Abschätzung der Berechnungskomplexität von Gödels T und seinen Teilsystemen

Diplomarbeit

Gunnar Wilken

dem Institut für
mathematische Logik und Grundlagenforschung
am Fachbereich 15 – Mathematik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
eingereicht

Münster, im August 1998

Versicherung

Ich versichere, daß ich die Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen Quellen als die angegebenen benutzt habe.

Münster, den 17. August 1998

Einleitung

Seitdem K. Gödel mit seinem berühmten 2. Unvollständigkeitssatz bewies, daß sich das Hilbertsche Programm, welches eine Begründung der Widerspruchsfreiheit der Mathematik mit finiten Mitteln forderte und damit den Grundstein für die Entstehung der Beweistheorie als eigenständige Teildisziplin der mathematischen Logik gelegt hat, nicht durchführen läßt, hat es viele Bemühungen gegeben, sich dieser Zielsetzung durch verschiedentliche Modifikationen von Hilberts ursprünglichem Programm jedenfalls zu nähern.

Eine richtungsweisende Arbeit unternahm dabei G. Gentzen, der die Widerspruchsfreiheit der klassischen Zahlentheorie 1. Stufe mit finiten Methoden auf das Prinzip der transfiniten Induktion bis ε_0 zurückführte (siehe [8] und [9]). Gentzen verwendete dabei die Technik der Schnittelimination, welche zu einer zentralen Methode in der Beweistheorie wurde.

Ein alternativer Ansatz, das Problem der Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie auf möglichst einfache Prinzipien zurückzuführen, stammt von Gödel selbst (siehe [10]). In dieser Arbeit führt Gödel die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Zahlentheorie HA mit Hilfe einer Funktionalinterpretation auf die Widerspruchsfreiheit einer quantorenfreien intuitionistischen Theorie T zurück, deren Objekte jedoch nicht ausschließlich natürliche Zahlen, sondern allgemeiner Objekte endlichen Typs über den natürlichen Zahlen sind. Die Menge der endlichen Typen über $\mathbb{N}$ erhält man induktiv aus dem Basistyp $\mathbb{N}$, indem man unter der Bildung der Menge aller Funktionen von σ nach τ zu gegebenen endlichen Typen σ und τ abschließt. Auch die Funktionalinterpretation wurde somit als eine leistungsstarke Technik in der Beweistheorie etabliert.

Die Widerspruchsfreiheit von T, die Gödel evident erschien, läßt sich nun ihrerseits auf die Berechenbarkeit der Funktionale (d. h. der geschlossenen

Terme) von T reduzieren. In der Literatur finden sich zahlreiche Beweise für diese sogenannte Normalisierbarkeit der Funktionale von T. Darstellungen der Entwicklung auf diesem Gebiet sind beispielsweise in [22], [23] und [25] enthalten.

In den Arbeiten zum Thema der Normalisierbarkeit der Funktionale von T werden die verschiedenen Varianten von T selbst zum Gegenstand mathematischer Untersuchungen. Eines der wesentlichen Resultate ist dabei die Zurückführung der Berechenbarkeit der Funktionale von T auf die transfinite Induktion bis ε_0. W. A. Howard erzielt dieses Resultat in [12] für eine Variante T^λ von T als Erweiterung des getypten λ-Kalküls durch eine Zuordnung von Ordinalzahlen unterhalb von ε_0 an die Terme von T^λ derart, daß der Reduktion von Termen ein Abstieg in den zugeordneten Ordinalzahlen entspricht. Dabei legt Howard jedoch eine hinsichtlich Rekursor-Reduktionen und Anwendungen der ξ-Regel eingeschränkte Reduktionsrelation zugrunde. Geht man dann von der Gültigkeit des Prinzips der transfiniten Induktion bis ε_0 aus, so folgt die Berechenbarkeit der Funktionale von T^λ daraus, daß es keine unendlich absteigenden Ketten von Ordinalzahlen unterhalb von ε_0 gibt. Um eine Behandlung der uneingeschränkten ξ-Regel zu ermöglichen, führt Howard eine modifizierte Zuordnung von Ordinalzahlen an die Terme aus T^λ ein, die jedoch nicht mehr eindeutig ist. Die Einschränkung der Rekursor-Reduktionen auf Ziffern als Rekursionsargumente bleibt dabei bestehen.

K. Schütte verwendet den Howardschen Ansatz in [17] für die Variante T^{CL} von T als Erweiterung der kombinatorischen Logik. Da in T^{CL} keine λ-Abstraktionen und mithin auch keine β-Kontraktionen auftreten, benötigt Schütte nur einen Teil der Howardschen Ideen, um ein dem Howardschen Resultat für T^λ analoges Resultat für T^{CL} zu erhalten.

Die konstruktive Natur des Howardschen beziehungsweise Schütteschen Ansatzes ermöglichte es A. Weiermann, vor dem Hintergrund vorangehender Arbeiten in der Beweistheorie [1] eine Kollabierungstechnik zu entwickeln, die eine Verbesserung des Originalansatzes in Form einer Zuordnung natürlicher Zahlen an die Terme von T^{CL} zuläßt (siehe dazu [25, 26]). Diese Verbesserung hat die weitreichende Konsequenz, daß man nun eine Abschätzung der Längen der Reduktionsketten von T^{CL} erhält. Durch eine Modifikation der

[1] Siehe dazu den auf W. Pohlers zurückgehenden Ansatz der lokalen Prädikativität in [16, 24, 27] sowie den Zugang zur Theorie der subrekursiven Hierarchien nach W. Buchholz, E. A. Cichon und A. Weiermann in [5].

Vorgehensweise in [25], welche die Kollabierung bereits während des Zuordnungsprozesses zur Anwendung kommen läßt, erzielt Weiermann in [26] eine scharfe Abschätzung der Berechnungskomplexität nicht nur des Systems T^{CL} sondern auch seiner Teilsysteme T_n^{CL}. Dabei gehe allgemein T_n aus T durch Beschränkung der Rekursoren auf einen maximalen Typgrad $n+2$ hervor. Das mathematische Interesse an den Systemen T_n liegt darin begründet, daß sich nach Parsons (siehe [14]) die Fragmente $I\Sigma_{n+1}$ gerade in den Systemen T_n funktionalinterpretieren lassen.

In dieser Arbeit werden nun der Howardsche Originalansatz und die Weiermannsche Kollabierungstechnik verwendet, um eine (nicht-eindeutige) Zuordnung natürlicher Zahlen an die Terme von T^λ zu konstruieren, die eine Abschätzung der Längen von Reduktionsketten bezüglich einer uneingeschränkten Reduktionsrelation $\rhd$ zuläßt. Dabei geht $\rhd$ aus der bekannten Reduktionsrelation für den getypten λ-Kalkül mit β-Kontraktion und ξ-Regel durch Erweiterung um allgemeine Kontraktionen für Fallunterscheidungsfunktionale und Rekursoren hervor. Dieselbe Zuordnung läßt auch eine Behandlung der Teilsysteme T_n^λ von T^λ zu.

Die Konstruktion einer Zuordnung mit den genannten Eigenschaften war ein seit dem Erscheinen der Howardschen Arbeit offenes Problem. Verglichen mit der Konstruktion einer solchen Zuordnung für T^{CL} bestand die Schwierigkeit im Falle des Systems T^λ in der Notwendigkeit, ein Variablenkonzept einzuführen und die simultane Behandlung von β-Kontraktionen, der ξ-Regel und Rekursor-Reduktionen mit uneingeschränkten Rekursionsargumenten zu ermöglichen.

Es hat sich herausgestellt, daß die dabei erhaltenen oberen Schranken für Reduktionen in T^λ bzw. T_n^λ sogar scharf sind. Als Korollar liefert dies, daß die in T^λ definierbaren Funktionen $<\varepsilon_0$-rekursiv und die in T_n^λ definierbaren Funktionen $<\omega_{n+2}$-rekursiv sind. Außerdem folgt, daß die Berechnungslängenfunktionen von T^λ bzw. T_n^λ gerade ε_0- bzw. ω_{n+2}-rekursiv sind.

Nun sind aber die $<\omega_{n+2}$-rekursiven Funktionen $I\Sigma_{n+1}$-beweisbar rekursiv, was zum Beispiel in der Diplomarbeit von W. Burr [6] gezeigt wird, und mit der von Parsons bewiesenen Funktionalinterpretierbarkeit von $I\Sigma_{n+1}$ in T_n folgt, daß die $I\Sigma_{n+1}$-beweisbar rekursiven Funktionen sämtlich in T_n definierbar sind. Damit erkennen wir, daß die T_n-definierbaren Funktionen genau die $<\omega_{n+2}$-rekursiven und diese wiederum genau die $I\Sigma_{n+1}$-beweisbar rekursiven Funktionen sind. Wir erkennen ferner, daß die T-definierbaren Funktionen genau die $<\varepsilon_0$-rekursiven und diese genau die PA-beweisbar rekursiven Funktionen sind.

Ein weiterer allgemeiner Gesichtspunkt der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse liegt darin, daß man T^λ als höherstufiges Termersetzungssystem auffassen kann. Damit liefert die vorliegende Arbeit einen Beitrag zu dem Ansatz, subrekursive Komplexitätsklassen mit Hilfe von Abschätzungen der Berechnungskomplexitäten korrespondierender Termersetzungssysteme zu analysieren. Ist in diesem Zusammenhang eine subrekursive Komplexitätsklasse $\mathcal{K}$ durch einen Gleichungskalkül gegeben, so läßt sich $\mathcal{K}$ in vielen Fällen durch ein Termersetzungssystem $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ charakterisieren, welches die Funktionen aus $\mathcal{K}$ berechnet. Eine Abschätzung der Berechnungskomplexität von $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ gibt dann Aufschluß über die Komplexität von $\mathcal{K}$.

Zu den Arbeiten, welche die Leistungsstärke dieses Ansatzes demonstrieren, gehören eine Arbeit von E. A. Cichon und A. Weiermann (siehe [4]), in welcher der Ansatz anhand des Beispiels der primitiv rekursiven Funktionen begründet wird, eine Arbeit von A. Beckmann und A. Weiermann (siehe [2]), in der die Polytime-Funktionen und verwandte Komplexitätsklassen untersucht werden, sowie die Diplomarbeit von M. Möllerfeld [13], in der verschiedene Prinzipien der Rekursion entlang fundierten Relationen und Hauptfolgen untersucht werden.

Die Weiermannsche Verfeinerung des bereits beschriebenen Ansatzes von Howard und Schütte für T^{CL} in [25, 26] ist ein weiteres wichtiges Beispiel für die Fruchtbarkeit dieses Zugangs zur Komplexitätsabschätzung. Eine Anwendung dieser Techniken auf die elementar-rekursiven Funktionen findet sich in einem Papier von Beckmann und Weiermann (siehe [3]).

Gegenstand möglicher zukünftiger Arbeiten sind Anwendungen auf Erweiterungen von T um Rekursion entlang (primitiv rekursiver) fundierter Relationen sowie die Erweiterung von T um Bar-Rekursion vom Typ 0 (siehe dazu [26], Abschnitt 2.4, und [12], S. 444).

Wir geben nun eine Übersicht über die einzelnen Kapitel der vorliegenden Diplomarbeit:

In Kapitel 1 werden zunächst das Konzept der endlichen Typen, der getypte λ-Kalkül sowie T^λ und seine Fragmente T^λ_n eingeführt. Es wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Eigenschaften dieser Theorien gegeben, wobei auch auf die in der Arbeit bewiesenen Resultate eingegangen wird.

In Kapitel 2 wird die Berechnungskomplexität des getypten λ-Kalküls mit Hilfe des Howardschen Ansatzes abgeschätzt. Dazu wird eine nichteindeutige Zuordnung $[\cdot]_0$ von natürlichen Zahlen an die Terme des getypten λ-Kalküls konstruiert mit der Eigenschaft, daß man zu λ-Termen a und b

mit $a \rhd^\lambda b$ und einem a zugeordneten Wert $[a]_0$ effektiv einen b zugeordneten Wert $[b]_0$ findet mit $[a]_0 > [b]_0$. Damit liefert $[a]_0$ eine obere Schranke für die Länge jeder Reduktionskette ausgehend von a. Eine Analyse der Zuordnung $[\cdot]_0$ ergibt, daß die so erhaltenen oberen Schranken der Reduktionsketten von λ-Termen die besten bisher bekannten sind.

In Kapitel 3 wird die bereits erwähnte Zuordnung natürlicher Zahlen an die Terme von T^λ konstruiert. Damit stellt Kapitel 3 den Hauptteil der Arbeit dar. Wir erörtern im folgenden kurz die technischen Schwierigkeiten, welche bei der Behandlung von T^λ zu überwinden waren. Dabei nehmen wir Bezug auf den Originalbeweis von Howard in [12].

Wir ordnen den Termen aus T^λ zunächst Ordinalvektoren zu, die ähnlich wie bei Howard aufgebaut sind und aus deren nullten Komponenten wir schließlich die gewünschte Zuordnung natürlicher Zahlen erhalten. Den Variablen aus T^λ werden dabei Variablen-Vektoren zugeordnet. Für die Behandlung der Applikation verwenden wir Howards $\Box$-Operator in der verfeinerten Version von Weiermann in [26]. Um λ-Abstraktionen behandeln zu können, verwenden wir eine Verfeinerung von Howards genialem δ-Operator. Dieser Operator ist das Hauptwerkzeug zur Behandlung von β-Kontraktionen. Da der δ-Operator nicht monoton ist (siehe dazu die Einleitung von Abschnitt 2.2), verwenden wir Howards Idee einer nicht-eindeutigen Zuordnung zur Behandlung der ξ-Regel, welche alle möglichen Reduktionsgeschichten der Terme aus T^λ berücksichtigt. Um letzten Endes eine Zuordnung natürlicher Zahlen zu erhalten und Rekursor-Reduktionen in voller Allgemeinheit behandeln zu können, wenden wir die Kollabierungsfunktion $\psi : \varepsilon_0 \to \omega$ aus [26] an. Bei der Behandlung beliebiger Rekursionsargumente t vom Typ 0 in Rekursor-Reduktionen treten jedoch erhebliche Probleme auf, falls t freie Variablen enthält (auch wenn diese in einem übergeordneten Kontext abgebunden werden). Dies liegt daran, daß sich der Ansatz zur Behandlung von Rekursor-Reduktionen in [26] nicht mit dem Howardschen Konzept der Klasse $\mathcal{C}$ verträgt, welche als Definitionsbereich des δ-Operators angesehen werden kann. Die Bedingungen, unter denen ein Ordinalvektor A zu $\mathcal{C}$ gehört, beziehen sich im wesentlichen auf die Auftreten von Variablen in A. Daher haben $\mathcal{C}$-Vektoren eine gemeinsame Struktur. Die in [26] den Termen einer Gestalt $\mathsf{R}_\rho t^0$ zugeordneten Vektoren haben diese Struktureigenschaften im allgemeinen jedoch nicht. Um diesen Konflikt zu umgehen, führen wir eine verfeinerte Version der Klasse $\mathcal{C}$ ein, welche zwei Sorten von Variablen zur Verfügung stellt. Beiden Variablensorten ist gemein, daß sie als Platzhalter für Substitutionen dienen. Die Bedingungen an

$\mathcal{C}$-Vektoren werden jedoch nur bezüglich einer der beiden Variablensorten gestellt, so daß nur die Variablen dieser Sorte Markierungen für den durch den δ-Operator realisierten Umbauprozeß darstellen. Nach dieser Vorbereitung konstruieren wir die nicht-eindeutige Zuordnung $[\cdot]$ in zwei Schritten, indem wir zunächst eine eindeutige Zuordnung $[\![\cdot]\!]$ definieren, die eine Behandlung der β-Kontraktion erlaubt, jedoch nur eingeschränkte Versionen der ξ-Regel und der Rekursor-Reduktion zuläßt, ähnlich wie dies in [12], Abschnitt 3, der Fall ist. Im zweiten Schritt verwenden wir dann Howards Idee einer nicht-eindeutigen Zuordnung, wobei wir jedoch im Falle von Abstraktionstermen, die an Ausgangspunkten möglicher Reduktionsgeschichten eines Terms auftreten, auf die Zuordnung $[\![\cdot]\!]$ zurückgreifen. Dieses subtile Vorgehen wird in der Einleitung zu Abschnitt 3.2 näher erläutert. Wir erhalten schließlich die nicht-eindeutige Zuordnung $[\cdot]$, welche die starken Eigenschaften der von Howard konstruierten nicht-eindeutigen Zuordnung und diejenigen der von Weiermann konstruierten Zuordnung für T^{CL} auf sich vereint.

Danksagung

Ich möchte mich für die ausgezeichnete Betreuung dieser Arbeit durch Herrn Priv. Doz. Dr. Andreas Weiermann bedanken. Herr Weiermann hatte den Optimismus in die Durchführbarkeit der Arbeit wie sie jetzt vorliegt. Er war stets offen für konstruktive Gespräche. Durch seine Vorlesungen über neueste Forschungsergebnisse in der mathematischen Logik habe ich sehr viel gelernt. Herrn Prof. Dr. Justus Diller gilt mein ganz besonderer Dank. Ich habe seine Vorlesungen mit größtem Interesse gehört und nach seiner Vorlesung „Einführung in die Logik und theoretische Informatik" das Nebenfach von Informatik auf Logik gewechselt. Während meines gesamten Studiums erhielt ich von ihm die denkbar beste fachliche Unterstützung. Herrn Prof. Dr. Wolfram Pohlers danke ich für die stark motivierenden Darstellungen weitreichender Zusammenhänge zwischen verschiedenen Teildisziplinen der mathematischen Logik während seiner Vorlesungen und Seminare. Seine Unterstützung war für mich von großer Bedeutung. Ich möchte mich bei vielen Mitarbeitern und Studenten, auch den ehemaligen, am Institut für mathematische Logik und Grundlagenforschung für zahlreiche konstruktive Gespräche und eine jederzeit angenehme Arbeitsatmosphäre bedanken, insbesondere bei Dr. Arnold Beckmann, Dr. Benjamin Blankertz, Wolfgang Burr, Dr. Enno Folkerts, Stefan Harmeling, Gyesik Lee, Ingo Lepper, Michael Möllerfeld, Dagmar Neuhaus und Dr. Kai Wehmeier. Frau Hildegard Brunstering und Frau Martina Pfeifer danke ich für die große Hilfe in bürokratischer Hinsicht.

Meiner Schwester Gritta Schrader danke ich herzlich für den unerschütterlichen Optimismus, den sie mir entgegenbringt. Ihre Zuversicht und guten Ratschläge haben mich gestärkt und mir immer sehr geholfen. Meine Eltern Heinrich und Dora Wilken haben mir dieses Studium erst ermöglicht. Ihre großzügige Unterstützung, die Ermutigungen und der Ansporn stellen das Fundament meines gesamten bisherigen Werdegangs dar. Ihnen gilt meine größte und tiefste Dankbarkeit.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Der getypte λ-Kalkül und Gödels T

In diesem Kapitel beschreiben wir den getypten λ-Kalkül sowie dessen Erweiterung zu einer Variante von Gödels T.

1.1 Endliche Typen

Definition 1 (Endliche Typen)
Wir definieren die Menge $\mathcal{TP}$ der endlichen Typen induktiv durch folgende Klauseln:

- 0 *ist ein endlicher Typ, der Grundtyp.*
- *Mit σ und τ ist auch $(\sigma\tau)$ ein endlicher Typ.*

Kleine griechische Buchstaben $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ dienen als Metavariablen, die über die Menge der endlichen Typen laufen. Für Typen einer Gestalt $(\rho(\sigma\tau))$ schreiben wir vereinfachend $\rho\sigma\tau$. Dabei gehen wir stets von Rechtsklammerung bei Typausdrücken aus.

Bemerkung. Im Rahmen dieser Arbeit stellen wir uns unter dem Typ 0 die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen vor. Der Typ $(\sigma\tau)$ besteht aus sämtlichen mengentheoretischen Funktionen, welche die Menge der Objekte des Typs σ in die Menge der Objekte des Typs τ abbildet. In der Literatur wird diese Interpretation der endlichen Typen als die volle Typenstruktur über $\mathbb{N}$ bezeichnet.

Definition 2 (Typgrade)
Als Maß für die Komplexität eines Typs definieren wir dessen Grad wie folgt rekursiv:

- $g0 := 0.$
- $g(\sigma\tau) := \max\{g\sigma + 1, g\tau\}.$

Bemerkung. Es ist leicht zu sehen, daß jeder Typ τ eine Gestalt $\tau_1 \ldots \tau_n 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ hat und sein Typgrad gerade $\max\{0, g\tau_1 + 1, \ldots, g\tau_n + 1\}$ ist.

1.2 Getypter $\boldsymbol{\lambda}$-Kalkül

Definition 3 (Variablen und $\boldsymbol{\lambda}$-Terme)
Wir definieren eine Menge $\mathcal{V}$ von getypten Variablen durch

$$\mathcal{V} := \{v_i^\sigma \mid \sigma \in \mathcal{TP} \ \& \ i \in \mathbb{N}\}.$$

Die Menge Λ der Terme des getypten λ-Kalküls ist induktiv durch folgende Klauseln über dem Alphabet $\mathcal{V} \cup \{\lambda, ., (,)\}$ definiert:

- *Variablen $v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots$ sind Terme des Typs σ für jeden Typ $\sigma \in \mathcal{TP}$.*
- *Mit Termen a vom Typ $\sigma\tau$ und b vom Typ σ ist ab ein Term vom Typ τ.*
- *Ist x Variable vom Typ ρ und b Term vom Typ σ, so ist $\lambda x.b$ ein Term vom Typ $\rho\sigma$.*

Die Menge Λ ist somit der Abschluß der Menge der Variablen unter λ-Abstraktion und typkorrekter Applikation.

Die Metavariablen x, y, z laufen über die Menge der Variablen, die Metavariablen $a, b, c, \ldots$ laufen über die Menge der Terme. Wir verwenden die Schreibweise a^τ als Abkürzung für die Mitteilung, daß a ein Term vom Typ τ ist. Die Mengen $FV(a)$ und $BV(a)$ der freien und gebundenen Variablen eines Terms a sind wie üblich definiert.

α-Kongruenz: Wir argumentieren stets *modulo* $\equiv_\alpha$, d. h. wir identifizieren Terme $\lambda x^\sigma.a^\tau$ und $\lambda y^\sigma.(a^\tau\{x^\sigma := y^\sigma\})$, falls $y^\sigma \notin FV(a^\tau)$.

Eine Gleichung $a^\sigma = b^\sigma$ nennen wir eine *Gleichung des Typs σ*.

Definition 4 (Formeln des getypten $\boldsymbol{\lambda}$-Kalküls)
Die Gleichungen endlicher Typen bilden die Gesamtheit aller Formeln des getypten λ-Kalküls.

Definition 5 (Axiome und Schlußregeln des getypten $\boldsymbol{\lambda}$-Kalküls)
Die Theorie $\boldsymbol{\lambda}$ des getypten λ-Kalküls ist durch die nachstehenden Axiomen- und Regelschemata gegeben.

- *Reflexivität:* $a^\sigma = a^\sigma$.
- *Symmetrie:* $a^\sigma = b^\sigma \Rightarrow b^\sigma = a^\sigma$.
- *Transitivität:* $a^\sigma = b^\sigma \;\&\; b^\sigma = c^\sigma \Rightarrow a^\sigma = c^\sigma$.
- *Applikation:* $a^{\sigma\tau} = b^{\sigma\tau} \Rightarrow a^{\sigma\tau}c^\sigma = b^{\sigma\tau}c^\sigma$ *und* $a^\sigma = b^\sigma \Rightarrow c^{\sigma\tau}a^\sigma = c^{\sigma\tau}b^\sigma$.
- *β-Konversion:* $(\lambda x^\sigma.a^\tau)b^\sigma = a^\tau\{x := b\}$, *falls* $BV(\lambda x.a) \cap FV(b) = \emptyset$.
- *ξ-Regel:* $a^\tau = b^\tau \Rightarrow \lambda x^\sigma.a^\tau = \lambda x^\sigma.b^\tau$.

Wir können die Gleichheitsrelation in einfacher Weise als den reflexiven, symmetrischen und transitiven Abschluß einer Reduktionsrelation $\rhd$ darstellen und den Kalkül $\boldsymbol{\lambda}$ in diesem Sinne als Termersetzungssystem auffassen.

Definition 6 ($\rhd$ auf $\boldsymbol{\Lambda}$)
Wir definieren die Relation $\rhd$ auf Λ rekursiv nach dem Termaufbau:

$$\begin{array}{cl}
(\beta) & (\lambda x^\sigma.a^\tau)b^\sigma \rhd a^\tau\{x := b\},\ \textit{falls}\ BV(\lambda x.a) \cap FV(b) = \emptyset. \\
(\xi) & a^\tau \rhd b^\tau \Rightarrow \lambda x^\sigma.a^\tau \rhd \lambda x^\sigma.b^\tau. \\
(App_r) & a^{\sigma\tau} \rhd b^{\sigma\tau} \Rightarrow a^{\sigma\tau}c^\sigma \rhd b^{\sigma\tau}c^\sigma. \\
(App_l) & b^\sigma \rhd c^\sigma \Rightarrow a^{\sigma\tau}b^\sigma \rhd a^{\sigma\tau}c^\sigma.
\end{array}$$

Bemerkung. Der getypte λ-Kalkül hat die folgenden wichtigen Eigenschaften:

- *Church-Rosser-Eigenschaft:* Seien a^σ, b^σ, $c^\sigma \in \Lambda$ gegeben, so daß a^σ in endlich vielen Schritten sowohl zu b^σ als auch zu c^σ reduziert. Dann existiert ein Term $d^\sigma \in \Lambda$ mit

$$b^\sigma \rhd \ldots \rhd d^\sigma \text{ und } c^\sigma \rhd \ldots \rhd d^\sigma.$$

- *Starke Normalisation:* Es gibt keine unendlichen $\triangleright$-Reduktionsketten von getypten λ-Termen.
- *Eindeutigkeit der Normalformen:* Aus Church-Rosser-Eigenschaft und starker Normalisation folgt, daß jeder Term aus Λ in endlich vielen Schritten zu einer (modulo $\equiv_\alpha$) eindeutig bestimmten Normalform reduziert, wobei eine beliebige Reduktionsstrategie gewählt werden kann.
- *Definierbare Funktionen:* Unter Verwendung der *Church-Numerale* lassen sich in $\boldsymbol{\lambda}$ genau die Polynome und die Funktionen, welche durch Fallunterscheidung aus Polynomen definiert sind, definieren. Dieses Ergebnis geht auf Schwichtenberg [18] zurück.

Eine breite Darstellung des getypten λ-Kalküls findet sich im Lehrbuch von Hindley und Seldin [11], Kapitel 13. Dort sind auch Beweise für die Church-Rosser-Eigenschaft und die starke Normalisation enthalten. Weitere Darstellungen des getypten λ-Kalküls werden in den Lehrbüchern von Barendregt [1] und von Troelstra und Schwichtenberg [23] gegeben.

Die starke Normalisation folgt auch aus Korollar 1 zu Satz 1 in Abschnitt 2.3 dieser Arbeit, wo wir sogar eine Abschätzung der Reduktionsketten in $\boldsymbol{\lambda}$ vornehmen, siehe dazu Korollar 2 zu Satz 1. Die Methode unseres Vorgehens wurde jedoch schon von Howard in [12] entwickelt. Eine alternative Abschätzung der Reduktionsketten in $\boldsymbol{\lambda}$ stammt von Schwichtenberg [20].

Eine *untere* Schranke für die Berechnungskomplexität von $\boldsymbol{\lambda}$ gibt Schwichtenberg in [19].

1.3 Gödels T

In diesem Abschnitt definieren wir eine Variante von Gödels T für primitiv rekursive Funktionale endlicher Typen als Erweiterung der Theorie $\boldsymbol{\lambda}$. T ist eine quantorenfreie Theorie, auf deren Widerspruchsfreiheit sich die Widerspruchsfreiheit der intuitionistischen Zahlentheorie HA mittels einer Funktionalinterpretation zurückführen läßt. Dieses Ergebnis stammt von Gödel, siehe [10]. [1]

[1] Für die Zwecke der Funktionalinterpretation ist es dabei hinreichend, T auf der Grundlage der getypten kombinatorischen Logik zu definieren. In diesem Falle ist die Gleichheitsrelation weniger kompliziert als im Falle einer Zugrundelegung des getypten λ-Kalküls, siehe dazu die Ausführungen vor der Definition von $\triangleright$ auf $\mathcal{T}$.

Ferner führt Shoenfield in [21] einen Widerspruchsfreiheitsbeweis der klassischen Zahlentheorie PA durch Funktionalinterpretation in der vollen Typenstruktur $\mathbb{N}^\omega$ über $\mathbb{N}$.

Definition 7 (Terme in Gödels T)
Die Menge $\mathcal{T}$ der Terme von Gödels T erhalten wir, indem wir Λ um folgende Grundfunktionale *erweitern und erneut unter λ-Abstraktion und typkorrekter Anwendung abschließen:*

- *Das Nullfunktional* $\mathsf{0}$ *vom Typ* 0.
- *Das Nachfolgerfunktional* S *vom Typ* $1 := 00$.
- *Fallunterscheidungsfunktionale* D_τ *vom Typ* $0\tau\tau\tau$ *für jeden Typ* τ.
- *Rekursoren* R_ρ *vom Typ* $0(0\rho\rho)\rho\rho$ *für jeden Typ* ρ.

Bemerkung. Wir haben die Fallunterscheidungsfunktionale explizit als Terme von T definiert, da sie in vollem Umfang für die Funktionalinterpretation der Theorien $I\Sigma_{n+1}$ in Teilsystemen T_n von T verwendet werden, siehe dazu [14]. Dabei geht das Teilsystem T_n aus T durch Beschränkung auf Rekursoren eines Typgrades $\leq n+2$ hervor.

Definition 8 (Formeln von T)
Primformeln von T sind die Gleichungen eines jeden Typs. Formeln sind die aussagenlogischen Ausdrücke, welche sich aus den Primformeln zusammensetzen lassen.

Definition 9 (Axiome und Schlußregeln von T)
Der Theorie T liegen die folgenden Axiome und Schlußregeln zugrunde:

- *Die Axiomen- und Regelschemata der Theorie* $\boldsymbol{\lambda}$ *für die Terme aus* $\mathcal{T}$, *vermehrt um die definierenden Axiome für Fallunterscheidung und Rekursion:*
  - $\mathsf{D}_\tau \mathsf{0} a^\tau b^\tau = a^\tau$.
  - $\mathsf{D}_\tau (\mathsf{S} t^0) a^\tau b^\tau = b^\tau$.
  - $\mathsf{R}_\rho \mathsf{0} a^{0\rho\rho} b^\rho = b^\rho$.
  - $\mathsf{R}_\rho (\mathsf{S} t^0) a^{0\rho\rho} b^\rho = a^{0\rho\rho} t^0 (\mathsf{R}_\rho t^0 a^{0\rho\rho} b^\rho)$.

- *Intuitionistische Aussagenlogik.*
- *Substitutionsregel:* $A \to a^\sigma = b^\sigma, F[a^\sigma] \Rightarrow A \to F[b^\sigma]$.
- *Induktionsregel:* $F[0], F[x^0] \to F[\mathsf{S}x^0] \Rightarrow F[t^0]$.

Wir kommen nun zur Definition der Reduktionsrelation $\rhd$ auf $\mathcal{T}$. Der Definition ist unmittelbar anzusehen, daß für je zwei Terme a^σ und b^τ aus $\mathcal{T}$ mit $a^\sigma \rhd b^\tau$ gilt: $\sigma \equiv \tau$ und $T \vdash a = b$. Die Umkehrung davon gilt jedoch im allgemeinen nicht einmal für Gleichungen von Funktionalen: Als Gegenbeispiel betrachte man die Terme $\lambda x^0 y^0 .\, x + y$ und $\lambda x^0 y^0 .\, y + x$, wobei $+$ mit Hilfe des Nachfolgerfunktionals und des Rekursors definiert sei. Unter Verwendung von Induktions- und ξ-Regel beweist T die Gleichheit dieser beiden Terme in Normalform, obwohl sie verschieden sind. In der Variante T^{CL} von T als Erweiterung der getypten kombinatorischen Logik folgt immerhin für Funktionale a^σ und b^σ mit $T^{CL} \vdash a = b$, daß a und b dieselben Normalformen haben (siehe dazu beispielsweise Korollar 4 in [7]). An dieser Stelle manifestiert sich mithin ein Seiteneffekt der ξ-Regel, die in der kombinatorischen Logik nicht gegeben ist. In [22], S. 62, wird sogar gezeigt, daß für diese Variante von T im Gegensatz zur Variante T^{CL} die Gleichheitsrelation zwischen Funktionalen nicht entscheidbar ist.

Da es jedoch in dieser Arbeit um eine Einordnung der in T bzw. T_n definierbaren Funktionen sowie um die Berechnungskomplexität möglichst komplizierter Reduktionsrelationen geht, haben wir die ξ-Regel mit in unsere Betrachtungen einbezogen: Für die Menge der definierbaren Funktionen ist dies irrelevant, da die erzielten oberen Schranken für Reduktionsketten auch bei Einbeziehung der ξ-Regel noch optimal bleiben.

Definition 10 ($\rhd$ auf $\mathcal{T}$)
$\rhd$ sei die kleinste Relation auf $\mathcal{T}$ mit folgenden Eigenschaften:

$$
\begin{array}{cl}
(D_0) & \mathsf{D}_\tau 0 a^\tau b^\tau \rhd a^\tau. \\
(D_{\mathsf{S}}) & \mathsf{D}_\tau(\mathsf{S}t^0)a^\tau b^\tau \rhd b^\tau. \\
(R_0) & \mathsf{R}_\rho 0 a^{0\rho\rho} b^\rho \rhd b^\rho. \\
(R_{\mathsf{S}}) & \mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t^0)a^{0\rho\rho}b^\rho \rhd a^{0\rho\rho}t^0(\mathsf{R}_\rho t^0 a^{0\rho\rho} b^\rho). \\
(\beta) & (\lambda x^\sigma . a^\tau)b^\sigma \rhd a^\tau\{x := b\},\ \textit{falls}\ BV(\lambda x.a) \cap FV(b) = \emptyset. \\
(\xi) & a^\tau \rhd b^\tau \Rightarrow \lambda x^\sigma . a^\tau \rhd \lambda x^\sigma . b^\tau. \\
(\mathit{App}_r) & a^{\sigma\tau} \rhd b^{\sigma\tau} \Rightarrow a^{\sigma\tau}c^\sigma \rhd b^{\sigma\tau}c^\sigma. \\
(\mathit{App}_l) & b^\sigma \rhd c^\sigma \Rightarrow a^{\sigma\tau}b^\sigma \rhd a^{\sigma\tau}c^\sigma.
\end{array}
$$

Bemerkung. Wir geben einen kurzen Überblick über die wichtigsten Eigenschaften von T bezüglich der Reduktionsrelation $\triangleright$:

- Es gilt die *Church-Rosser-Eigenschaft.* Der Beweis in [11] für den einfachen λ-Kalkül läßt sich leicht zu einem Beweis für T erweitern.

- *Starke Normalisation:* Es gibt keine unendlichen $\triangleright$-Reduktionsketten von Termen aus $\mathcal{T}$, siehe dazu Korollar 3 zu Satz 2 in Abschnitt 3.3 dieser Arbeit.

- *Eindeutigkeit der Normalformen:* Aus Church-Rosser-Eigenschaft und starker Normalisation folgt, daß jeder Term aus $\mathcal{T}$ in endlich vielen Schritten zu einer (modulo $\equiv_\alpha$) eindeutig bestimmten Normalform reduziert, wobei eine beliebige Reduktionsstrategie gewählt werden kann.

- *Normalformen geschlossener Terme vom Typ* 0: Jedes Funktional vom Typ 0 reduziert zu einer eindeutig bestimmten Ziffer.

- *Definierbare Funktionen:* In T sind genau die $< \varepsilon_0$-rekursiven Funktionen definierbar. Die in T_n definierbaren Funktionen sind genau die $<\omega_{n+2}$-rekursiven. Siehe dazu Korollar 4 zu Satz 2 in Abschnitt 3.3.2 sowie die Schlußbemerkung dieser Arbeit.

Kapitel 2

Abschätzung der Reduktionsketten in $\boldsymbol{\lambda}$

Der in diesem Kapitel vorgestellte Ansatz zur Abschätzung der Reduktionsketten in $\boldsymbol{\lambda}$ geht auf Howard [12] zurück. Howard betrachtet in [12] eine bezüglich Rekursor-Reduktionen eingeschränkte Variante von Gödels T in λ-Formulierung. Wir geben eine geringfügig modifizierte Darstellung seines Ansatzes eingeschränkt auf die Behandlung des getypten λ-Kalküls und analysieren die daraus resultierenden oberen Schranken für Reduktionsketten in $\boldsymbol{\lambda}$. Wie sich herausstellen wird, erhalten wir die besten bisher bekannten oberen Schranken für Berechnungslängen in $\boldsymbol{\lambda}$.

Das von Howard verwendete Vektorenkonzept erweist sich als sehr vorteilhaft, da die einzelnen Vektorkomponenten als Bausteine für den Aufbau neuer Terme dienen und somit im Endeffekt eine kleinschrittige Approximation oberer Schranken für Reduktionsketten in $\boldsymbol{\lambda}$ ermöglichen. Die Vektoren haben also gleichermaßen einen approximativen wie einen Buchhaltungscharakter.

2.1 Zahlterme und -vektoren

Wir beschreiben hier den formalen Rahmen für die im nächsten Abschnitt durchgeführte Zuordnung von Vektoren an Terme des getypten λ-Kalküls. Da wir den Termen aus Λ in rekursiver Weise Vektoren zuordnen wollen, benötigen wir neben geeigneten Variablenvektoren einen Operator $\square_\sigma$, welcher Vektoren A und B, die Termen $a^{\sigma\tau}$ und b^σ zugeordnet sind, zu einem

Vektor $A \,\square_\sigma\, B$ zusammenbaut, mit dem wir einen dem Applikationsterm $a^{\sigma\tau} b^\sigma$ zugeordneten Vektor erhalten. Ferner benötigen wir einen Operator δ^{x^σ}, der einen Vektor A, welcher einem Term a^τ zugeordnet ist, zu einem Vektor $\delta^{x^\sigma} A$ umbaut, der dann einen wesentlichen Bestandteil des dem Term $\lambda x^\sigma . a^\tau$ zugeordneten Vektoren bildet.

2.1.1 Die Mengen $\mathcal{ZT}$ und $\mathcal{C}$

Mit $\mathcal{ZT}$ bezeichnen wir die Menge der Zahlterme, aus denen sich die zugeordneten Vektoren zusammensetzen werden. $\mathcal{ZT}$ enthält Variablen x_i^σ für alle $i \leq g\sigma$ zu jeder Variablen x^σ aus Λ.

Definition 11 ($\mathcal{ZT}$)
Wir definieren eine Menge $\mathcal{ZT}$ von Zahltermen induktiv nach folgenden Klauseln:

- $0,\, 1 \in \mathcal{ZT}$.
- $x_i^\sigma \in \mathcal{ZT}$ *für jede Variable* x^σ *und* $i \leq g\sigma$.
- $a,\, b \in \mathcal{ZT} \Rightarrow a \oplus b,\ 2^a \otimes b \in \mathcal{ZT}$.

Interpretation. Geschlossene $\mathcal{ZT}$-Terme interpretieren wir als natürliche Zahlen, indem wir $\oplus$ durch die Addition und $\otimes$ durch die Multiplikation natürlicher Zahlen interpretieren. Im Umgang mit $\mathcal{ZT}$-Termen unterscheiden wir jedoch ganz klar zwischen beispielsweise den Termen $2^0 \otimes 1$ und 1.

Schreibweisen. Seien $h_0, \ldots, h_m, \ldots \in \mathcal{ZT}$. Wir definieren induktiv die folgende Schreibweise:

$$\bigoplus_{i=0}^{0} h_i := h_0 \quad \text{und} \quad \bigoplus_{i=0}^{m+1} h_i := \bigoplus_{i=0}^{m} h_i \oplus h_{m+1}.$$

Zur Bildung des n-ten Vielfachen eines Terms $h \in \mathcal{ZT}$ führen wir folgende Schreibweise ein:

$$n \cdot h := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ \bigoplus_{i=0}^{n-1} h & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vereinbarungen. Wir bezeichnen die Menge aller Vektoren von Zahltermen mit $\mathcal{ZT}^\omega$, wobei wir Vektoren $A = \,<A_0, \ldots, A_n>\, \in \mathcal{ZT}^{<\omega}$ mit ihren trivialen Fortsetzungen $<A_0, \ldots, A_n,\, 0,\, 0,\, 0, \ldots> \,\in \mathcal{ZT}^\omega$ identifizieren.

Dies geschieht jedoch lediglich aus Gründen der Bequemlichkeit, da wir in der gesamten Arbeit mit Vektoren endlicher Länge auskommen werden. Die Menge $\mathcal{X}$ von Variablenvektoren ist definiert durch

$$\mathcal{X} \;:=\; \{ <x_0^\sigma, \ldots, x_{g\sigma}^\sigma> \mid x^\sigma \in \mathcal{V} \}.$$

Die Vektoren $<x_0^\sigma, \ldots, x_{g\sigma}^\sigma>$ bezeichnen wir auch mit X^σ.

Definition 12 (Vektoraddition)
Seien A, $B \in \mathcal{ZT}^\omega$. Dann definieren wir den Vektor $A \oplus B$ komponentenweise durch

$$(A \oplus B)_i := A_i \oplus B_i.$$

Sei ferner $\tau \in \mathcal{TP}$. Wir definieren den Vektor $A \oplus_\tau B$ durch

$$(A \oplus_\tau B)_i := \begin{cases} A_i \oplus B_i & \textit{falls } i \leq g\tau \\ A_i & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Definition 13 (Substitution)
Seien $h \in \mathcal{ZT}$, $X^\sigma \in \mathcal{X}$ und $B \in \mathcal{ZT}^\omega$. Dann gehe

$$h\{X^\sigma := B\}$$

aus h durch Ersetzen aller in h auftretenden Variablen x_i^σ durch B_i hervor.

Für $\mathcal{ZT}$-Vektoren sei die Substitution komponentenweise definiert.

Für spätere Abschätzungen von Zahltermen führen wir als nächstes einige Hilfsbegriffe ein.

Definition 14 (lh, dp und Sub)
Wir definieren die Länge eines $\mathcal{ZT}$-Terms, die maximale Höhe seiner 2er-Exponentialtürme und die Menge seiner Subterme wie folgt rekursiv:

- *Falls h eine Variable oder eine der Konstanten* 0 *und* 1 *ist, so sei*

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(h) &:= 1, \\ \mathrm{dp}(h) &:= 0 \textit{ und} \\ \mathrm{Sub}(h) &:= \{h\}. \end{aligned}$$

- *Gilt $h \equiv f \oplus g$, so definieren wir*

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(h) &:= \mathrm{lh}(f) + \mathrm{lh}(g), \\ \mathrm{dp}(h) &:= \max\{\mathrm{dp}(f), \mathrm{dp}(g)\} \textit{ sowie} \\ \mathrm{Sub}(h) &:= \{h\} \cup \mathrm{Sub}(f) \cup \mathrm{Sub}(g). \end{aligned}$$

- *Gilt schließlich* $h \equiv 2^f \otimes g$, *so setzen wir*

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(h) &:= 2\mathrm{lh}(f) + \mathrm{lh}(g) + 1, \\ \mathrm{dp}(h) &:= \max\{1 + \mathrm{dp}(f), \mathrm{dp}(g)\} \text{ und} \\ \mathrm{Sub}(h) &:= \{h\} \cup \mathrm{Sub}(f) \cup \mathrm{Sub}(g). \end{aligned}$$

Nun kommen wir zur Definition der Menge $\mathcal{C}$ von Zahlvektoren, einer Teilmenge von $\mathcal{ZT}^\omega$, deren Elemente wichtige strukturelle Eigenschaften hinsichtlich des Auftretens von Variablen x_i^σ haben. Die Struktureigenschaften der $\mathcal{C}$-Vektoren werden uns später eine adäquate Behandlung der Abstraktion ermöglichen. Um diesen Gesichtspunkt näher zu erläutern, gehen wir von folgender Situation aus: Gegeben ist ein Term $a^\tau \in \Lambda$ mit zugeordnetem Vektor A. Unsere Aufgabe ist es, dem Term $\lambda x^\sigma.a^\tau$ einen Vektor zuzuordnen, indem wir den Vektor A geeignet umbauen, so daß wir später in der Lage sind, die β-Kontraktion zu behandeln. Den Auftreten der Variablen x_i^σ für $i \leq g\sigma$ in A, die ja die Auftreten der Variable x^σ in a^τ widerspiegeln, kommt dabei natürlicherweise eine besondere Bedeutung zu, da sie wichtige Markierungen für den Umbaualgorithmus darstellen, welchen wir weiter unten durch den Operator δ^{x^σ} realisieren werden.

Durch die Definition der Menge $\mathcal{C}$ beschränken wir uns auf diejenigen Vektoren aus $\mathcal{ZT}^\omega$, welche als Kandidaten für eine Zuordnung an die Terme aus Λ in Betracht kommen und auf denen der Algorithmus δ überhaupt sinnvoll definiert werden kann. Die Definitionen der Menge $\mathcal{C}$, des Operators $\Box$ und des Operators δ spielen in der Realisierung von Howard's genialer Idee, die β-Kontraktion zu behandeln, die wesentliche Rolle.

Definition 15 ($\mathcal{C}$ – Mengen)
Wir definieren die Mengen $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{ZT}$ *für* $i \in \mathbb{N}$ *wie folgt rekursiv:*

- $h \in \mathcal{ZT}$ *geschlossen* $\Rightarrow h \in \mathcal{C}_i$.
- $i \leq g\sigma \Rightarrow x_i^\sigma \in \mathcal{C}_i$.
- $a, b \in \mathcal{C}_i \Rightarrow a \oplus b \in \mathcal{C}_i$.
- $f \in \mathcal{C}_{i+1}$, $g \in \mathcal{C}_i \Rightarrow 2^f \otimes g \in \mathcal{C}_i$.

Die Menge $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{ZT}^\omega$ *definieren wir durch*

$$\mathcal{C} := \prod_{n<\omega} \mathcal{C}_n.$$

Um auf die bereits erwähnten strukturellen Eigenschaften der Vektoren aus $\mathcal{C}$ explizit einzugehen, machen wir die folgende

Bemerkung. Es gelten die folgenden wichtigen Beziehungen, welche leicht durch Induktion nach der Definition der $\mathcal{C}_i$–Mengen einzusehen sind:

- $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen unter Substitution durch Vektoren aus $\mathcal{C}$.
- Gilt $h \in \mathcal{C}_i$, so tritt in h keine Variable x_j^σ mit $j < i$ auf.

Wir wollen nun geeignete Vergleichsrelationen für Zahlterme aus $\mathcal{ZT}$ angeben. Dazu führen wir zunächst den Begriff der zulässigen Belegung ein.

Definition 16 (Zulässige Belegungen)
Eine Abbildung $^-: \mathcal{ZT} \to \mathcal{ZT}$ *nennen wir eine* zulässige Belegung, *falls für jedes* $h \in \mathcal{ZT}$ *gilt:*

$$\overline{h} \;\equiv\; h\{X^\sigma := \overline{X} \;\mid\; X^\sigma \in \mathcal{X}\},$$

wobei für jeden Vektor $X^\sigma \in \mathcal{X}$ $\overline{X} \in \mathcal{C}$ *gilt.*

Definition 17 (Vergleich von Zahltermen)
Seien $g,\, h \in \mathcal{ZT}$. *Dann definieren wir*

$$g \prec h \;:\Leftrightarrow\; \overline{g} < \overline{h} \quad \textit{für jede } \text{geschlossene zulässige Belegung } {}^-.$$

Analog definieren wir die Relation $\preceq$ *sowie die Gleichheit von* $\mathcal{ZT}$*-Termen.*

Schließlich definieren wir Vergleichsrelationen auf $\mathcal{C}$ unter Rückgriff auf die bereits definierten Vergleichsrelationen auf $\mathcal{ZT}$.

Definition 18 (Vergleich von Vektoren aus $\mathcal{C}$)
Seien $A,\, B \in \mathcal{C}$. *Dann definieren wir*

$$A \prec B \;\;:\Leftrightarrow\;\; A_0 \prec B_0 \;\&\; \forall i > 0 \; A_i \preceq B_i.$$

Die Relationen $=$ *und* $\preceq$ *sind komponentenweise definiert.*

Bemerkung. Sämtliche $\preceq$-Relationen, die wir definiert haben, sind partielle Ordnungen auf den jeweiligen Feldern. Sämtliche $\prec$-Relationen sind irreflexiv und transitiv.

2.1.2 Die Operatoren $\Box_\sigma$ und δ^{x^σ}

Wir definieren nun Howards $\Box$-Operator. Wir haben die ursprüngliche Definition entsprechend der von Schütte in [17] vorgenommenen Modifikation abgeändert und seine Anwendung auf $\mathcal{ZT}$-Vektoren eingeschränkt. Der $\Box$-Operator ist das Werkzeug zur Behandlung der Applikation. Dieser Operator baut aus zwei gegebenen Vektoren A und B einen neuen Vektor $A \Box_\sigma B$ zusammen, wobei in Abhängigkeit des Typgrades von σ 2er-Exponentialtürme aus den Komponenten der Vektoren A und B entstehen, deren Höhe ausgehend von der Komponente $g\sigma$ bis zur nullten Komponente hin jeweils um 1 zunimmt. Jeder dieser neu entstehenden Exponentialterme wird durch Multiplikation mit der Summe der Komponenten der Ausgangsvektoren des betreffenden Levels gewichtet. An dieser Stelle wird die große Flexibilität des Vektorenkonzeptes deutlich: Wir können neue komplexere Terme aufbauen, ohne etwa die Ausgangsterme zunächst zerlegen zu müssen. Die benötigten Bausteine, aus denen sich der neue Term zusammensetzt, sind durch die Komponenten der Ausgangsvektoren gegeben. In diesem Sinne haben die Vektoren eine Buchhaltungsfunktion, und genau das ist eine entscheidende Motivation für das Vektorenkonzept.

Für die spätere Abschätzung der Reduktionsketten von λ-Termen werden dann die starken Majorisierungseigenschaften der $2^{(\cdot)}$-Funktion die entscheidende Rolle spielen.

Definition 19 ($\Box_\sigma : \mathcal{ZT}^\omega \times \mathcal{ZT}^\omega \to \mathcal{ZT}^\omega$)

$$(A \Box_\sigma B)_i := \begin{cases} 2^{(A \Box_\sigma B)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i) & : \quad i \leq g\sigma \\ A_i & : \quad i > g\sigma. \end{cases}$$

Bemerkung. $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen gegen $\Box_\sigma$.

Die Aussagen des folgenden Lemmas wurden im wesentlichen schon von Howard in [12] für Ordinalvektoren bewiesen. Das Lemma demonstriert die starken Majorisierungseigenschaften des $\Box$-Operators, auf welche wir später an entscheidenden Stellen zurückgreifen werden.

Lemma 2.1 *Seien $A, B, C, D \in \mathcal{ZT}^\omega$ und $\sigma \in \mathcal{TP}$.*

1. $\forall i \; A_i \preceq (A \Box_\sigma B)_i$ *und* $\forall i \leq g\sigma \; A_i \oplus B_i \preceq (A \Box_\sigma B)_i$.

2. *Sei ein Index $k \leq g\sigma + 1$ gegeben.*

(a) *Aus* $\forall i \in \{k, \ldots, g\sigma + 1\}$ $A_i \preceq B_i$ *folgt* $(A \,\square_\sigma\, C)_k \preceq (B \,\square_\sigma\, C)_k$. *Falls zusätzlich* $A_j \prec B_j$ *und* $\forall i \in \{k, \ldots, j\}$ $B_i \oplus C_i \succ 0$ *für ein* j *mit* $k \leq j \leq g\sigma + 1$ *gilt, haben wir sogar* $(A \,\square_\sigma\, C)_k \prec (B \,\square_\sigma\, C)_k$.

(b) *Aus* $\forall i \in \{k, \ldots, g\sigma\}$ $A_i \preceq B_i$ *folgt* $(C \,\square_\sigma\, A)_k \preceq (C \,\square_\sigma\, B)_k$. *Falls zusätzlich* $A_j \prec B_j$ *und* $\forall i \in \{k, \ldots, j\}$ $C_i \oplus B_i \succ 0$ *für ein* j *mit* $k \leq j \leq g\sigma$ *gilt, haben wir sogar* $(C \,\square_\sigma\, A)_k \prec (C \,\square_\sigma\, B)_k$.

3. *Aus* $\forall i \leq g\sigma + 1$ $(A_i, B_i \succ 0 \;\&\; A_i \oplus B_i \preceq C_i)$ *folgt*

$$\forall i \leq g\sigma \;\; (A \,\square_\sigma\, D)_i \oplus (B \,\square_\sigma\, D)_i \prec (C \,\square_\sigma\, D)_i.$$

4. *Verschärfen wir die Voraussetzungen aus 3. um die Voraussetzung* $2A_{g\sigma+1} \oplus B_{g\sigma+1} \prec C_{g\sigma+1}$, *so erhalten wir sogar*

$$\forall i \leq g\sigma + 1 \;\; 2((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_i \prec (C \,\square_\sigma\, D)_i.$$

Beweis. Ad 1.: Dies folgt unmittelbar aus der Definition von $\square$.
Ad 2.: Wir führen Induktion nach $g\sigma + 1 \dot{-} k$. Da (b) einfacher zu beweisen ist als (a), zeigen wir nur Teil (a):

- $k = g\sigma + 1$: klar.
- $k \leq g\sigma$: $(A \,\square_\sigma\, C)_k \preceq (B \,\square_\sigma\, C)_k$ folgt dann mit $A_k \preceq B_k$ unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung. Die Verschärfung folgt im Falle $j = k$ sofort aus $A_k \prec B_k$ zusammen mit der Induktionsvoraussetzung, im Falle $j > k$ greifen wir neben $A_k \preceq B_k$ und der I.V. auf die Voraussetzung $B_k \oplus C_k \succ 0$ zurück.

Ad 3.: Wir zeigen die $\preceq$-Beziehung durch Induktion nach $g\sigma + 1 \dot{-} i$ für $i \leq g\sigma + 1$. Die Behauptung folgt aus dem Beweis für $i \leq g\sigma$.

- $i = g\sigma + 1$: klar nach Voraussetzung.
- $i \leq g\sigma$:

$$\begin{aligned}
&(A \,\square_\sigma\, D)_i \oplus (B \,\square_\sigma\, D)_i \\
&\quad \prec \;\; 2^{(A \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i) \oplus 2^{(B \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i) \\
&\quad \preceq \;\; 2^{(A \,\square_\sigma\, D)_{i+1} \oplus (B \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i) \\
&\quad \overset{I.V.}{\preceq} \;\; 2^{(C \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (C_i \oplus D_i) \\
&\quad = \;\; (C \,\square_\sigma\, D)_i.
\end{aligned}$$

Ad 4.: Wir führen Induktion nach $g\sigma + 1 \dot{-} i$:

- $i = g\sigma + 1$: $2((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_i = 2A_i \prec C_i = (C \,\square_\sigma\, D)_i$.
- $i = g\sigma$:

$$\begin{aligned}
&((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_i \\
&\quad = \; 2^{A_{i+1}} \otimes (2^{A_{i+1}} \otimes (A_i \oplus D_i) \oplus 2^{B_{i+1}} \otimes (B_i \oplus D_i)) \\
&\quad \prec \; 2^{2A_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i) \oplus 2^{A_{i+1} \oplus B_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i) \\
&\quad \preceq \; 2^{2A_{i+1} \oplus B_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i).
\end{aligned}$$

  Hieraus folgt:

$$2((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_i \prec 2^{C_{i+1}} \otimes (C_i \oplus D_i) = (C \,\square_\sigma\, D)_i.$$

- $i < g\sigma$:

$$\begin{aligned}
&((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_i \\
&\quad = \; 2^{((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_{i+1}} \otimes \\
&\qquad\qquad (2^{(A \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus D_i) \oplus 2^{(B \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (B_i \oplus D_i)) \\
&\quad \prec \; 2^{((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_{i+1} \oplus (A \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i) \oplus \\
&\qquad\qquad 2^{((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_{i+1} \oplus (B \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i \oplus D_i) \\
&\quad \overset{!}{\preceq} \; 2^{2((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_{i+1}} \otimes (C_i \oplus D_i).
\end{aligned}$$

  Hieraus folgt mit der Induktionsvoraussetzung

$$2((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_i \prec 2^{(C \,\square_\sigma\, D)_{i+1}} \otimes (C_i \oplus D_i) = (C \,\square_\sigma\, D)_i.$$

  Zu !: Es gilt wegen $i + 1 \leq g\sigma$

$$(A \,\square_\sigma\, D)_{i+1} \oplus (B \,\square_\sigma\, D)_{i+1} \preceq ((A \,\square_\sigma\, D) \,\square_\sigma\, (B \,\square_\sigma\, D))_{i+1},$$

  wobei nach Voraussetzung beide Summanden $\succ 0$ sind.

Damit ist Lemma 2.1 vollständig bewiesen. $\square$

Wir kommen jetzt zur Definition des δ-Operators. Dieser Operator wurde von Howard in [12] für Ordinalvektoren entwickelt. Wir haben die Definition geringfügig abgeändert. Der δ-Operator ist das entscheidende Werkzeug zur Behandlung der Abstraktion und damit von ausschlaggebender Bedeutung für die Behandlung der β-Kontraktion. Wurden durch den $\Box$-Operator komplexe Termgebilde aufgebaut, in denen die Variablen x_i^σ als Markierungen auftreten, so werden diese Termgebilde nun durch den δ^{x^σ}-Operator umgebaut, wobei die Variablen x_i^σ als Orientierungsmarken für den Umbauprozeß dienen. 2er-Exponentialtürme, in denen eine Variable x_i^σ auftritt, werden wieder abgebaut, ihre Bausteine werden im neu entstehenden Vektor in die ihrer Herkunft entsprechenden Komponenten einsortiert. Die aus der $g\sigma + 1$-ten Komponente stammenden Bausteine, welche bei der Zerlegung der Termstruktur zutage treten, werden mit einer 2er-Potenz multipliziert, welche der Höhe des 2er-Exponentialturmes entspricht, aus dem sie ausgebaut wurden. Diese gezielte Bildung von Vielfachen kritischer Teilterme führt zu der gewünschten Majorisierungseigenschaft zur Behandlung der β-Kontraktion, welche wir in Hauptlemma 2.1 formulieren. Verknüpfen wir nämlich den umgebauten Vektor mittels des $\Box_\sigma$-Operators mit einem weiteren Vektor, so schlagen die oben erwähnten vervielfachten Teilterme genau an der „Absprungstelle“ (d.h. in der $g\sigma + 1$-ten Komponente) des Aufbaus neuer 2er-Exponentialtürme durch den $\Box_\sigma$-Operator zu Buche.

Definition 20 ($\delta^{x^\sigma} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$)
Für $D \in \mathcal{C}$ definieren wir

$$(\delta^{x^\sigma} D)_i := \begin{cases} \bigoplus_{j=0}^{i} (\delta_j^{x^\sigma} D_j)_i & : \quad i \leq g\sigma + 1 \\ D_i & : \quad i > g\sigma + 1. \end{cases}$$

Die Hilfsoperatoren $\delta_i^{x^\sigma} : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ definieren wir rekursiv. Sei dazu $h \in \mathcal{C}_i$. Tritt in h keine Variable x_k^σ auf, so definieren wir

$$(\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} 1 & : \quad i \neq j \leq g\sigma + 1 \\ h + 1 & : \quad i = j \leq g\sigma + 1 \\ 0 & : \quad \textit{sonst.} \end{cases}$$

Tritt in h irgendeine Variable x_k^σ auf, so unterscheiden wir folgende Fälle bei der Definition von $\delta_i^{x^\sigma} h$:

- $h \equiv x_i^\sigma$:
  $$(\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} 1 & : \quad j \leq g\sigma + 1 \\ 0 & : \quad \textit{sonst.} \end{cases}$$

- $h \equiv f \oplus g$ *mit* $f, g \in \mathcal{C}_i$:

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} (\,\delta_i^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j & : \quad j \leq g\sigma + 1 \\ 0 & : \quad \textit{sonst.} \end{cases}$$

- $h \equiv 2^f \otimes g$ *mit* $f \in \mathcal{C}_{i+1}, g \in \mathcal{C}_i$:

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} (\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j & : \quad j \leq g\sigma \\ 2(\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j + 1 & : \quad j = g\sigma + 1 \\ 0 & : \quad \textit{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung. Aus dieser Definition liest man folgende Eigenschaften des Operators δ unmittelbar ab:

- *Wohldefiniertheit:* Für jeden Vektor $D \in \mathcal{C}$ ist $\delta^{x^\sigma} D$ ein eindeutig bestimmter $\mathcal{C}$-Vektor.

- Ist $D \in \mathcal{C}$, so tritt in $\delta^{x^\sigma} D$ keine Variable x_j^σ auf.

- Für $h \in \mathcal{C}_i$ gilt $(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j \succ 0$ für alle $j \leq g\sigma + 1$.

Lemma 2.2 (Substitutionseigenschaft von $\boldsymbol{\delta^{x^\sigma}}$)
Seien B, $D \in \mathcal{C}$ und x^σ, y^ρ Variablen mit $y^\rho \not\equiv x^\sigma$ und der Eigenschaft, daß keine der Variablen x_j^σ in B auftritt. Dann haben wir

$$(\,\delta^{x^\sigma} D)\{Y^\rho := B\} \quad \equiv \quad \delta^{x^\sigma}(D\{Y^\rho := B\}).$$

Beweis. Die Substitutionseigenschaft der Hilfsoperatoren $\delta_i^{x^\sigma}$ läßt sich leicht aus deren Definition ablesen. Daraus folgt aber schon die Behauptung. □

Wir benötigen noch einige Hilfsbegriffe, um das Verhalten des δ-Operators genauer beschreiben zu können. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir x statt x^σ, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Definition 21 ($\mathbf{lh}^x$)
Wir definieren die Funktion $\mathrm{lh}^x \; : \; \mathcal{ZT} \to \mathbb{N}$ *durch Rekursion nach dem Aufbau der $\mathcal{ZT}$-Terme. Sei dazu $h \in \mathcal{ZT}$.*

- $\forall j \;\, x_j^\sigma \notin \mathrm{Sub}(h)$: $\mathrm{lh}^x(h) := 1$.

- $\exists j \;\, x_j^\sigma \in \mathrm{Sub}(h)$ *und*

- $h \equiv x^\sigma_j$: $\mathrm{lh}^x(h) := 1$.
- $h \equiv f \oplus g$: $\mathrm{lh}^x(h) := \mathrm{lh}^x(f) + \mathrm{lh}^x(g)$.
- $h \equiv 2^f \otimes g$: $\mathrm{lh}^x(h) := 2\mathrm{lh}^x(f) + \mathrm{lh}^x(g) + 1$.

Definition 22 ($\mathbf{T}^x_{ji}$ und $\mathbf{Sub}^x_{ji}$)
Die Menge $\mathrm{T}^x_{ji}(h)$ der maximalen x-freien Teilterme i-ten Levels von $h \in \mathcal{C}_j$ und die Menge $\mathrm{Sub}^x_{ji}(h)$ der von x verschiedenen Teilterme i-ten Levels von h, wobei x-freie Teilterme als atomar betrachtet werden, sind wie folgt rekursiv definiert:

- $\forall k \; x^\sigma_k \notin \mathrm{Sub}(h)$:
$$\mathrm{T}^x_{ji}(h) := \left\{ \begin{array}{cl} \{h\} & \textit{falls } j = i \\ \emptyset & \textit{sonst} \end{array} \right\} =: \mathrm{Sub}^x_{ji}(h).$$
- $\exists k \; x^\sigma_k \in \mathrm{Sub}(h)$ *und*
  - $h \equiv x^\sigma_j$:
  $$\mathrm{T}^x_{ji}(h) := \emptyset =: \mathrm{Sub}^x_{ji}(h).$$
  - $h \equiv f \oplus g$:
  $$\mathrm{T}^x_{ji}(h) := \mathrm{T}^x_{ji}(f) \cup \mathrm{T}^x_{ji}(g).$$
  $$\mathrm{Sub}^x_{ji}(h) := \left\{ \begin{array}{cl} \{h\} \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{falls } j = i \\ \mathrm{Sub}^x_{ji}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{sonst.} \end{array} \right.$$
  - $h \equiv 2^f \otimes g$:
  $$\mathrm{T}^x_{ji}(h) := \mathrm{T}^x_{j+1,i}(f) \cup \mathrm{T}^x_{ji}(g).$$
  $$\mathrm{Sub}^x_{ji}(h) := \left\{ \begin{array}{cl} \{h\} \cup \mathrm{Sub}^x_{j+1,i}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{falls } j = i \\ \mathrm{Sub}^x_{j+1,i}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{sonst.} \end{array} \right.$$

Wir definieren noch folgende Vereinigungen:

$$\mathrm{T}^x_j(h) := \bigcup_{i \geq j} \mathrm{T}^x_{ji}(h) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Sub}^x_j(h) := \bigcup_{i \geq j} \mathrm{Sub}^x_{ji}(h).$$

Bemerkung. Sei $h \in \mathcal{C}_j$. Wir können der Definition unmittelbar folgende Eigenschaften von T^x_{ji} und Sub^x_{ji} ansehen:

- $\mathrm{T}^x_{ji}(h)$ besteht aus genau denjenigen Elementen von $\mathrm{Sub}^x_{ji}(h)$, in denen keine Variable x^σ_k auftritt.
- Für $i < j$ gilt $\mathrm{T}^x_{ji}(h) = \mathrm{Sub}^x_{ji}(h) = \emptyset$.
- Aus $t \in \mathrm{Sub}^x_{jj}(h)$ folgt $t \preceq h$.

Das nachstehende Lemma beinhaltet wichtige Hilfsaussagen, welche wir bei der Abschätzung der Längen von Reduktionsketten in $\boldsymbol{\lambda}$ benötigen werden. Sei $^-$ die spezielle zulässige Belegung, welche sämtliche Variablen mit 1 belegt. Für $h \in \mathcal{ZT}$ definieren wir $\bar{h} := h\{x^\sigma_i := 1 \mid x^\sigma_i \in \mathcal{ZT}\}$.

Lemma 2.3 *Sei $h \in \mathcal{C}_i$.*

1. *Aus $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{jk}((\,\delta^{x^\sigma}_i h)_j)$ folgt $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{jk}[\mathrm{T}^x_{ij}(h)]$.*
2. $\mathrm{lh}((\,\delta^{x^\sigma}_i h)_j) \leq 2 \cdot \mathrm{lh}(h)$.
3. *Sei eine positive natürliche Zahl m gegeben mit $\forall t \in \mathrm{T}^x_{ij}(h)\ \bar{t} < m$. Dann gilt*
$$\overline{(\,\delta^{x^\sigma}_i h)_j} \;\leq\; \mathrm{lh}^x(h) \cdot m.$$

Beweis. Wir führen jeweils Induktion nach der rekursiven Definition von $\delta^{x^\sigma}_i$:
Ad 1.: Im Falle, daß keine der Variablen x^σ_l in h auftritt, folgt $i = j$ und $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{jk}(h)$. Mit $\mathrm{T}^x_{ij}(h) = \{h\}$ erhalten wir die Induktionsbehauptung. Nun gehen wir davon aus, daß irgendeine der Variablen x^σ_l in h auftritt. Der Fall $h \equiv x^\sigma_i$ kann nicht eintreten. Gilt $h \equiv h_1 \oplus h_2$, so haben wir $(\,\delta^{x^\sigma}_i h)_j \equiv (\,\delta^{x^\sigma}_i h_1)_j \oplus (\,\delta^{x^\sigma}_i h_2)_j$. Dann folgt die Induktionsbehauptung sofort aus der Induktionsvoraussetzung an h_1 und h_2. Falls schließlich $h \equiv 2^{h_1} \otimes h_2$ gilt, so erhalten wir $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{jk}((\,\delta^{x^\sigma}_{i+1} h_1)_j) \cup \mathrm{Sub}^y_{jk}((\,\delta^{x^\sigma}_i h_2)_j)$. Auch dann folgt die Induktionsbehauptung direkt aus der Induktionsvoraussetzung.
Ad 2.: Falls $\forall k\ x^\sigma_k \notin \mathrm{Sub}(h)$, so folgt $\mathrm{lh}((\,\delta^{x^\sigma}_i h)_j) \leq \mathrm{lh}(h) + 1 \leq 2\mathrm{lh}(h)$. Anderenfalls haben wir etwa für $h \equiv 2^f \otimes g$ die Abschätzung

$$\mathrm{lh}((\,\delta^{x^\sigma}_i h)_j) \leq 2\mathrm{lh}((\,\delta^{x^\sigma}_{i+1} f)_j) + \mathrm{lh}((\,\delta^{x^\sigma}_i g)_j) + 1 \overset{I.V.}{\leq} 4\mathrm{lh}(f) + 2\mathrm{lh}(g) + 1 < 2\mathrm{lh}(h).$$

Ad 3.: Tritt keine Variable x^σ_k in h auf, so folgt die Behauptung im Falle $i = j$ wegen $\mathrm{T}^x_{ij}(h) = \{h\}$ aus der Voraussetzung, und im Falle $i \neq j$ haben wir $(\,\delta^{x^\sigma}_i h)_j = 1$. Nun gehen wir davon aus, daß in h irgendeine Variable x^σ_k

auftritt. Der interessanteste Fall ist $h \equiv 2^f \otimes g$ mit $j = g\sigma + 1$. Dann haben wir unter Ausnutzung der Induktionsvoraussetzung an f und g:

$$\begin{aligned} \overline{(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j} &= 2\overline{(\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f)_j} \oplus \overline{(\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j} \oplus 1 \\ &\leq 2\mathrm{lh}^x(f) \cdot m + \mathrm{lh}^x(g) \cdot m + 1 \\ &\leq \mathrm{lh}^x(h) \cdot m. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma in allen Teilen bewiesen. □

Das folgende Lemma ist der Schlüssel zur Behandlung der β-Konversion. Es zeigt, daß die Operatoren □ und δ zur Behandlung von Applikation und Abstraktion geeignet sind und im Zusammenspiel einen Rahmen für die kombinatorische Komplexität der β-Konversion abzustecken gestatten. Wir haben den Beweis von Howard (vgl. Lemma 2.11 und Korollar in [12]) entsprechend den vorgenommenen Modifikationen der beiden Operatoren angepasst.

Hauptlemma 2.1 *Seien B, $D \in \mathcal{C}$ gegeben. Dann gilt*

$$\delta^{x^\sigma} D \;\square_\sigma\; B \quad \succ \quad D\{X^\sigma := B\}.$$

Beweis. Weiter unten werden wir die folgende Hilfsbehauptung beweisen:

($*$) Sei $h \in \mathcal{C}_i$ mit $i \leq g\sigma + 1$. Dann haben wir

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\square_\sigma B)_i \succ h\{X^\sigma := B\}.$$

Unter Benutzung von ($*$) können wir das Hauptlemma durch Unterscheidung der beiden folgenden Fälle beweisen:

- $i > g\sigma + 1$: Dann ist $(\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma B)_i = D_i \equiv D_i\{X^\sigma := B\}$.

- $i \leq g\sigma + 1$: Da für alle $j \in \{i, \ldots, g\sigma + 1\}$ $(\,\delta^{x^\sigma} D)_j \succeq (\,\delta_i^{x^\sigma} D_i)_j$ gilt, folgt mit Lemma 2.1 (2)

  $$(\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma B)_i \succeq (\,\delta_i^{x^\sigma} D_i \,\square_\sigma B)_i.$$

  Gemäß ($*$) gilt aber

  $$(\,\delta_i^{x^\sigma} D_i \,\square_\sigma B)_i \succ D_i\{X^\sigma := B\}.$$

Nun beweisen wir $(*)$ durch Induktion nach der Definition der Hilfsoperatoren $\delta_i^{x^\sigma}$. Sei also $h \in \mathcal{C}_i$ für ein $i \leq g\sigma + 1$. Nach Definition der $\delta_i^{x^\sigma}$ haben wir $(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j \succ 0$ für alle $j \leq g\sigma + 1$. Wir nehmen zunächst an, daß in h keine Variable x_k^σ auftritt. Dann gilt

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\square_\sigma\, B)_i \succeq (\,\delta_i^{x^\sigma} h)_i = h + 1 \succ h \equiv h\{X^\sigma := B\}.$$

Jetzt betrachten wir den Fall $\exists k\ x_k^\sigma \in \mathrm{Sub}(h)$. Dann muß $i \leq g\sigma$ gelten.

- $h \equiv x_i^\sigma$: Dann ist $(\vec{1} \,\square_\sigma\, B)_i \succeq B_i + 1 \succ B_i \equiv h\{X^\sigma := B\}$.

- $h \equiv f \oplus g$: Dann folgt mit Lemma 2.1 (3)

$$\begin{array}{rcl}(\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\square_\sigma\, B)_i & \succ & (\,\delta_i^{x^\sigma} f \,\square_\sigma\, B)_i \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g \,\square_\sigma\, B)_i \\ & \overset{I.V.}{\succ} & f\{X^\sigma := B\} \oplus g\{X^\sigma := B\} \equiv h\{X^\sigma := B\}.\end{array}$$

- $h \equiv 2^f \otimes g$: Lemma 2.1 (4) ergibt

$$\begin{array}{rcl}(\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\square_\sigma\, B)_i & \succ & 2 \cdot ((\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f \,\square_\sigma\, B) \,\square_\sigma\, (\,\delta_i^{x^\sigma} g \,\square_\sigma\, B))_i \\ & \succ & 2^{(\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f \,\square_\sigma\, B)_{i+1}} \otimes (\,\delta_i^{x^\sigma} g \,\square_\sigma\, B)_i \\ & \overset{I.V.}{\succ} & 2^{f\{X^\sigma := B\}} \otimes g\{X^\sigma := B\} \equiv h\{X^\sigma := B\}.\end{array}$$

Damit ist der Beweis des Hauptlemmas abgeschlossen. $\square$

2.2 Zuordnung von Vektoren

Nach den Vorbereitungen des Abschnittes 2.1 können wir nun die Zuordnung $[\cdot]$ von Vektoren an die Terme aus Λ definieren. Die naheliegende Definition einer eindeutigen Zuordnung, welche Abstraktionstermen $\lambda x^\sigma.a^\tau$ den Vektor $\delta^{x^\sigma}[a^\tau]$ zuordnet, ist zwar zur Behandlung der β-Kontraktion geeignet, um aber die ξ-Regel behandeln zu können, wäre die Eigenschaft

$$a^\tau \rhd b^\tau \quad \Rightarrow \quad \delta^{x^\sigma}[a^\tau] \succ \delta^{x^\sigma}[b^\tau]$$

erforderlich. Der δ-Operator ist jedoch nicht streng monoton wachsend (siehe dazu auch [12], Seite 456). Um dies einzusehen, betrachten wir das folgende

Beispiel: Seien x, $y \in \Lambda$ verschiedene Variablen vom Typ 1 und z, $u \in \Lambda$ verschiedene Variablen vom Typ 0. Es gilt

$$\lambda x.((\lambda z.x(yz))u) \quad \rhd \quad \lambda x.(x(yu)).$$

Eine kurze Rechnung liefert die folgenden Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
[x(yu)]_0 &= 2^{x_1} \otimes (x_0 \oplus 2^{y_1} \otimes (y_0 \oplus u_0)), \\
(\delta_0^x[x(yu)]_0)_0 &= 3 \oplus 2^{y_1} \otimes (y_0 \oplus u_0) \text{ sowie} \\
[x(yz)]_0 &= 2^{x_1} \otimes (x_0 \oplus 2^{y_1} \otimes (y_0 \oplus z_0)), \\
(\delta_0^z[x(yz)]_0)_0 &= 1 \oplus ((x_0 \oplus 1) \oplus (1 \oplus ((y_0 \oplus 1) \oplus 1))), \\
(\delta_0^z[x(yz)]_0)_1 &= 2(x_1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus (2(y_1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1) \oplus 1)) \oplus 1, \\
(\delta_0^z 0)_1 &= 0 \oplus 1, \\
[(\lambda z.x(yz))u]_0 &= 2^{2(x_1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus (2(y_1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1) \oplus 1)) \oplus 1 \oplus (0 \oplus 1)} \otimes \\
&\qquad (1 \oplus ((x_0 \oplus 1) \oplus (1 \oplus ((y_0 \oplus 1) \oplus 1))) \oplus u_0), \\
(\delta_0^x[(\lambda z.x(yz))u]_0)_0 &= (\delta_1^x(2(x_1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus (2(y_1 \oplus 1) \oplus (1 \oplus 1) \oplus 1)) \oplus 1 \oplus (0 \oplus 1)))_0 \\
&\qquad \oplus (\delta_0^x(1 \oplus ((x_0 \oplus 1) \oplus (1 \oplus ((y_0 \oplus 1) \oplus 1))) \oplus u_0))_0 \\
&= 17 \oplus y_0 \oplus u_0.
\end{aligned}$$

Hieraus lesen wir ab, daß δ nicht einmal schwach monoton wachsend sein kann (man setze beispielsweise $y := \lambda w^0.w^0$ und $u := y(yv^0)$). Der tiefere Grund hierfür liegt darin, daß δ^{x^σ} alle 2er-Exponentialtürme, in denen ein x_i^σ auftritt, zerlegt.

Um dennoch die ξ-Regel behandeln zu können, verwenden wir Howards Idee der nicht-eindeutigen Zuordnung. Zur anschaulichen Erläuterung der Methode der nicht-eindeutigen Zuordnung betrachten wir eine schematische Reduktionskette ausgehend von einem Term a^τ, wobei wir unser Augenmerk auf einen Teilterm $\lambda x^\sigma.b_0^\rho$ richten:

$$a^\tau \equiv \ldots \lambda x^\sigma.b_0^\rho \ldots \overset{\xi}{\rhd} \ldots \overset{\xi}{\rhd} \ldots (\lambda x^\sigma.b_n^\rho)c^\sigma \ldots \equiv: d^\tau \overset{\beta}{\rhd} \ldots b_n^\rho\{x^\sigma := c^\sigma\} \ldots$$

Die nicht-eindeutige Zuordnung funktioniert in einer Weise, daß

$$[\lambda x^\sigma.b_i^\rho] = \delta^{x^\sigma}[b_0^\rho] \ \oplus_\rho \ [b_i^\rho]\{[x^\sigma] := \vec{1}\}$$

ein möglicher dem Term $\lambda x^\sigma.b_i^\rho$ zugeordneter Vektor ist. Der zweite Summand ist hierbei zuständig für die Behandlung von Anwendungen der ξ-Regel, während die β-Kontraktion mit Hilfe von Hauptlemma 2.1 durch den ersten Summanden behandelt wird:

$$[(\lambda x^\sigma.b_n^\rho)c^\sigma] \succeq \delta^{x^\sigma}[b_0^\rho] \,\Box_\sigma\, [c^\sigma] \overset{\text{HL 2.1}}{\succ} [b_0^\rho]\{[x^\sigma] := [c^\sigma]\} \succeq [b_n^\rho]\{[x^\sigma] := [c^\sigma]\}.$$

Der erste Summand wird also solange unverändert gelassen, bis es zu einer β-Kontraktion kommt.

Da wir die Reduktionsgeschichte beispielsweise des Terms d^τ zum Zeitpunkt der allgemeinen Definition von $[\cdot]$ nicht kennen, müssen wir in der Definition alle möglichen Reduktionsgeschichten von d^τ berücksichtigen. Dies ist der Grund für die Nicht-Eindeutigkeit der Zuordnung $[\cdot]$.

Definition 23 (Die nicht-eindeutige Zuordnung $[\cdot] \subsetneq \boldsymbol{\Lambda} \times \boldsymbol{\mathcal{C}}$)

$$\begin{aligned}
[x^\sigma]_i &:= \begin{cases} x_i^\sigma & i \leq g\sigma \\ 0 & i > g\sigma. \end{cases} \\
[a^{\sigma\tau}b^\sigma]_i &:= \begin{cases} (\,[a^{\sigma\tau}] \,\Box_\sigma\, [b^\sigma]\,)_i & i \leq g\tau \\ 0 & i > g\tau. \end{cases} \\
[\lambda x^\sigma.a^\tau] &:= \delta^{x^\sigma}[d^\tau] \oplus_\tau [a^\tau]\,\{\,[x^\sigma] := \vec{1}\,\}, \\
&\qquad \textit{wobei } d^\tau \in \Lambda \textit{ und } d^\tau \rhd^n a^\tau.
\end{aligned}$$

Um die Wohldefiniertheit von $[\cdot]$ einzusehen, betrachten wir folgende

Definition 24 (Howard [12]) *Die Relation $t \subsetneq \Lambda \times \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned}
t(x^\sigma) &:= 1. \\
t(a^{\sigma\tau}b^\sigma) &:= t(a^{\sigma\tau}) + t(b^\sigma). \\
t(\lambda x^\sigma.a^\tau) &:= 1 + t(d_0) + \ldots + t(d_n),
\end{aligned}$$

wobei $d_0 \rhd^1 \ldots \rhd^1 d_n \equiv a^\tau$ und jedes $t(d_i)$ ein möglicher Wert für d_i ist.

Diese Relation hat die Eigenschaft, daß für jeden echten Teilterm a eines Terms b gilt: $t(a) < t(b)$ sofern $t(b)$ unter Rückgriff auf $t(a)$ definiert wurde. In diesem Sinne können wir Induktionsbeweise nach $t(a)$ führen. Mit einer solchen Induktion nach $t(a)$ können wir nun die Wohldefiniertheit von $[a]$ nachweisen. Ferner sehen wir, daß für jeden Vektor $[d^\tau]$, der einem Term $d^\tau \in \Lambda$ zugeordnet ist, gilt $[d^\tau]_i = 0$ für alle $i > g\tau$.

Dem folgenden Lemma kommt eine große Bedeutung zu, da die Substitutionseigenschaft von $[\cdot]$ unerläßlich für den in dieser Arbeit verfolgten Ansatz der Zuordnung von Vektoren an λ-Terme nach Howard [12] ist. Wir haben die Zuordnung so konzipiert, daß den Variablen geeignete Variablenvektoren zugeordnet wurden, dem Termaufbau durch Applikation auf seiten der zugeordneten Vektoren einer Anwendung des $\Box$-Operators und dem Termaufbau durch Abstraktion einer Anwendung des δ-Operators entsprach. Tritt nun während der Reduktion eines Terms eine β-Kontraktion auf, so müssen wir in der Lage sein, dem Redukt einen passenden Vektor zuzuordnen. Da dieser Vektor kleiner sein muß als ein vorgegebener Vektor, welcher dem Redex zugeordnet ist, sollten wir unbedingt imstande sein, den gesuchten Vektor aus dem vorgegebenen Material zu konstruieren. Daß dies auf natürliche Weise möglich ist, garantiert das nachstehende Lemma.

Lemma 2.4 (Substitutionseigenschaft von $[\cdot]$)
Es seien b^φ, $c^\tau \in \Lambda$ Terme mit $BV(c^\tau) \cap FV(b^\varphi) = \emptyset$. Ist dann $[c^\tau]$ dem Term c^τ und $[b^\varphi]$ dem Term b^φ zugeordnet, so ist

$$[c^\tau]\,\{\,[z^\varphi] := [b^\varphi]\,\}$$

ein dem Term $c^\tau\{z^\varphi := b^\varphi\}$ zugeordneter Vektor.

Beweis. Die Behauptung folgt durch Induktion nach $t(c^\tau)$:

- c ist eine Variable: Dieser Fall ist klar. Zu beachten ist jedoch, daß im Falle $c \equiv z^\varphi$ alle nicht-trivialen Komponenten des Vektors $[b]$ auch tatsächlich substitutiert werden, siehe die Bemerkung im Anschluß an die Definition von $[\cdot]$.

- $c \equiv a^{\sigma\tau} d^\sigma$: Für $i \leq g\tau$ haben wir

$$\begin{array}{rcl} [c]_i\,\{[z] := [b]\} & = & (\,[a]\,\{[z] := [b]\}\ \Box_\sigma\ [d]\,\{[z] := [b]\}\,)_i \\ & \stackrel{I.V.}{=} & (\,[a\{z := b\}]\ \Box_\sigma\ [d\{z := b\}]\,)_i \\ & = & [c\{z := b\}]_i. \end{array}$$

- $c^\tau \equiv \lambda x^\sigma.a^\rho$: Da der Fall $x \equiv z$ trivial ist, gehen wir im folgenden von $x \not\equiv z$ aus. Der Vektor $[c]$ hat eine Gestalt

$$[c] = \delta^{x^\sigma}[d^\rho]\ \oplus_\tau\ [a^\rho]\,\{[x^\sigma] := \vec{1}\,\},$$

wobei $d^\rho \in \Lambda$ und $d^\rho \rhd^n \; a^\rho$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir von $BV(d) \cap FV(b) = \emptyset$ ausgehen. Wir haben dann nach Induktionsvoraussetzung sowie aufgrund der Substitutionseigenschaft des δ-Operators zum einen

$$(\,\delta^{x^\sigma}[d])\,\{[z] := [b]\} \equiv \delta^{x^\sigma}([d]\,\{[z] := [b]\}) = \delta^{x^\sigma}[d\{z := b\}]$$

und zum anderen

$$[a^\rho]\,\{[x^\sigma] := \vec{1},\, [z] := [b]\} \equiv: [a\{z := b\}]\,\{[x^\sigma] := \vec{1}\,\}.$$

Da schließlich $d\{z := b\} \rhd^n a\{z := b\}$ gilt, ist $[c]\,\{\,[z^\varphi] := [b^\varphi]\,\}$ tatsächlich ein dem Term $c\{z := b\}$ zugeordneter Vektor. □

Satz 1 *Gelte $a^\sigma \rhd b^\sigma$ für Terme a^σ, $b^\sigma \in \Lambda$ und sei $[a^\sigma]$ dem Term a^σ zugeordnet. Dann gibt es einen dem Term b^σ zugeordneten Vektor $[b^\sigma]$ mit*

$$[a^\sigma] \quad \succ \quad [b^\sigma].$$

Beweis. Wir führen Induktion nach $t(a)$:

($\boldsymbol{\beta}$) $\quad (\boldsymbol{\lambda x^\sigma . a^\tau) b^\sigma \;\rhd\; a^\tau\{x := b\}} \quad (\boldsymbol{BV(\lambda x.a) \cap FV(b) = \emptyset})$

Sei $[(\lambda x.a)b]$ gegeben durch $[(\lambda x.a)b]_i = (\,[\lambda x^\sigma.a] \,\Box_\sigma\, [b]\,)_i$ für $i \le g\tau$ mit

$$[\lambda x^\sigma.a^\tau] = \delta^{x^\sigma}[d^\tau] \,\oplus_\tau\, [a^\tau]\,\{\,[x^\sigma] := \vec{1}\,\},$$

wobei $d^\tau \in \Lambda$ und $d^\tau \rhd^n \; a^\tau$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann einen dem Term a^τ zugeordneten Vektor A mit $[d] \succeq A$. Mit Lemma 2.1 (2) folgt

$$[\lambda x.a] \,\Box_\sigma\, [b] \quad \succeq \quad \delta^{x^\sigma}[d] \,\Box_\sigma\, [b].$$

Gemäß Hauptlemma 2.1 haben wir

$$\delta^{x^\sigma}[d] \,\Box_\sigma\, [b] \quad \succ \quad [d]\,\{[x] := [b]\}.$$

Aufgrund der Substitutionseigenschaft von $[\cdot]$ ist nun $A\,\{[x] := [b]\}$ ein dem Term $a^\tau\{x^\sigma := b^\sigma\}$ zugeordneter Vektor $[a^\tau\{x^\sigma := b^\sigma\}]$, so daß wir insgesamt

$$[(\lambda x.a)b] \quad \succ \quad [a^\tau\{x^\sigma := b^\sigma\}]$$

erhalten.

($\boldsymbol{\xi}$) $\boldsymbol{a^\tau \rhd b^\tau \Rightarrow \lambda x^\sigma.a \rhd \lambda x^\sigma.b}$

Sei $[\lambda x.a]$ gegeben wie oben für (β). Es ist $t(a) < t(\lambda x.a)$, nach Induktionsvoraussetzung gibt es also einen b zugeordneten Vektor $[b]$ mit $[a] \succ [b]$. Damit haben wir auch $[a]\{[x] := \vec{1}\} \succ [b]\{[x] := \vec{1}\}$. Wegen $d \rhd^{n+1} b$ können wir schließlich

$$[\lambda x^\sigma.b^\tau] := \delta^{x^\sigma}[d^\tau] \oplus_\tau [b^\tau]\{[x^\sigma] := \vec{1}\}$$

setzen.

($\boldsymbol{App_r}$) $\boldsymbol{a^{\sigma\tau} \rhd b^{\sigma\tau} \Rightarrow ac \rhd bc}$

Sei $[ac]$ gegeben durch $[ac]_i = ([a] \square_\sigma [c])_i$ für $i \leq g\tau$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen b zugeordneten Vektor $[b]$ mit $[a] \succ [b]$. Wir setzen nun $[bc]_i := ([b] \square_\sigma [c])_i$ für $i \leq g\tau$ und 0 sonst. Nach Lemma 2.1 (2) gilt dann $[a] \square_\sigma [c] \succ [b] \square_\sigma [c]$, also

$$[ac] \quad \succ \quad [bc].$$

($\boldsymbol{App_l}$) $\boldsymbol{b^\sigma \rhd c^\sigma \Rightarrow a^{\sigma\tau}b \rhd a^{\sigma\tau}c}$

Sei $[ab]$ gegeben durch $[ab]_i = ([a] \square_\sigma [b])_i$ für $i \leq g\tau$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann zu $[b]$ einen dem Term c zugeordneten Vektor $[c]$ mit $[b] \succ [c]$. Wir setzen $[ac]_i := ([a] \square_\sigma [c])_i$ für $i \leq g\tau$ und 0 sonst. Damit erhalten wir gemäß Lemma 2.1 (2)

$$[ab] \quad \succ \quad [ac].$$

Die Zuordnung $[\cdot]$ leistet also das Gewünschte. □

2.3 Obere Schranken für Reduktionen in $\boldsymbol{\lambda}$

Aus Satz 1 können wir unmittelbar das folgende Korollar ziehen:

Korollar 1 *Sei $c^\sigma \in \Lambda$ gegeben. Dann ist*

$$[c^\sigma]_0\{[x] := \vec{1} \mid x \in FV(c)\} \quad \in \quad \mathbb{N},$$

wobei $[c]$ aufgebaut wird mit $d \equiv a$ in der λ-Klausel, eine obere Schranke für die Längen sämtlicher Reduktionsketten ausgehend von c^σ. □

Vereinbarung. Zu $c^\sigma \in \Lambda$ nennen wir den in Korollar 1 angegebenen zugeordneten Vektor $[c^\sigma]$, der durch ausschließliche Verwendung von Reduktionsketten der Länge 0 in der λ-Klausel zustande kommt, den *kanonischen* c^σ zugeordneten Vektor.

Wir wollen die oben angegebenen oberen Schranken für die Höhen der Reduktionsbäume des getypten λ-Kalküls im folgenden durch Größen abschätzen, die den jeweiligen Ausgangstermen unmittelbar anzusehen sind. Dazu stellen wir folgende Größen bereit:

- $G(a^\tau)$ bezeichne den maximalen Typgrad der Teilterme von $a^\tau \in \Lambda$.
- $\mathrm{dp} : \Lambda \to \mathbb{N}$ ist rekursiv definiert durch folgende Klauseln:
  - $\mathrm{dp}(x^\sigma) := 1.$
  - $\mathrm{dp}(\lambda x^\sigma.a^\tau) := \mathrm{dp}(a^\tau) + 1.$
  - $\mathrm{dp}(a^{\sigma\tau} b^\sigma) := \max\{\mathrm{dp}(a^{\sigma\tau}), \mathrm{dp}(b^\sigma)\} + 1.$

Korollar 2 *Sei $c^\sigma \in \Lambda$ gegeben. Dann ist*

$$2_{G(c^\sigma)+1}\left((G(c^\sigma)+2)\cdot \mathrm{dp}(c^\sigma)^2\right)$$

eine obere Schranke für die Längen sämtlicher Reduktionsketten ausgehend von c^σ.

Zum Beweis des Korollars benötigen wir die folgenden zwei technischen Lemmata.

Lemma 2.5 *Sei $d \in \Lambda$ ein Teilterm von $f \in \Lambda$ und $\sigma \in \mathcal{TP}$. Dann gilt*

$$\sum_{i=0}^{G^\sigma(f)} \mathrm{lh}([d]_i) \quad < \quad 2^{(G^\sigma(f)+2)\mathrm{dp}(d)},$$

wobei $G^\sigma(f) := \max\{g\sigma + 1, G(f)\}$ und $[d]$ der kanonische d zugeordnete Vektor ist.

Beweis. Wir führen Induktion nach dem Aufbau von d. Abkürzend schreiben wir d_i für $[d]_i$ und G für $G^\sigma(f)$.

- d ist eine Variable: Trivial.

- $d \equiv a^{\rho\tau} b^{\rho}$: Also gilt $G \geq g\rho{+}1$. Für $i > g\rho{+}1$ haben wir $\mathrm{lh}(d_i) \leq \mathrm{lh}(a_i)$ und daher
$$\sum_{i=g\rho+2}^{G} \mathrm{lh}(d_i) \quad \leq \quad \sum_{i=g\rho+2}^{G} \mathrm{lh}(a_i).$$
Für $i \leq g\rho + 1$ zeigen wir durch Nebeninduktion nach $g\rho + 1 \dot{-} i$:
$$\mathrm{lh}(d_i) \quad \leq \quad 2^{g\rho+1\dot{-}i} \left(\sum_{j=i}^{g\rho+1} \mathrm{lh}(a_j) + \sum_{j=i}^{g\rho} \mathrm{lh}(b_j) \right).$$
Der Induktionsanfang $i = g\rho + 1$ ist klar. Für $i \leq g\rho$ haben wir
$$\begin{aligned}
\mathrm{lh}(d_i) \quad &\leq \quad 2\mathrm{lh}(d_{i+1}) + \mathrm{lh}(a_i) + \mathrm{lh}(b_i) + 1 \\
&\overset{N.I.V.}{\leq} \quad 2^{g\rho+1\dot{-}i} \left(\sum_{j=i+1}^{g\rho+1} \mathrm{lh}(a_j) + \sum_{j=i+1}^{g\rho} \mathrm{lh}(b_j) \right) + \mathrm{lh}(a_i) + \mathrm{lh}(b_i) + 1 \\
&\leq \quad 2^{g\rho+1\dot{-}i} \left(\sum_{j=i}^{g\rho+1} \mathrm{lh}(a_j) + \sum_{j=i}^{g\rho} \mathrm{lh}(b_j) \right).
\end{aligned}$$
Nun erhalten wir
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{G} \mathrm{lh}(d_i) \quad &< \quad 2^{g\rho+2} \left(\sum_{i=0}^{G} \mathrm{lh}(a_i) + \sum_{i=0}^{G} \mathrm{lh}(b_i) \right) \\
&\overset{I.V.}{\leq} \quad 2^{G+1} \left(2^{(G+2)\mathrm{dp}(a)} + 2^{(G+2)\mathrm{dp}(b)} \right) \\
&\leq \quad 2^{G+1} \cdot 2^{(G+2)\mathrm{dp}(d)-(G+1)} \\
&= \quad 2^{(G+2)\mathrm{dp}(d)}.
\end{aligned}$$

- $d \equiv \lambda x^{\rho}.e^{\tau}$: Für $i > g\rho + 1$ gilt $\mathrm{lh}(d_i) \leq 2\mathrm{lh}(e_i)$, und für $i \leq g\rho + 1$ haben wir gemäß Lemma 2.3 (2)
$$\begin{aligned}
\mathrm{lh}(d_i) \;&\leq\; \sum_{j=0}^{i} \mathrm{lh}((\,\delta_j^{x^{\rho}} e_j)_i) + \mathrm{lh}(e_i) \\
&\leq\; 2\sum_{j=0}^{i} \mathrm{lh}(e_j) + \mathrm{lh}(e_i).
\end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{G} \mathrm{lh}(d_i) &\leq 2(g\rho+2)\sum_{j=0}^{g\rho+1} \mathrm{lh}(e_j) + 2\sum_{i=0}^{G} \mathrm{lh}(e_i)\\ &\leq \underbrace{2(G+2)}_{\leq 2^{G+2}} \cdot \sum_{i=0}^{G} \mathrm{lh}(e_i)\\ &\overset{I.V.}{<} 2^{(G+2)\mathrm{dp}(d)}.\end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Lemmata 2.3 und 2.5 können wir nun das folgende Lemma beweisen. Wie schon in Lemma 2.3 sei $^{-}$ die Belegung durch $\vec{1}$-Vektoren.

Lemma 2.6 *Sei $d \in \Lambda$ ein Teilterm eines Terms $f \in \Lambda$. Setze $G := G(f)$ sowie $d_i := \overline{([d]_i)}$, wobei $[d]$ der kanonische d zugeordnete Vektor sei. Dann gilt*

$$(1) \quad \begin{cases} d_i = 0 \text{ für } i > G. \\ d_i < 2_{G+1 \dot{-} i}\left((G+2)\mathrm{dp}(d)^2 \dot{-} i\right) \text{ für } i \leq G. \end{cases}$$

Wir schreiben D_i als Abkürzung für die oberen Schranken der d_i aus (1). *Es gilt ferner die folgende Beziehung:*

$$(2) \ \forall i, j \leq G \ \ \forall t \in \mathrm{T}^{x}_{ji}([d]_j) \quad \bar{t} < D_i.$$

Beweis. Wir führen simultane Induktion nach dem Aufbau von d.

- d ist eine Variable: Trivial.
- $d \equiv a^{\sigma\tau} b^{\sigma}$: Wir zeigen zunächst Teil (1).
    - $G \geq i > g\sigma$: Dann haben wir nach Induktionsvoraussetzung an a:

$$d_i \leq a_i < 2_{G+1 \dot{-} i}\left((G+2)\mathrm{dp}(a)^2 \dot{-} i\right).$$

- $i \leq g\sigma$: Dann gilt $G+1 \dot{-} i \geq 2$. Mit Nebeninduktion nach $g\sigma \dot{-} i$ folgt:

$$\begin{aligned} d_i &\overset{I.V.}{<} 2_{G+1\dot{-}i}\left((G+2)\mathrm{dp}(d)^2 \dot{-} (i+1)\right) \cdot \\ &\qquad \left(2_{G+1\dot{-}i}\left((G{+}2)\mathrm{dp}(a)^2 \dot{-} i\right) + 2_{G+1\dot{-}i}\left((G{+}2)\mathrm{dp}(b)^2 \dot{-} i\right)\right) \\ &\leq \left(2_{G+1\dot{-}i}\left((G+2)\mathrm{dp}(d)^2 \dot{-} (i+1)\right)\right)^2 \\ &\leq 2_{G+1\dot{-}i}\left((G+2)\mathrm{dp}(d)^2 \dot{-} i\right). \end{aligned}$$

Nun kommen wir zu Teil (2). Wir führen Nebeninduktion nach $i \dot{-} j$. Klar ist $\mathrm{T}^x_{ji}([d]_j) = \emptyset$ für $j > i$, und im Falle $i = j$ haben wir für $t \in \mathrm{T}^x_{ji}([d]_j)$ sofort $\bar{t} \leq d_i < D_i$ nach (1). Sei also $j < i$ und $t \in \mathrm{T}^x_{ji}([d]_j)$. Da im Falle $j > g\tau$ schon $t \equiv 0$ gelten muß, gelte $j \leq g\tau$. Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle:

- $j > g\sigma$: Dann gilt $t \in \mathrm{T}^x_{ji}([a]_j)$, und mit der Induktionsvoraussetzung an a folgt $\bar{t} < A_i < D_i$.
- $j \leq g\sigma$: Dann gibt es drei Möglichkeiten:

$$t \in \mathrm{T}^x_{j+1,i}([d]_{j+1}), \;\; t \in \mathrm{T}^x_{ji}([a]_j) \;\text{ oder }\; t \in \mathrm{T}^x_{ji}([b]_j).$$

  Mit Haupt- bzw. Nebeninduktionsvoraussetzung folgt $\bar{t} < D_i$.

- $d \equiv \lambda x^\sigma.e^\tau$: Dann gilt $G \geq g\sigma + 1, g\tau$. Wir zeigen zunächst Teil (1): Für $i > G$ ist alles klar; sei also $i \leq G$.

  - $i > g\sigma + 1$: Dann gilt $d_i \leq 2e_i$, und mit Induktionsvoraussetzung an e folgt die behauptete Abschätzung von d_i.
  - $i \leq g\sigma + 1$: Nach Induktionsvoraussetzung (2) an e und Lemma 2.3 (3) haben wir für $j \leq g\sigma + 1$

$$\overline{(\,\delta^{x^\sigma}_j[e]_j)_i} \;\leq\; \mathrm{lh}^x([e]_j) \cdot E_i.$$

  Wir erhalten damit folgende Abschätzung (beachte $\mathrm{lh}^x \leq \mathrm{lh}$):

$$\begin{aligned} d_i &\leq \sum_{j \leq i} \overline{(\,\delta^{x^\sigma}_j[e]_j)_i} + e_i \\ &\leq \sum_{j \leq i} \mathrm{lh}^x([e]_j) \cdot E_i + E_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{L.\,2.5}{<} && 2^{(G+2)\mathrm{dp}(e)} \cdot 2_{G+1 \dot{-} i}\left((G+2)\mathrm{dp}(e)^2 \dot{-} i\right) \\ &< && 2_{G+1 \dot{-} i}\left((G+2)\mathrm{dp}(d)^2 \dot{-} i\right). \end{aligned}$$

Nun verifizieren wir Teil (2). Sei dazu $t \in \mathrm{T}^y_{ji}([d]_j)$ mit $i, j \leq G$. Im Falle $i = j$ folgt sofort mit (1) $\bar{t} \leq d_j < D_j$. Gelte nun $j < i$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $j > g\sigma + 1$: Dann muß $t \in \mathrm{T}^y_{ji}([e]_j)$ gelten, und die Induktionsvoraussetzung an e liefert $\bar{t} < E_i < D_i$.
- $j \leq g\sigma + 1$: Wegen $j < i$ haben wir dann $t \in \mathrm{T}^y_{ji}([e]_j\{[x] := \vec{1}\})$ und wenden die Induktionsvoraussetzung an e an, oder wir haben $t \in \mathrm{T}^y_{ji}((\,\delta^{x^\sigma}_k[e]_k)_j)$ für ein $k \leq j$. Dann muß es – wiederum wegen $j < i$ – einen Term $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{jj}((\,\delta^{x^\sigma}_k[e]_k)_j)$ geben, in dem irgendeine Variable y_l auftritt und für den $t \in \mathrm{T}^y_{j+1,i}(f)$ gilt. Nach Lemma 2.3 (1) folgt dann aber schon

  $$2^f \otimes g \ \in \ \mathrm{Sub}^y_{jj}[\mathrm{T}^x_{kj}([e]_k)].$$

  Es folgt $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{kj}([e]_k)$, so daß wir mit $t \in \mathrm{T}^y_{ji}(2^f \otimes g)$ schließlich $t \in \mathrm{T}^y_{ki}([e]_k)$ erhalten und die Induktionsvoraussetzung an e die Beziehung $\bar{t} < E_i < D_i$ liefert.

Damit ist Lemma 2.6 vollständig bewiesen. □

Beweis von Korollar 2. Die Behauptung des Korollars folgt aus Korollar 1 zusammen mit Lemma 2.6 für $f \equiv d \equiv c$ und $i = 0$. □

Kapitel 3

Abschätzung der Reduktionsketten in T

Wir wollen nun den Ansatz aus Kapitel 2 auf Gödels T erweitern. Unser Ziel ist eine scharfe Abschätzung der Reduktionsketten in T und seinen Teilsystemen.

Die Arbeit von Howard [12] gibt uns eine nicht-eindeutige Zuordnung $[\cdot]$ von Ordinalzahlen unterhalb von ε_0 an die Terme aus $\mathcal{T}$ mit folgender Eigenschaft an die Hand: Sind Terme a^σ, $b^\sigma \in \mathcal{T}$ mit $a^\sigma \rhd^r b^\sigma$ gegeben, wobei $\rhd^r$ aus $\rhd$ durch Einschränkung der Rekursor-Reduktionen auf Ziffern als Rekursionsargumente hervorgeht, und ist $[a^\sigma]$ ein dem Term a^σ zugeordneter Vektor, so finden wir einen dem Term b^σ zugeordneten Vektor $[b^\sigma]$ derart, daß $[a^\sigma]_0 \succ [b^\sigma]_0$ gilt.

Im Gegensatz zur Behandlung des einfachen getypten λ-Kalküls werden nun transfinite Ordinalterme als Komponenten der zugeordneten Vektoren verwendet. Der Grund dafür ist, daß den in Ausgangstermen von Reduktionsketten auftretenden Rekursoren im allgemeinen nicht unmittelbar angesehen werden kann, welche Ziffern als Rekursionsargumente tatsächlich zur Anwendung kommen können.

Wir werden Howards Ansatz in diesem Kapitel durch eine Anwendung von Weiermanns Kollabierungstechnik aus [26] dahingehend verfeinern, daß wir eine nicht-eindeutige Zuordnung natürlicher Zahlen an die Terme aus $\mathcal{T}$ erhalten, welche die Behandlung allgemeiner Rekursor-Reduktionen und damit die Behandlung der uneingeschränkten Reduktionsrelation $\rhd$ zuläßt. Dieses Vorgehen führt uns schließlich zu einer exakten Abschätzung der Berechnungskomplexität von Gödels T und seinen Teilsystemen.

3.1 Ordinalterme und -vektoren

In diesem Abschnitt stellen wir den ordinalzahltheoretischen Rahmen der im nächsten Abschnitt durchgeführten Zuordnung von Ordinalvektoren an die Terme von Gödels T dar. Dazu wird eine eigenständige Theorie von Ordinaltermen unterhalb von ε_0 und daraus zusammengesetzten Vektoren entwickelt. Da wir den Termen aus $\mathcal{T}$ in rekursiver Weise Ordinalvektoren zuordnen wollen, muß das Konzept der Ordinalvektoren den Variablen aus $\mathcal{T}$ entsprechende Variablenvektoren sowie geeignete Operationen $\Box$ und δ vorsehen, welche eine Behandlung der Applikation und der λ-Abstraktion gestatten.

3.1.1 Die Mengen $\mathcal{OT}$ und $\mathcal{C}$

Mit $\mathcal{OT}$ bezeichnen wir die im folgenden definierte Menge der von uns verwendeten Ordinalterme. $\mathcal{OT}$ enthält Variablen x_i^σ für alle $i \leq g\sigma$ zu jeder Variablen x^σ aus $\mathcal{T}$. Aus technischen Gründen nehmen wir zu jeder Variablen x_i^σ aus $\mathcal{OT}$ noch eine Kopie $\underline{x}_i^\sigma$ mit in die Menge $\mathcal{OT}$ auf. Dies wird uns später ermöglichen, auf seiten der zugeordneten Ordinalvektoren genau zwischen den zwei wesentlichen Funktionen einer Variablen zu unterscheiden, nämlich daß man zum einen über sie abstrahieren und sie zum anderen durch Terme ersetzen kann. Durch den Prozeß der λ-Abstraktion wird ein Term ja zu einer Funktion in derjenigen Variablen, über welche abstrahiert wird, so daß man durch die Applikation eines Argumentes vermöge der β-Konversion zu dem entsprechenden Funktionswert gelangen kann. Eine detaillierte Motivation für die Hinzunahme der Variablenkopien geben wir zu Beginn des Abschnittes 3.2.

Die nun folgende Einführung der Ordinalterme und -vektoren verläuft analog zur Einführung der Zahlterme und -vektoren in Kapitel 2. Um die beiden Kapitel möglichst unabhängig voneinander zu halten, nehmen wir gelegentliche Wiederholungen von Vereinbarungen oder Definitionen aus Kapitel 2, deren Verallgemeinerung auf Ordinalterme und -vektoren wir hier benötigen, in Kauf.

Definition 25 ($\mathcal{N}$, $\mathcal{OT}$ und $\underline{\mathcal{OT}}$)
Sei mit $\mathcal{N}$ die Menge der Ziffern bezeichnet. Wir definieren eine Menge $\mathcal{OT}$ von Ordinaltermen induktiv nach folgenden Klauseln:

- $0, 1, \omega \in \mathcal{OT}$.

- x_i^σ, $\underline{x}_i^\sigma \in \mathcal{OT}$ *für jede Variable* x^σ *und* $i \leq g\sigma$.
- $a, b \in \mathcal{OT} \Rightarrow a \oplus b,\ 2^a \otimes b \in \mathcal{OT}$.
- $a, b \in \mathcal{OT},\ n \in \mathcal{N} \Rightarrow \psi(\omega \otimes a \oplus b + n) \in \mathcal{OT}$.

$\underline{\mathcal{OT}}$ *sei die Menge aller* $h \in \mathcal{OT}$*, in denen keine Variable* x_i^σ *auftritt.*

Schreibweisen. Seien $h_0, \ldots, h_m, \ldots \in \mathcal{OT}$. Wir definieren induktiv die folgende Schreibweise:

$$\bigoplus_{i=0}^{0} h_i := h_0 \quad \text{und} \quad \bigoplus_{i=0}^{m+1} h_i := \bigoplus_{i=0}^{m} h_i \oplus h_{m+1}.$$

Zur Bildung des n-ten Vielfachen eines Terms $h \in \mathcal{OT}$ führen wir folgende Schreibweise ein:

$$n \cdot h := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ \bigoplus_{i=0}^{n-1} h & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vereinbarungen. Wir bezeichnen die Menge aller Vektoren von Ordinaltermen mit $\mathcal{OT}^\omega$, wobei wir Vektoren $A = <A_0, \ldots, A_n> \in \mathcal{OT}^{<\omega}$ mit ihren trivialen Fortsetzungen $<A_0, \ldots, A_n, 0, 0, 0, \ldots> \in \mathcal{OT}^\omega$ identifizieren. Die Mengen $\mathcal{X}$ und $\underline{\mathcal{X}}$ von Variablenvektoren sind definiert durch

$$\mathcal{X} := \{ <x_0^\sigma, \ldots, x_{g\sigma}^\sigma> \mid x^\sigma \in \mathcal{V} \} \quad \text{und} \quad \underline{\mathcal{X}} := \{ <\underline{x}_0^\sigma, \ldots, \underline{x}_{g\sigma}^\sigma> \mid x^\sigma \in \mathcal{V} \}.$$

Die Vektoren $<x_0^\sigma, \ldots, x_{g\sigma}^\sigma>$ und $<\underline{x}_0^\sigma, \ldots, \underline{x}_{g\sigma}^\sigma>$ bezeichnen wir auch mit X^σ beziehungsweise $\underline{X}^\sigma$.

Definition 26 (Vektoraddition)
Seien $A, B \in \mathcal{OT}^\omega$*. Dann definieren wir den Vektor* $A \oplus B$ *komponentenweise durch*

$$(A \oplus B)_i := A_i \oplus B_i.$$

Sei ferner $\tau \in \mathcal{TP}$*. Wir definieren den Vektor* $A \oplus_\tau B$ *durch*

$$(A \oplus_\tau B)_i := \begin{cases} A_i \oplus B_i & \textit{falls } i \leq g\tau \\ A_i & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Definition 27 (Substitution)
Sei $h \in \mathcal{OT}$, $X^\sigma \in \mathcal{X}$ *und* $B \in \mathcal{OT}^\omega$. *Dann gehe*

$$h\{X^\sigma := B\}$$

aus h *durch Ersetzen aller in* h *auftretenden Variablen* x_i^σ *durch* B_i *hervor.*

Analog definieren wir die Substitution im Falle $\underline{X}^\sigma \in \underline{\mathcal{X}}$.

Für $\mathcal{OT}$*-Vektoren sei die Substitution komponentenweise definiert.*

Für spätere Abschätzungen von Ordinaltermen führen wir als nächstes einige Hilfsbegriffe ein.

Definition 28 (lh, dp und Sub)
Wir definieren die Länge eines $\mathcal{OT}$*-Terms, die maximale Höhe seiner 2er-Exponentialtürme und die Menge seiner Subterme wie folgt rekursiv:*

- *Falls* h *eine der Konstanten* 0, 1, ω *oder eine Variable ist, so sei*

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(h) &:= 1, \\ \mathrm{dp}(h) &:= 0 \textit{ und} \\ \mathrm{Sub}(h) &:= \{h\}. \end{aligned}$$

- *Gilt* $h \in \{f \oplus g, \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)\}$, *so definieren wir*

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(h) &:= \mathrm{lh}(f) + \mathrm{lh}(g) + 1, \\ \mathrm{dp}(h) &:= \max\{\mathrm{dp}(f), \mathrm{dp}(g)\} \textit{ sowie} \\ \mathrm{Sub}(h) &:= \{h\} \cup \mathrm{Sub}(f) \cup \mathrm{Sub}(g). \end{aligned}$$

- *Gilt schließlich* $h \equiv 2^f \otimes g$, *so setzen wir*

$$\begin{aligned} \mathrm{lh}(h) &:= 2\mathrm{lh}(f) + \mathrm{lh}(g) + 1, \\ \mathrm{dp}(h) &:= \max\{1 + \mathrm{dp}(f), \mathrm{dp}(g)\} \textit{ und} \\ \mathrm{Sub}(h) &:= \{h\} \cup \mathrm{Sub}(f) \cup \mathrm{Sub}(g). \end{aligned}$$

Wie in Kapitel 2 beschränken wir uns durch die folgende Definition der Menge $\mathcal{C}$ auf diejenigen Vektoren aus $\mathcal{OT}^\omega$, welche als geeignete Kandidaten für eine Zuordnung an die Terme aus $\mathcal{T}$ in Betracht kommen und auf denen der Algorithmus δ sinnvoll definiert werden kann. Die Definition der $\mathcal{C}$-Mengen ist eine Modifikation und Erweiterung der entsprechenden Definition von Howard [12] und stellt eine Anpassung der ursprünglichen Definition an unsere stark erweiterten Anforderungen dar.

Definition 29 ($\mathcal{C}$ – Mengen)
Wir definieren die Mengen $\mathcal{C}_0 \subsetneq \mathcal{OT}$ und $\mathcal{C}_i \subsetneq \mathcal{OT}$ für $i \geq 1$ wie folgt rekursiv:

- $0,\ 1,\ \underline{x}_0^\sigma,\ x_0^\sigma \in \mathcal{C}_0$.
- $a,\ b \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow a \oplus b \in \mathcal{C}_0$.
- $f \in \mathcal{C}_1,\ g \in \mathcal{C}_0,\ n \in \mathcal{N} \Rightarrow \psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathcal{C}_0$.
- $h \in \underline{\mathcal{OT}} \Rightarrow h \in \mathcal{C}_i$.
- $i \leq g\sigma \Rightarrow x_i^\sigma \in \mathcal{C}_i$.
- $a,\ b \in \mathcal{C}_i \Rightarrow a \oplus b \in \mathcal{C}_i$.
- $f \in \mathcal{C}_{i+1},\ g \in \mathcal{C}_i \Rightarrow 2^f \otimes g \in \mathcal{C}_i$.

Die Menge $\mathcal{C} \subsetneq \mathcal{OT}^\omega$ definieren wir durch

$$\mathcal{C} \ := \ \prod_{n<\omega} \mathcal{C}_n.$$

Schließlich definieren wir $\underline{\mathcal{C}}_j \subsetneq \underline{\mathcal{OT}}$ für $j \in \mathbb{N}$ und $\underline{\mathcal{C}} \subsetneq \mathcal{OT}^\omega$ durch

$$\underline{\mathcal{C}}_j \ := \ \mathcal{C}_j \cap \underline{\mathcal{OT}} \quad \textit{sowie} \quad \underline{\mathcal{C}} \ := \ \mathcal{C} \cap \underline{\mathcal{OT}}^\omega.$$

Bezüglich der strukturellen Eigenschaften der Vektoren aus $\mathcal{C}$ machen wir die folgende

Bemerkung. Es gelten die folgenden wichtigen Beziehungen:

- $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen unter Substitution von Vektoren aus $\mathcal{X}$ durch Vektoren aus $\mathcal{C}$ und unter Substitution von Vektoren aus $\underline{\mathcal{X}}$ durch Vektoren aus $\underline{\mathcal{C}}$.
- Gilt $h \in \mathcal{C}_i$, so tritt in h keine Variable x_j^σ mit $j < i$ auf.
- Terme aus $\mathcal{C}_0$ können keine Gestalt $2^f \otimes g$ haben.
- Es können sehr wohl ψ-Terme in $\mathcal{C}_i$, $i \geq 1$, auftreten. In diesen tritt jedoch keine Variable x_k^σ auf.

3.1.2 Interpretation und Größenvergleich

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst die naheliegende Interpretation geschlossener Ordinalterme durch Ordinalzahlen unterhalb von ε_0 angeben. Die von uns vorausgesetzten Kenntnisse aus der Theorie der Ordinalzahlen beschränken sich im wesentlichen auf die Darstellbarkeit von Ordinalzahlen in der Cantorschen Normalform, die Definitionen und Eigenschaften der natürlichen Summe und des natürlichen Produktes von Ordinalzahlen sowie auf die Definition der Funktion $\alpha \mapsto 2^\alpha$ und ihre Eigenschaften. Auf diese Grundlagen wollen wir nicht in systematischer Weise eingehen und verweisen diesbezüglich auf [17] oder [15]. Zur Erinnerung geben wir jedoch einige wichtige Definitionen und Tatsachen aus der Theorie der Ordinalzahlen an:

- Die Cantorsche Normalform (CNF): Zu jeder Ordinalzahl $\alpha > 0$ gibt es eindeutig bestimmte Ordinalzahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ mit $n \geq 1$ und

  $$\alpha = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n} \geq \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n.$$

  Im Falle $\alpha < \varepsilon_0$ gilt stets $\alpha > \alpha_1$.

- Die natürliche Summe ist folgendermaßen definiert: Es ist

  $$\alpha \oplus 0 \;:=\; \alpha \;=:\; 0 \oplus \alpha,$$

  und sind die Cantorschen Normalformen von Ordinalzahlen α und β gegeben durch

  $$\begin{aligned} \alpha &= \omega^{\gamma_0} + \ldots + \omega^{\gamma_n} \geq \gamma_0 \geq \ldots \geq \gamma_n \text{ und} \\ \beta &= \omega^{\gamma_{n+1}} + \ldots + \omega^{\gamma_m} \geq \gamma_{n+1} \geq \ldots \geq \gamma_m \end{aligned}$$

  mit $n \geq 0$ und $m \geq n+1$, so ist $\alpha \oplus \beta$ definiert durch

  $$\alpha \oplus \beta \;:=\; \omega^{\gamma_{\pi(0)}} + \ldots + \omega^{\gamma_{\pi(m)}},$$

  wobei π eine Permutation der Menge $\{0, \ldots, m\}$ mit $\gamma_{\pi(i)} \geq \gamma_{\pi(j)}$ für $i < j \leq m$. Die natürliche Summe ist assoziativ und kommutativ.

- Das natürliche Produkt ist definiert durch

  $$\alpha \otimes 0 \;:=\; 0 \;=:\; 0 \otimes \alpha$$

und

$$\alpha \otimes \beta := (\omega^{\gamma_0 \oplus \gamma_{n+1}} \oplus \ldots \oplus \omega^{\gamma_0 \oplus \gamma_m}) \oplus \ldots \oplus (\omega^{\gamma_n \oplus \gamma_{n+1}} \oplus \ldots \oplus \omega^{\gamma_n \oplus \gamma_m}),$$

wobei α und β wie in der Definition von $\oplus$ dargestellt sind. Das natürliche Produkt ist assoziativ, kommutativ und es gilt das Distributivgesetz bezüglich der natürlichen Summe.

- Jede Ordinalzahl α läßt sich eindeutig darstellen durch

$$\alpha = \omega \cdot \alpha_0 + n$$

mit $n < \omega$.

- Die Exponentiation zur Basis 2 ist wie folgt definiert:

$$2^\alpha := \omega^{\alpha_0} \cdot 2^n,$$

wobei $\alpha = \omega \cdot \alpha_0 + n$ und $n < \omega$ ist.

- Exponentialtürme zu den Basen 2 und ω:

$$2_0(\alpha) := \alpha =: \omega_0(\alpha) \text{ und } 2_{n+1}(\alpha) := 2^{2_n(\alpha)} \text{ sowie } \omega_{n+1}(\alpha) := \omega^{\omega_n(\alpha)}.$$

Um die ψ-Terme interpretieren zu können, benötigen wir einige Begriffe aus der Theorie der subrekursiven Funktionen in dem gleichen Umfang wie sie auch in [26] benötigt werden. Eine abstrakte Darstellung der zugrundeliegenden Konzepte findet sich in [5]. Wir werden jedoch im folgenden alle erforderlichen Definitionen und Resultate angeben, um die ψ-Funktion, mit Hilfe derer wir die ψ-Terme in $\mathcal{OT}$ interpretieren werden, verstehen zu können.

Definition 30 (Normfunktion)
Die Normfunktion $no : \varepsilon_0 \to \mathbb{N}$ *ist definiert durch*

$$no(0) := 0 \text{ und } no(\alpha) := n + no(\alpha_1) + \cdots + no(\alpha_n),$$

wobei $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n} > \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ *die Darstellung von* α *in Cantorscher Normalform ist.*

Die folgende Proposition stellt Eigenschaften der Normfunktion bereit, auf die wir später häufig zurückgreifen werden.

Proposition 1 (Eigenschaften der Normfunktion)
Für Ordinalzahlen α, $\beta < \varepsilon_0$ gelten folgende Normabschätzungen:

1. $no(\alpha \oplus \beta) = no(\alpha) + no(\beta)$.
2. $no(\alpha) + no(\beta) \dot{-} 1 \leq no(\alpha \otimes \beta) \leq no(\alpha) \cdot no(\beta)$, *falls* $\alpha \neq 0 \neq \beta$.
3. $no(\alpha) \leq 2 \cdot no(2^\alpha)$.
4. $no(2^\alpha) \leq 2^{no(\alpha)}$.

Beweis. Ad 1.: Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen von $\oplus$ und no.
Ad 2.: Gelte

$$\begin{array}{lll} \alpha & =_{CNF} & \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_n} > \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n \text{ und} \\ \beta & =_{CNF} & \omega^{\beta_1} + \ldots + \omega^{\beta_m} > \beta_1 \geq \ldots \geq \beta_m \end{array}$$

mit n, $m \geq 1$. Nach Definition von $\otimes$ gilt

$$\begin{aligned} no(\alpha \otimes \beta) &= nm + m \sum_{i=1}^{n} no(\alpha_i) + n \sum_{j=1}^{m} no(\beta_j) \\ &\leq nm + m \sum_{i=1}^{n} no(\alpha_i) + n \sum_{j=1}^{m} no(\beta_j) + \sum_{i=1}^{n} no(\alpha_i) \cdot \sum_{j=1}^{m} no(\beta_j) \\ &= no(\alpha) \cdot no(\beta). \end{aligned}$$

Diese Abschätzung der Norm des natürlichen Produktes gilt sogar für alle α und β. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\alpha < \omega$ oder $\beta < \omega$. Des weiteren gilt

$$\begin{aligned} no(\alpha) + no(\beta) \dot{-} 1 &= n + m - 1 + \sum_{i=1}^{n} no(\alpha_i) + \sum_{j=1}^{m} no(\beta_j) \\ &\leq nm + m \sum_{i=1}^{n} no(\alpha_i) + n \sum_{j=1}^{m} no(\beta_j) \\ &= no(\alpha \otimes \beta). \end{aligned}$$

Ad 3. und 4.: Da der Fall $\alpha < \omega$ trivial ist, gehen wir von der Situation $\alpha \geq \omega$ aus mit $\alpha = \omega \cdot \alpha_0 + m$ und $0 < \alpha_0 \leq \alpha$ sowie $m < \omega$. Sei nun

$$\alpha_0 = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k} + \ldots + \omega^{\alpha_n} > \alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_k \geq \omega > \alpha_{k+1} \geq \ldots \geq \alpha_n$$

mit $0 \leq k \leq n > 0$. Dann haben wir

$$\omega \cdot \alpha_0 = \omega^{\alpha_1} + \ldots + \omega^{\alpha_k} + \omega^{\alpha_{k+1}+1} + \ldots + \omega^{\alpha_n+1},$$

woraus $no(\alpha) = no(\alpha_0) + n - k + m$ folgt. Nach Definition gilt $2^\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot 2^m$, also $no(2^\alpha) = (no(\alpha_0) + 1) \cdot 2^m$. Wir erhalten aus diesen Vorüberlegungen zum einen

$$no(\alpha) \leq 2no(\alpha_0) + m < 2(no(\alpha_0) \cdot 2^m + 2^m) = 2 \cdot no(2^\alpha)$$

und zum anderen

$$no(2^\alpha) = (no(\alpha_0) + 1) \cdot 2^m \leq 2^{no(\alpha_0)} \cdot 2^m \leq 2^{no(\alpha)}.$$

Damit ist der Beweis von Proposition 1 abgeschlossen. □

Definition 31 (Schnell wachsende Funktionen)
Wir definieren das Anfangsstück $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der schnell wachsenden Hierarchie wie in [26] durch

$$F_0(x) := 2^x \text{ und } F_{n+1}(x) := F_n^{x+1}(x).$$

Eine für unsere Zwecke hinreichend schnell wachsende Funktion Φ definieren wir durch

$$\Phi(x) := F_5(x + 100).$$

Wie wir der Definition der Normfunktion unmittelbar ansehen können, gilt für jede Ordinalzahl $\alpha < \varepsilon_0$ und jede natürliche Zahl n

$$card\,\{\beta < \alpha \mid no(\beta) \leq n\} < \aleph_0.$$

Diese Eigenschaft der Normfunktion ermöglicht es uns nun, die ψ-Funktion wie folgt zu definieren:

Definition 32 (ψ-Funktion nach [26])
Die Funktion $\psi : \varepsilon_0 \to \omega$ sei definiert durch

$$\psi(\alpha) := max(\{0\} \cup \{\psi(\beta) + 1 \mid \beta < \alpha \;\&\; no(\beta) \leq \Phi(no(\alpha))\}).$$

Die Kollabierungsfunktion ψ hat die folgenden wichtigen Eigenschaften, welche wir in zahlreichen Abschätzungen ausnutzen werden.

Proposition 2 (Eigenschaften der ψ-Funktion)

1. *$k = \psi(k)$.*
2. *$k \leq \psi(\alpha + k)$.*
3. *$no(\alpha) \leq \psi(\alpha)$.*
4. *$\psi(\beta) < \psi(\beta + 1)$.*
5. *$\psi(\alpha \oplus \psi(\beta)) \leq \psi(\alpha \oplus \beta)$.*
6. *$\alpha < \beta \,\&\, no(\alpha) \leq \Phi(no(\beta)) \Rightarrow \psi(\alpha) < \psi(\beta)$.*
7. *$\omega \leq \alpha \Rightarrow \Phi(no(\alpha)) < \psi(\alpha)$.*

Beweis. Aussage 1 zeigt man leicht durch Induktion nach k. Die Aussagen 2 und 3 folgen mit Aussage 1 sofort aus der Definition von ψ. Aussage 4 ist offensichtlich, und auch die Aussagen 6 und 7 folgen unmittelbar aus der Definition von ψ. Aussage 5 folgt im Falle $\alpha = 0$ sofort mit Aussage 1, im Falle $\alpha > 0$ führen wir Induktion nach β:

- $\beta = 0$: Trivial.
- $\beta > 0$: Nach Definition der ψ-Funktion existiert ein $\gamma < \beta$ mit den Eigenschaften $no(\gamma) \leq \Phi(no(\beta))$ und $\psi(\beta) = \psi(\gamma) + 1$. Also gilt

  $$\psi(\alpha + \psi(\beta)) \overset{I.V.}{\leq} \psi(\alpha \oplus \gamma + 1) \overset{!}{\leq} \psi(\alpha \oplus \beta).$$

  Zu !: Wir argumentieren mit Aussage 6: Im Falle $\gamma + 1 = \beta$ sind wir bereits fertig. Gilt $\gamma + 1 < \beta$, so folgt $\alpha \oplus \gamma + 1 < \alpha \oplus \beta$ und

  $$no(\alpha \oplus \gamma + 1) \leq no(\alpha) + 1 + \Phi(no(\beta)) \leq \Phi(no(\alpha \oplus \beta)),$$

  wobei wir ausgenutzt haben, daß $\alpha > 0$ gilt. □

Nach diesen Vorbereitungen haben wir nun eine kanonische Interpretation geschlossener $\mathcal{OT}$-Terme zur Verfügung. Damit ist klar, was unter der Norm $no(h)$ eines geschlossenen Terms $h \in \mathcal{OT}$ zu verstehen ist und wie geschlossene $\mathcal{OT}$-Terme miteinander verglichen werden können. Nicht ganz so trivial ist es jedoch, diese Begriffe auf beliebige Ordinalterme zu verallgemeinern. Zu diesem Zweck werden wir weiter unten den Begriff der zulässigen Belegung einführen.

Definition 33 (Verallgemeinerung des Normenvergleichs)
Seien $g, h \in \mathcal{OT}$ gegeben. Wir definieren

$$no(g) \prec no(h) \quad :\Leftrightarrow \quad no(\overline{g}) < no(\overline{h}) \quad \textit{für jede } \text{geschlossene zulässige Belegung } {}^{-}.$$

Analog definieren wir die Gleichheit und die Beziehung $no(g) \preceq no(h)$ von Normen von $\mathcal{OT}$-Termen g und h.

Bemerkung. Proposition 1 läßt sich mit dieser Normenvergleichsrelation mühelos auf beliebige Ordinalterme aus $\mathcal{OT}$ verallgemeinern.

Definition 34 (Zulässige Belegungen)
Eine Abbildung $^{-} : \mathcal{OT} \to \mathcal{OT}$ nennen wir eine zulässige Belegung*, falls für jedes $h \in \mathcal{OT}$ gilt:*

$$\overline{h} \;\equiv\; h\{X^\sigma := \overline{X}, \underline{X}^\sigma := \overline{\underline{X}} \mid X^\sigma \in \mathcal{X} \;\&\; \underline{X}^\sigma \in \underline{\mathcal{X}}\},$$

wobei für jeden Vektor $X^\sigma \in \mathcal{X}$

$$\overline{X} \in \mathcal{C} \;\;\&\;\; \forall i \le g\sigma \;\, no(\overline{X}_i) \preceq no(\overline{X}_0) \;\;\&\;\; \forall i < g\sigma \;\, 0 \prec no(\overline{X}_i)$$

und für jeden Vektor $\underline{X}^\sigma \in \underline{\mathcal{X}}$

$$\overline{\underline{X}} \in \underline{\mathcal{C}} \;\;\&\;\; \forall i \le g\sigma \;\, no(\overline{\underline{X}}_i) \preceq no(\overline{\underline{X}}_0) \;\;\&\;\; \forall i < g\sigma \;\, 0 \prec no(\overline{\underline{X}}_i)$$

gilt.

Bemerkung. Für jede Variable x^σ haben wir definitionsgemäß

- $\forall i \le g\sigma \;\; no(x_i^\sigma) \preceq no(x_0^\sigma) \;\&\; no(\underline{x}_i^\sigma) \preceq no(\underline{x}_0^\sigma)$ und
- $\forall i < g\sigma \;\; 0 \prec no(x_i^\sigma), no(\underline{x}_i^\sigma)$.

Die Notwendigkeit dieser Eigenschaften wird offensichtlich, wenn wir Hauptlemma 3.2 für Variablen beweisen.

Wir sind jetzt in der Lage, geeignete Vergleichsrelationen für Ordinalterme aus $\mathcal{OT}$ anzugeben.

Definition 35 (Vergleich von Ordinaltermen)
Seien g, $h \in \mathcal{OT}$. Dann definieren wir

$$g \prec h \;:\Leftrightarrow\; \overline{g} < \overline{h} \quad \textit{für jede } \text{geschlossene zulässige Belegung } {}^{-}.$$

Analog definieren wir die Relation $\preceq$ sowie die Gleichheit von $\mathcal{OT}$-Termen.

Bemerkung. Es ist nun leicht einzusehen, daß für jeden Term $t \in \mathcal{C}_0$ gilt:

$$t \quad \prec \quad \omega.$$

Aus diesem Grunde schreiben wir oft einfach t anstelle von $no(t)$. Ferner lassen sich die Aussagen aus Proposition 2 unmittelbar auf $\mathcal{OT}$ mit den soeben definierten Vergleichsrelationen erweitern.

Schließlich definieren wir Vergleichsrelationen auf $\mathcal{C}$ unter Rückgriff auf die bereits definierten Vergleichsrelationen auf $\mathcal{OT}$.

Definition 36 (Vergleich von Vektoren aus $\mathcal{C}$)
Seien A, $B \in \mathcal{C}$. Dann definieren wir

$$A \prec B \ \ :\Leftrightarrow \ \ A_0 \prec B_0 \ \ \& \ \ \forall i > 0 \ A_i \preceq B_i,$$

und für $\sigma \in \mathcal{TP}$ definieren wir

$$A \prec_\sigma B \ \ :\Leftrightarrow \ \ A_0 \prec B_0 \ \ \& \ \ \forall i \in \{0, \ldots, g\sigma\} \ A_i \preceq B_i.$$

Die Relationen $=$ und $\preceq$ sind komponentenweise definiert. Die Relationen $=_\sigma$ und $\preceq_\sigma$ sind komponentenweise bis zur $g\sigma$-ten Komponente einschließlich definiert.

Bemerkung. Sämtliche $\preceq$-Relationen, die wir definiert haben, sind partielle Ordnungen auf den jeweiligen Feldern. Sämtliche $\prec$-Relationen sind irreflexiv und transitiv.

3.1.3 Der $\Box_\sigma$ – Operator

In diesem Abschnitt definieren wir den $\Box$-Operator für Ordinalvektoren und beweisen seine später benötigten Eigenschaften. Die wesentliche Modifikation gegenüber der Definition aus Kapitel 2 betrifft die nullte Komponente und geht auf Weiermann [26] zurück. Diese Modifikation besteht in der Einführung der Kollabierungsfunktion ψ und bewirkt zweierlei: Zum einen wird gegenüber der ursprünglichen Definition von Howard eine ω-Potenz eingespart, und zum anderen gewinnen wir am Ende eine Zuordnung natürlicher Zahlen an die Terme von Gödels T, während der Originalansatz nur eine Zuordnung von Ordinalzahlen unterhalb von ε_0 zuließ, da Howard noch keine geeignete Kollabierungstechnik zur Verfügung stand.

Für höhere Komponenten stellt der modifizierte $\Box$-Operator lediglich eine Verallgemeinerung auf Ordinalterme dar und stimmt mit der von Schütte in [17] verwendeten Version überein.

Definition 37 ($\Box_\sigma : \mathcal{OT}^\omega \times \mathcal{OT}^\omega \to \mathcal{OT}^\omega$)

$$(A \Box_\sigma B)_i := \begin{cases} \psi(\omega \otimes (A \Box_\sigma B)_1 \oplus A_0 \oplus B_0 + g\sigma) & : \quad i = 0 \\ 2^{(A \Box_\sigma B)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i) & : \quad 1 \leq i \leq g\sigma \\ A_i & : \quad i > g\sigma. \end{cases}$$

Bemerkung. $\mathcal{C}$ ist abgeschlossen gegen $\Box_\sigma$.

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von Lemma 2.1 auf Ordinalvektoren, wobei jedoch die Voraussetzungen und Behauptungen auf Vektorkomponenten ab der ersten eingeschränkt sind. Die Lemmata 3.2 und 3.3 dienen dem Zweck, auch Majorisierungseigenschaften des $\Box$-Operators bezüglich der nullten Komponente zur Verfügung zu stellen.

Lemma 3.1 *Seien $A, B, C, D \in \mathcal{OT}^\omega$ und $\sigma \in \mathcal{TP}$.*

1. *$\forall i\ A_i \preceq (A \Box_\sigma B)_i$ und $\forall i \leq g\sigma\ A_i \oplus B_i \preceq (A \Box_\sigma B)_i$.*

2. *Sei ein Index $k \in \{1, \ldots, g\sigma + 1\}$ gegeben.*

   (a) *Aus $\forall i \in \{k, \ldots, g\sigma + 1\}\ A_i \preceq B_i$ folgt $(A \Box_\sigma C)_k \preceq (B \Box_\sigma C)_k$. Falls zusätzlich $A_j \prec B_j$ und $\forall i \in \{k, \ldots, j\}\ B_i \oplus C_i \succ 0$ für ein j mit $k \leq j \leq g\sigma + 1$ gilt, haben wir sogar $(A \Box_\sigma C)_k \prec (B \Box_\sigma C)_k$.*

   (b) *Aus $\forall i \in \{k, \ldots, g\sigma\}\ A_i \preceq B_i$ folgt $(C \Box_\sigma A)_k \preceq (C \Box_\sigma B)_k$. Falls zusätzlich $A_j \prec B_j$ und $\forall i \in \{k, \ldots, j\}\ C_i \oplus B_i \succ 0$ für ein j mit $k \leq j \leq g\sigma$ gilt, haben wir sogar $(C \Box_\sigma A)_k \prec (C \Box_\sigma B)_k$.*

3. *Aus $\forall i \in \{1, \ldots, g\sigma + 1\}\ (A_i, B_i \succ 0\ \&\ A_i \oplus B_i \preceq C_i)$ folgt*

$$\forall i \in \{1, \ldots, g\sigma\}\ (A \Box_\sigma D)_i \oplus (B \Box_\sigma D)_i \prec (C \Box_\sigma D)_i.$$

4. *Verschärfen wir die Voraussetzungen aus 3. um die Voraussetzung $2A_{g\sigma+1} \oplus B_{g\sigma+1} \prec C_{g\sigma+1}$, so erhalten wir sogar*

$$\forall i \in \{1, \ldots, g\sigma + 1\}\ 2((A \Box_\sigma D) \Box_\sigma (B \Box_\sigma D))_i \prec (C \Box_\sigma D)_i.$$

Beweis. Für $i = 0$ in 1. benutzen wir Proposition 2. Ansonsten können wir den Beweis von Lemma 2.1 übernehmen, jedoch unter Berücksichtigung der Einschränkungen auf höhere Vektorkomponenten. Die Eigenschaften der natürlichen Summe, des natürlichen Produktes sowie der $2^{(\cdot)}$-Funktion für Ordinalzahlen garantieren die Übertragbarkeit der Argumente. $\Box$

Lemma 3.2 *Seien* $\rho, \sigma, \tau \in \mathcal{TP}$*,* $A, B, C, D \in \mathcal{OT}^\omega$ *und* a, b, c, d *die Normen irgendwelcher* $\mathcal{OT}$*-Terme derart, daß* $no(A_i) \preceq a$*,* $no(B_i) \preceq b$*,* $no(C_i) \preceq c$*,* $no(D_i) \preceq d$ *für* $i > 0$ *gilt. Dann haben wir für* $i > 0$ *folgende Normabschätzungen:*

1. $no((A \,\Box_\sigma\, B)_i) \preceq F_2(a + b + g\sigma)$.
2. $no(((A \,\Box_\rho\, B) \,\Box_\sigma\, (C \,\Box_\phi\, D))_i) \preceq F_3(a + b + c + d + g\rho + 2g\sigma + g\phi)$.

Bemerkung. Aus dem Beweis läßt sich klar ablesen, bis zur wievielten Vektorkomponente wir jeweils die Normen der Vektoren A bis D unter Kontrolle haben müssen, um die beiden Behauptungen für die nichttrivialen Komponenten der Vektoren $A \,\Box_\sigma\, B$ und $(A \,\Box_\rho\, B) \,\Box_\sigma\, (C \,\Box_\phi\, D)$ beweisen zu können. Auf diese Präzisierung haben wir lediglich der Einfachheit halber verzichtet.

Beweis. Ad 1.: Wir zeigen zunächst die folgende Hilfsaussage

$$(*) \qquad no((A \,\Box_\sigma\, B)_i) \prec F_0^{2(g\sigma+1 \dot{-} i)}(a + b + 1)$$

für $1 \leq i \leq g\sigma$ induktiv nach $g\sigma \dot{-} i$:

- $i = g\sigma$:

$$\begin{aligned}
no((A \,\Box_\sigma\, B)_i) &= no(2^{A_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i)) \\
&\preceq 2^{no(A_{i+1})} \cdot (no(A_i) + no(B_i)) \\
&\preceq 2^a \cdot (a + b) \\
&\prec 2^{2^{a+b}} \cdot (a + b) \\
&\prec 2^{2^{a+b+1}} \\
&= F_0^2(a + b + 1).
\end{aligned}$$

- $1 \leq i < g\sigma$:

$$\begin{aligned}
no((A \,\Box_\sigma\, B)_i) &= no(2^{(A \,\Box_\sigma\, B)_{i+1}} \otimes (A_i \oplus B_i)) \\
&\overset{I.V.}{\preceq} 2^{F_0^{2(g\sigma+1-i)-2}(a+b+1)} \cdot (a + b) \\
&= F_0^{2(g\sigma+1-i)-1}(a + b + 1) \cdot (a + b) \\
&\prec F_0^{2(g\sigma+1-i)}(a + b + 1).
\end{aligned}$$

Nun zur Behauptung:

- $i > g\sigma$: $no((A \,\square_\sigma\, B)_i) = no(A_i) \preceq a \prec F_2(a+b+g\sigma)$.
- $1 \leq i \leq g\sigma$:

$$\begin{aligned} no((A \,\square_\sigma\, B)_i) &\overset{(*)}{\prec} F_0^{2(g\sigma+1\dot{-}i)}(a+b+1) \\ &\preceq F_0^{2g\sigma}(a+b+1) \\ &\preceq F_1(a+b+2g\sigma) \\ &\prec F_2(a+b+g\sigma). \end{aligned}$$

Ad 2.: Wir zeigen zunächst folgende Hilfsaussage

$$(*) \qquad no(((A \,\square_\rho\, B) \,\square_\sigma\, (C \,\square_\phi\, D))_i) \preceq F_2^{2(g\sigma+1\dot{-}i)}(a+b+c+d+g\rho+g\phi+2)$$

für $1 \leq i \leq g\sigma$ durch Induktion nach $g\sigma \dot{-} i$. Dabei werden wir folgende Abkürzungen verwenden:

$$\begin{aligned} \alpha &:= F_2(a+b+g\rho). \\ \beta &:= F_2(c+d+g\phi). \\ \gamma &:= F_2(a+b+c+d+g\rho+g\phi+1). \\ \delta &:= a+b+c+d+g\rho+g\phi+2. \end{aligned}$$

- $i = g\sigma$:

$$\begin{aligned} & no(((A \,\square_\rho\, B) \,\square_\sigma\, (C \,\square_\phi\, D))_i) \\ &= no(2^{(A \,\square_\rho\, B)_{i+1}} \otimes ((A \,\square_\rho\, B)_i \oplus (C \,\square_\phi\, D)_i)) \\ &\preceq 2^{no((A \,\square_\rho\, B)_{i+1})} \cdot (no((A \,\square_\rho\, B)_i) + no((C \,\square_\phi\, D)_i)) \\ &\overset{1.}{\preceq} 2^\alpha \cdot (\alpha+\beta) \\ &\preceq F_2(\gamma) \cdot \gamma \\ &\preceq F_2(\gamma+1) \\ &\preceq F_2^2(\delta). \end{aligned}$$

- $1 \leq i < g\sigma$:

$$\begin{aligned} & no(((A \,\square_\rho\, B) \,\square_\sigma\, (C \,\square_\phi\, D))_i) \\ &\preceq 2^{no(((A \,\square_\rho\, B) \,\square_\sigma\, (C \,\square_\phi\, D))_{i+1})} \cdot (no((A \,\square_\rho\, B)_i) + no((C \,\square_\phi\, D)_i)) \\ &\overset{IV,1.}{\preceq} 2^{F_2^{2(g\sigma+1-i)-2}(\delta)} \cdot (\alpha+\beta) \\ &\preceq F_2^{2(g\sigma+1-i)-2}(F_2(\delta)) \cdot \gamma \\ &\prec F_2^{2(g\sigma+1-i)}(a+b+c+d+g\rho+g\phi+2). \end{aligned}$$

Nun können wir die Behauptung zeigen:

- $i > g\sigma$:

$$\begin{aligned} & no(((A \,\square_\rho\, B) \,\square_\sigma\, (C \,\square_\phi\, D))_i) \\ = \;& no((A \,\square_\rho\, B)_i) \\ \overset{1.}{\preceq} \;& F_2(a + b + g\rho) \\ \prec \;& F_3(a + b + c + d + g\rho + 2g\sigma + g\phi). \end{aligned}$$

- $1 \leq i \leq g\sigma$:

$$\begin{aligned} & no(((A \,\square_\rho\, B) \,\square_\sigma\, (C \,\square_\phi\, D))_i) \\ \overset{(*)}{\preceq} \;& F_2^{2(g\sigma+1-i)}(\delta) \\ \preceq \;& F_2^{2g\sigma}(\delta) \\ \prec \;& F_3(a + b + c + d + g\rho + 2g\sigma + g\phi). \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Lemmas abgeschlossen. □

Lemma 3.3 *Seien $A, B, C, D \in \mathcal{OT}^\omega$.*

1. *Seien $\sigma, \tau \in \mathcal{TP}$ mit $g\sigma < g\tau$.*

   (a) *Es gelte $A \prec_\tau B$ sowie $no(A_i) \preceq no(B_0)$ für $i \leq g\sigma + 1$ und $no(C_i) \preceq no(C_0)$ für $1 \leq i \leq g\sigma$. Dann folgt $A \,\square_\sigma\, C \prec_\tau B \,\square_\sigma\, C$.*
   Die Aussage gilt auch mit $\preceq_\tau$ anstelle von $\prec_\tau$.

   (b) *Gelte $A \prec_\sigma B$, $no(A_i) \preceq no(B_0)$ für $i \leq g\sigma$ und $no(C_i) \preceq no(C_0)$ für $1 \leq i \leq g\sigma + 1$. Dann folgt $C \,\square_\sigma\, A \prec_\tau C \,\square_\sigma\, B$.*
   Die Aussage gilt auch mit $\preceq_\sigma$ anstelle von $\prec_\sigma$ und $\preceq_\tau$ anstatt $\prec_\tau$.

2. *Aus $no(B_i) \succ 0$ für $1 \leq i \leq g\sigma$ und $no(A_i) \preceq no(B_i)$ für $1 \leq i \leq g\sigma+1$ folgt*

$$\forall i \in \{1, \ldots, g\sigma + 1\} \;\; no((A \,\square_\sigma\, C)_i) \prec F_3(no((B \,\square_\sigma\, C)_i) + g\sigma).$$

3. *Unter den Voraussetzungen*

$$D_0 \prec \omega,$$

$$\forall i \leq g\sigma + 1 \ (A_i, B_i \succ 0 \ \& \ A_i \oplus B_i \preceq C_i \ \& \ no(A_i), no(B_i) \preceq no(C_i))$$

und $A_1 \oplus B_1 \prec C_1$ *im Falle* $g\sigma = 0$ *haben wir*

$$\forall i \leq g\sigma \ \ (A \,\Box_\sigma\, D)_i \oplus (B \,\Box_\sigma\, D)_i \prec (C \,\Box_\sigma\, D)_i.$$

Beweis. Ad 1.: Da man für Teil (b) ähnlich argumentiert wie für Teil (a), zeigen wir nur (a), indem wir folgende drei Fälle unterscheiden:

- $g\sigma + 1 \leq i \leq g\tau$: Dies ist klar nach Voraussetzung.
- $1 \leq i \leq g\sigma$: In diesem Fall folgt die Behauptung mit Lemma 3.1 (2a).
- $i = 0$: Wir zeigen die $\prec_\tau$-Variante. In der $\preceq_\tau$-Variante argumentiert man für jede geschlossene zulässige Belegung einzeln.

$$\begin{array}{rcl} (A \,\Box_\sigma\, C)_0 & = & \psi(\omega \otimes (A \,\Box_\sigma\, C)_1 \oplus A_0 \oplus C_0 + g\sigma) \\ & \overset{!}{\prec} & \psi(\omega \otimes (B \,\Box_\sigma\, C)_1 \oplus B_0 \oplus C_0 + g\sigma) \\ & = & (B \,\Box_\sigma\, C)_0. \end{array}$$

Zu !: Wir überzeugen uns davon, daß die Voraussetzungen von Proposition 2 (6) erfüllt sind. Es ist klar, daß

$$\omega \otimes (A \,\Box_\sigma\, C)_1 \oplus A_0 \oplus C_0 + g\sigma \prec \omega \otimes (B \,\Box_\sigma\, C)_1 \oplus B_0 \oplus C_0 + g\sigma$$

gilt. Mit Lemma 3.2 erhalten wir die Abschätzung

$$no((A \,\Box_\sigma\, C)_1) \preceq F_2(no(B_0) + no(C_0) + g\sigma).$$

Damit haben wir

$$no(\omega \otimes (A \,\Box_\sigma\, C)_1 \oplus A_0 \oplus C_0 + g\sigma) \prec \Phi(no(\omega \otimes (B \,\Box_\sigma\, C)_1 \oplus B_0 \oplus C_0 + g\sigma)).$$

Proposition 2 (6) liefert nun die behauptete $\prec$-Beziehung.

Ad 2.: Definiere für $i > 0$

$$N_i := \sum_{j=i}^{g\sigma+1} no(A_j), \ M_i := \sum_{j=i}^{g\sigma+1} no(B_j), \ L_i := \sum_{j=i}^{g\sigma} no(C_j).$$

Der Beweis von Lemma 3.2 ergibt für $0 < i \leq g\sigma + 1$

$$no((A \,\Box_\sigma\, C)_i) \quad \preceq \quad F_2(N_i + L_i + g\sigma). \tag{3.1}$$

Da der Fall $i = g\sigma + 1$ trivial ist, gehen wir im folgenden von $1 \leq i \leq g\sigma$ aus. Wegen $no(B_i) \succ 0$ haben wir dann $no(2^{(B \,\Box_\sigma\, C)_{i+1}}) \preceq no((B \,\Box_\sigma\, C)_i)$ und damit $no((B \,\Box_\sigma\, C)_{i+1}) \preceq 2no((B \,\Box_\sigma\, C)_i)$ gemäß Proposition 1. Daraus erhalten wir für $j \in \{i, \ldots, g\sigma + 1\}$

$$no((B \,\Box_\sigma\, C)_j) \preceq 2^{g\sigma} no((B \,\Box_\sigma\, C)_i).$$

Da $no(B_j) \preceq no((B \,\Box_\sigma\, C)_j)$ für jedes j und $no(C_j) \preceq no((B \,\Box_\sigma\, C)_j)$ für $1 \leq j \leq g\sigma$ gilt, erhalten wir

$$M_i + L_i \preceq (g\sigma + 1) \cdot 2^{g\sigma+1} \cdot no((B \,\Box_\sigma\, C)_i). \tag{3.2}$$

(3.1) und (3.2) zusammen mit $N_i \preceq M_i$ ergeben

$$\begin{aligned} no((A \,\Box_\sigma\, C)_i) &\preceq F_2(M_i + L_i + g\sigma) \\ &\preceq F_2((g\sigma + 1) \cdot 2^{g\sigma+1} \cdot no((B \,\Box_\sigma\, C)_i) + g\sigma) \\ &\preceq F_3(no((B \,\Box_\sigma\, C)_i) + g\sigma). \end{aligned}$$

Ad 3.: Im Falle $1 \leq i \leq g\sigma$ folgt die Behauptung mit Lemma 3.1 (3). Wir betrachten den Fall $i = 0$:

$$\begin{aligned} &(A \,\Box_\sigma\, D)_0 \oplus (B \,\Box_\sigma\, D)_0 \\ &\quad = \psi(\omega \otimes (A \,\Box_\sigma D)_1 \oplus A_0 \oplus D_0 + g\sigma) \oplus \psi(\omega \otimes (B \,\Box_\sigma D)_1 \oplus B_0 \oplus D_0 + g\sigma) \\ &\quad \preceq \psi(\omega \otimes ((A \,\Box_\sigma\, D)_1 \oplus (B \,\Box_\sigma\, D)_1) \oplus A_0 \oplus B_0 \oplus 2D_0 + 2g\sigma) \\ &\quad \prec \psi(\omega \otimes (C \,\Box_\sigma\, D)_1 \oplus C_0 \oplus D_0 + g\sigma) = (C \,\Box_\sigma\, D)_0. \end{aligned}$$

Die $\preceq$-Beziehung folgt sofort mit Proposition 2 (4) und (5). Mit Hilfe von Proposition 2 (6) zeigen wir nun die $\prec$-Beziehung:

$$(A \,\Box_\sigma\, D)_1 \oplus (B \,\Box_\sigma\, D)_1 \prec (C \,\Box_\sigma\, D)_1$$

gilt im Falle $g\sigma = 0$ nach Voraussetzung, im Falle $g\sigma > 0$ haben wir dies bereits bewiesen. Ferner gilt $2D_0 + 2g\sigma \prec \omega$ nach Voraussetzung. Damit erhalten wir

$$\omega \otimes ((A \,\Box_\sigma D)_1 \oplus (B \,\Box_\sigma D)_1) \oplus A_0 \oplus B_0 \oplus 2D_0 + 2g\sigma \prec \omega \otimes (C \,\Box_\sigma D)_1 \oplus C_0 \oplus D_0 + g\sigma.$$

Der zweite Teil dieses Lemmas ergibt

$$no((A \,\Box_\sigma\, D)_1), no((B \,\Box_\sigma\, D)_1) \preceq F_3(no(C \,\Box_\sigma\, D)_1 + g\sigma).$$

Hieraus läßt sich leicht ablesen, daß auch die zweite Voraussetzung von Proposition 2 (6) erfüllt ist. $\Box$

3.1.4 Der δ^{x^σ} – Operator

Wir stellen nun den erweiterten δ-Operator vor. Die Definition aus Kapitel 2 wird auf Ordinalvektoren verallgemeinert und um eine Klausel für ψ-Terme erweitert. Um die Normen höherer Vektorkomponenten durch die unterste kontrollieren zu können, mußten wir einige Änderungen vornehmen, welche auf einer genauen Analyse des Aufbaus von $\mathcal{C}$-Vektoren und des Originalbeweises von Howard in [12] beruhen.

Definition 38 (δ^{x^σ} : $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$)
Für $D \in \mathcal{C}$ definieren wir

$$(\,\delta^{x^\sigma} D)_i := \begin{cases} \mathrm{L}^{x^\sigma}(D) \cdot (\,\delta_0^{x^\sigma} D_0)_0 & : \quad i = 0 \\ \bigoplus\limits_{j=0}^{i} (\,\delta_j^{x^\sigma} D_j)_i & : \quad 0 < i \leq g\sigma + 1 \\ D_i & : \quad i > g\sigma + 1. \end{cases}$$

Die Hilfsoperatoren $\delta_i^{x^\sigma}$: $\mathcal{C}_i \to \mathcal{C}$ definieren wir rekursiv. Sei dazu $h \in \mathcal{C}_i$. Tritt in h keine Variable x_k^σ auf, so definieren wir

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} 1 & : \quad i \neq j \leq g\sigma + 1 \\ h + 1 & : \quad i = j \leq g\sigma + 1 \\ 0 & : \quad sonst. \end{cases}$$

Tritt in h irgendeine Variable x_k^σ auf, so unterscheiden wir folgende Fälle bei der Definition von $\delta_i^{x^\sigma} h$:

- $h \equiv x_i^\sigma$:
$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} 1 & : \quad j \leq g\sigma + 1 \\ 0 & : \quad sonst. \end{cases}$$

- $h \equiv f \oplus g$ *mit* $f, g \in \mathcal{C}_i$:
$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} (\,\delta_i^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j + 1 & : \quad j = 1 \\ (\,\delta_i^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j & : \quad 1 \neq j \leq g\sigma + 1 \\ 0 & : \quad sonst. \end{cases}$$

- $h \equiv 2^f \otimes g$ *mit* $f \in \mathcal{C}_{i+1}, g \in \mathcal{C}_i$ *und* $i > 0$:
$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} 2(\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j + 1 & : \quad j = g\sigma + 1 \\ (\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g)_j & : \quad j \leq g\sigma \\ 0 & : \quad sonst. \end{cases}$$

- *$h \equiv \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$ mit $f \in \mathcal{C}_1, g \in \mathcal{C}_0$ und $i = 0$:*

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j := \begin{cases} \psi(\omega \otimes f\{X^\sigma := \vec{1}\} \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} g)_0 + n) & : \; j = 0 \\ (\,\delta_1^{x^\sigma} f)_j \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} g)_j & : \; 1 \le j \le g\sigma{+}1 \\ 0 & : \; sonst. \end{cases}$$

$\mathrm{L}^{x^\sigma} : \mathcal{C} \to \mathbb{N}$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^{x^\sigma}(D) &:= \mathrm{L}_1^{x^\sigma}(D) \cdot \mathrm{L}_2^{x^\sigma}(D), \textit{ wobei} \\ \mathrm{L}_1^{x^\sigma}(D) &:= \sum_{j=0}^{g\sigma+1} \mathrm{lh}^x(D_j) \textit{ und} \\ \mathrm{L}_2^{x^\sigma}(D) &:= \max\left\{2^{\mathrm{dp}^x(D_j)} \mid j \le g\sigma + 1\right\} + 1. \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir noch die Funktionen $\mathrm{lh}^x, \mathrm{dp}^x : \mathcal{OT} \to \mathbb{N}$ durch Rekursion nach dem Aufbau der $\mathcal{OT}$-Terme (der Einfachheit halber steht hier x für x^σ). Sei $h \in \mathcal{OT}$.

- $\forall j \; x_j^\sigma \notin \mathrm{Sub}(h)$: $\begin{array}{l} \mathrm{lh}^x(h) := 1 \\ \mathrm{dp}^x(h) := 0. \end{array}$

- $\exists j \; x_j^\sigma \in \mathrm{Sub}(h)$ *und*

  - $h \equiv x_k^\sigma$: $\begin{array}{l} \mathrm{lh}^x(h) := 1 \\ \mathrm{dp}^x(h) := 0. \end{array}$

  - $h \in \{f \oplus g, \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)\}$: $\begin{array}{l} \mathrm{lh}^x(h) := \mathrm{lh}^x(f) + \mathrm{lh}^x(g) + 1 \\ \mathrm{dp}^x(h) := \max\{\mathrm{dp}^x(f), \mathrm{dp}^x(g)\}. \end{array}$

  - $h \equiv 2^f \otimes g$: $\begin{array}{l} \mathrm{lh}^x(h) := 2\mathrm{lh}^x(f) + \mathrm{lh}^x(g) + 1 \\ \mathrm{dp}^x(h) := \max\{1 + \mathrm{dp}^x(f), \mathrm{dp}^x(g)\}. \end{array}$

Bemerkung. Aus dieser Definition liest man folgende Eigenschaften des δ-Operators unmittelbar ab:

- *Wohldefiniertheit:* Für jeden Vektor $D \in \mathcal{C}$ ist $\delta^{x^\sigma} D$ ein eindeutig bestimmter $\mathcal{C}$-Vektor.

- Ist $D \in \mathcal{C}$, so tritt in $\delta^{x^\sigma} D$ keine Variable x_j^σ auf.

- Für $h \in \mathcal{C}_i$ gilt $(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j \succ 0$ für alle $j \le g\sigma + 1$.

Lemma 3.4 (Substitutionseigenschaft von $\boldsymbol{\delta^{x^\sigma}}$)
Seien B, $D \in \mathcal{C}$ und x^σ, y^ρ Variablen mit $y^\rho \not\equiv x^\sigma$ und der Eigenschaft, daß keine der Variablen x^σ_j in B auftritt. Dann haben wir

$$(\delta^{x^\sigma} D)\{Y^\rho := B\} \quad \equiv \quad \delta^{x^\sigma}(D\{Y^\rho := B\}).$$

Gilt sogar $B \in \underline{\mathcal{C}}$, so haben wir für beliebige Variable z^ρ

$$(\delta^{x^\sigma} D)\{\underline{Z}^\rho := B\} \quad \equiv \quad \delta^{x^\sigma}(D\{\underline{Z}^\rho := B\}).$$

Beweis. Aus den Definitionen von lh^x, dp^x und L^{x^σ} liest man mühelos die Invarianz dieser Funktionen gegenüber Substitutionen unter den oben genannten Variablenbedingungen ab. Die Substitutionseigenschaft der Hilfsoperatoren $\delta^{x^\sigma}_i$ läßt sich ebenso leicht aus deren Definition ablesen. Aus diesen Vorüberlegungen folgt die Behauptung. □

Wir benötigen noch einige Hilfsbegriffe, um das Verhalten des δ-Operators genauer beschreiben zu können. Das hieraus gewonnene Wissen wird uns später in die Lage versetzen, die den Termen aus $\mathcal{T}$ zugeordneten $\mathcal{C}$-Vektoren miteinander vergleichen zu können und zu beweisen, daß wir scharfe obere Schranken für Reduktionsketten von Termen aus $\mathcal{T}$ erhalten.

Definition 39 ($\mathbf{T}^{x}_{ji}$, $\mathbf{Sub}^{x}_{ji}$, $\boldsymbol{\Psi}^{x}$)
Die Menge $\mathrm{T}^x_{ji}(h)$ der maximalen x-freien Teilterme i-ten Levels von $h \in \mathcal{C}_j$ und die Menge $\mathrm{Sub}^x_{ji}(h)$ der von x verschiedenen Teilterme i-ten Levels von h, wobei x-freie Teilterme als atomar betrachtet werden, sind wie folgt rekursiv definiert:

- $\forall k\ x^\sigma_k \notin \mathrm{Sub}(h)$:

$$\mathrm{T}^x_{ji}(h) := \left\{ \begin{array}{cl} \{h\} & \textit{falls } j = i \\ \emptyset & \textit{sonst} \end{array} \right\} =: \mathrm{Sub}^x_{ji}(h).$$

- $\exists k\ x^\sigma_k \in \mathrm{Sub}(h)$ *und*
  - $h \equiv x^\sigma_j$:

    $$\mathrm{T}^x_{ji}(h) := \emptyset =: \mathrm{Sub}^x_{ji}(h).$$

  - $h \equiv f \oplus g$:

    $$\mathrm{T}^x_{ji}(h) \quad := \mathrm{T}^x_{ji}(f) \cup \mathrm{T}^x_{ji}(g).$$

    $$\mathrm{Sub}^x_{ji}(h) := \left\{ \begin{array}{ll} \{h\} \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{falls } j = i \\ \mathrm{Sub}^x_{ji}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{sonst.} \end{array} \right.$$

- $h \in \{2^f \otimes g, \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)\}$:

$$\mathrm{T}^x_{ji}(h) \quad := \mathrm{T}^x_{j+1,i}(f) \cup \mathrm{T}^x_{ji}(g).$$

$$\mathrm{Sub}^x_{ji}(h) := \begin{cases} \{h\} \cup \mathrm{Sub}^x_{j+1,i}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{falls } j = i \\ \mathrm{Sub}^x_{j+1,i}(f) \cup \mathrm{Sub}^x_{ji}(g) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren noch folgende Vereinigungen:

$$\mathrm{T}^x_j(h) := \bigcup_{i \geq j} \mathrm{T}^x_{ji}(h) \quad \textit{und} \quad \mathrm{Sub}^x_j(h) := \bigcup_{i \geq j} \mathrm{Sub}^x_{ji}(h).$$

$\Psi^x(h)$ *sei die Menge aller Teilterme einer Gestalt* $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$ *von* $h \in \mathcal{C}_0$, *in denen irgendeine Variable* x^σ_k *auftritt.*

Bemerkung. Sei $h \in \mathcal{C}_j$. Wir können der Definition unmittelbar folgende Eigenschaften von T^x_{ji}, Sub^x_{ji} und Ψ^x ansehen:

- $\mathrm{T}^x_{ji}(h)$ besteht aus genau denjenigen Elementen von $\mathrm{Sub}^x_{ji}(h)$, in denen keine Variable x^σ_k auftritt.
- Für $i < j$ gilt $\mathrm{T}^x_{ji}(h) = \mathrm{Sub}^x_{ji}(h) = \emptyset$.
- Aus $t \in \mathrm{Sub}^x_{jj}(h)$ folgt $t \preceq h$.
- Die Definition von Ψ^x läßt sich durch Rekursion nach $\mathcal{C}_0$ präzisieren. Sei dazu $h \in \mathcal{C}_0$.

  $\forall k \; x^\sigma_k \notin \mathrm{Sub}(h) \Rightarrow \Psi^x(h) = \emptyset.$

  $h \equiv x^\sigma_0 \Rightarrow \Psi^x(h) = \emptyset.$

  $\exists k \; x^\sigma_k \in \mathrm{Sub}(h) \,\&\, h \equiv f \oplus g \Rightarrow \Psi^x(h) = \Psi^x(f) \cup \Psi^x(g).$

  $\exists k \; x^\sigma_k \in \mathrm{Sub}(h) \,\&\, h \equiv \psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \Rightarrow \Psi^x(h) = \{h\} \cup \Psi^x(g).$

  Aus dieser Charakterisierung liest man unmittelbar ab, daß gilt:

$$\Psi^x(h) \subseteq \mathrm{Sub}^x_{00}(h).$$

Lemma 3.5 *Sei* $h \in \mathcal{C}_j$ *mit* $j = 0$ *in 3. Es gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Aus* $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}((\,\delta^{x^\sigma}_j h)_i)$ *folgt* $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(h) \cup \mathrm{Sub}(h\{X^\sigma := \vec{1}\})$. *Im Falle* $i > 0$ *folgt aus* $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{ik}((\,\delta^{x^\sigma}_j h)_i)$ *sogar* $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{ik}[\mathrm{T}^x_{ji}(h)]$.

2. *Es gelte* $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}((\,\delta_j^{x^\sigma} h)_i)$. *Dann folgt*
$$\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}(h) \cup \mathrm{Sub}(h\{X^\sigma := \vec{1}\}),$$
oder es gibt Terme f' *und* g' *mit* $f \equiv f'\{X^\sigma := \vec{1}\}$ *und* $g \equiv (\,\delta_0^{x^\sigma} g')_0$, *so daß gilt:*
$$\psi(\omega \otimes f' \oplus g' + n) \in \mathrm{Sub}(h).$$
Im Falle $i > 0$ *haben wir sogar* $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}[\mathrm{T}_{ji}^x(h)]$.

3. *Aus* $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \Psi^y((\,\delta_0^{x^\sigma} h)_0)$ *folgt* $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \Psi^y(h)$ *oder* $\psi(\omega \otimes f' \oplus g' + n) \in \Psi^y(h)$, *wobei* $f \equiv f'\{X^\sigma := \vec{1}\}$ *und* $g \equiv (\,\delta_0^{x^\sigma} g')_0$.

Beweis. Ad 1.: Wir führen Induktion nach der Definition von $\delta_j^{x^\sigma}$. Wenn in h keine Variable x_k^σ auftritt, ist die Behauptung trivial. Wir gehen daher im folgenden davon aus, daß h irgendeine Variable x_k^σ enthält. Im Falle $h \equiv x_j^\sigma$ ist die Behauptung leer. Für $h \in \{h_1 \oplus h_2, 2^{h_1} \otimes h_2\}$ führt die Induktionsvoraussetzung an h_1 und h_2 direkt zum gewünschten Resultat.

Interessant ist der verbleibende Fall $h \equiv \psi(\omega \otimes h_1 \oplus h_2 + n)$: Im Falle $i > 0$ schließen wir wieder direkt von der Induktionsvoraussetzung an h_1 und h_2 auf die Behauptung. Sei nun $i = 0$. Dann haben wir entweder $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(h_1\{X^\sigma := \vec{1}\})$ und erhalten $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(h\{X^\sigma := \vec{1}\})$, oder es gilt $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}((\,\delta_0^{x^\sigma} h_2)_0)$ und wir schließen mit der Induktionsvoraussetzung an h_2 auf die Behauptung.

Ad 2.: Der Beweis von 2. verläuft analog zum Beweis von 1. Wir behandeln den interessanten Fall $i = 0$ und $h \equiv \psi(\omega \otimes h_1 \oplus h_2 + n)$ mit $\exists k\ x_k^\sigma \in \mathrm{Sub}(h)$ ausführlich. Es gibt drei Möglichkeiten für das Auftreten des Terms $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$ in $(\,\delta_0^{x^\sigma} h)_0$:

- $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}((\,\delta_0^{x^\sigma} h_2)_0)$: Klar mit Induktionsvoraussetzung an h_2.
- $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}(h_1\{X^\sigma := \vec{1}\})$: Trivial.
- $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \equiv \psi(\omega \otimes h_1\{X^\sigma := \vec{1}\} \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} h_2)_0 + n)$: Dann erhalten wir mit $f' :\equiv h_1$ und $g' :\equiv h_2$ die Behauptung.

Ad 3.: Dies läßt sich einfach durch Induktion nach der Definition von $\delta_0^{x^\sigma}$ beweisen. Die Argumentation wird analog zu derjenigen unter 2. geführt, wobei jedoch der Fall $h \equiv 2^{h_1} \otimes h_2$ nicht eintreten kann. Ferner kann im Falle

$h \equiv \psi(\omega \otimes h_1 \oplus h_2 + n)$ mit $\exists k\ x_k^\sigma \in \mathrm{Sub}(h)$ der Term $h_1\{X^\sigma := \vec{1}\}$ keinen ψ-Term enthalten, in dem eine Variable y_k^σ frei auftritt. $\square$

Für das nächste Lemma benötigen wir die spezielle zulässige Belegung, welche sämtliche Variablen x_i^σ, $\underline{x}_i^\sigma$ mit 1 belegt. Ist $h \in \mathcal{OT}$, so definieren wir $\overline{h}$ durch $h\{x_i^\sigma := 1, \underline{x}_i^\sigma := 1 \mid x_i^\sigma, \underline{x}_i^\sigma \in \mathcal{OT}\}$. Die Aussagen 4, 5 und 6 des Lemmas werden wir erst für den Beweis benötigen, daß die in dieser Arbeit angegebenen oberen Schranken für die Längen von Reduktionsketten tatsächlich scharf sind.

Lemma 3.6 (Einige Abschätzungen)

1. *Für alle* $h \in \mathcal{C}_0$ *gilt* $h\{X^\sigma := \vec{1}\} \preceq (\,\delta_0^{x^\sigma} h)_0$.

2. *Seien* $h \in \mathcal{C}_i$, $j > 0$ *und gelte* $\forall t \in \mathrm{T}_{ij}^x(h)\ no(t) \prec m$ *für ein* $m \in \mathcal{C}_0$ *mit* $m \succ 0$. *Dann gilt*
$$no((\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j) \ \preceq\ \mathrm{lh}^x(h) \cdot m.$$

3. *Sei* $h \in \mathcal{C}_i$ *und gelte* $\forall 2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}_i^x(h)\ g \succ 0$. *Dann haben wir*
$$\forall t \in \mathrm{Sub}_i^x(h) \ \ no(t) \ \preceq\ 2^{\mathrm{dp}^x(h)} \cdot no(h).$$

4. *Es ist* $\mathrm{lh}((\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j) < 4 \cdot \mathrm{lh}(h)$ *für* $h \in \mathcal{C}_i$.

5. *Seien* $h \in \mathcal{C}_i$, $j > 0$ *und eine Ordinalzahl* α *mit* $0 < \alpha < \varepsilon_0$ *und* $\forall t \in \mathrm{T}_{ij}^x(h)\ \overline{t} < \alpha$ *gegeben. Dann ist*
$$\overline{(\,\delta_i^{x^\sigma} h)_j} \ \leq\ \alpha \cdot \mathrm{lh}^x(h).$$

6. *Seien ein Term* $h \in \mathcal{C}_0$ *und Ordinalzahlen* $0 < m < \omega$ *sowie* $0 < \alpha < \varepsilon_0$ *mit den Eigenschaften* $\forall t \in \mathrm{T}_{00}^x(h)\ \overline{t} < m$ *und*
$$\forall \psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \Psi^x(h)\ \left[\,\overline{f} < \alpha \ \&\ n < m \ \&\ no(f) \preceq F_2(g+n)\right]$$
gegeben. Dann haben wir
$$\overline{(\,\delta_0^{x^\sigma} h)_0} \ <\ \psi(\omega \otimes \mathrm{lh}^x(h) \otimes \alpha \oplus \mathrm{lh}^x(h) \cdot m).$$

Beweis. Ad 1.: Die Verifikation der Aussage erfolgt durch eine einfache Induktion nach der Definition von $\delta_0^{x^\sigma}$. Explizit zeigen wir nur den Fall, daß h eine Variable x_k^σ enthält und eine Gestalt $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$ hat:

$$\begin{array}{rcl} h\{X^\sigma := \vec{1}\} & \equiv & \psi(\omega \otimes f\{X^\sigma := \vec{1}\} \oplus g\{X^\sigma := \vec{1}\} + n) \\ & \overset{I.V.}{\preceq} & \psi(\omega \otimes f\{X^\sigma := \vec{1}\} \oplus (\delta_0^{x^\sigma} g)_0 + n) \\ & \equiv & (\delta_0^{x^\sigma} h)_0. \end{array}$$

Ad 2.: Wir führen Induktion nach der Definition von $\delta_i^{x^\sigma}$. Gelte zunächst $\forall k\ x_k^\sigma \notin \mathrm{Sub}(h)$. Dann haben wir

$$no((\delta_i^{x^\sigma} h)_j) \preceq no(h) + 1 \preceq m.$$

Nun trete in h irgendein x_k^σ auf. Dann unterscheiden wir vier Fälle:

- $h \equiv x_i^\sigma$: Trivial.
- $h \equiv f \oplus g$: Klar mit Induktionsvoraussetzung an f und g.
- $h \equiv 2^f \otimes g$: Dann haben wir

$$\begin{array}{rcl} no((\delta_i^{x^\sigma} h)_j) & \preceq & 2 \cdot no((\delta_{i+1}^{x^\sigma} f)_j) + no((\delta_i^{x^\sigma} g)_j) + 1 \\ & \overset{I.V.}{\preceq} & 2 \cdot \mathrm{lh}^x(f) \cdot m + \mathrm{lh}^x(g) \cdot m + 1 \\ & \preceq & \mathrm{lh}^x(h) \cdot m. \end{array}$$

- $h \equiv \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$: Wegen $j > 0$ haben wir dann

$$\begin{array}{rcl} no((\delta_0^{x^\sigma} h)_j) & \preceq & no((\delta_1^{x^\sigma} f)_j) + no((\delta_0^{x^\sigma} g)_j) \\ & \overset{I.V.}{\preceq} & \mathrm{lh}^x(f) \cdot m + \mathrm{lh}^x(g) \cdot m \\ & \prec & \mathrm{lh}^x(h) \cdot m. \end{array}$$

Ad 3.: Wir beweisen 3. durch Induktion nach der rekursiven Definition von Sub_i^x. Wir gehen davon aus, daß in h eine Variable x_k^σ auftritt, da die Behauptung anderenfalls wegen $\mathrm{Sub}_i^x(h) = \{h\}$ trivial ist.

- $h \equiv x_i^\sigma$: Dann ist $\mathrm{Sub}_i^x(h) = \emptyset$.

- $h \equiv f \oplus g$: Sei $t \in \mathrm{Sub}_i^x(h)$. Ist dann $t \equiv h$, so sind wir fertig. Gilt $t \in \mathrm{Sub}_i^x(f)$, so schließen wir mit der Induktionsvoraussetzung an f auf

$$no(t) \preceq 2^{\mathrm{dp}^x(f)} \cdot no(f) \preceq 2^{\mathrm{dp}^x(h)} \cdot no(h).$$

  Den Fall $t \in \mathrm{Sub}_i^x(g)$ behandelt man analog.

- $h \equiv 2^f \otimes g$: Sei $t \in \mathrm{Sub}_i^x(h)$ ein echter Teilterm. Liegt dann t in $\mathrm{Sub}_{i+1}^x(f)$, so haben wir mit Proposition 1 und der Voraussetzung $g \succ 0$ die Abschätzung

$$no(f) \preceq 2 \cdot no(2^f) \preceq 2 \cdot no(h).$$

  Mit $1+\mathrm{dp}^x(f) \leq \mathrm{dp}^x(h)$ und der Induktionsvoraussetzung an f erhalten wir daraus die Behauptung. Ist schließlich $t \in \mathrm{Sub}_i^x(g)$, so erhalten wir die Behauptung aus der Induktionsvoraussetzung an g, da $no(g) \preceq no(h)$ gilt.

- $h \equiv \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$: Dann muß $i = 0$ gelten. Da nach Proposition 2 $no(f)$, $no(g) \preceq no(h)$ gilt, erhalten wir auch in diesem Fall die Behauptung problemlos aus den entsprechenden Induktionsvoraussetzungen.

Ad 4.: Dies läßt sich leicht induktiv nach der Definition von $\delta_i^{x^\sigma}$ zeigen.
Ad 5.: Dies beweist man genauso wie Aussage 2.
Ad 6.: Wir führen Induktion nach der Definition von $\delta_0^{x^\sigma}$:

- $\forall k\ x_k^\sigma \notin \mathrm{Sub}(h)$: Dann gilt $h \in \mathrm{T}_{00}^x(h)$, also haben wir

$$\overline{(\delta_0^{x^\sigma} h)_0} = \overline{h} + 1 \leq m < \psi(\omega \otimes \mathrm{lh}^x(h) \otimes \alpha \oplus \mathrm{lh}^x(h) \cdot m).$$

- $\exists k\ x_k^\sigma \in \mathrm{Sub}(h)$:
  - $h \equiv x_0^\sigma$: Trivial.
  - $h \equiv f \oplus g$: Mit Hilfe von Proposition 2 können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\overline{(\delta_0^{x^\sigma} h)_0} &= \overline{(\delta_0^{x^\sigma} f)_0} \oplus \overline{(\delta_0^{x^\sigma} g)_0} \\
&\overset{I.V.}{<} \psi(\omega \otimes \mathrm{lh}^x(f) \otimes \alpha \oplus \mathrm{lh}^x(f) \cdot m) \oplus \psi(\omega \otimes \mathrm{lh}^x(g) \otimes \alpha \oplus \mathrm{lh}^x(g) \cdot m) \\
&\leq \psi(\omega \otimes (\mathrm{lh}^x(f) + \mathrm{lh}^x(g)) \otimes \alpha \oplus (\mathrm{lh}^x(f) + \mathrm{lh}^x(g)) \cdot m) \\
&< \psi(\omega \otimes \mathrm{lh}^x(h) \otimes \alpha \oplus \mathrm{lh}^x(h) \cdot m).
\end{aligned}$$

- $h \equiv \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$: Nach Voraussetzung gilt dann $\overline{f} < \alpha$, $n < m$ sowie $no(f) \preceq F_2(g+n)$. Vermöge Teil 1 dieses Lemmas haben wir daher
$$no\left(\overline{f}\right) \leq F_2\left(\overline{g}+n\right) < F_2\left(\overline{(\,\delta_0^{x^\sigma} g)_0} + m\right),$$
und mit Hilfe von Proposition 2 erhalten wir nun
$$\begin{aligned}
\overline{(\,\delta_0^{x^\sigma} h)_0} &= \psi\left(\omega \otimes \overline{f} \oplus \overline{(\,\delta_0^{x^\sigma} g)_0} + n\right)\\
&< \psi\left(\omega \otimes \alpha \oplus \overline{(\,\delta_0^{x^\sigma} g)_0} + m\right)\\
&\overset{I.V.}{<} \psi(\omega \otimes \alpha \oplus \psi(\omega \otimes \mathrm{lh}^x(g) \otimes \alpha \oplus \mathrm{lh}^x(g) \cdot m) + m)\\
&\leq \psi(\omega \otimes (\mathrm{lh}^x(g)+1) \otimes \alpha \oplus (\mathrm{lh}^x(g)+1) \cdot m)\\
&\leq \psi(\omega \otimes \mathrm{lh}^x(h) \otimes \alpha \oplus \mathrm{lh}^x(h) \cdot m).
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen. □

3.1.5 Das Zusammenspiel der Operatoren □ und δ

Wir kommen nun zu dem Hauptlemma, welches das Zusammenspiel der modifizierten Operatoren □ und δ illustriert. Dieses Lemma ist das Analogon zu Hauptlemma 2.1 und wird im Beweis des Satzes über die Abschätzung der Reduktionsketten von Gödels T die zentrale Rolle bei der Behandlung der β-Konversion spielen. Wir haben den Beweis von Howard (vgl. Lemma 2.11 und Korollar in [12]) entsprechend den vorgenommenen Modifikationen und Erweiterungen der beiden Operatoren ergänzt.

Hauptlemma 3.1 *Seien B, $D \in \mathcal{C}$ Vektoren mit folgenden Eigenschaften:*

- $\forall \psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \Psi^x(D_0)\ no(f) \preceq F_2(g+n)$.
- *B ist eine zulässige Belegung für X^σ, d.h. es gilt $\forall i\ no(B_i) \preceq B_0$ und $\forall i < g\sigma\ 0 \prec no(B_i)$.*

Dann gilt
$$\delta^{x^\sigma} D \;\Box_\sigma\; B \quad \succ \quad D\{X^\sigma := B\}.$$

Beweis. Weiter unten werden wir die folgende Hilfsbehauptung beweisen:

(∗) Sei $h \in \mathcal{C}_i$ mit $i \leq g\sigma + 1$. Wenn $i = 0$ ist, so gelte für alle Terme $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \Psi^x(h)$ die Beziehung $no(f) \preceq F_2(g + n)$. Dann haben wir

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\square_\sigma\, B)_i \;\succ\; h\{X^\sigma := B\}.$$

Unter Benutzung von (∗) können wir das Hauptlemma durch Unterscheidung der drei folgenden Fälle beweisen:

- $i > g\sigma + 1$: Dann ist $(\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma\, B)_i = D_i \equiv D_i\{X^\sigma := B\}$.
- $1 \leq i \leq g\sigma + 1$: Da für alle $j \in \{i, \ldots, g\sigma + 1\}$ $(\,\delta^{x^\sigma} D)_j \succeq (\,\delta_i^{x^\sigma} D_i)_j$ gilt, folgt mit Lemma 3.1 (2)

  $$(\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma\, B)_i \succeq (\,\delta_i^{x^\sigma} D_i \,\square_\sigma\, B)_i.$$

  Gemäß (∗) gilt aber

  $$(\,\delta_i^{x^\sigma} D_i \,\square_\sigma\, B)_i \succ D_i\{X^\sigma := B\}.$$

- $i = 0$: In diesem Fall schätzen wir folgendermaßen ab:

  $$\begin{aligned} (\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma\, B)_0 &= \psi(\omega \otimes (\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma\, B)_1 \oplus (\,\delta^{x^\sigma} D)_0 \oplus B_0 + g\sigma) \\ &\overset{!}{\succ} \psi(\omega \otimes (\,\delta_0^{x^\sigma} D_0 \,\square_\sigma\, B)_1 \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} D_0)_0 \oplus B_0 + g\sigma) \\ &= (\,\delta_0^{x^\sigma} D_0 \,\square_\sigma\, B)_0 \\ &\overset{(*)}{\succ} D_0\{X^\sigma := B\}. \end{aligned}$$

  Ad !: Wir überprüfen die Voraussetzungen von Proposition 2 (6).

  1. Für alle $j \leq g\sigma + 1$ gilt $(\,\delta^{x^\sigma} D)_j \succ (\,\delta_0^{x^\sigma} D_0)_j$. Nach Lemma 3.1 (2) folgt daraus $(\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma\, B)_1 \succ (\,\delta_0^{x^\sigma} D_0 \,\square_\sigma\, B)_1$.
  2. Es gilt $no((\,\delta_0^{x^\sigma} D_0 \,\square_\sigma\, B)_1) \preceq F_3(no((\,\delta^{x^\sigma} D \,\square_\sigma\, B)_1) + g\sigma)$ vermöge Lemma 3.3 (2).

Nun beweisen wir (∗) durch Induktion nach der Definition der Hilfsoperatoren $\delta_i^{x^\sigma}$. Wir nehmen zunächst an, daß in h keine Variable x_k^σ auftritt. Dann gilt

$$(\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\square_\sigma\, B)_i \succeq (\,\delta_i^{x^\sigma} h)_i = h + 1 \succ h \equiv h\{X^\sigma := B\}.$$

Jetzt betrachten wir den Fall $\exists k\; x_k^\sigma \in \mathrm{Sub}(h)$. Dann muß $i \leq g\sigma$ gelten.

- $h \equiv x_i^\sigma$: Dann ist $(\vec{1} \,\Box_\sigma\, B)_i \succeq B_i + 1 \succ B_i \equiv h\{X^\sigma := B\}$.

- $h \equiv f \oplus g$: Dann folgt mit Lemma 3.3 (3)

$$\begin{aligned} (\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\Box_\sigma\, B)_i &\succ (\,\delta_i^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_i \oplus (\,\delta_i^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_i \\ &\overset{I.V.}{\succ} f\{X^\sigma := B\} \oplus g\{X^\sigma := B\} \equiv h\{X^\sigma := B\}. \end{aligned}$$

- $h \equiv 2^f \otimes g$: Dann muß $i \geq 1$ gelten, und Lemma 3.1 (4) ergibt

$$\begin{aligned} (\,\delta_i^{x^\sigma} h \,\Box_\sigma\, B)_i &\succ ((\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B) \,\Box_\sigma\, (\,\delta_i^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B))_i \\ &\succeq 2^{(\,\delta_{i+1}^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_{i+1}} \otimes (\,\delta_i^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_i \\ &\overset{I.V.}{\succ} 2^{f\{X^\sigma := B\}} \otimes g\{X^\sigma := B\} \equiv h\{X^\sigma := B\}. \end{aligned}$$

- $h \equiv \psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$: Dann muß $i = 0$ gelten, und wir erhalten

$$\begin{aligned} &h\{X^\sigma := B\} \equiv \psi(\omega \otimes f\{X^\sigma := B\} \oplus g\{X^\sigma := B\} + n) \\ &\overset{①}{\prec} \psi(\omega \otimes (\,\delta_1^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_1 \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_0 + n) \\ &= \psi(\omega \otimes (\,\delta_1^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_1 \oplus \psi(\omega \otimes (\,\delta_0^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_1 \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} g)_0 \oplus B_0 + g\sigma) + n) \\ &\preceq \psi(\omega \otimes ((\,\delta_1^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_1 \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_1) \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} g)_0 \oplus B_0 + g\sigma + n) \\ &\overset{②}{\preceq} \psi(\omega \otimes (\,\delta_0^{x^\sigma} h \,\Box_\sigma\, B)_1 \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} h)_0 \oplus B_0 + g\sigma) \\ &= (\,\delta_0^{x^\sigma} h \,\Box_\sigma\, B)_0. \end{aligned}$$

Ad ①: Die Induktionsvoraussetzungen an f und g liefern

$$f\{X^\sigma := B\} \prec (\,\delta_1^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_1 \text{ und } g\{X^\sigma := B\} \prec (\,\delta_0^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_0.$$

Nach Voraussetzung haben wir $no(f) \preceq F_2(g + n)$. Insgesamt folgt hieraus zusammen mit der Zulässigkeit der Belegung B für X^σ:

$$no(f\{X^\sigma := B\}) \preceq F_2(g\{X^\sigma := B\} + n) \prec F_2((\,\delta_0^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_0 + n).$$

Ad ②: Lemma 3.1 (3) liefert im Falle $g\sigma > 0$

$$(\,\delta_1^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_1 \oplus (\,\delta_0^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_1 \prec (\,\delta_0^{x^\sigma} h \,\Box_\sigma\, B)_1.$$

Für $g\sigma = 0$ haben wir die Gleichheit der beiden Terme. Unter Benutzung von Lemma 3.3 (2) erhalten wir

$$no((\,\delta_1^{x^\sigma} f \,\Box_\sigma\, B)_1), no((\,\delta_0^{x^\sigma} g \,\Box_\sigma\, B)_1) \preceq F_3(no((\,\delta_0^{x^\sigma} h \,\Box_\sigma\, B)_1) + g\sigma).$$

Die Beziehung $(\,\delta_0^{x^\sigma} g)_0 + n \preceq (\,\delta_0^{x^\sigma} h)_0$ ist klar. Es kann nicht ausgeschlossen werden, daß der Term $f\{X^\sigma := \vec{1}\}$ unter irgendeiner zulässigen Belegung 0 wird. Falls dann noch $g\sigma = 0$ gilt, haben wir in ② tatsächlich die Gleichheit der beiden Terme unter dieser Belegung. $\Box$

3.2 Zuordnung von Ordinalvektoren

In diesem Abschnitt gehen wir in zwei Schritten vor, um den Termen aus Gödels T Ordinalvektoren zuzuordnen. Wir können das Verfahren folgendermaßen beschreiben:

Da wir Howards Idee zur Behandlung der β-Kontraktion verwenden wollen, müssen wir dafür sorgen, daß den Termen aus $\mathcal{T}$ ausschließlich Vektoren aus $\mathcal{C}$ zugeordnet werden, da der δ-Operator nur auf solche Vektoren sinnvoll angewendet werden kann. Die Behandlung allgemeiner Rekursor-Reduktionen wie in [26] verursacht dabei jedoch ein ernstes Problem, da die in [26] Termen einer Gestalt $\mathsf{R}_\rho t^0$ zugeordneten Vektoren im allgemeinen nicht in $\mathcal{C}$ liegen. Wir haben dieses Problem gelöst, indem wir bei der Zuordnung in zwei Schritten vorgehen und folgende einfache Beobachtung ausnutzen:

Während des Aufbaus eines λ-Terms a^τ, dessen Reduktionsketten wir abschätzen möchten, treten im allgemeinen einige λ-Abstraktionen auf. Diese Abstraktionsprozesse werden entsprechend der rekursiven Natur unserer Zuordnung durch Anwendungen des δ-Operators behandelt, so daß eine ausschließliche Verwendung von $\mathcal{C}$-Vektoren während dieser Phase erforderlich ist. Betrachten wir jedoch die Terme, welche während der Reduktion des Ausgangsterms a^τ entstehen, so stellen wir fest, daß keine grundlegend neuen Abstraktionsprozesse mehr auftreten. Teilterme einer Gestalt $\lambda x^\sigma.b^\rho$ des Terms a^τ können lediglich durch β- und Rekursor-Reduktionen vervielfältigt oder durch Anwendung von (β) und (ξ) modifiziert werden. Dies hat zur Folge, daß wir bei der Zuordnung von Vektoren an die Redukte von a^τ mehr Spielraum haben und die Bedingungen an $\mathcal{C}$-Vektoren, welche sich auf die Anwendbarkeit des δ-Operators beziehen, abgeschwächt werden können.

Betrachten wir die Bedingungen an $\mathcal{C}$-Vektoren etwas genauer, so stellen wir fest, daß sich diejenigen Bedingungen, welche im Konflikt mit der Behandlung allgemeiner Rekursor-Reduktionen stehen, auf die Auftreten von Variablen beziehen. Dies führt uns zu der Hinzunahme von Kopien $\underline{x}_i^\sigma$ der Variablen x_i^σ zu $\mathcal{OT}$, welche diesen oben erwähnten Bedingungen nicht unterliegen. Die neuen Variablen funktionieren genauso wie ihre Originale als Platzhalter für Substitutionen, jedoch nicht mehr als Markierungen für den durch den δ-Operator realisierten Umbauprozeß.

Wir kehren nun zur Betrachtung des Ausgangsterms a^τ zurück. In einem ersten Schritt verwenden wir die eindeutige Zuordnung $[\![\cdot]\!]$ und ordnen a^τ den Vektor $[\![a^\tau]\!]$ zu. Diese Zuordnung verwendet die Originalvariablen und läßt eine korrekte Behandlung der β-Kontraktion zu. Rekursor-Reduktionen können jedoch nur im Falle geschlossener Rekursionsargumente behandelt werden. Ferner kann nur eine eingeschränkte Version der ξ-Regel behandelt werden, da auch der erweiterte δ-Operator nicht streng monoton wachsend ist, was man mit etwas mehr Aufwand als in Kapitel 2 einsehen kann.

Nun gehen wir über zum zweiten Schritt: Wir ersetzen die Originalvariablen in $[\![a^\tau]\!]$ durch ihre Kopien und definieren die Zuordnung $[\cdot]$, wobei wir Howards Idee der nicht-eindeutigen Zuordnung zur Behandlung der ξ-Regel verwenden und darüberhinaus dank der Verwendung der Variablenkopien in der Lage sind, Weiermanns Zuordnung an Terme einer Gestalt $\mathsf{R}_\rho t^0$ aus [26] zu integrieren, ohne den Rahmen der $\mathcal{C}$-Vektoren zu verlassen. Ferner ist der Vektor $[\![a^\tau]\!]\{[\![x^\sigma]\!] := [x^\sigma] \mid x^\sigma \in FV(a^\tau)\}$ einer der Vektoren $[a^\tau]$, welche dem Term a^τ zugeordnet werden. Der entscheidende Punkt bei diesem Vorgehen ist, daß wir an möglichen Ausgangspunkten von Anwendungen der ξ-Regel, also genau für Abstraktionsterme, die Zuordnung $[\![\cdot]\!]$ verwenden, um weiterhin die β-Kontraktion behandeln zu können.

Zur Veranschaulichung betrachten wir wie schon in Kapitel 2 eine schematische Reduktionskette ausgehend von a^τ, wobei wir unser Augenmerk auf einen Teilterm $\lambda x^\sigma.b_0^\rho$ richten:

$$a^\tau \equiv \ldots \lambda x^\sigma.b_0^\rho \ldots \overset{\xi}{\rhd} \ldots \overset{\xi}{\rhd} \ldots (\lambda x^\sigma.b_n^\rho)c^\sigma \ldots \equiv: d^\tau \overset{\beta}{\rhd} \ldots b_n^\rho\{x^\sigma := c^\sigma\} \ldots$$

Die nicht-eindeutige Zuordnung funktioniert nun – etwas vereinfachend dargestellt – in einer Weise, daß

$$[\lambda x^\sigma.b_i^\rho] = \delta^{x^\sigma}[\![b_0^\rho]\!] \oplus [b_i^\rho]\{[x^\sigma] := \vec{1}\}$$

ein möglicher dem Term $\lambda x^\sigma.b_i^\rho$ zugeordneter Vektor ist. Der zweite Summand ist hierbei zuständig für die Behandlung von Anwendungen der ξ-Regel, während die β-Kontraktion folgendermaßen behandelt wird, wobei wir zur Erleichterung der Darstellung von der Geschlossenheit des Terms $\lambda x^\sigma.b_0^\rho$ ausgehen:

$$[(\lambda x^\sigma.b_n^\rho)c^\sigma] \succeq \delta^{x^\sigma}[\![b_0^\rho]\!] \,\square_\sigma\, [c^\sigma] \overset{\text{HL 3.1}}{\succ} [\![b_0^\rho]\!]\{[\![x^\sigma]\!] := [c^\sigma]\} \succeq [b_n^\rho]\{[x^\sigma] := [c^\sigma]\}.$$

Der erste Summand wird also solange unverändert gelassen, bis es zu einer β-Kontraktion kommt.

Die konkrete Definition der Zuordnung $[\cdot]$ muß schließlich noch den folgenden Gesichtspunkten Rechnung tragen: Zum einen kennen wir die Reduktionsgeschichte beispielsweise des Terms d^τ nicht, wenn wir $[\cdot]$ allgemein definieren. Wir müssen daher in der Definition alle möglichen Reduktionsgeschichten von d^τ berücksichtigen. Dies ist der Grund für die Nicht-Eindeutigkeit der Zuordnung $[\cdot]$. Zum anderen ist es möglich, daß in der obigen Reduktionskette β-Kontraktionen

$$\ldots(\lambda y.(\ldots\lambda x^\sigma.b_i^\rho\ldots))e\ldots \overset{\beta}{\rhd} \ldots(\ldots\lambda x^\sigma.b_i^\rho\ldots)\{y := e\}\ldots$$

mit $y \in FV(\lambda x^\sigma.b_i^\rho)$ auftreten. Wir müssen daher eine Liste von Substitutionen $\delta^{x^\sigma}[\![b_0^\rho]\!]\,\{[\![z]\!] := Z \mid z \in FV(\lambda x^\sigma.b_0^\rho)\}$ zulassen.

Definition 40 (Rekursive Definition von $[\![\cdot]\!] : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$)

$$\begin{aligned}
[\![\mathsf{0}]\!]_i &:= 0.\\
[\![\mathsf{S}]\!]_i &:= \begin{cases} 1 & i = 0\\ 0 & i > 0.\end{cases}\\
[\![\mathsf{D}_\tau]\!]_i &:= \begin{cases} 1 & i \le g\tau + 1\\ 0 & i > g\tau + 1.\end{cases}\\
[\![\mathsf{R}_\rho]\!]_i &:= \begin{cases} 2 & i = 0\\ 1 & 1 \le i \le g\rho + 1\\ \omega & i = g\rho + 2\\ 0 & i > g\rho + 2.\end{cases}\\
[\![x^\sigma]\!]_i &:= \begin{cases} x_i^\sigma & i \le g\sigma\\ 0 & i > g\sigma.\end{cases}\\
[\![a^{\sigma\tau}b^\sigma]\!]_i &:= \begin{cases} (\,[\![a^{\sigma\tau}]\!] \,\square_\sigma\, [\![b^\sigma]\!]\,)_i & i \le g\tau\\ 0 & i > g\tau.\end{cases}\\
[\![\lambda x^\sigma.a^\tau]\!] &:= \delta^{x^\sigma}[\![a^\tau]\!] \oplus_\tau [\![a^\tau]\!]\,\{\,[\![x^\sigma]\!] := \vec{1}\,\}.
\end{aligned}$$

Definition 41 (Die nicht-eindeutige Zuordnung $[\cdot] \subseteq \mathcal{T} \times \underline{\mathcal{C}}$)

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathsf{0}]_i & := & 0. \\
[\mathsf{S}]_i & := & \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i > 0. \end{cases} \\
[\mathsf{D}_\tau]_i & := & \begin{cases} 1 & i \le g\tau + 1 \\ 0 & i > g\tau + 1. \end{cases} \\
[\mathsf{R}_\rho]_i & := & \begin{cases} 2 & i = 0 \\ 1 & 1 \le i \le g\rho + 1 \\ \omega & i = g\rho + 2 \\ 0 & i > g\rho + 2. \end{cases} \\
[x^\sigma]_i & := & \begin{cases} \underline{x}_i^\sigma & i \le g\sigma \\ 0 & i > g\sigma. \end{cases} \\
[\mathsf{R}_\rho t^0]_i & := & \begin{cases} [t]_0 + 2 & i = 0 \\ 1 & 1 \le i \le g\rho + 1 \\ [t]_0 + 2 & i = g\rho + 2 \\ 0 & i > g\rho + 2. \end{cases} \\
[a^{\sigma\tau} b^\sigma]_i & := & \begin{cases} (\, [a^{\sigma\tau}] \,\square_\sigma\, [b^\sigma]\,)_i & i \le g\tau \\ 0 & i > g\tau. \end{cases} \\
[\lambda x^\sigma . a^\tau] & := & (\,\delta^{x^\sigma}[\![d^\tau]\!]\,)\{[\![y^\rho]\!] := [\overline{y}^\rho] \mid y^\rho \in FV(\lambda x^\sigma.d^\tau)\} \oplus_\tau [a^\tau]\{[x^\sigma] := \vec{1}\,\}, \\
& & \textit{wobei } d^\tau \in \mathcal{T},\ \overline{y} \in \mathcal{T} \textit{ einsetzbar für } y \textit{ in } \lambda x^\sigma.d^\tau \textit{ für jedes} \\
& & y \in FV(\lambda x^\sigma.d^\tau) \textit{ und } d^\tau\,\{y := \overline{y} \mid y \in FV(\lambda x^\sigma.d^\tau)\} \rhd^n a^\tau.
\end{array}
$$

Es ist klar, daß $[\![\cdot]\!]$ wohldefiniert ist. Man kann sich durch eine Induktion nach dem Termaufbau mühelos davon überzeugen. Um die Wohldefiniertheit von $[\cdot]$ einzusehen, argumentieren wir wie schon in Kapitel 2 und betrachten folgende

Definition 42 (Howard [12]) *Die Relation $t \subseteq \mathcal{T} \times \mathbb{N}$ sei wie folgt definiert:*

$$
\begin{array}{rcl}
t(a^\tau) & := & 1 \quad \textit{falls } a^\tau \textit{ eine Konstante oder Variable ist.} \\
t(a^{\sigma\tau} b^\sigma) & := & t(a^{\sigma\tau}) + t(b^\sigma). \\
t(\lambda x^\sigma.a^\tau) & := & 1 + t(d_0) + \ldots + t(d_n),
\end{array}
$$

wobei $d_0 \rhd^1 \ldots \rhd^1 d_n \equiv a^\tau$ und jedes $t(d_i)$ ein möglicher Wert für d_i ist.

Wie die entsprechende Relation in Kapitel 2 hat auch diese Relation die Eigenschaft, daß für jeden echten Teilterm a eines Terms b gilt: $t(a) < t(b)$ sofern $t(b)$ unter Rückgriff auf $t(a)$ definiert wurde. Wir können daher Induktionsbeweise nach $t(a)$ führen. Mit einer solchen Induktion nach $t(a)$ können wir nun z.B. die Wohldefiniertheit von $[a]$ nachweisen. Daß die Vektoren $[\overline{y}^\rho]$ für $y^\rho \in FV(\lambda x^\sigma.d^\tau)$ in der Definition von $[\lambda x^\sigma.a^\tau]$ sogar zulässige Belegungen für die Vektoren $[\![y^\rho]\!]$ darstellen, können wir jedoch erst mit Hauptlemma 3.2 einsehen.

Wir notieren als nächstes einige sehr wichtige Eigenschaften der beiden Zuordnungen, welche direkt aus den Definitionen folgen.

- Für jedes $d \in \mathcal{T}$ ist
$$[\![d]\!]\,\{[\![x]\!] := [x] \mid x \in FV(d)\}$$
ein dem Term d zugeordneter Vektor $[d]$.

- Sowohl der Vektor $<([\mathsf{R}_\rho] \,\Box_0\, [t])_0, \ldots, ([\mathsf{R}_\rho] \,\Box_0\, [t])_{g\rho+2}>$ als auch der Vektor $<[t]_0 + 2, 1, \ldots, 1, [t]_0 + 2>$ sind dem Term $\mathsf{R}_\rho t^0$ zugeordnet.

- $[\![\cdot]\!]$ und $[\cdot]$ sind invariant modulo $\equiv_\alpha$.

- Für Ziffern haben wir $[\![\underline{n}]\!]_i = [\underline{n}]_i = n$, falls $i = 0$, und 0 sonst.

- $d^\tau \in \mathcal{T}, D \in \{[\![d]\!], [d]\} \;\;\Rightarrow\;\; \forall j \;\, D_j \prec \varepsilon_0 \;\&\; D_0 \prec \omega \;\&\; \forall l > g\tau \;\, D_l = 0.$

Als nächstes beweisen wir die Substitutionseigenschaft der nicht-eindeutigen Zuordnung $[\cdot]$. Die Gründe für ihre Unerläßlichkeit sind dieselben wie die in Kapitel 2 erläuterten.

Lemma 3.7 (Substitutionseigenschaft von $[\cdot]$)
Es seien $b^\varphi, c^\tau \in \mathcal{T}$ Terme mit $BV(c^\tau) \cap FV(b^\varphi) = \emptyset$. Ist dann $[c^\tau]$ dem Term c^τ und $[b^\varphi]$ dem Term b^φ zugeordnet, so ist
$$[c^\tau]\,\{\,[z^\varphi] := [b^\varphi]\,\}$$
ein dem Term $c^\tau\{z^\varphi := b^\varphi\}$ zugeordneter Vektor.

Beweis. Die Behauptung folgt durch Induktion nach $t(c^\tau)$:

- c ist eine Konstante oder Variable: Trivial.

- $c \equiv \mathsf{R}_\rho t$ mit $[c] = \begin{cases} [t]_0 + 2 & i = 0 \\ 1 & 1 \leq i \leq g\rho + 1 \\ [t]_0 + 2 & i = g\rho + 2 \\ 0 & i > g\rho + 2 \end{cases}$: Klar nach I.V. an t.

- $c \equiv a^{\sigma\tau} d^\sigma$ mit $[c]_i = (\,[a] \sqsubset_\sigma [d]\,)_i$ für $i \leq g\tau$ und 0 sonst. Dann gilt

$$\begin{aligned} [c]_i\{[z] := [b]\} &= (\,[a]\{[z] := [b]\} \sqsubset_\sigma [d]\{[z] := [b]\}\,)_i \\ &\overset{I.V.}{=} (\,[a\{z := b\}] \sqsubset_\sigma [d\{z := b\}]\,)_i \\ &= [c\{z := b\}]_i \end{aligned}$$

  für $i \leq g\tau$.

- $c^\tau \equiv \lambda x^\sigma . a^\rho$: Dies ist der interessante Induktionsschritt. Da der Fall $x \equiv z$ trivial ist, gehen wir im folgenden von $x \not\equiv z$ aus. Der Vektor $[c]$ hat eine Gestalt

$$[c] = (\,\delta^{x^\sigma} [\![d^\rho]\!]\,)\,\{[\![y]\!] := [\overline{y}] \mid y \in FV(\lambda x^\sigma . d)\} \;\oplus_\rho [a^\rho]\,\{[x^\sigma] := \vec{1}\,\}$$

  mit den Bedingungen an d und die Terme $\overline{y}$ laut Definition. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir von

$$BV(d\{y := \overline{y} \mid y \in FV(\lambda x^\sigma . d)\}) \cap FV(b) = \emptyset$$

  ausgehen. Wir haben dann

$$\begin{aligned} [c]\,\{[z] := [b]\} \;\; = \;\; &(\,\delta^{x^\sigma} [\![d^\rho]\!]\,)\,\{[\![y]\!] := [\overline{y}]\,\{[z] := [b]\} \mid y \in FV(\lambda x^\sigma . d)\} \\ &\oplus_\rho [a]\,\{[z] := [b], [x^\sigma] := \vec{1}\,\}. \end{aligned}$$

  Nach Induktionsvoraussetzung gilt: Für alle $y \in FV(\lambda x^\sigma . d)$ ist der Vektor $[\overline{y}]\,\{[z] := [b]\}$ dem Term $y' := \overline{y}\{z := b\}$ zugeordnet, und $[a^\rho]\,\{[z] := [b]\}$ ist dem Term $a\{z := b\}$ zugeordnet. Die y' sind einsetzbar in $\lambda x.d$, und es gilt $d\{y := y' \mid y \in FV(\lambda x.d)\} \rhd^n a\{z := b\}$. Also ist

$$(\,\delta^{x^\sigma} [\![d^\rho]\!]\,)\,\{[\![y]\!] := [y'] \mid y \in FV(\lambda x.d)\} \;\oplus_\rho [a]\{[z] := [b],\, [x] := \vec{1}\,\}$$

  ein dem Term $c\{z := b\}$ zugeordneter Vektor. □

Nun kommen wir zur Formulierung des Hauptlemmas über die Zuordnungen $[\![\cdot]\!]$ und $[\cdot]$, welches von zentraler Bedeutung für den Größenvergleich der Vektoren ist, die wir den Termen aus $\mathcal{T}$ zugeordnet haben.

Hauptlemma 3.2

(a) Sei $d^\tau \in \mathcal{T}$ gegeben. Setze $d_i := [\![d]\!]_i$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gelten folgende Aussagen:

1. $\forall i < g\tau \; d_i \succ 0$.
2. $\forall 2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(d_j) \; g \succ 0$.
3. $no(d_j) \preceq d_0$.
4. $\forall t \in \mathrm{T}_j^x(d_j) \; no(t) \prec \mathrm{L}_2^{x^\sigma}([\![d]\!]) \cdot (\,\delta_0^{x^\sigma} d_0)_0$.
5. $\forall \psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}(d_j) \; no(f) \preceq F_2(g+n)$.

(b) 1. *Seien $a^{\sigma\tau}, b^\sigma \in \mathcal{T}$ und $i > 0$ gegeben. Dann gilt*

$$no([\![a^{\sigma\tau} b^\sigma]\!]_i) \preceq F_2(a_0 + b_0 + g\sigma).$$

2. *Seien $a^{\sigma\varphi\tau}, b^\sigma, c^{\rho\varphi}, d^\rho \in \mathcal{T}$ und $i > 0$ gegeben. Dann gilt*

$$no([\![ab(cd)]\!]_i) \preceq F_3(a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + g\sigma + 2g\varphi + g\rho).$$

(c) Die Behauptungen 1, 2, 3 und 5 aus Teil (a) gelten für alle dem Term $d^\tau \in \mathcal{T}$ zugeordneten Vektoren $[d]$.

(d) Die Aussagen aus Teil (b) gelten auch für die nicht-eindeutige Zuordnung $[\cdot]$.

Beweis. Die Strategie der Beweisführung ist die folgende: Zunächst beweisen wir Teil (a) durch simultane Induktion nach dem Aufbau von d unter Rückgriff auf die Lemmata 3.2, 3.5 und 3.6. Danach schließen wir mit Hilfe von Aussage 3 aus (a) und Lemma 3.2 auf Teil (b). Teil (c) läßt sich dann induktiv nach $t(d)$ unter Benutzung von Teil (a) beweisen. Teil (d) folgt schließlich ebenso aus (c) wie Teil (b) aus (a).
Beweis von (a). Wir beweisen 1. bis 5. durch simultane Induktion nach d^τ:

- d^τ ist eine Konstante: Dann sind 1. bis 5. klar.
- d^τ ist eine Variable: Dies ist klar aufgrund der Definition zulässiger Belegungen. Ist etwa $d^\tau \equiv y^\tau$, so gilt zum einen $no(d_i) \preceq d_0$ für alle i und zum anderen $0 \prec no(d_i)$ für alle $i < g\tau$. Daraus folgt auch $\forall i < g\tau \; d_i \succ 0$.

- $d^\tau \equiv a^{\rho\tau} b^\rho$: Also gilt $[\![d]\!]_i = (\,[\![a]\!] \boxdot_\rho [\![b]\!]\,)_i$ für $i \le g\tau$ und 0 sonst.

  Ad 1.: Klar nach Induktionsvoraussetzung an a.

  Ad 2.: Klar nach den Induktionsvoraussetzungen 1 und 2 an a und b.

  Ad 3.: Wir definieren $D := [\![a]\!] \boxdot_\rho [\![b]\!]$. Dann gilt $no(d_j) \preceq no(D_j)$ für alle j. Nun zeigen wir $no(D_j) \preceq d_0$ für alle j. Dazu unterscheiden wir 3 Fälle:

  - $j > g\rho$: Es gilt $no(D_j) = no(a_j) \preceq a_0 \preceq d_0$ nach Induktionsvoraussetzung 3 an a.
  - $0 < j \le g\rho$: Dann ist $D_j = 2^{D_{j+1}} \otimes (a_j \oplus b_j)$. Die Eigenschaft $no(D_j) \preceq d_0$ folgt aus

    ① $2^{g\rho} \cdot no(D_1) \prec d_0$ und

    ② $no(D_{i+1}) \preceq 2^i \cdot no(D_1)$ für $0 \le i \le g\rho$.

    Zu ①: Nach Proposition 2 (7) gilt

    $$2^{g\rho} \cdot no(D_1) \prec \psi(\omega \otimes D_1 \oplus a_0 \oplus b_0 + g\rho) = d_0.$$

    Zu ②: Mit Induktion nach i ($i \le g\rho$):
    Der Induktionsanfang $i = 0$ ist trivial, gelte also $i = k + 1$. Dann ist $k < g\rho$, und mit Eigenschaft 1 für a sowie Proposition 1 erhalten wir

    $$no(2^{D_{i+1}}) \preceq no(2^{D_{i+1}} \otimes (a_i \oplus b_i)) = no(D_i),$$

    also $no(D_{i+1}) \preceq 2 \cdot no(D_i)$. Nach Induktionsvoraussetzung an k gilt aber $no(D_i) \preceq 2^k \cdot no(D_1)$. Insgesamt folgt nun die Behauptung.
  - $j = 0$: Trivial.

  Ad 4.: Sei $t \in \mathrm{T}^x_j(d_j)$. Wir haben die Eigenschaften 2 und 3 für d_j zur Verfügung und können somit Lemma 3.6 (3) anwenden. Dies ergibt

  $$no(t) \preceq 2^{\mathrm{dp}^x(d_j)} \cdot no(d_j) \preceq 2^{\mathrm{dp}^x(d_j)} \cdot d_0.$$

  Da in t keine Variable x^σ_k auftritt, haben wir daher

  $$\begin{aligned} no(t) &\preceq 2^{\mathrm{dp}^x(d_j)} \cdot d_0\{[\![x]\!] := \vec{1}\} \\ &\preceq 2^{\mathrm{dp}^x(d_j)} \cdot (\,\delta^{x^\sigma}_0 d_0)_0 \quad \text{nach Lemma 3.6 (1)} \\ &\prec \mathrm{L}^{x^\sigma}_2([\![d]\!]) \cdot (\,\delta^{x^\sigma}_0 d_0)_0. \end{aligned}$$

Die $\prec$-Beziehung folgt im Falle $j > g\sigma$ aus $\mathrm{dp}^x(d_j) = 0$, und für $j \leq g\sigma$ gilt $2^{\mathrm{dp}^x(d_j)} < \mathrm{L}_2^{x^\sigma}([\![d]\!])$ nach Definition von $\mathrm{L}_2^{x^\sigma}$.

Ad 5.: Dies folgt im Falle $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \not\equiv d_0$ aus der Induktionsvoraussetzung an a und b. Für den Term d_0 selbst haben wir aber nach der Induktionsvoraussetzung 3 an a und b zusammen mit Lemma 3.2

$$no((\,[\![a]\!] \,\Box_\rho\, [\![b]\!]\,)_1) \preceq F_2(a_0 + b_0 + g\rho).$$

- $d^\tau \equiv \lambda y^\rho.e^\sigma$: Dann haben wir $[\![d]\!] = \delta^{y^\rho}[\![e]\!] \oplus_\sigma [\![e]\!]\,\{\,[\![y]\!] := \vec{1}\,\}$.

  Ad 1.: Es gilt $(\,\delta^{y^\rho}[\![e]\!])_i \succ 0$ für alle $i \leq g\rho + 1$, und mit der Induktionsvoraussetzung an e folgt Eigenschaft 1.

  Ad 2.: Sei $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(d_j)$. Falls $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(e_j\{\,[\![y]\!] := \vec{1}\,\})$, so folgt $g \succ 0$ mit der Zulässigkeit der Belegung $\vec{1}$ für $[\![y]\!]$ aus der Induktionsvoraussetzung an e. Gelte nun $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}((\,\delta^{y^\rho}[\![e]\!])_j)$. Im Falle $j > g\rho + 1$ benutzen wir direkt die Induktionsvoraussetzung an e. Anderenfalls haben wir $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}((\,\delta_i^{y^\rho} e_i)_j)$ für ein $i \leq j$. Gemäß Lemma 3.5 (1) folgt daraus aber $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(e_i) \cup \mathrm{Sub}(e_i\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\})$, so daß wir wieder die Induktionsvoraussetzung an e anwenden können.

  Ad 3.: Die Induktionsvoraussetzung 4 an e liefert für alle i

  $$\forall t \in \mathrm{T}_i^y(e_i)\; no(t) \;\prec\; \mathrm{L}_2^{y^\rho}([\![e]\!]) \cdot (\,\delta_0^{y^\rho} e_0)_0.$$

  Lemma 3.6 (2) ergibt für $j > 0$:

  $$no((\,\delta_i^{y^\rho} e_i)_j) \;\preceq\; \mathrm{lh}^y(e_i) \cdot \mathrm{L}_2^{y^\rho}([\![e]\!]) \cdot (\,\delta_0^{y^\rho} e_0)_0. \tag{3.3}$$

  Wir unterscheiden nun 3 Fälle:

  - $j > g\rho + 1$: Dann tritt keine Variable y_k^ρ in e_j auf, und wir haben $d_j = 2 \cdot e_j$ für $j \leq g\sigma$ und 0 sonst. Nach Induktionsvoraussetzung an e ist $no(e_j) \preceq e_0\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\}$. Ferner gilt $e_j \in \mathrm{T}_j^y(e_j)$, also auch

    $$no(e_j) \prec \mathrm{L}_2^{y^\rho}([\![e]\!]) \cdot (\,\delta_0^{y^\rho} e_0)_0 \prec (\,\delta^{y^\rho}[\![e]\!])_0.$$

    Insgesamt folgt also $no(d_j) \preceq d_0$.

- $1 \leq j \leq g\rho + 1$: Wir schätzen folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned}
no(d_j) &\preceq no\left(\bigoplus_{i=0}^{j}(\,\delta_i^{y^\rho} e_i)_j\right) + no(e_j\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\}) \\
&\overset{I.V.}{\preceq} \sum_{i=0}^{j} no((\,\delta_i^{y^\rho} e_i)_j) + e_0\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\} \\
&\overset{(3.3)}{\preceq} \sum_{i=0}^{j} \mathrm{lh}^y(e_i) \cdot \mathrm{L}_2^{y^\rho}([\![e]\!]) \cdot (\,\delta_0^{y^\rho} e_0)_0 + e_0\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\} \\
&\preceq \mathrm{L}_1^{y^\rho}([\![e]\!]) \cdot \mathrm{L}_2^{y^\rho}([\![e]\!]) \cdot (\,\delta_0^{y^\rho} e_0)_0 + e_0\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\} \\
&= d_0.
\end{aligned}$$

- $j = 0$: Trivial.

Insgesamt haben wir somit auch eingesehen, daß gilt:

$$no((\,\delta^{y^\rho}[\![e]\!])_j) \;\preceq\; (\,\delta^{y^\rho}[\![e]\!])_0. \tag{3.4}$$

Ad 4.: Dies zeigt man wortwörtlich wie im Falle $d^\tau \equiv a^{\rho\tau} b^\rho$.

Ad 5.: Sei $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}(d_j)$. Ebenso wie im Beweis von Eigenschaft 2 ist der interessante Fall derjenige, daß $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$ in $\mathrm{Sub}((\,\delta_i^{y^\rho} e_i)_j)$ für ein $i \leq j \leq g\rho + 1$ liegt. Gemäß Lemma 3.5 (2) haben wir dann entweder $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \mathrm{Sub}(e_i) \cup \mathrm{Sub}(e_i\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\})$, so daß wir direkt mit der Induktionsvoraussetzung an e schließen können, oder es gibt Terme f' und g' mit $f \equiv f'\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\}$ und $g \equiv (\,\delta_0^{y^\rho} g')_0$, so daß $\psi(\omega \otimes f' \oplus g' + n) \in \mathrm{Sub}(e_i)$ gilt. Mit der Induktionsvoraussetzung an e folgt dann $no(f') \preceq F_2(g' + n)$ und damit unter Zuhilfenahme von Lemma 3.6 (1)

$$no(f) \preceq F_2(g'\{[\![y]\!] := \vec{1}\,\} + n) \preceq F_2((\,\delta_0^{y^\rho} g')_0 + n) = F_2(g + n).$$

Damit ist Teil (a) bewiesen.

Beweis von (b). Dies folgt sofort aus Eigenschaft 3, Teil (a), und Lemma 3.2.

Beweis von (c). Wir beweisen die Eigenschaften 1, 2, 3 und 5 aus Teil (a) für die nicht-eindeutige Zuordnung $[\cdot]$ durch simultane Induktion nach $t(d^\tau)$:

- d^τ ist eine Konstante oder eine Variable: Dann argumentieren wir wie in Teil (a) für die eindeutige Zuordnung.

- $d^\tau \equiv \mathsf{R}_\rho t$ mit $[d]_i = \begin{cases} [t]_0 + 2 & i = 0 \\ 1 & 1 \leq i \leq g\rho + 1 \\ [t]_0 + 2 & i = g\rho + 2 \\ 0 & i > g\rho + 2. \end{cases}$: Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung an t können wir dann alle vier Eigenschaften unmittelbar einsehen.

- $d^\tau \equiv a^{\rho\tau} b^\rho$ mit $[d]_i = (\,[a] \,\Box_\rho\, [b]\,)_i$ für $i \leq g\tau$ und 0 sonst. Dann gilt $t(a^{\rho\tau})$, $t(b^\rho) < t(d^\tau)$, und wir haben die Induktionsvoraussetzung an a und b zur Verfügung. Nun argumentieren wir genauso wie in Teil (a).

- $d^\tau \equiv \lambda y^\rho.e^\sigma$: Dies ist der interessante Fall. Sei $[d]$ gegeben durch

  $$[d] = (\,\delta^{y^\rho}[\![c^\sigma]\!]\,)\,\{\,[\![z]\!] := [\overline{z}] \mid z \in FV(\lambda y.c)\} \oplus_\sigma [e]\,\{[y] := \vec{1}\,\}$$

  mit $c\,\{z := \overline{z} \mid z \in FV(\lambda y.c)\} \rhd^n e$ und $\overline{z}$ einsetzbar für z in $\lambda y.c$ für jedes $z \in FV(\lambda y.c)$. Dann gilt $t(\overline{z}) < t(d)$ für jedes $z \in FV(\lambda y.c)$, da jedes solche $\overline{z}$ ein Teilterm von $c\,\{z := \overline{z} \mid z \in FV(\lambda y.c)\}$ ist. Ferner gilt $t(e) < t(d)$. Wir haben also die Induktionsvoraussetzung an alle $\overline{z}$ und an e zur Verfügung. Insbesondere stellen die $[\overline{z}]$ zulässige Belegungen der $[\![z]\!]$ dar.

  Ad 1.: Argumentiere wie in Teil (a).

  Ad 2.: Sei $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}(d_j)$. Liegt dann $2^f \otimes g$ in einem $[\overline{z}]$ oder in $[e]\,\{[y] := \vec{1}\,\}$, so schließen wir mit der entsprechenden Induktionsvoraussetzung auf $g \succ 0$. Anderenfalls gilt

  $$2^f \otimes g \equiv 2^{f'} \otimes g'\,\{\,[\![z]\!] := [\overline{z}] \mid z \in FV(\lambda y.c)\}$$

  mit $2^{f'} \otimes g' \in \mathrm{Sub}((\,\delta^{y^\rho}[\![c]\!])_j)$, und Teil (a) liefert $g' \succ 0$, so daß mit der Zulässigkeit der $[\overline{z}]$ auch $g \succ 0$ folgt.

  Ad 3.: Dies folgt mit der Zulässigkeit der Belegungen $[\overline{z}]$ und $\vec{1}$ aus (3.4) und der Induktionsvoraussetzung an e.

  Ad 5.: Eigenschaft 5 zeigt man genauso wie Eigenschaft 2.

Damit ist Teil (c) bewiesen.
Beweis von (d). Dies ist klar mit Eigenschaft 3, Teil (c), und Lemma 3.2. □

3.3 Scharfe obere Schranken für Reduktionen in T

Das Hauptergebnis dieser Arbeit wird im vorliegenden Abschnitt erzielt. Wir erhalten eine genaue Abschätzung der maximalen Längen von Reduktionsketten in Gödels T und seinen Teilsystemen T_n. Dabei ist T_n die Beschränkung von T auf Rekursoren eines Typgrades $\leq n+2$. Wir benötigen die folgenden Begriffe:

- $G(a^\tau)$ bezeichne den maximalen Typgrad der Teilterme von $a^\tau \in \mathcal{T}$.
- $RG(a^\tau)$ bezeichne den maximalen Typgrad von in a^τ auftretenden Rekursoren.
- $\mathrm{dp}(a^\tau)$ ist rekursiv definiert [1] durch folgende Klauseln:
  - $\mathrm{dp}(a^\tau) := 1$, falls a^τ eine Konstante oder Variable ist.
  - $\mathrm{dp}(\lambda x^\sigma.a^\tau) := \mathrm{dp}(a^\tau) + 1$.
  - $\mathrm{dp}(a^{\sigma\tau}b^\sigma) := \mathrm{dp}(a^{\sigma\tau}) + \mathrm{dp}(b^\sigma)$.

3.3.1 Obere Schranken für die Reduktionslängen

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den zentralen Satz des Kapitels formulieren und beweisen:

Satz 2 *Seien a^σ und b^σ Terme aus $\mathcal{T}$ mit $a^\sigma \rhd b^\sigma$ und sei $[a]$ ein dem Term a^σ zugeordneter Vektor. Dann gibt es einen dem Term b^σ zugeordneten Vektor $[b]$ mit*

$$[a] \quad \succ \quad [b].$$

Beweis. Wir führen Induktion nach $t(a)$. Für die Reduktionen $(\boldsymbol{D}_\mathbf{0})$, $(\boldsymbol{D}_\mathsf{S})$ und $(\boldsymbol{R}_\mathbf{0})$ ist die Behauptung klar.

$(\boldsymbol{R}_\mathsf{S})$ $\quad \mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab \; \rhd \; at(\mathsf{R}_\rho tab)$

Sei s ein Term vom Typ 0 mit gegebenem zugeordneten Vektor $[s]$ und

$$[\mathsf{R}_\rho s]_i = \begin{cases} [s]_0 + 2 & i = 0 \\ 1 & 1 \leq i \leq g\rho + 1 \\ [s]_0 + 2 & i = g\rho + 2 \\ 0 & i > g\rho + 2. \end{cases}$$

[1] Der Bequemlichkeit halber haben wir eine hier unwesentlich großzügigere Tiefenabschätzung der Applikationsterme als in der analogen Definition in Kapitel 2 gewählt.

Wegen $[\mathsf{R}_\rho s] \prec [\mathsf{R}_\rho] \,\square_0\, [s]$ haben wir für $s \equiv \mathsf{S}t$ nach Lemma 3.3 (1a)

$$[\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)] \,\square_{0\rho\rho}\, [a] \,\square_\rho\, [b] \prec [\mathsf{R}_\rho] \,\square_0\, [\mathsf{S}t] \,\square_{0\rho\rho}\, [a] \,\square_\rho\, [b].$$

Wir können daher annehmen, daß $[\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab]$ gegeben ist durch $[\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)]$, $[a]$ und $[b]$. Ein dem Term $\mathsf{R}_\rho ta$ zugeordneter Vektor $[\mathsf{R}_\rho ta]$ gehe aus $[\mathsf{R}_\rho t]$ (definiert wie $[\mathsf{R}_\rho s]$ für $s \equiv t$) und $[a]$ hervor. Zunächst werden wir nun mit Hilfe von Lemma 3.1 (4) zeigen, daß für $1 \leq i \leq g\rho + 1$ gilt:

$$2 \cdot (\,(A \,\square_\rho\, [b]\,) \,\square_\rho\, (\,[\mathsf{R}_\rho ta] \,\square_\rho\, [b]\,)\,)_i \;\prec\; (\,[\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a] \,\square_\rho\, [b]\,)_i, \tag{3.5}$$

wobei der Vektor A definiert ist durch

$$A_i := \begin{cases} [at]_i & i \leq g\rho \\ [a]_i + 1 & i = g\rho + 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zum Beweis von (3.5) prüfen wir die Voraussetzungen von Lemma 3.1 (4) nach. Gemäß Eigenschaft 1 in Hauptlemma 3.2 (c) gilt $0 \prec [at]_i$, $[\mathsf{R}_\rho ta]_i$ für alle $i \leq g\rho$. Für $i = g\rho + 1$ haben wir $0 \prec 2^{[t]_0+2} \otimes (1 \oplus [a]_i) = [\mathsf{R}_\rho ta]_i$ und

$$\begin{aligned} 2 \cdot A_i \oplus [\mathsf{R}_\rho ta]_i &= 2 \cdot ([a]_i + 1) \,\oplus\, 2^{[t]_0+2} \otimes (1 \oplus [a]_i) \\ &\prec 2^{[t]_0+3} \otimes (1 \oplus [a]_i) \\ &= [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_i. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Für $1 \leq i \leq g\rho$ gilt nach Lemma 3.1 (2a) $[\mathsf{R}_\rho ta]_i \prec [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_i$, also können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} A_i \oplus [\mathsf{R}_\rho ta]_i &= [a]_i \,\oplus\, 2^{[\mathsf{R}_\rho ta]_{i+1}} \otimes (1 \oplus [a]_i) \\ &\prec 2^{[\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_{i+1}} \otimes (1 \oplus [a]_i) \\ &= [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_i. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Damit haben wir (3.5) nachgewiesen und erhalten daraus wegen $[at] \prec A \,\square_\rho\, [b]$ mit Lemma 3.1 (2a)

$$\forall i \in \{1, \ldots, g\rho\} \;\; 2 \cdot [at(\mathsf{R}_\rho tab)]_i \;\prec\; [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab]_i. \tag{3.8}$$

Im Falle $g\rho > 0$ folgt mit Lemma 3.1 (1) aus (3.8)

$$[at(\mathsf{R}_\rho tab)]_1 \oplus a_1 \oplus [\mathsf{R}_\rho tab]_1 \;\prec\; [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab]_1. \tag{3.9}$$

Um $[at(\mathsf{R}_\rho tab)]_0 \prec [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab]_0$ nachzuweisen, benutzen wir (3.6) im Falle $g\rho = 0$, (3.9) im Falle $g\rho > 0$ sowie die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
[\mathsf{R}_\rho ta]_0 + a_0 + t_0 &= \psi(\omega \otimes [\mathsf{R}_\rho ta]_1 \oplus t_0 + a_0 + g\rho + 3) + a_0 + t_0 \\
&\preceq \psi(\omega \otimes [\mathsf{R}_\rho ta]_1 \oplus 2t_0 + 2a_0 + g\rho + 3) \\
&\overset{!}{\prec} \psi(\omega \otimes [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_1 \oplus t_0 + a_0 + g\rho + 4) \\
&= [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_0. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Ad !: $[\mathsf{R}_\rho ta]_1 \prec [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_1$ haben wir schon gesehen, und Teil (d) aus Hauptlemma 3.2 ergibt $no([\mathsf{R}_\rho ta]_1) \preceq F_2(t_0 + 2 + a_0 + g\rho + 1)$. Proposition 2 (6) liefert daher die gewünschte Abschätzung.

Nun sind wir in der Lage, den Term $[at(\mathsf{R}_\rho tab)]_0$ abzuschätzen. Da der Fall $g\rho = 0$ einfacher zu behandeln ist, gehen wir von $g\rho > 0$ aus.

$$\begin{aligned}
[at(\mathsf{R}_\rho tab)]_0 &= \psi(\omega \otimes [at(\mathsf{R}_\rho tab)]_1 \oplus [at]_0 \oplus [\mathsf{R}_\rho tab]_0 + g\rho) \\
&= \psi(\omega \otimes [at(\mathsf{R}_\rho tab)]_1 \oplus \psi(\omega \otimes [at]_1 \oplus a_0 \oplus t_0) \\
&\qquad \oplus \psi(\omega \otimes [\mathsf{R}_\rho tab]_1 \oplus [\mathsf{R}_\rho ta]_0 \oplus b_0 + g\rho) + g\rho) \\
&\preceq \psi(\omega \otimes (\,[at(\mathsf{R}_\rho tab)]_1 \oplus [at]_1 \oplus [\mathsf{R}_\rho tab]_1) \\
&\qquad \oplus [\mathsf{R}_\rho ta]_0 \oplus a_0 \oplus t_0 \oplus b_0 + 2g\rho) \\
&\overset{!}{\prec} \psi(\omega \otimes [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab]_1 \oplus [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_0 \oplus b_0 + g\rho) \\
&= [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab]_0.
\end{aligned}$$

Ad !: Nach (3.9) gilt $[at(\mathsf{R}_\rho tab)]_1 \oplus [at]_1 \oplus [\mathsf{R}_\rho tab]_1 \prec [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)ab]_1$, gemäß (3.10) ist $[\mathsf{R}_\rho ta]_0 + a_0 + t_0 \prec [\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_0$ und mit Hauptlemma 3.2 (d) folgt:

$$\begin{aligned}
&no([at(\mathsf{R}_\rho tab)]_1 \oplus [at]_1 \oplus [\mathsf{R}_\rho tab]_1) \\
&\quad\preceq F_3(a_0{+}t_0{+}[\mathsf{R}_\rho ta]_0{+}b_0{+}3g\rho) + F_2(a_0{+}t_0) + F_2([\mathsf{R}_\rho ta]_0{+}b_0{+}g\rho) \\
&\quad\prec \Phi(\,[\mathsf{R}_\rho(\mathsf{S}t)a]_0 + b_0 + g\rho).
\end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Proposition 2 (6) erfüllt.

$(\boldsymbol{\beta})\quad (\boldsymbol{\lambda x^\sigma.a^\tau})\boldsymbol{b^\sigma} \;\rhd\; \boldsymbol{a^\tau\{x := b\}} \quad (\,\boldsymbol{BV(\lambda x.a) \cap FV(b) = \emptyset}\,)$

Sei $[(\lambda x.a)b]$ gegeben durch $[\lambda x^\sigma.a]$ und $[b]$ mit

$$[\lambda x^\sigma.a^\tau] = (\delta^{x^\sigma} [\![d^\tau]\!])\,\{[\![y^\rho]\!] := [\overline{y}^\rho] \mid y^\rho \in FV(\lambda x^\sigma.d^\tau)\}\; \oplus_\tau [a^\tau]\,\{\,[x^\sigma] := \vec{1}\,\},$$

wobei die Reduktionskette $d_0 \equiv d\,\{y := \overline{y} \mid y \in FV(\lambda x.d)\} \rhd^1 \ldots \rhd^1 d_n \equiv a$ für Terme d_i mit $t(d_i) < t(\lambda x.a)$, $0 \leq i \leq n$, in die Reduktionsgeschichte von $\lambda x.a$ eingeht. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir von $BV(d_0) \cap FV(b) = \emptyset$ ausgehen. Setze $D := [\![d]\!]\,\{\,[\![y]\!] := [\overline{y}] \mid y \in FV(\lambda x.d)\}$ und beachte, daß wegen der Substitutionseigenschaft von δ^{x^σ} gilt:

$$(\delta^{x^\sigma}[\![d]\!])\,\{\,[\![y]\!] := [\overline{y}] \;\mid\; y \in FV(\lambda x^\sigma.d)\} \;\equiv\; \delta^{x^\sigma}D.$$

Hauptlemma 3.1 liefert

$$\delta^{x^\sigma}D \,\Box_\sigma\, [b] \quad \succ \quad D\{\,[\![x]\!] := [b]\},$$

wobei die Voraussetzungen des Hauptlemmas 3.1 durch Hauptlemma 3.2 gewährleistet sind. Nun ist $[d] := [\![d]\!]\,\{[\![z]\!] := [z] \mid z \in FV(d)\}$ dem Term d zugeordnet, und aufgrund der Substitutionseigenschaft von $[\cdot]$ ist der Vektor

$$[d_0] := [d]\,\{\,[y] := [\overline{y}] \mid y \in FV(\lambda x.d)\} \equiv D\{\,[\![x]\!] := [x]\,\}$$

dem Term d_0 zugeordnet. Nach n-maliger Anwendung der Induktionsvoraussetzung gibt es einen dem Term a zugeordneten Vektor A mit $[d_0] \succeq A$, wobei Gleichheit genau dann zutrifft, wenn $n = 0$ ist. Da $[b]$ nach Hauptlemma 3.2 eine zulässige Belegung für $[x]$ ist, erhalten wir unter Ausnutzung der Substitutionseigenschaft:

$$[d_0\,\{x := b\}] \;:=\; [d_0]\,\{\,[x] := [b]\} \;\succeq\; A\{\,[x] := [b]\} \;=:\; [a\{x := b\}].$$

Aus diesem Grunde haben wir

$$\begin{array}{rcll} [(\lambda x.a)b]_i & = & (\,[\lambda x.a]\,\Box_\sigma\,[b]\,)_i & \\ & \succeq & (\;\delta^{x^\sigma}D\,\Box_\sigma\,[b]\,)_i & \text{nach Lemma 3.3 (1)} \\ & \succ & D_i\{\,[\![x]\!] := [b]\} & \text{nach Hauptlemma 3.1} \\ & = & [d_0\{x := b\}]_i & \\ & \succeq & [a\{x := b\}]_i & \end{array}$$

für alle $i \leq g\tau$. Damit gilt aber schon $[(\lambda x.a)b] \succ [a\{x := b\}]$.

$(\boldsymbol{\xi})$ $\quad \boldsymbol{a^\tau \rhd b^\tau \Rightarrow \lambda x^\sigma.a \rhd \lambda x^\sigma.b}$

Sei $[\lambda x.a]$ gegeben wie oben für (β). Es ist $t(a) < t(\lambda x.a)$, nach Induktionsvoraussetzung gibt es also einen b zugeordneten Vektor $[b]$ mit $[a] \succ [b]$. Da $\vec{1}$

eine zulässige Belegung ist, erhalten wir $[a]\{\,[x] := \vec{1}\,\} \succ [b]\{\,[x] := \vec{1}\,\}$. Nun setzen wir

$$[\lambda x.b] := (\,\delta^{x^\sigma}[\![d^\tau]\!])\,\{[\![y^\rho]\!] := [\overline{y}^\rho] \mid y^\rho \in FV(\lambda x^\sigma.d^\tau)\}\ \oplus_\tau\ [b^\tau]\,\{\,[x^\sigma] := \vec{1}\,\}.$$

$(\boldsymbol{App_r})\quad \boldsymbol{a^{\sigma\tau} \rhd b^{\sigma\tau} \Rightarrow ac \rhd bc}$

Sei $[ac]$ vorgegeben. Wegen $a \rhd b$ gilt $a \not\equiv \mathsf{R}_\rho$, folglich ist $[ac]$ mit Hilfe des Operators $\Box_\sigma$ aus Vektoren $[a]$ und $[c]$ aufgebaut. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es einen b zugeordneten Vektor $[b]$ mit $[a] \succ [b]$. Wir setzen nun $[bc]_i := (\,[b] \Box_\sigma [c]\,)_i$ für $i \leq g\tau$ und 0 sonst. Nach Hauptlemma 3.2 sind die Voraussetzungen von Lemma 3.3 (1) erfüllt, und wir erhalten $[ac] \succ [bc]$.

$(\boldsymbol{App_l})\quad \boldsymbol{b^\sigma \rhd c^\sigma \Rightarrow a^{\sigma\tau}b \rhd a^{\sigma\tau}c}$

Sei $[ab]$ vorgegeben. Sei $[b]$ derjenige dem Term b zugeordnete Vektor, mit Hilfe dessen $[ab]$ aufgebaut wurde. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann zu $[b]$ einen dem Term c zugeordneten Vektor $[c]$ mit $[b] \succ [c]$. Zunächst gehen wir von der Situation $a \equiv \mathsf{R}_\rho$ und

$$[ab]_i = \begin{cases} b_0 + 2 & i \in \{0, g\rho + 2\} \\ 1 & 1 \leq i \leq g\rho + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aus. Setze dann

$$[ac]_i := \begin{cases} c_0 + 2 & i \in \{0, g\rho + 2\} \\ 1 & 1 \leq i \leq g\rho + 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun betrachten wir den Fall, daß $[ab]$ mit Hilfe des Operators $\Box_\sigma$ aus Vektoren $[a]$ und $[b]$ aufgebaut wurde. Wir setzen $[ac]_i := (\,[a] \Box_\sigma [c]\,)_i$ für $i \leq g\tau$ und 0 sonst und erhalten gemäß Lemma 3.3 (1) $[ab] \succ [ac]$. □

Korollar 3 *Sei $a^\sigma \in \mathcal{T}$ gegeben. Der Vektor*

$$[a] := [\![a]\!]\,\{\,[\![x]\!] := [x]\ \mid\ x \in FV(a)\}$$

ist dann dem Term a^σ zugeordnet, und

$$[a]_0\,\{\,[x] := \vec{1}\ \mid\ x \in FV(a)\}\ \in\ \mathbb{N}$$

ist eine obere Schranke für die Länge sämtlicher Reduktionsketten ausgehend von a. Mithin ist der Kalkül $\boldsymbol{\lambda}$-$\boldsymbol{R}$ und folglich auch Gödels T und seine Teilsysteme T_n stark normalisierend. □

3.3.2 Optimalität der Schranken

Wir wollen nun zeigen, daß die oberen Schranken, welche wir für die Längen von Reduktionen in T und seinen Teilsystemen T_n aus Satz 2 erhalten, optimal sind. Ferner folgern wir aus Satz 2, daß sämtliche in T definierbaren Funktionen $<\varepsilon_0$-rekursiv und alle in T_n definierbaren Funktionen $<\omega_{n+2}$-rekursiv sind. Wir definieren folgende Berechnungslängenfunktionen, wobei $\mathcal{T}_n$ die Beschränkung von $\mathcal{T}$ auf Terme ist, in denen nur Rekursoren eines Typgrades $\leq n+2$ auftreten:

$$\begin{aligned}
D_T(m) &:= \max\{k \mid \exists a_1,\ldots,a_k \in \mathcal{T}\ a_1 \rhd \ldots \rhd a_k \ \&\ \mathrm{dp}(a_1),\ G(a_1) \leq m\} \\
D_{T_n}(m) &:= \max\{k \mid \exists a_1,\ldots,a_k \in \mathcal{T}_n\ a_1 \rhd \ldots \rhd a_k \ \&\ \mathrm{dp}(a_1),\ G(a_1) \leq m\} \\
D_{a^1}(m) &:= \max\{k \mid \exists a_1,\ldots,a_k \in \mathcal{T}\ a^1\underline{m} \equiv a_1 \rhd \ldots \rhd a_k\}.
\end{aligned}$$

Korollar 4

1. *Die in T definierbaren Funktionen und damit die beweisbar rekursiven Funktionen von PA sind $<\varepsilon_0$-rekursiv. Die Berechnungslängenfunktion D_T für T ist ε_0-rekursiv.*

2. *Die in T_n definierbaren Funktionen und damit die beweisbar rekursiven Funktionen von $I\Sigma_{n+1}$ sind $<\omega_{n+2}$-rekursiv. Die Berechnungslängenfunktion D_{T_n} für T_n ist ω_{n+2}-rekursiv.*

Zum Beweis der Behauptungen des Korollars benötigen wir zwei technische Lemmata. Das erste Lemma gibt eine grobe Abschätzung des Faktors $\mathrm{L}^{x^\sigma}([\![d]\!])$ für $d \in \mathcal{T}$ in den Größen $G(d)$ und $\mathrm{dp}(d)$. Das zweite Lemma schätzt dann die einzelnen Komponenten zugeordneter Vektoren ab.

Lemma 3.8 *Sei $d \in \mathcal{T}$. Dann gilt*

$$\mathrm{L}^{x^\sigma}([\![d]\!]) \ < \ 2_2(G^\sigma(d) + 1 + 2\mathrm{dp}(d)),$$

wobei $G^\sigma(d) := \max\{g\sigma + 1, G(d)\}$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathrm{lh}^x \leq \mathrm{lh}$, $\mathrm{dp}^x \leq \mathrm{dp}$ und $2^{\mathrm{dp}} \leq \mathrm{lh}$ gelten. Daher genügt es, den Term

$$\left(\sum_{i=0}^{g\sigma+1} \mathrm{lh}([\![d]\!]_i)\right)^2$$

abzuschätzen. Wir setzen $k_f^\sigma(d) := 2_2(G^\sigma(f) + 2\mathrm{dp}(d))$, $K_f^\sigma(d) := k_f^\sigma(d)^2$ und behaupten

$$\sum_{i=0}^{G^\sigma(f)} \mathrm{lh}([\![d]\!]_i) \ < \ k_f^\sigma(d) \tag{3.11}$$

für jedes $f \in \mathcal{T}$ mit der Eigenschaft, daß d ein Teilterm von f ist. Die Aussage des Lemmas folgt nun aus (3.11) für $f \equiv d$. Wir schreiben abkürzend d_i für $[\![d]\!]_i$ und beweisen (3.11) durch Induktion nach dem Aufbau von d:

- d ist eine Konstante oder eine Variable: Trivial.
- $d \equiv a^{\rho\tau}b^\rho$: Für $i > g\rho$ haben wir $\mathrm{lh}(d_i) \le \mathrm{lh}(a_i)$, und mit der Induktionsvoraussetzung an a folgt

$$\sum_{j=g\rho+1}^{G^\sigma(f)} \mathrm{lh}(d_j) \ < \ k_f^\sigma(a).$$

Durch Induktion nach $g\rho + 1 \dot{-} i$ zeigen wir nun unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung an a und b:

$$\forall i \le g\rho + 1 \ \ \mathrm{lh}(d_i) \le 2^{2(g\rho+1\dot{-}i)}(k_f^\sigma(a) + k_f^\sigma(b)). \tag{3.12}$$

Den Induktionsanfang $i = g\rho + 1$ haben wir bereits diskutiert. Für $i \le g\rho$ haben wir

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{lh}(d_i) & \le & 2\mathrm{lh}(d_{i+1}) + \mathrm{lh}(a_i) + \mathrm{lh}(b_i) + 2 \\ & \overset{I.V.}{<} & 2^{2(g\rho\dot{-}i)+1}(k_f^\sigma(a) + k_f^\sigma(b)) + k_f^\sigma(a) + k_f^\sigma(b) \\ & < & 2^{2(g\rho+1\dot{-}i)}(k_f^\sigma(a) + k_f^\sigma(b)). \end{array}$$

Mit (3.12) folgt dann mit der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\sum_{j=0}^{g\rho} \mathrm{lh}(d_j) \ < \ 4^{g\rho+2}(k_f^\sigma(a) + k_f^\sigma(b)),$$

und wir erhalten schließlich

$$\sum_{i=0}^{G^\sigma(f)} \mathrm{lh}(d_i) \quad < \quad (4^{G^\sigma(f)+1} + 1)(k_f^\sigma(a) + k_f^\sigma(b))$$

$$\begin{aligned}
&< 2_2(G^\sigma(f) + 2\mathrm{dp}(d) - 1) \cdot \\
&\qquad (2_2(G^\sigma(f) + 2\mathrm{dp}(a)) + 2_2(G^\sigma(f) + 2\mathrm{dp}(b))) \\
&\le (2_2(G^\sigma(f) + 2\mathrm{dp}(d) - 1))^2 \\
&= k_f^\sigma(d).
\end{aligned}$$

- $d \equiv \lambda x^\rho.e^\tau$: Mit Lemma 3.6 (4) und der Induktionsvoraussetzung an e können wir die einzelnen Komponenten wie folgt abschätzen:
  - $i = 0$: $\mathrm{lh}(d_0) < K_f^\sigma(e)(4\mathrm{lh}(e_0) + 1) + \mathrm{lh}(e_0)$.
  - $1 \le i \le g\rho + 1$: $\mathrm{lh}(d_i) < 4\sum_{j=0}^{i} \mathrm{lh}(e_j) + i + 1 + \mathrm{lh}(e_i)$.
  - $i > g\rho + 1$: $\mathrm{lh}(d_i) \le 2\mathrm{lh}(e_i) + 1$.

  Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{G^\sigma(f)} \mathrm{lh}(d_i) &< K_f^\sigma(e)(4\mathrm{lh}(e_0){+}1) + (4G^\sigma(f){+}2)k_f^\sigma(e) + (G^\sigma(f){+}2)^2 \\
&< K_f^\sigma(e)(4\mathrm{lh}(e_0) + 1) + (4G^\sigma(f) + 3)k_f^\sigma(e) \\
&< K_f^\sigma(e)(4\mathrm{lh}(e_0) + 2) \\
&< (K_f^\sigma(e))^2 \\
&= k_f^\sigma(d).
\end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Wie schon in Lemma 3.6 definieren wir für $h \in \mathcal{OT}$ den Term $\bar{h}$ durch

$$\bar{h} := h\{x_i^\sigma := 1,\, \underline{x}_i^\sigma := 1 \mid x_i^\sigma, \underline{x}_i^\sigma \in \mathcal{OT}\}.$$

Lemma 3.9 *Seien $c, d \in \mathcal{T}$, wobei d Teilterm von c ist. Setze $G := G(c)$,* RG $:= RG(c)$ *und* $d_i := \overline{([\![d]\!]_i)}$. *Dann gelten die folgenden Abschätzungen:*

$$(1)\quad \begin{cases}
d_i = 0 \text{ für } i > G. \\
d_i < 2_{G+2 \dot- i}(2(G+1) \dot- i + 2\mathrm{dp}(d)) \text{ für } G \ge i > \mathrm{RG}. \\
d_i < 2_{\mathrm{RG} \dot- i}(\omega \otimes 2_{G+2\dot- i}(2(G+1) \dot- i + 2\mathrm{dp}(d))) \text{ für } \mathrm{RG} \ge i \ge 1. \\
d_0 < \psi(\omega \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot- 1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(d)))).
\end{cases}$$

Wir schreiben D_i als Abkürzung für die oberen Schranken der d_i aus (1)*. Es gelten ferner die folgenden Beziehungen:*

$$(2) \quad \begin{cases} \forall \psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \Psi^x([\![d]\!]_0) \ \ \bar{f} \ < \ D_1 \ \& \ n < G. \\ \forall i, \, j \leq G \ \forall t \in \mathrm{T}^x_{ji}([\![d]\!]_j) \ \ \bar{t} \ < \ D_i. \end{cases}$$

Beweis. Wir beweisen (1) und (2) durch simultane Induktion nach d unter Benutzung der Lemmata 3.5, 3.6 und 3.8 sowie des Hauptlemmas 3.2:

- d ist eine Konstante oder Variable: Dann sind die Behauptungen klar.
- $d \equiv a^{\sigma\tau} b^{\sigma}$: Wir behandeln zunächst Teil (1). Im Falle $i > g\sigma$ gilt $d_i \leq a_i$, und die Behauptung folgt mit der Induktionsvoraussetzung an a. Gelte nun $i \leq g\sigma$, also auch $i < G$. Wir führen Nebeninduktion nach $g\sigma \dot{-} i$ und verwenden für den Induktionsanfang die Induktionsvoraussetzung an a.
  - $G > i > \mathrm{RG}$: Dann haben wir $0 < i \leq g\sigma$, also

$$\begin{array}{rcl} d_i & \leq & 2^{d_{i+1}} \otimes (a_i \oplus b_i) \\ & \overset{I.V.}{<} & 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d)) \cdot \\ & & \quad ((2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(a)) + \\ & & \quad\quad (2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(b))) \\ & < & (2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d)))^2 \\ & < & 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(d)). \end{array}$$

  - $\mathrm{RG} \geq i \geq 1$: Wir schätzen zunächst für $i = \mathrm{RG}$ ab:

$$\begin{array}{rcl} d_i & \overset{I.V.}{<} & 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d)) \otimes \\ & & \quad (\omega \otimes 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(a)) \oplus \\ & & \quad\quad \omega \otimes 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(b))) \\ & < & 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d)) \otimes \\ & & \quad (\omega \otimes 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d))) \\ & < & \omega \otimes 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(d)). \end{array}$$

Gelte nun $i < \mathrm{RG}$:

$$\begin{aligned} d_i &\stackrel{I.V.}{<} 2_{\mathrm{RG}\dot{-}i}(\omega \otimes 2_{G+2\dot{-}(i+1)}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d))) \otimes \\ &\qquad (2_{\mathrm{RG}\dot{-}i}(\omega \otimes 2_{G+2\dot{-}i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(a))) \oplus \\ &\qquad\quad 2_{\mathrm{RG}\dot{-}i}(\omega \otimes 2_{G+2\dot{-}i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(b)))) \\ &< 2_{\mathrm{RG}\dot{-}i}(\omega \otimes 2_{G+2\dot{-}(i+1)}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d))) \otimes \\ &\qquad 2_{\mathrm{RG}\dot{-}i}(\omega \otimes 2_{G+2\dot{-}i}(2(G+1) \dot{-} (i+1) + 2\mathrm{dp}(d))) \\ &< 2_{\mathrm{RG}\dot{-}i}(\omega \otimes 2_{G+2\dot{-}i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(d))). \end{aligned}$$

- $i = 0$: Falls dann $\mathrm{RG} = 0$, so erhalten wir mit Hilfe von Proposition 2

$$\begin{aligned} d_0 &\stackrel{I.V.}{<} \psi(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) \dot{-} 1 + 2\mathrm{dp}(d)) \oplus \\ &\qquad \psi(\omega^2 \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(a))) \oplus \\ &\qquad\quad \psi(\omega^2 \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(b))) + g\sigma) \\ &< \psi(\omega^2 \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(d))). \end{aligned}$$

Falls $\mathrm{RG} > 0$, also $\mathrm{RG} \geq 2$, so haben wir mit Proposition 2

$$\begin{aligned} d_0 &\stackrel{I.V.}{<} \psi(\omega \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) \dot{-} 1 + 2\mathrm{dp}(d))) \oplus \\ &\qquad \psi(\omega \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(a)))) \oplus \\ &\qquad\quad \psi(\omega \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(b)))) + g\sigma) \\ &< \psi(\omega \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(d)))). \end{aligned}$$

Nun kommen wir zu Teil (2). Es gilt

$$\Psi^x([\![d]\!]_0) \subseteq \{[\![d]\!]_0\} \cup \Psi^x([\![a]\!]_0) \cup \Psi^x([\![b]\!]_0).$$

Die Aussage über ψ-Terme folgt daher aus der Induktionsvoraussetzung an a und b zusammen mit $g\sigma < G$ und $d_1 < D_1$ gemäß Teil (1). Sei jetzt $t \in \mathrm{T}^x_{ji}([\![d]\!]_j)$. Um $\bar{t} < D_i$ zu zeigen, führen wir Induktion nach $i \dot{-} j$ (beachte, daß $\mathrm{T}^x_{ji}([\![d]\!]_j)$ für $i < j$ leer ist): Im Falle $j = i$ ist $t \leq d_i < D_i$ klar mit Teil (1). Gelte nun $j < i$. Gilt dann $j > g\sigma$, so schließen wir mit der Induktionsvoraussetzung an a. Ist hingegen $j \leq g\sigma$, so gibt es drei Möglichkeiten:

$$t \in \mathrm{T}^x_{j+1,i}([\![d]\!]_{j+1}),\ t \in \mathrm{T}^x_{ji}([\![a]\!]_j) \text{ oder } t \in \mathrm{T}^x_{ji}([\![b]\!]_j).$$

Mit Haupt- bzw. Nebeninduktionsvoraussetzung folgt dann $\bar{t} < D_i$.

- $d \equiv \lambda x^\sigma.e^\tau$: Wir widmen uns wieder zunächst Teil (1) und unterscheiden drei Fälle:

  - $i > g\sigma + 1$: Dann haben wir $d_i \leq 2 \cdot e_i$, und mit der Induktionsvoraussetzung an e ist $d_i < D_i$ leicht einzusehen.
  - $1 \leq i \leq g\sigma + 1$: Mit Lemma 3.6 (5) und der Induktionsvoraussetzung an e haben wir

    $$\overline{(\,\delta_j^{x^\sigma} [\![e]\!]_j)_i} \;\leq\; \mathrm{lh}^x([\![e]\!]_j) \cdot E_i.$$

    Daraus erhalten wir

    $$d_i \;<\; \left(\sum_{j=0}^{i} \mathrm{lh}^x([\![e]\!]_j) + 1\right) \cdot E_i.$$

    Nach (3.11) aus dem Beweis zu Lemma 3.8 ist

    $$\sum_{j=0}^{i} \mathrm{lh}^x([\![e]\!]_j) + 1 \;\leq\; k_c^\sigma(e).$$

    Falls nun $i > \mathrm{RG}$ ist, so schätzen wir folgendermaßen ab:

    $$\begin{aligned} d_i &< 2_2(G + 2\mathrm{dp}(e)) \cdot 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(e)) \\ &< (2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(e)))^2 \\ &< 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(d)). \end{aligned}$$

    Im Falle $i \leq \mathrm{RG}$ können wir hingegen wie folgt abschätzen:

    $$\begin{aligned} d_i &< 2_2(G + 2\mathrm{dp}(e)) \otimes \\ &\qquad 2_{\mathrm{RG} \dot{-} i}(\omega \otimes 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(e))) \\ &< 2_{\mathrm{RG} \dot{-} i}(\omega \otimes 2_{G+2 \dot{-} i}(2(G+1) \dot{-} i + 2\mathrm{dp}(d) \dot{-} 1))) \\ &< D_i. \end{aligned}$$

  - $i = 0$: Wir gehen von $\mathrm{RG} > 0$ aus. Der Fall $\mathrm{RG} = 0$ ist einfacher zu behandeln. Abkürzend schreiben wir $K := K_c^\sigma(e)$ und $M := \mathrm{lh}^x([\![e]\!]_0)$. Nach Lemma 3.8 gilt dann $\mathrm{L}^{x^\sigma}([\![e]\!]) < K$. Nach

Hauptlemma 3.2 und der Induktionsvoraussetzung an e sind die Voraussetzungen von Lemma 3.6 (6) erfüllt, und wir erhalten

$$\overline{(\,\delta_0^{x^\sigma}[\![e]\!]_0)_0} \;<\; \psi(\omega \otimes M \otimes E_1 \oplus M \cdot E_0).$$

Mit Hilfe von Proposition 2 können wir nun d_0 abschätzen:

$$\begin{aligned}
d_0 &\leq \mathrm{L}^{x^\sigma}([\![e]\!]) \cdot \overline{(\,\delta_0^{x^\sigma}[\![e]\!]_0)_0} \oplus e_0 \\
&< K \cdot \psi(\omega \otimes M \otimes E_1 \oplus ME_0) + E_0 \\
&\leq \psi(\omega \otimes (KM) \otimes E_1 \oplus (KM+1)E_0) \\
&= \psi(\omega \otimes KM \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) \dot{-} 1 + 2\mathrm{dp}(e))) \oplus \\
&\qquad (KM+1) \cdot \psi(\omega \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(e))))) \\
&< \psi(\omega \otimes 2(KM+1) \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(e)))) \\
&< \psi(\omega \otimes 2_2(G + 2\mathrm{dp}(d)) \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(e)))) \\
&< \psi(\omega \otimes 2_{\mathrm{RG}\dot{-}1}(\omega \otimes 2_{G+1}(2(G+1) + 2\mathrm{dp}(d)))) \\
&= D_0.
\end{aligned}$$

Jetzt beweisen wir Teil (2) für $d \equiv \lambda x^\sigma.e^\tau$. Dies ist der letzte und zugleich der interessanteste Abschnitt des Beweises. Sei

$$\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \;\in\; \Psi^y([\![d]\!]_0) \;=\; \Psi^y([\![e]\!]_0\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}) \cup \Psi^y((\,\delta_0^{x^\sigma}[\![e]\!]_0)_0).$$

Wir nehmen zunächst an, daß gilt:

$$\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \;\in\; \Psi^y([\![e]\!]_0\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}) \cup \Psi^y([\![e]\!]_0).$$

Dann folgt $\bar{f} < E_1 < D_1$ und $n < G$ direkt aus der Induktionsvoraussetzung an e. Anderenfalls schließen wir mit Lemma 3.5 (3), daß es Terme f' und g' geben muß mit $f \equiv f'\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}$ und $g \equiv (\,\delta_0^{x^\sigma} g')_0$, so daß gilt:

$$\psi(\omega \otimes f' \oplus g' + n) \;\in\; \Psi^y([\![e]\!]_0).$$

Dann ergibt die Induktionsvoraussetzung an e aber $\bar{f'} \equiv \bar{f} < E_1 < D_1$ sowie $n < G$.

Sei nun $t \in \mathrm{T}^y_{ji}([\![d]\!]_j)$. Im Falle $j = i$ folgt $\bar{t} \leq d_i < D_i$ direkt mit Teil (1). Im folgenden gehen wir daher von $j < i$ aus und unterscheiden drei Fälle:

- $j > g\sigma+1$: Dann muß schon $t \in \mathrm{T}^y_{ji}([\![e]\!]_j)$ gelten, so daß wir direkt die Induktionsvoraussetzung anwenden können.
- $1 \leq j \leq g\sigma + 1$: In dieser Situation ist

$$[\![d]\!]_j \quad \preceq \quad \bigoplus_{k=0}^{j} (\,\delta_k^{x^\sigma} [\![e]\!]_k)_j \oplus [\![e]\!]_j \, \{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}.$$

  Wegen $j < i$ gilt nun $t \in \mathrm{T}^y_{ji}([\![e]\!]_j\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\})$ – und wir wenden direkt die Induktionsvoraussetzung an – oder $t \in \mathrm{T}^y_{ji}((\,\delta_k^{x^\sigma} [\![e]\!]_k)_j)$ für ein $k \leq j$. Dann muß es aber wegen $1 \leq j < i$ einen Term $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{jj}((\,\delta_k^{x^\sigma} [\![e]\!]_k)_j)$ geben, in dem eine Variable y_l auftritt und für den $t \in \mathrm{T}^y_{j+1,i}(f)$ gilt. Nach Lemma 3.5 (1) gilt dann wegen $j > 0$

$$2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{jj}[\mathrm{T}^x_{kj}([\![e]\!]_k)].$$

  Also haben wir $2^f \otimes g \in \mathrm{Sub}^y_{kj}([\![e]\!]_k)$, so daß wir mit $t \in \mathrm{T}^y_{ji}(2^f \otimes g)$ schließlich $t \in \mathrm{T}^y_{ki}([\![e]\!]_k)$ erhalten und die Induktionsvoraussetzung an e die gewünschte Beziehung $\bar{t} < D_i$ liefert.
- $j = 0$: Es ist

$$[\![d]\!]_0 = \mathrm{L}^{x^\sigma}([\![e]\!]) \cdot (\,\delta_0^{x^\sigma} [\![e]\!]_0)_0 \oplus [\![e]\!]_0 \, \{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}.$$

  Wie eben ist lediglich der Fall

$$t \in \mathrm{T}^y_{0i}((\,\delta_0^{x^\sigma} [\![e]\!]_0)_0)$$

  interessant. Wegen $j < i$ muß es dann in $\Psi^y((\,\delta_0^{x^\sigma} [\![e]\!]_0)_0)$ einen Term $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n)$ geben mit $t \in \mathrm{T}^y_{1i}(f)$. Nun können wir Lemma 3.5 (3) anwenden, nach dem einer der beiden folgenden Fälle zutrifft:

  1. Es gilt $\psi(\omega \otimes f \oplus g + n) \in \Psi^y([\![e]\!]_0) \cup \Psi^y([\![e]\!]_0\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\})$. Mit $t \in \mathrm{T}^y_{0i}(\psi(\omega \otimes f \oplus g + n))$ erhalten wir dann

$$t \;\in\; \mathrm{T}^y_{0i}([\![e]\!]_0) \cup \mathrm{T}^y_{0i}([\![e]\!]_0\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}),$$

     also mit der Induktionsvoraussetzung $\bar{t} < E_i < D_i$.
  2. Es gibt Terme f' und g' mit $f \equiv f'\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}$, $g \equiv (\,\delta_0^{x^\sigma} g')_0$ und $\psi(\omega \otimes f' \oplus g' + n) \in \Psi^y([\![e]\!]_0)$. Aus $t \in \mathrm{T}^y_{1i}(f)$ folgt die Existenz eines $t' \in \mathrm{T}^y_{1i}(f')$ mit $t \equiv t'\{[\![x]\!] := \vec{1}\,\}$. Wie schon im ersten Fall erhalten wir $t' \in \mathrm{T}^y_{0i}([\![e]\!]_0)$ und $\bar{t'} \equiv \bar{t} < D_i$.

Damit ist das Lemma vollständig bewiesen. □

Beweis von Korollar 4. Die Eigenschaften 1 und 2 ergeben sich aus Satz 2, Lemmata 3.8, 3.9 und [5].

Sei $c^0 \in \mathcal{T}$ geschlossen. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $c^0 \rhd \ldots \rhd \underline{m}$. Wir definieren $val(c^0) := m$. Nach Satz 2 ist $[c^0]_0$ eine obere Schranke für $val(c^0)$ und die Länge jeder Reduktionskette ausgehend von c^0. Sei nun $a^1 \in \mathcal{T}_n$ geschlossen. Dann definiert a^1 eine Funktion

$$m \mapsto val(a\underline{m}),$$

und wir haben für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$[a\underline{m}]_0 \quad \geq \quad D_a(m),\, val(a\underline{m}).$$

Die Funktion

$$m \mapsto [a\underline{m}]_0 = \psi(\underbrace{\omega \otimes [a]_1 \oplus [a]_0}_{<\omega_{n+2} \text{ nach L. 3.9}} + m)$$

ist nun $<\omega_{n+2}$-rekursiv (vgl. [5]), woraus folgt, daß auch die Funktionen D_a und $m \mapsto val(a\underline{m})$ $<\omega_{n+2}$-rekursiv sind. Wir erhalten mithin, daß die in T_n definierbaren Funktionen $<\omega_{n+2}$-rekursiv und die in T definierbaren Funktionen $<\varepsilon_0$-rekursiv sind.

Sei jetzt ein Term $a^\sigma \in \mathcal{T}$ mit $\mathrm{dp}(a^\sigma)$, $G(a^\sigma) \leq m$ und $RG(a^\sigma) \leq n+2$ gegeben. Dann haben wir nach Lemma 3.9

$$\begin{aligned}
\overline{(\llbracket a^\sigma \rrbracket_0)} \quad &< \quad \psi(\underbrace{\omega \otimes 2_{n+1}(\omega \otimes 2_{m+1}(2(m+1) + 2\mathrm{dp}(a^\sigma)))}_{<\omega_{n+2}}) \\
&< \quad \psi(\omega_{n+2} + m) \quad \text{nach Proposition 2 (6).}
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$D_{T_n}(m) \quad < \quad \psi(\omega_{n+2} + m),$$

also ist D_{T_n} eine ω_{n+2}-rekursive Funktion. Genauso folgt unter Fortlassung der Einschränkung an $RG(a^\sigma)$, daß D_T eine ε_0-rekursive Funktion ist.

Schließlich ist PA in T funktional-interpretierbar (vgl. [10, 21, 17]) und $I\Sigma_{n+1}$ ist in T_n funktional-interpretierbar (vgl. [14]). □

Schlußbemerkung. Wir haben bewiesen, daß die in T_n definierbaren Funktionen $<\omega_{n+2}$-rekursiv sind. In beispielsweise [6] wird gezeigt, daß die $<\omega_{n+2}$-rekursiven Funktionen $I\Sigma_{n+1}$-beweisbar rekursiv sind. Aus den Ergebnissen von Parsons [14] folgt wie bereits erwähnt, daß die $I\Sigma_{n+1}$-beweisbar rekursiven Funktionen in T_n definierbar sind. Damit erhalten wir insgesamt, daß die in T_n definierbaren Funktionen *genau* die $<\omega_{n+2}$-rekursiven und diese wiederum *genau* die $I\Sigma_{n+1}$-beweisbar rekursiven Funktionen sind. Ferner haben wir gezeigt, daß die in T definierbaren Funktionen $<\varepsilon_0$-rekursiv sind. Die $<\varepsilon_0$-rekursiven Funktionen sind nun ihrerseits PA-beweisbar rekursiv und mit der Funktionalinterpretierbarkeit von PA in T folgt, daß die PA-beweisbar rekursiven Funktionen sämtlich in T definierbar sind. Zusammenfassend erhalten wir daraus, daß die T-definierbaren Funktionen *genau* die $<\varepsilon_0$-rekursiven und diese wiederum *genau* die PA-beweisbar rekursiven Funktionen sind.

Literaturverzeichnis

[1] H. P. Barendregt: *The Lambda Calculus. Its Syntax and Semantics.* North-Holland, 1985.

[2] A. Beckmann und A. Weiermann: *A term rewriting characterization of the polytime functions and related complexity classes.* Archive for Mathematical Logic 36 (1996), 11-30.

[3] A. Beckmann und A. Weiermann: *How to characterize the elementary recursive functions by Howard-Schütte-style methods.* Preprint Münster 1996. Zur Veröffentlichung eingereicht.

[4] E. A. Cichon und A. Weiermann: *Term rewriting theory for the primitive recursive functions* Annals of Pure and Applied Logic 83 (3) (1997), 199-223.

[5] W. Buchholz, E. A. Cichon und A. Weiermann: *A uniform approach to fundamental sequences and hierarchies.* Mathematical Logic Quarterly 40 (1994), S. 273-286.

[6] W. Burr: *Verschiedene Charakterisierungen der $I\Sigma_{n+1}$-beweisbar rekursiven Funktionen.* Diplomarbeit, WWU Münster 1996.

[7] J. Diller und W. Nahm: *Eine Variante zur Dialectica-Interpretation der Heyting-Arithmetik endlicher Typen.* Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung 16 (1974), S. 49-66.

[8] G. Gentzen: *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.* Mathematische Annalen 112 (1936), S. 493-565.

[9] G. Gentzen: *Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie.* Forschung in Logik und Grundlegung der exakten Wissenschaften. N. S. 4, S. 19-44. Hirzel, Leipzig 1938.

[10] K. Gödel: *Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes.* Dialectica 12 (1958), S. 280-287.

[11] J. Roger Hindley und Jonathan P. Seldin: *Introduction to Combinators and λ-Calculus.* London Mathematical Society. Cambridge University Press, 1986.

[12] W. A. Howard: *Assignment of ordinals to terms for primitive recursive functionals of finite type.* Intuitionism and Proof Theory. North Holland, Amsterdam 1970, S. 443-458.

[13] M. Möllerfeld: *Zur Rekursion längs fundierten Relationen und Hauptfolgen.* Diplomarbeit, WWU Münster 1996.

[14] C. Parsons: *On n-quantifier induction.* The Journal of Symbolic Logic 37/3 (1972), S. 466-482.

[15] W. Pohlers: *Proof Theory. An Introduction.* Lecture Notes in Mathematics 1407. Springer 1989.

[16] W. Pohlers: *Proof theory and ordinal analysis.* Archive for Mathematical Logic 30 (1991), S. 311-376.

[17] K. Schütte: *Proof Theory.* Springer, 1977.

[18] H. Schwichtenberg: *Definierbare Funktionen im λ-Kalkül mit Typen.* Archiv für mathematische Logik 17 (1976), S. 113-114.

[19] H. Schwichtenberg: *Complexity of Normalization in the Pure Typed Lambda-Calculus.* The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium. North-Holland, 1982.

[20] H. Schwichtenberg: *An upper bound for reduction sequences in the typed λ-calculus.* Archive for Mathematical Logic 30 (1991), S. 405-408.

[21] J. R. Shoenfield: *Mathematical Logic.* Addison-Wesley, New York 1967.

[22] A. S. Troelstra: *Metamathematical Investigations of Intuitionistic Arithmetic and Analysis.* Zweite, korrigierte Auflage von LNM 344 (1973), ILLC Prepublication Series X-93-05 (1993).

[23] A. S. Troelstra und H. Schwichtenberg: *Basic Proof Theory.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 43. Cambridge University Press, 1996.

[24] A. Weiermann: *Vereinfachte Kollabierungsfunktionen und ihre Anwendungen.* Archive for Mathematical Logic 31 (1991), S. 85-94.

[25] A. Weiermann: *A proof of strongly uniform termination for Gödel's T by methods from local predicativity.* Archive for Mathematical Logic 36 (1997), S. 445-460.

[26] A. Weiermann: *How is it that infinitary methods can be applied to finitary mathematics? Gödel's T: a case study.* The Journal of Symbolic Logic (erscheint).

[27] A. Weiermann: *How to characterize provably total functions by local predicativity.* Journal of Symbolic Logic 61 (1996), S. 52-69.