in X_*^{<\omega}\ \exists\, u' \succ u_n^1\ (p^\frown(u_n^0)^\frown(u_n^1) \in J \wedge u' \Vdash b_n^1).$$

Falls $u_n^1 \Vdash b_n^1$, so gilt (5.7) mit $u_n := u_n^0{}^\frown u_n^1$ wegen

$$u_n^1 \Vdash b_n^1 \underset{(5.8)}{\Leftrightarrow} u_n^0{}^\frown u_n^1 \Vdash b_n.$$

Falls hingegen $u_n^1 \not\Vdash b_n^1$ gilt, folgt wie oben wegen der *Reduzierbarkeit* von b_n^1:

$$\exists\, b_n^2\ [l(b_n^2) \lneq l(b_n^1) \wedge \forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (v \Vdash b_n^2 \Leftrightarrow u_n^1{}^\frown v \Vdash b_n^1)] \tag{5.9}$$

u.s.w..
Da bei jedem Reduzierungsschritt $l(b_n^{i+1}) \lneq l(b_n^i)$ gilt, läßt sich auf diese Weise nur endlich oft fortfahren. Falls eine derartige Kette von Reduzierungen nicht schon vorher dadurch abbricht, daß eines der u_n^i die Bedingung b_n^i erfüllt (wodurch dann (5.7) folgt), steht an ihrem Ende:

$$\exists\, b_n^m\ [l(b_n^m) = 0 \lneq l(b_n^{m-1}) \wedge \forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (v \Vdash b_n^m \Leftrightarrow u_n^{m-1}{}^\frown v \Vdash b_n^{m-1})]. \tag{5.10}$$

Da J $\mathcal{B}$-perfekt ist, gilt für b_n^m:

$$\exists\, u_n^m \in X_*^{<\omega}\ \exists\, u' \succ u_n^m\ (p^\frown(u_n^0)^\frown \ldots {}^\frown(u_n^m) \in J \wedge u' \Vdash b_n^m).$$

Falls $u_n^m \Vdash b_n^m$, so gilt (5.7) mit $u_n := u_n^0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n^m$, wegen

$$\begin{aligned} u_n^m \Vdash b_n^m &\underset{(5.10)}{\Leftrightarrow} u_n^{m-1}{}^\frown u_n^m \Vdash b_n^{m-1} \\ &\Leftrightarrow u_n^{m-2}{}^\frown u_n^{m-1}{}^\frown u_n^m \Vdash b_n^{m-2} \\ &\ldots \\ &\underset{(5.9)}{\Leftrightarrow} u_n^1{}^\frown \ldots {}^\frown u_n^m \Vdash b_n^1 \\ &\underset{(5.8)}{\Leftrightarrow} u_n^0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n^m \Vdash b_n. \end{aligned}$$

Der Fall $u_n^m \not\Vdash b_n^m$ kann nun nicht mehr eintreten, da dies die Voraussetzung für die Reduzierung von b_n^m wäre [☞ Definition 5.1.1 Punkt 3)] und somit gelten müßte: $\exists\, b_n^{m+1}\ (l(b_n^{m+1}) \lneq 0 = l(b_n^m))$ (im Widerspruch zu $l :\ \underline{B} \longrightarrow \omega$).
Damit ist (5.7) gezeigt.

(ii)$\Leftarrow$: Sei A $\mathcal{B}$-mager – etwa $A \subset \bigcup_{i<\omega} A_i$ mit A_i abgeschlossen $\mathcal{B}$-nirgends dicht (d.h. $\forall\, u \in T_{A_i}\ \exists\, b \in \underline{B}\ \forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (v \Vdash b \Rightarrow u^\frown v \notin T_{A_i})$). Spieler I spiele als erste endliche Sequenz $u_0 \in X^{<\omega}$

Liege u_0 in $\bigcap_{j\geq 1} T_{A_{i_j}}$ und in keinem anderen T_{A_i}: Dann gibt es nach Definition 5.2.1 (für *$\mathcal{B}$-nirgends dicht*) Bedingungen $b_1, b_2, \ldots \in \underline{B}$ mit

$$b_1 \in \underline{B} : \forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (v \Vdash b_1 \Rightarrow u_0{}^\frown v \notin T_{A_{i_1}})$$

$$b_2 \in \underline{B} : \forall\, v \in X_*^{<\omega}\ (v \Vdash b_2 \Rightarrow u_0{}^\frown u_1{}^\frown v \notin T_{A_{i_2}})$$

$$\ldots$$

Wegen der *Monotonie* von $\Vdash$ in Definition 5.1.1 ($u \prec u' \wedge u \Vdash b \Rightarrow u' \Vdash b$) gilt dann für $f := u_0{}^\frown u_1{}^\frown \ldots$ und beliebiges $n < \omega$:

$$u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n \notin T_{A_{i_1}} \cup \ldots \cup T_{A_{i_n}}$$

und somit (da $A_{i_j} = [T_{A_{i_j}}]$) für beliebiges $n < \omega$:

$$f \notin A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_n}$$

also

$$f \notin \bigcup_{j \geq 1} A_{i_j}$$

und somit auch $f \notin A$ (nach der Wahl der $T_{A_{i_j}}$). Spielt Spieler II die $b_1, b_2, \ldots$ wie oben angegeben, stellt dies also eine Gewinnstrategie für ihn dar.

(ii)$\Rightarrow$: Habe II eine Gewinnstrategie τ.

Gute Sequenz: Eine Sequenz $p := (u_0, b_1, u_1, b_2, \ldots, u_n, b_{n+1})$ mit $u_i \in X_*^{<\omega}$ für $i = 0, \ldots, n$ und $b_i \in \underline{B}$ für $i = 1, \ldots, n+1$ heiße **gut**, falls gilt:

$$u_i \Vdash b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \wedge$$
$$b_j \text{ mit } \tau \text{ gespielt für } j = 1, \ldots, n+1.$$

Die leere Sequenz sei definitionsgemäß gut.

Sequenz gut für $f \in A$: p heiße **gut für** $f \in A$, falls gilt:

$$\exists\ u_{n+1}\ (u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1} \prec f \wedge u_{n+1} \Vdash b_{n+1}).$$

Insbesondere ist die leere Sequenz gut für jedes $f \in A$.

Sei nun $f \in A$ beliebig. Dann muß es eine Sequenz $p := (u_0, b_1, u_1, b_2, \ldots, u_n, b_{n+1})$ geben (eventuell $p = ()$) mit p ist gut und p ist gut für f und:

$$\neg\exists\ (u_{n+1}, b_{n+2}) \in X^{<\omega} \times \underline{B}\ (p^\frown(u_{n+1}, b_{n+2}) \text{ gut und gut für } f).$$

Ansonsten könnte Spieler I gewinnen, obwohl Spieler II mit seiner Gewinnstrategie τ spielt (Widerspruch). Dann gilt $f \in K_p$ mit

$$\begin{aligned}
K_p := \{f' \in X^\omega \,|\, & p \text{ gut für } f' \text{ und} \\
& \neg\exists\ (u_{n+1}, b_{n+2})\ (p^\frown(u_{n+1}, b_{n+2}) \text{ gut und gut für } f')\} \\
= \{f' \in X^\omega \,|\, & \exists\ u_{n+1}\ (u_0{}^\frown \dots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1} \prec f' \wedge u_{n+1} \Vdash b_{n+1}) \wedge \\
& \neg\exists\ (u_{n+1}, b_{n+2})\ ((u_{n+1} \Vdash b_{n+1} \wedge b_{n+2}\ \tau\text{-gespielt }) \wedge \\
& \exists\ u_{n+2}\ (u_0{}^\frown \dots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}{}^\frown u_{n+2} \prec f' \wedge u_{n+2} \Vdash b_{n+2}))\}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

und

$$A \subset \bigcup_{p \text{ gut}} K_p$$

Da die Bedingungsmenge $\underline{B}$ als abzählbar vorausgesetzt wurde, ist diese Vereinigung abzählbar.

Um zu zeigen, daß A $\mathcal{B}$-mager ist, genügt es nun zu zeigen, daß die K_p $\mathcal{B}$-mager sind, denn dann ist die abzählbare Vereinigung $\bigcup_p K_p$ $\mathcal{B}$-magerer Mengen $\mathcal{B}$-mager und A als Teilmenge einer $\mathcal{B}$-mageren Menge $\mathcal{B}$-mager.

Die K_p sind $\mathcal{B}$-mager: Sei K_p wie oben konstruiert mit $p = (u_0, b_1, u_1, b_2, \dots, u_n, b_{n+1})$. Dann läßt sich K_p schreiben als

$$K_p = \bigcup_{\widetilde{u_{n+1}} \Vdash b_{n+1}} \underbrace{O_{u_0{}^\frown \dots {}^\frown u_n{}^\frown \widetilde{u_{n+1}}} \cap \Big(\bigcup_{\substack{u_{n+1} \Vdash b_{n+1} \\ \exists\ b_{n+2}\ (b_{n+2}\ \tau\text{-gesp.} \wedge u_{n+2} \Vdash b_{n+2})}} O_{u_0{}^\frown \dots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}{}^\frown u_{n+2}} \Big)^c}_{=: L_{\widetilde{u_{n+1}}}}.$$

Nun genügt es zu zeigen, daß die $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ $\mathcal{B}$-nirgends dicht sind:

Die $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ sind abgeschlossen: Das Komplement einer Menge $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ ist als Vereinigung offener Mengen offen, also ist $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ abgeschlossen.

Die $L_{\widetilde{s_{n+1}}}$ sind $\mathcal{B}$-nirgends dicht: Sei $L := L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ für $\widetilde{u_{n+1}} \in X_*^{<\omega}$. Es ist zu zeigen, daß

$$\forall\ u \in T_L\ \exists\ b \in \underline{B}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_L \Rightarrow v \not\Vdash b).$$

Fall 1: Sei $u \prec \tilde{u} := u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}$ und $u \neq \tilde{u}$ (d.h. u ist ein echtes Anfangsstück von $\tilde{u}$) – etwa $u = (x_0, \ldots, x_i) \prec \tilde{u} = (x_0, \ldots, x_m)$ mit $i \lneq m$. Dann gibt es nach *Unterscheidbarkeit* [☞ Definition 5.1.1 2)] für $x = x_{i+1}$ ein b_x mit $\forall\, v \in X_*^{<\omega}$ $(v \Vdash b_x \Rightarrow v(0) \neq x)$. Aus $v(0) \neq x$ folgt aber $u^\frown v \notin T_L$. Somit gibt es zu u eine Bedingung $b := b_x$ mit $\forall\, v \in X_*^{<\omega}$ $(u^\frown v \in T_L \Rightarrow v \nVdash b)$.

Fall 2: Sei $u \succ u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}$. Etwa $u = u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u'_{n+1}$ mit $u_{n+1} \prec u'_{n+1}$ (also eventuell auch $u_{n+1} = u'_{n+1}$). Dann gilt wegen $u_{n+1} \Vdash b_{n+1}$ und der *Monotonie* für die Relation $\Vdash$ [☞ Definition 5.1.1 1)]: $u'_{n+1} \Vdash b_{n+1}$. Spielt nun Spieler II $b'_{n+2} := \tau(p^\frown(u'_{n+1}))$, so muß wegen (5.11) für jedes $v \in X_*^{<\omega}$ für alle $f' \in K_p$ gelten:

$$u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u'_{n+1}{}^\frown v \not\prec f' \vee v \nVdash b'_{n+2}.$$

Also gilt falls $v \Vdash b'_{n+2}$, daß $u^\frown v \notin T_L$. Zu u existiert also eine Bedingung $b := b'_{n+2}$ mit $\forall\, v \in X_*^{<\omega}$ $(u^\frown v \in T_L \Rightarrow v \nVdash b)$.

Somit gilt dann nach Fall 1 und 2, daß die $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ $\mathcal{B}$-nirgends dicht sind.

Damit ist die Hinrichtung von (ii) bewiesen. ◊

Verallgemeinerte Spiele mit Zeugen $\mathsf{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$

Analog zu den spieltheoretischen Charakterisierungen der Baire- und der σ-Kategorie durch die Theoreme 3.6.7 bzw. 4.5.8 soll nun eine spieltheoretische Charakterisierung der verallgemeinerten Kategorie für Teilmengen A des Baireraums mit $A = \mathrm{p}(C)$ für eine Teilmenge $C \subset X^\omega \times \lambda$ (für eine unendliche Ordinalzahl λ) gegeben werden. Der Nutzen hiervon ist eine gegenüber A vereinfachte Gewinnmenge C. Dazu wird für eine Bedingungsmenge $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ auf X und die Menge C ein Spiel $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$ definiert, in dem Spieler I genau dann eine Gewinnstrategie hat, wenn A eine nicht-leere $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge enthält und II eine Gewinnstrategie hat genau dann, wenn A $\mathcal{B}^\lambda$-mager ist.

Definition 5.4.2. (verallgemeinertes Spiel mit Zeugen $\mathsf{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$)
Sei $\mathcal{B} := (\underline{B}, \underline{E})$ eine Bedingungsmenge auf X, sei $A \subset X^\omega$ und $C \subset X^\omega \times \lambda^\omega$ für eine Ordinalzahl λ und es gelte:

$$A = \mathrm{p}(C) := \{f \in X^\omega \mid \exists\, \xi \in \lambda^\omega\ ((f, \xi) \in C)\}.$$

Dann definiert man das **verallgemeinerte Spiel $\mathbf{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$ mit Zeugen** wie folgt:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
I: & (\xi_0, u_0) \arrow[dr] & & (\xi_1, u_1) \arrow[dr] & & (\xi_2, u_2) \arrow[dr] & \\
II: & & b_1 \arrow[ur] & & b_2 \arrow[ur] & & \cdots
\end{tikzcd}$$

Spieler I und Spieler II spielen abwechselnd – Spieler I spielt ein Element $\xi_0 \in \lambda$ und eine nicht-leere endliche Sequenz $u_0 \in X_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine Bedingung $b_1 \in \underline{B}$, Spieler I spielt ein Element $\xi_1 \in \lambda$ und eine nicht-leere endliche Sequenz $u_1 \in X_*^{<\omega}$, Spieler II spielt eine Bedingung $b_2 \in \underline{B}$ u.s.w.. Sei nun $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots) \in \lambda^\omega$ und $f := u_0{}^\frown u_1{}^\frown u_2{}^\frown \ldots$. Man sagt, daß **Spieler I gewinnt**, falls gilt:

1) $(f, \xi) \in C$,

2) $\forall\, i \geq 1\ (u_i \Vdash b_i)$.

Ansonsten sagt man, daß **Spieler II gewinnt**. C nennt man dabei auch die **Gewinnmenge**.

Die Begriffe **(Gewinn-)Strategie für I (bzw. für II)** und **determiniert** sind für die Spiele $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$ analog zu den Definitionen 2.1.2 (bzw. 2.1.3) und 2.3.1 definiert.

Sind X, λ und $\mathcal{B}$ abzählbar, läßt sich dieses Spiel (wie beim Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$) mit einer Kodierung der in $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(A)$ gespielten Sequenzen, Zeugen und Bedingungen in die natürlichen Zahlen auch als ein Spezialfall der Grundvariante [☞ Definition 2.1.1] auffassen. Analog zu Lemma 3.6.6, Lemma 4.5.2 und Lemma 4.5.6 gilt:

Lemma 5.4.3. (Determiniertheit)
Falls **AD** *gilt und die Mengen X, λ und $\underline{B}$ abzählbar sind, so sind auch die obigen Spiele $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$ determiniert.*

Beweis. Analog zu Lemma 3.6.6. $\diamondsuit$

Analog zur Verallgemeinerung der Begriffe *σ-beschränkt* und *σ-kompakt* für beliebige unendliche Ordinalzahlen λ [☞ Satz 4.5.7] läßt sich nun auch der Begriff

$\mathcal{B}$-mager verallgemeinern: Sei $A \subset X^\omega$ beliebig und $\mathcal{B} = (\underline{B}, \underline{E})$ eine Bedingungsmenge. Dann heiße A **$\mathcal{B}^\lambda$-mager**, falls A Teilmenge einer Vereinigung $|\lambda|$-vieler abgeschlossener $\mathcal{B}$-nirgends dichter Teilmengen von X^ω ist:

$$A \subset \bigcup_{n<\lambda} A_n \qquad \text{wobei } \forall\, n < \lambda\ (A_n \subset X^\omega\ \mathcal{B}\text{-nirgends dicht}).$$

Aus der Definition für *$\mathcal{B}^\lambda$-mager* folgt sofort, daß die $\mathcal{B}^\lambda$-mageren Teilmengen des Baireraumes abgeschlossen sind gegenüber Teilmengen. Außerdem ist die Vereinigung $|\lambda|$-vieler $\mathcal{B}$-mager Mengen $\mathcal{B}^\lambda$-mager[2].

Damit erhält man nun:

Theorem 5.4.4. (Charakterisierung durch Spiele mit Zeugen)
Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Bedingungsmenge auf X (das heiße: X und $\underline{B}$ abzählbar) und sei $A \subset X^\omega$ mit $A = \mathrm{p}(C)$ für eine Menge $C \subset X^\omega \times \lambda^\omega$ und eine unendliche Ordinalzahl λ. Dann gilt:

(i) Spieler I hat eine Gewinnstrategie in $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C) \Rightarrow A$ enthält eine nicht-leere $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge B.

(ii) Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C) \Rightarrow A$ ist $\mathcal{B}^\lambda$-mager.

Beweis. (i) Habe I eine Gewinnstrategie σ für das Spiel $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C)$. Wegen $A = \mathrm{p}(C)$ hat I dann auch eine Gewinnstrategie $\tilde{\sigma}$ für das Spiel $\mathrm{G}^{\mathcal{B}}(A)$. Nach Theorem 5.4.1 $(i) \Rightarrow$ enthält A somit eine nicht-leere $\mathcal{B}$-perfekte Teilmenge B.

(ii) Habe II eine Gewinnstrategie τ.

Gute Sequenz: Eine Sequenz $p := (l_0, u_0, b_1, l_1, u_1, b_2, \ldots, l_n, u_n, b_{n+1})$ mit $u_i \in X_*^{<\omega}$ für $i = 0, \ldots, n$, sowie und $l_j \in \lambda$ für $j = 0, \ldots, n$ und $b_i \in \underline{B}$ für $i = 1, \ldots, n+1$ heiße **gut**, falls gilt:

$$u_i \Vdash b_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \wedge$$
$$b_j \text{ mit } \tau \text{ gespielt für } j = 1, \ldots, n+1.$$

Die leere Sequenz sei definitionsgemäß gut.

[2] Für beliebiges $\lambda \in \mathbf{Ord}$ gilt $|\omega \times \lambda| = |\lambda|$ (☞ etwa [Jec03, 3.5], vgl. Kap. 4 Fußnote 6).

Sequenz gut für $f \in A$: p heiße **gut für** $f \in A$, falls gilt:

$$\exists\, u_{n+1}\ (u_0{}^\frown \dots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1} \prec f \wedge u_{n+1} \Vdash b_{n+1}).$$

Insbesondere ist die leere Sequenz gut für jedes $f \in A$.

Sei nun $(f, g) \in C$ beliebig. Dann muß es eine Sequenz $p := (\underbrace{l_0, u_0}_{I}, \underbrace{b_1}_{II}, \underbrace{l_1, u_1}_{I}, \underbrace{b_2}_{II}, \dots, \underbrace{l_n, u_n}_{I}, \underbrace{b_{n+1}}_{II})$ (eventuell $p = ()$) geben mit:

$$\begin{aligned}
&p \text{ gut } \wedge \text{ gut für } f \wedge \\
&(l_0, \dots, l_n) = (g(0), \dots, g(n)) \prec g \wedge \\
&\neg\exists\ (l_{n+1}, u_{n+1}, b_{n+2})\ (p^\frown(l_{n+1}, u_{n+1}, b_{n+2}) \text{ gut} \wedge \text{ gut für } f \wedge \\
&\qquad\qquad\qquad (l_0, \dots, l_n, l_{n+1}) = (g(0), \dots, g(n), g(n+1)) \prec g).
\end{aligned}$$

Ansonsten könnte Spieler I gewinnen, obwohl Spieler II mit seiner Gewinnstrategie τ spielt (Widerspruch).

Sei nun $r := l_{n+1} := g(n+1)$, dann gilt $f \in M_{(p,r)}$ mit

$$\begin{aligned}
M_{(p,r)} &:= \{f' \in \omega^\omega \mid p \text{ gut für } f' \wedge \\
&\qquad \neg\exists\ (u_{n+1}, b_{n+2})\ (p^\frown(r, u_{n+1}, b_{n+2}) \text{ gut } \wedge \text{ gut für } f'\} \\
&= \{f' \in \omega^\omega \mid \exists\, u_{n+1}\ (u_0{}^\frown \dots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1} \prec f' \wedge u_{n+1} \Vdash b_{n+1}) \wedge \qquad (5.12) \\
&\qquad \neg\exists\ (u_{n+1}, b_{n+2})\ ((u_{n+1} \Vdash b_{n+1} \wedge b_{n+2}\ \tau\text{-gesp.}) \wedge \\
&\qquad \exists\, u_{n+2}\ (u_0{}^\frown \dots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}{}^\frown u_{n+2} \prec f' \wedge u_{n+2} \Vdash b_{n+2}))\} \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

wobei „b_{n+2} τ-gesp.“ heißt: $b_{n+2} = \tau(p^\frown(r, u_{n+1}))$. Damit gilt dann

$$A \subset \bigcup_{(p,r)} M_{(p,r)}$$

wobei über die Paare (p, r) vereinigt wird mit p wie oben konstruiert und $r \in \lambda$ – da $(p, r) \in \omega^{<\omega} \times \lambda$ und $\omega^{<\omega}$ abzählbar ist, werden $|\lambda|$-viele Mengen vereinigt[3].

Da wir die Mengen $M_{(p,r)}$ ganz ähnlich wie die Mengen K_p im Beweis der Hinrichtung von (ii) von Theorem 5.4.1 definiert haben (lediglich die Bedeutung von „b_{n+2} τ-gesp.“ ist eine andere), können wir von nun an analog dazu fortfahren.

[3]Für beliebiges $\lambda \in \mathbf{Ord}$ gilt $|\omega \times \lambda| = |\lambda|$ (☞ etwa [Jec03, 3.5], vgl. Fußnote 2).

Um zu zeigen, daß A $\mathcal{B}^\lambda$-mager ist, genügt es zu zeigen, daß die $M_{(p,r)}$ $\mathcal{B}$-mager sind, denn eine Vereinigung $|\lambda|$-vieler $\mathcal{B}$-magerer Mengen sowie Teilmengen $\mathcal{B}^\lambda$-magerer Mengen sind $\mathcal{B}^\lambda$-mager.

Die $M_{(p,r)}$ sind $\mathcal{B}$-mager: Sei $M_{(p,r)}$ wie oben konstruiert mit $p := (l_0, u_0, b_1, l_1, u_1, b_2, \ldots, l_n, u_n, b_{n+1})$. Dann läßt sich $M_{(p,r)}$ schreiben als

$$M_{(p,r)} = \bigcup_{\widetilde{u_{n+1}} \Vdash b_{n+1}} O_{u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown \widetilde{u_{n+1}}} \cap \underbrace{\Big(\bigcup_{\substack{u_{n+1} \Vdash b_{n+1} \\ \exists\ b_{n+2}\ (b_{n+2}\ \tau\text{-gesp.} \wedge u_{n+2} \Vdash b_{n+2})}} O_{u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}{}^\frown u_{n+2}} \Big)^c}_{=: L_{\widetilde{u_{n+1}}}}.$$

Nun genügt es zu zeigen, daß die $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ $\mathcal{B}$-nirgends dicht sind:

Die $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ sind abgeschlossen: Das Komplement einer Menge $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ ist als Vereinigung offener Mengen offen, also ist $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ abgeschlossen.

Die $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ sind $\mathcal{B}$-nirgends dicht:
Sei $L := L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ für $\widetilde{u_{n+1}} \in X_*^{<\omega}$. Für die beiden Fälle

Fall 1: $u \prec \tilde{u} := u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}$ und $u \neq \tilde{u}$ und

Fall 2: $u \succ u_0{}^\frown \ldots {}^\frown u_n{}^\frown u_{n+1}$
zeigt man nun analog zum Beweis der Hinrichtung von (ii) von Theorem 5.4.1, daß jeweils

$$\exists\ b \in \underline{B}\ \forall\ v \in X_*^{<\omega}\ (u^\frown v \in T_L \Rightarrow v \not\Vdash b)$$

gilt (der einzige Unterschied zum Beweis der Hinrichtung von (ii) von Theorem 5.4.1 besteht in der Definition von $b'_{n+2} := \tau(p^\frown(r, b'_{n+1}))$ im zweiten Fall).

Somit gilt nach Fall 1 und 2, daß die $L_{\widetilde{u_{n+1}}}$ $\mathcal{B}$-nirgends dicht sind.

Damit ist die Hinrichtung von (ii) bewiesen. $\Diamond$

Für $\lambda = \omega$ bedeutet $\mathcal{B}^\lambda$-*mager* das selbe wie $\mathcal{B}$-*mager*. In diesem Fall lautet Theorem 5.4.4:

Korollar 5.4.5. (Charakterisierung durch Spiele mit Zeugen)
Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Bedingungsmenge auf X (das heiße: X und $\underline{B}$ abzählbar) und sei $A \subset X^\omega$ mit $A = \mathrm{p}(C)$ für eine Menge $C \subset X^\omega \times X^\omega$. Dann gilt:

(i) Spieler I hat eine Gewinnstrategie in $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C) \Rightarrow A$ *enthält eine nicht-leere* $\mathcal{B}$*-perfekte Teilmenge* B.

(ii) Spieler II hat eine Gewinnstrategie in $\mathrm{G}_p^{\mathcal{B}}(C) \Rightarrow A$ *ist* $\mathcal{B}$*-mager.*

5.5 Resümee

Die eingangs unter 1.3 gestellte Frage nach einer Vereinheitlichung der Baire- und der σ-Kategorie ist in Kapitel 5 durch ein verallgemeinertes Kategorien-Konzept für den Baireraum beantwortet worden:

Dazu wurden in den Kapiteln 3 und 4 die Baire- und die σ-Kategorie vorgestellt und spieltheoretisch charakterisiert. In Kapitel 5 konnte dann auf Basis dieser Charakterisierungen ein verallgemeinertes spieltheoretisches Kategorienkonzept definiert werden, das Baire- und σ-Kategorie vereinheitlicht und zudem noch weitere Spezialfälle beinhaltet [☞ die Beispiele in den Kapiteln 5.2 und 5.3]. Dabei verhalten sich die Begriffe des verallgemeinerten Konzeptes zu denen der Baire- und der σ-Kategorie wie in folgender Tabelle dargestellt:

Verallg. Kategorie	**Baire-Kategorie**	**σ-Kategorie**
$\mathcal{B}$-nirgends-dicht	abg. + nirg. dicht 5.2.6 *(i)*	kompakt 5.2.7 *(i)*
$\mathcal{B}$-mager	mager 5.2.6 *(ii)*	σ-beschränkt 5.2.7 *(ii)*
$\mathcal{B}$-perfekt$\neq \varnothing$		enth. superperf. Teilm.$\neq \varnothing$ 5.3.10

wobei die Begriffe der linken Spalte die spieltheoretischen Verallgemeinerungen der entsprechenden Begriffe der mittleren und der rechten Spalte darstellen.

In Kapitel 5.4 wurde dann gezeigt, daß die Theoreme in den Kapiteln 3.6 und 4.5, die die Baire- bzw. die σ-Kategorie spieltheoretisch charakterisieren, sich analog auch für die verallgemeinerte Kategorie gewinnen lassen. Darüber hinaus lassen sich auch andere Resultate wie etwa diejenigen zur Definierbarkeit in Kapitel 4.5 auf die allgemeine Kategorie übertragen ☞ [Kec77].

Konventionen

Im Allgemeinen werden (falls nicht ausdrücklich anders vermerkt) die folgenden Konventionen befolgt:

Ableitungen: Bei längeren logischen Ableitungen werden der Übersicht halber die Ausdrücke nicht immer mit „⇒“ getrennt. Wenn es der Übersichtlichkeit dient, werden ähnliche Ausdrücke nicht immer wieder von neuem aufgeführt, sondern nur diejenigen Teile, die sich verändern - etwa:

$$\begin{array}{rcl} \exists\, n_0 \in \omega\ \forall\, n > n_0\ (A(n)) & & \exists\, n_0 \in \omega\ \forall\, n > n_0\ (A(n)) \\ \ldots(B(n)) & \text{anstelle von} & \Rightarrow \exists\, n_0 \in \omega\ \forall\, n > n_0\ (B(n)) \\ \ldots(C(n)) & & \Rightarrow \exists\, n_0 \in \omega\ \forall\, n > n_0\ (C(n)). \end{array}$$

Abschluss: ☞ *Inneres*.

Absolutbetrag: Für eine reelle Zahl x sei $|x| \in \mathbb{R}$ ihr *Absolutbetrag*:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Aufzählungen: Bei Aufzählungen wird oft die verkürzende Schreibweise

$$(x_i > y)_{i \geq 1} \quad \text{anstelle von} \quad \forall\, i \geq 1\ (x_i > y)$$

verwendet.

Differenz: Sei X eine Menge und seien $A, B \subset X$. Dann bezeichnet $A - B$ die *Differenz* A ohne B, d.h. die Menge aller $x \in A$ mit $x \notin B$. Das ist gleichbedeutend mit

$$A - B := A \cap B^c.$$

Disjunkte Vereinigung: Sei X eine Menge, für $A, B \subset X$, I eine beliebige Indexmenge und $A_i \subset X$ für alle $i \in I$. Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots$ schreiben wir auch $\sum_{i\geq 1} A_i$ statt $\bigcup_{i\geq 1} A_i$.

Eigenschaft: Eine Teilmenge $E \subset X$ einer Menge X nennen wir auch eine *Eigenschaft* von Elementen von X. Entsprechend heißt eine Teilmenge $\underline{E} \subset \mathbf{P}(X)$ eine *Eigenschaft* von Teilmengen von X.

Elemente: m, n, i, j, k bezeichnen natürliche Zahlen,
s, t, u, v, w bezeichnen endliche und f, g, h bezeichnen unendliche Sequenzen von Elementen in ω oder in einer vorgegebenen Menge X.

Erzeugte σ-Algebra: Für ein System $\underline{E}$ von Teilmengen einer nicht-leeren Menge Ω sei $\sigma(\underline{E})$ die kleinste σ-Algebra, die $\underline{E}$ enthält, d.h.:

$$\sigma(\underline{E}) := \bigcap_{\substack{\underline{E}\subset \underline{A} \\ \underline{A}\ \sigma\text{-Alg.}}} \underline{A}.$$

$\sigma(\underline{E})$ heißt die von $\underline{E}$ *erzeugte σ-Algebra*.

Euklidischer Raum: Das Tupel $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}^n)$ mit

$$\mathrm{d}^n(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}$ ist ein metrischer Raum – genannt *n-dimensionaler Euklidischer Raum*.

G_δ- und F_σ-Mengen: Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes bezeichnet man als G_δ- bzw. F_σ-*Menge*, falls A Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen bzw. Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen ist:

$$A = \bigcap_{i<\omega} O_i \text{ mit } O_i \text{ offen} \Leftrightarrow: A \text{ ist } G_\delta,$$
$$A = \bigcup_{i<\omega} A_i \text{ mit } A_i \text{ abg.} \Leftrightarrow: A \text{ ist } F_\sigma.$$

Infimum: ☞ *Supremum*.

Inneres, Abschluss: Für einen Teilmenge A eines topologischen Raumes $(X, \underline{X})$ bezeichnet A° das *Innere* von A, d.h. die maximale offene Teilmenge von A:

$$A^\circ := \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ offen}}} U.$$

Mit $\overline{A}$ bezeichnet man den *Abschluß* von A, d.h. die minimale abgeschlossene Obermenge von A:

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{B \supset A \\ B \text{ abgeschl.}}} B.$$

Kardinalität: Die *Kardinalität* einer Menge X werde mit $|X|$ bezeichnet. Für zwei Mengen X, Y gilt

$$\begin{aligned}
|X| = |Y| \quad & :\Leftrightarrow \text{ Es gibt eine Bijektion zwischen } X \text{ und } Y, \\
|X| \leq |Y| \quad & :\Leftrightarrow \text{ Es gibt eine Injektion von } X \text{ nach } Y, \\
|X| \geq |Y| \quad & :\Leftrightarrow \text{ Es gibt eine Surjektion von } X \text{ nach } Y, \\
|X| = |Y| \quad & \underset{\substack{\text{Cantor} \\ \text{Bernstein}}}{\Leftrightarrow} |X| \leq |Y| \wedge |X| \geq |Y|, \\
|X| \underset{\text{Cantor}}{\lneq} |\mathbf{P}(X)|. &
\end{aligned}$$

(☞ etwa [Jec03, 3])

Komplement: Sei X eine Menge und $A \subset X$. Dann bezeichnet A^c das *Komplement* von A in X, d.h. die Menge aller $x \in X$ mit $x \notin A$.

Leere Menge: Die *leere Menge* werde mit $\varnothing$ bezeichnet.

Maß: ☞ *Maßraum*.

Maßraum: Ein Tripel $(\Omega, \underline{A}, \mu)$ bestehend aus einer nicht-leeren Menge Ω, einer *σ-Algebra* $\underline{A}$ auf Ω, d.h.:

1) $\Omega \in \underline{A}$,

2) $A \in \underline{A} \Rightarrow A^c \in \underline{A}$,

3) $A_1, A_2, \ldots \in \underline{A} \Rightarrow \bigcup_{i \geq 1} A_i \in \underline{A}$.

und einem *Maß* $\mu : \underline{A} \longrightarrow [0, \infty]$ auf $(\Omega, \underline{A})$, d.h.:

1) $\mu(\varnothing) = 0$,

2) $A_1, A_2, \ldots \in \underline{A}$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \mu(\sum_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i)$.

heißt ein *Maßraum*. Dabei heißen $A_1, A_2, \ldots \in \underline{A}$ *paarweise disjunkt*, falls $A_i \cap A_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$ gilt. (☞ etwa [Als98, 1–2])

Mengen und Räume: M, N, X, Y bezeichnen Mengen,
X^ω bezeichnet für eine Menge X die Menge aller Folgen in X,
$X^{<\omega}$ die Menge aller endlichen Sequenzen in X und
$X_*^{<\omega}$ die Menge aller nicht-leeren endlichen Sequenzen in X,
Ω steht in maßtheoretischen Beispielen für eine nicht-leere Menge mit der zusätzlichen Struktur eines Ringes oder einer σ-Algebra,
ω bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen – dabei wird die Schreibweise

$$n < \omega \quad \text{analog zu} \quad n \in \mathbb{N}$$

verwendet,
$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bezeichnen die Mengen der rationalen bzw. der reellen Zahlen.

(Mengen-)System, Familie: Eine Teilmenge $\underline{Y} \subset \mathbf{P}(X)$ heißt auch ein *System von Teilmengen von* X oder (falls klar ist, in welcher Menge X sich die Mengen befinden) einfach ein *(Mengen-)System*. Ist $\underline{Y} = \{A_i \mid i \in I\}$ ein indiziertes Teilmengensystem, so schreibt man stattdessen auch $(A_i)_{i \in I}$ und nennt es eine *Familie* von Teilmengen von X. Ist I abzählbar, nennt man die Familie auch eine *Folge* von Teilmengen von X.

Potenzmenge: Sei X eine Menge. Dann bezeichnet $\mathbf{P}(X)$ ihre *Potenzmenge*, d.h. die Menge aller Teilmengen von X.

Produktmenge: Seien X und Y Mengen. Dann bezeichnet $X \times Y$ die *Produktmenge* oder das *Produkt* von X und Y, d.h. die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$.

Ring: Ein System von Teilmengen $\underline{R} \subset X$ einer nicht-leeren Menge Ω heißt *Ring* auf Ω, falls gilt:

1) $\varnothing \in \underline{R}$,

2) $A, B \in \underline{R} \Rightarrow A - B \in \underline{R}$,

3) $A, B \in \underline{R} \Rightarrow A \cup B \in \underline{R}$.

(☞ etwa [Als98, 3.1])

σ-Algebra: ☞ *Maßraum*.

Supremum, Infimum: Sei $A \subset \mathbb{R}$. Eine reelle Zahl z heißt *Supremum* von A, falls z kleinste obere Schranke von A ist:

z ist obere Schranke von A (d.h.: $\forall\, x \in A\ (x \leq z)$) und
falls z' obere Schranke von A ist, so ist $z < z'$.

Analog ist das *Infimum* von A definiert als die größte untere Schranke von A.

Symmetrische Differenz: Sei X eine Menge und seien $A, B \subset X$. Dann bezeichnet $A \triangle B$ die *symmetrische Differenz* von A und B, d.h. die Menge aller $x \in A \cup B$ mit $x \notin A \cap B$. Das ist gleichbedeutend mit

$$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A).$$

Quantoren: In Formeln mit Quantoren schreibt man auch:

$\forall\, n > n_0\ (A(n))$ anstelle von $\forall\, n < \omega\ (n > n_0 \Rightarrow A(n))$,
$\exists\, n > n_0\ (A(n))$ anstelle von $\exists\, n < \omega\ (n > n_0 \Rightarrow A(n))$.

Abkürzungen: Gelegentlich werden folgende Abkürzungen verwendet:

abg.	=„abgeschlossen(e)“
abzb.	=„abzählbar(e)“
Bsp.	=„Beispiel“
bzw.	=„beziehungsweise“
Def.	=„Definition“
d.h.	=„das heißt“
endl.	=„endlich“
gesp.	=„gespielt“
hinr. Krit.	=„hinreichendes Kriterium“
i.a.	=„im allgemeinen“
insb.	=„insbesondere“
nirg.	=„nirgends“
notw. Krit.	=„notwendiges Kriterium“
off.	=„offen(e)“
S.	=„Seite(n)“
Teilm.	=„Teilmenge“
Umgeb.	=„Umgebung“
vgl.	=„vergleiche“
z.B.	=„zum Beispiel“

Literaturverzeichnis

[Ale94] Pavel S. Alexandroff. *Lehrbuch der Mengenlehre.* Harry Deutsch, Frankf. a.M., 1994.

[Als98] Gerold Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Skripten zur Mathematischen Statistik, Nr. 30. Universität Münster, 1998.

[Bai99] René Baire. Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, IIIa3:1–123, 1899.

[Bau74] Heinz Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie.* De Gruyter, Berlin, second edition, 1974.

[Bou98a] Nicolas Bourbaki. *General topology. Chapters 1–4.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[Bou98b] Nicolas Bourbaki. *General topology. Chapters 5–10.* Elements of Mathematics (Berlin). Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation.

[Can83] Georg Cantor. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, 21:545–586, 1883.

[Coh82] Donald L. Cohn. *Measure Theory.* Birkhäuser, Boston, 1982.

[Els05] Jürgen Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie.* Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]. Springer-Verlag, Berlin, fourth edition, 2005. Grundwissen Mathematik. [Basic Knowledge in Mathematics].

[Fré06] Maurice Fréchet. Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 22, 1906.

[GS53] David Gale and F. M. Stewart. Infinite games with perfect information. In *Contributions to the theory of games, vol. 2*, Annals of Mathematics Studies, no. 28, pages 245–266. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953.

[Hau14] Felix Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre.* Veit & Comp., Leipzig, 1914.

[HM77] R. C. Haworth and R. A. McCoy. Baire spaces. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 141:73, 1977.

[Jec03] Thomas Jech. *Set theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. The third millennium edition, revised and expanded.

[Kan03] Akihiro Kanamori. *The higher infinite.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003. Large cardinals in set theory from their beginnings.

[Kec77] Alexander S. Kechris. On a notion of smallness for subsets of the Baire space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 229:191–207, 1977.

[Kec95] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[KM76] Kazimierz Kuratowski and Andrzej Mostowski. *Set Theory*, volume 1. Noth-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1976.

[Kö88] Walter Köhnen. *Metrische Räume.* Academia, St. Augustin, 1988.

[KS85] Alexander S. Kechris and Robert M. Solovay. On the relative consistency strength of determinacy hypothesis. *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 290:179–211, 1985.

[Kur58] Casimir Kuratowski. *Topologie*, volume 1. Panst. Wyd. Naukowe, Warszawa, 1958.

[Leb04] Henri Lebesgue. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives.* Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[Leb72] Henri Lebesgue. *Œuvres scientifiques (en cinq volumes). Vol. II.* Institut de Mathématiques de l'Université de Genève, Geneva, 1972.

[Mos73] Y. N. Moschovakis. Analytical definability in a playful universe. In *Logic, methodology and philosophy of science, IV (Proc. Fourth Internat. Congr., Bucharest, 1971)*, pages 77–85. Studies in Logic and Foundations of Math., Vol. 74. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[Mos80] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive set theory*, volume 100 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1980.

[MS62] Jan Mycielski and H. Steinhaus. A mathematical axiom contradicting the axiom of choice. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 10:1–3, 1962.

[Myc64] Jan Mycielski. On the axiom of determinateness. *Fund. Math.*, 53:205–224, 1963/1964.

[Oxt80] John C. Oxtoby. *Measure and category*, volume 2 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1980. A survey of the analogies between topological and measure spaces.

[Pre70] Gerhard Preuß. *Allgemeine Topologie*. Springer-Verlag, Berlin, 1970. Hochschultext.

[Ste65] H. Steinhaus. Games, An Informal Talk. *Amer. Math. Monthly*, 72(5):457–468, 1965.

[Tel87] Rastislav Telgársky. Topological games: on the 50th anniversary of the Banach-Mazur game. *Rocky Mountain J. Math.*, 17(2):227–276, 1987.

[vNM44] John von Neumann and Oskar Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.

[Zer04] E. Zermelo. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Math. Ann.*, 59(4):514–516, 1904.