Rigide Bäume und das Automorphismenturmproblem

Philipp Moritz Lücke

dem Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung am Fachbereich 10
- Mathematik und Informatik -
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster als Diplomarbeit eingereicht

Münster, im Januar 2008

Vorwort

Das Automorphismenturmproblem ist ein interessantes Beispiel für algebraische Fragen, zu deren Beantwortung mengentheoretische Untersuchungen nötig sind.

In dieser Arbeit wird eine algebraische Invariante für Gruppen eingeführt und anschließend mit Hilfe eines kombinatorischen Prinzips Beispiele für Gruppen konstruiert, bei denen die Bestimmung dieser Invariante nur durch die Betrachtung der zugrunde liegenden Mengenlehre geschehen kann. Zuletzt wird die Konsistenz des verwendeten kombinatorischen Prinzips gezeigt.
Eine detaillierte Übersicht über die Resultate dieser Arbeit findet sich im ersten Kapitel.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Ralf Schindler für die Möglichkeit, mich mit einem so interessanten Thema befassen zu dürfen, und für seine Begleitung bei meiner Arbeit. Herzlich möchte ich mich auch bei Dr. Gunter Fuchs bedanken, der sich immer Zeit für die ausführliche Beantwortung meiner Fragen genommen hat und mir dadurch eine große Hilfe war. Außerdem danke ich Anne Kröber, Sarah Linders und Dominik Adolf für das Lesen und die Korrektur meiner Entwürfe. Darüber hinaus danke ich meinen Eltern für ihre Unterstützung, die mir dieses Studium erst ermöglicht hat, und Julie Albrecht für den Rückhalt, den sie mir im letzten halben Jahr gegeben hat.

Philipp Lücke

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Wir beginnen mit einer Einführung in das Automorphismenturmproblem und der Frage nach der Existenz von Gruppen mit stark manipulierbaren Automorphismentürmen.

Zu Beginn des ersten Abschnittes definieren wir den Automorphismenturm einer Gruppe und zitieren anschließend die grundlegenden Resultate von Simon Thomas und Joel Hamkins, die besagen, dass für jede Gruppe G eine Ordinalzahl $\tau(\mathrm{G})$ existiert, für die der Automorphismenturm von G nach $\tau(\mathrm{G})$ Schritten terminiert. Wir können also jeder Gruppe G die rein algebraisch definierte Invariante $\tau(\mathrm{G})$ zuordnen.

Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels erläutern wir, warum diese algebraische Definition auch von mengentheoretischem Interesse ist, indem wir zeigen, dass zur Berechnung von $\tau(\mathrm{G})$ auch der mengentheoretische Hintergrund, in dem diese Berechnung stattfindet, einbezogen werden muss, da $\tau(\mathrm{G})$ in verschiedenen Modellen der Mengenlehre, die G enthalten, völlig unterschiedliche Werte annehmen kann. Dazu präsentieren wir ein Ergebnis von Joel Hamkins und Simon Thomas, das zeigt, wie sich zu einer gegebenen Kardinalzahl κ Gruppen konstruieren lassen, für die $\tau(\mathrm{G})$ in Forcing-Erweiterungen jeden Wert zwischen 0 und κ annimmt. Zur Konstruktion dieser Gruppen verwenden wir ein kombinatorisches Prinzip für Graphen, das es uns ermöglicht, durch Forcing Isomorphismen zwischen im Grundmodell nicht-isomorphen Graphen zu erzeugen. Die Automorphismengruppe eines Graphen, der diese speziellen Graphen als Teilgraphen enthält, lässt sich dann ebenfalls durch Forcing entscheidend verändern. Mit Hilfe dieser Automorphismengruppen werden dann die gesuchten Gruppen konstruiert. Die Höhe des Automorphismenturms dieser Gruppen in einem gegebenen

Modell der Mengenlehre ist damit direkt abhängig von der Existenz gewisser Isomorphismen in diesem Modell.
Anschließend präsentieren wir zwei Sätze, aus denen die Konsistenz des verwendeten Prinzips folgt. Der erste leitet das verwendete Prinzip für Graphen aus einem verwandten kombinatorischen Prinzip für Bäume her. Das zweite Resultat von Gunter Fuchs und Joel Hamkins leitet dieses Prinzip für Bäume aus einem anderen kombinatorischen Prinzip her, das zum Beispiel im konstruktiblen Universum L gilt.

Diese Arbeit zeigt also nicht nur, dass die Existenz von Gruppen, deren algebraische Eigenschaften sich nicht ohne Kenntnis der zugrunde liegenden Mengenlehre bestimmen lassen, durch die Axiome von ZFC nicht ausgeschlossen wird, sondern auch, dass uns diese Gruppen in einer großen Klasse von relevanten ZFC-Modellen begegnen.

1.1 Das Automorphismenturmproblem

Um den Automorphismenturm einer beliebigen Gruppe zu definieren, benötigen wir zunächst den Begriff des direkten Limes von Gruppen.

1.1.1 Definition: (i) Eine partielle Ordnung $\mathbb{P} = \langle \mathrm{P}, \leq \rangle$ heißt gerichtet, falls für alle $p, q \in \mathrm{P}$ ein $r \in \mathrm{P}$ existiert mit $p, q \leq r$.

(ii) Sei $\langle \mathrm{P}, \leq \rangle$ eine gerichtete partielle Ordnung, $(\mathrm{G}_p)_{p \in \mathrm{P}}$ eine Familie von Gruppen und für $p, q \in \mathrm{P}$ mit $q \leq p$ sei $\xi_q^p : \mathrm{G}_q \longrightarrow \mathrm{G}_p$ ein Gruppenhomomorphismus.
Das Paar $\langle (\mathrm{G}_p)_{p \in \mathrm{P}}, (\xi_q^p)_{q \leq p} \rangle$ heißt direktes System von Gruppen, falls gilt:
· $\xi_p^p = \mathsf{id}_{\mathrm{G}_p}$ für alle $p \in \mathrm{P}$.
· $\xi_r^p = \xi_q^p \circ \xi_r^q$ für $r \leq q \leq p$.

(iii) Sei $\langle (\mathrm{G}_p)_{p \in \mathrm{P}}, (\xi_q^p)_{q \leq p} \rangle$ ein direktes System von Gruppen, G eine Gruppe und für jedes $p \in \mathrm{P}$ sei $\xi^p : \mathrm{G}_p \longrightarrow \mathrm{G}$ ein Gruppenhomomorphismus.
Das Paar $\langle \mathrm{G}, (\xi^p)_{p \in \mathrm{P}} \rangle$ heißt direkter Limes des direkten Systems, falls gilt:
· $\xi^q = \xi^p \circ \xi_q^p$ für alle $q \leq p$.
· Für jede Gruppe H und Gruppenhomomorphismen $\zeta^p : \mathrm{G}_p \longrightarrow \mathrm{H}$ mit $\zeta^q = \zeta^p \circ \xi_q^p$ für alle $q \leq p$ existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ mit $\zeta^p = \varphi \circ \xi^p$ für alle $p \in \mathrm{P}$, das heißt, das folgende Diagramm

kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_p \arrow[dr, "\xi^p"] \arrow[drr, bend left, "\zeta^p"] & & \\
& \mathrm{G} \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathrm{H} \\
\mathrm{G}_q \arrow[uu, "\xi^p_q"] \arrow[ur, "\xi^q"'] \arrow[urr, bend right, "\zeta^q"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die folgenden Eigenschaften des direkten Limes werden für uns wichtig sein. Ein Beweis des Lemmas findet sich zum Beispiel in [Rob96], Seite 22.

1.1.2 Lemma: Sei $\langle\, (\mathrm{G}_p)_{p\in\mathrm{P}}, (\xi^p_q)_{q\leq p}\rangle$ ein direktes System von Gruppen.

(i) Es existiert ein direkter Limes des direkten Systems.

(ii) Für zwei direkte Limiten $\langle\, \mathrm{G}, (\xi^p)_{p\in\mathrm{P}}\rangle$ und $\langle\, \mathrm{H}, (\zeta^p)_{p\in\mathrm{P}}\rangle$ des direkten Systems existiert ein Gruppenisomorphismus $\Phi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ mit $\zeta^p = \Phi \circ \xi^p$ für alle $p \in \mathrm{P}$.

(iii) Ist $\langle\, \mathrm{G}, (\xi^p)_{p\in\mathrm{P}}\rangle$ ein direkter Limes des direkten Systems, so gilt $\mathrm{G} = \bigcup_{p\in\mathrm{P}} \xi^p\,'' \,\mathrm{G}_p$.

(iv) Sind alle ξ^p_q Monomorphismen, das heißt injektive Homomorphismen, so auch alle ξ^p.

Sei G eine beliebige Gruppe. Mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung und der Identität als neutralem Element verfügt die Menge $\mathsf{Aut}(\mathrm{G})$ der Gruppenautomorphismen von G wieder über eine Gruppenstruktur und bezüglich dieser ist die Abbildung

$$i_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathsf{Aut}(\mathrm{G});\ g \longmapsto i_g := [h \mapsto h^g := g \circ h \circ g^{-1}]$$

ein Gruppenhomomorphismus. Wir nennen $\mathsf{Inn}(\mathrm{G}) := i_{\mathrm{G}}\,''\,\mathrm{G}$ die Gruppe der inneren Automorphismen von G. Für $g \in \mathrm{G}$ und $\pi \in \mathsf{Aut}(\mathrm{G})$ gilt

$$\pi \circ i_g \circ \pi^{-1} = i_{\pi(g)}. \tag{1.1}$$

Damit ist $\mathsf{Inn}(\mathrm{G})$ ein Normalteiler von $\mathsf{Aut}(\mathrm{G})$.
Die Iteration dieser Konstruktion führt zum Begriff des Automorphismenturms einer Gruppe.

1.1.3 Definition: Sei G eine beliebige Gruppe.
Definiere rekursiv Gruppen G^α und Gruppenhomomorphismen $\xi^\alpha_\beta : \mathrm{G}_\beta \longrightarrow \mathrm{G}_\alpha$ für $\beta \leq \alpha$, so dass $\langle\, (\mathrm{G}^\beta)_{\beta<\alpha}, (\xi^\beta_\gamma)_{\gamma\leq\beta<\alpha}\rangle$ für alle $\alpha \in \mathsf{Ord}$ ein direktes System von Gruppen bildet:

· $G^0 := G$ und $\xi_0^0 := \mathsf{id}_G$.
· $G^{\alpha+1} := \mathsf{Aut}(G^\alpha)$, $\xi_{\alpha+1}^{\alpha+1} := \mathsf{id}_{\mathsf{Aut}(G^\alpha)}$ und $\xi_\beta^{\alpha+1} := i_{G^\alpha} \circ \xi_\beta^\alpha$ für $\beta \leq \alpha$.
· Für $\lambda \in \mathsf{Lim}$ sei $\langle\, G^\lambda, (\xi_\alpha^\lambda)_{\alpha<\lambda}\rangle$ ein direkter Limes von $\langle\, (G^\alpha)_{\alpha<\lambda}, (\xi_\beta^\alpha)_{\beta\leq\alpha<\lambda}\rangle$.
Mit $\xi_\lambda^\lambda := \mathsf{id}_{G^\lambda}$ sind die geforderten Bedingungen erfüllt.

Die Sequenz $\langle\, (G^\alpha)_{\alpha\in\mathsf{Ord}}, (\xi_\beta^\alpha)_{\beta\leq\alpha\in\mathsf{Ord}}\rangle$ heißt dann der Automorphismenturm von G und G^α die α-te Stufe des Automorphismenturms von G.
Wir sagen, der Automorphismenturm von G terminiert nach α Schritten, falls $\xi_\alpha^{\alpha+1}$ ein Isomorphismus ist und damit auch alle ξ_α^β für $\beta \geq \alpha$.

Für eine Gruppe G und eine Untergruppe H von G schreiben wir

$$\mathsf{C}_G(H) := \{\, g \in G \mid g \circ h = h \circ g \text{ für alle } h \in H\,\}$$

für den Zentralisator von H in G und $\mathsf{C}(G) := \mathsf{C}_G(G)$ für das Zentrum von G. Es gilt $\mathsf{Ker}(i_G) = \mathsf{C}(G)$.
Für eine Gruppe G mit trivialem Zentrum ist die Einbettung i_G somit injektiv und wegen (1.1) gilt zusätzlich

$$\mathsf{C}_{\mathsf{Aut}(G)}(\mathsf{Inn}(G)) = \{\mathsf{id}_G\}. \tag{1.2}$$

Damit ist auch $\mathsf{Aut}(G)$ eine Gruppe mit trivialem Zentrum.
Induktiv folgt nun aus 1.1.2, dass alle Homomorphismen ξ_β^α des Automorphismenturms Monomorphismen sind und alle Gruppen G^α ein triviales Zentrum besitzen. Für jedes $\alpha \in \mathsf{Ord}$ kann der Automorphismenturm von G bis zur α-ten Stufe mit einer aufsteigenden Sequenz $(\xi_\beta^\alpha\,''\, G^\beta)_{\beta\leq\alpha}$ von Untergruppen von G^α identifiziert werden.

Der Ausgangspunkt für diese Arbeit liegt in den nachfolgenden Resultaten, die zusammen zeigen, dass für jede Gruppe G eine minimale Ordinalzahl $\tau(G)$ existiert, für die $\xi_{\tau(G)}^{\tau(G)+1}$ ein Isomorphismus ist.
Wir nennen $\tau(G)$ die Höhe des Automorphismenturms von G.

1.1.4 Satz (Automorphismenturmtheorem)**:**
(i) (S. Thomas, [Tho98]) Der Automorphismenturm einer Gruppe G mit trivialem Zentrum terminiert in weniger als $\left(2^{|G|}\right)^+$ Schritten.
(ii) (J.D. Hamkins, [Ham98]) Für eine beliebige Gruppe G existiert eine Ordinalzahl α, so dass G^α eine Gruppe mit trivialem Zentrum ist.

1.2 Stark manipulierbare Automorphismentürme

Wir beginnen mit der Formulierung des verwendeten kombinatorischen Prinzips für Graphen. Um sie möglichst allgemein zu halten, verwenden wir die Sprache der Kategorientheorie (zu Beginn des 2. Kapitels geben wir eine kurze Einführung in alle grundlegenden verwendeten Begriffe und definieren alle auftauchenden Kategorien). Dadurch reduzieren sich die Beweise vieler Aussagen auf die Herleitung von sogenanntem „*abstract nonsense*“, das heißt den Nachweis universeller Eigenschaften bestimmter Objekte.
Wir bezeichnen die Kategorie der zusammenhängenden Graphen mit Graph_{con} und die Kategorie der Bäume mit Tree.
Der folgende Begriff ist für unser Ziel von zentralem Interesse:

1.2.1 Definition: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt rigide, falls die Identität id_{X} der einzige $\mathcal{C}$-Automorphismus von X ist.

Zur Formulierung des Prinzips benötigen wir außerdem noch die folgende Sprechweise:

1.2.2 Definition: Sei κ eine Kardinalzahl, E eine Äquivalenzrelation auf κ und $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Sequenz von rigiden, paarweise nicht-isomorphen Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$.
Wir sagen E wird durch eine partielle Ordnung $\mathbb{P}$ mit $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ realisiert, falls:
· $\mathbb{P}$ Kardinalitäten und Kofinalitäten erhält.
· $\mathbb{P}$ keine neuen κ-Sequenzen von Elementen des Grundmodells hinzufügt.
· $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash (\forall \alpha < \kappa)$ „$\check{\mathrm{X}}_\alpha$ *ist ein rigides Objekt von* $\mathcal{C}$“.
· $\mathbb{1}_{\mathbb{P}} \Vdash (\forall \alpha, \beta < \check{\kappa})\,[\check{\mathrm{X}}_\alpha \cong \check{\mathrm{X}}_\beta \;\longleftrightarrow\; \alpha\, \check{E}\, \beta]$.

Bei gegebener Kardinalzahl κ definieren wir für Paare $0 < \alpha \leq \beta < \kappa$ folgende, einfache Äquivalenzrelationen R^α_β auf κ

$$\gamma\, R^\alpha_\beta\, \delta \;:\equiv\; \gamma = \delta \,\vee\, \{\gamma, \delta\} \subseteq \{0\} \cup [\alpha, \beta]\,.$$

Das von uns verwendete Prinzip kann dann wie folgt formuliert werden:

1.2.3 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. $(\star)^{\mathcal{C}}_{\kappa}$ ist die Aussage:

> Es existiert eine Sequenz $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von rigiden, paarweise nicht-isomorphen Objekten von $\mathcal{C}$ und partielle Ordnungen $(\mathbb{P}^\alpha_\beta)_{0<\alpha\leq\beta<\kappa}$, so dass R^α_β für alle $0 < \alpha \leq \beta < \kappa$ durch $\mathbb{P}^\alpha_\beta$ mit $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ realisiert wird.

Mit diesem Prinzip lassen sich nun die Gruppen konstruieren, deren Automorphismenturm sich wie gewünscht durch Forcing manipulieren lässt.

Satz A(J. D. Hamkins, S. Thomas, [HT00]): Es gelte $(\star)^{\mathsf{Graph}_{con}}_{\kappa}$. Dann existiert für jedes $\alpha < \kappa$ eine Gruppe G mit $\tau(\mathrm{G}) = \alpha$ und trivialem Zentrum , so dass für alle $0 < \beta < \kappa$ eine partielle Ordnung $\mathbb{P}_\beta$ existiert, für die gilt:
· $\mathbb{P}_\beta$ erhält Kardinalitäten und Kofinalitäten.
· $\mathbb{P}_\beta$ fügt keine neuen κ-Sequenzen von Elementen des Grundmodells hinzu.
· $\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tau(\mathrm{G}) = \beta$.

Wir beweisen den Satz schrittweise in den Kapiteln 2-4.

Durch Kodierung erststufiger Strukturen in zusammenhängenden Graphen beweisen wir im ersten Abschnitt des 5. Kapitels den folgenden Satz.

Satz B: Sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Dann gilt

$$(\star)^{\mathsf{Tree}}_{\kappa} \longrightarrow (\star)^{\mathsf{Graph}_{con}}_{\kappa}.$$

Zuletzt zeigen wir, dass $(\star)^{\mathsf{Tree}}_{\kappa}$ aus einem bekannten kombinatorischen Prinzip folgt.

1.2.4 Definition: Sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Setze

$$\mathsf{Cof}_\kappa := \{\, \alpha < \kappa^+ \mid \mathsf{cof}(\alpha) = \kappa \,\}.$$

Dann ist $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$ die Aussage:

> Es existiert eine Sequenz $(\mathrm{D}_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{Cof}_\kappa}$ von Teilmengen von κ^+, so dass für jede Teilmenge A von κ^+ die Menge
>
> $$\{\, \alpha \in \mathsf{Cof}_\kappa \mid \alpha \cap \mathrm{A} = \mathrm{D}_\alpha \,\}$$
>
> stationär in κ^+ ist.

Aus $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$ folgt $\mathsf{Cof}_\kappa \neq \emptyset$ und κ ist somit eine reguläre Kardinalzahl. Im konstruktiblen Universum L gilt $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$ und $2^{<\kappa} = \kappa$ für unbeschränkt viele reguläre Kardinalzahlen κ, wie sich zum Beispiel in [Dev84] nachlesen lässt.

Zuletzt werden wir durch den Beweis des folgenden Satzes die Konsistenz von $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ zeigen.

Satz C (G. Fuchs, J. D. Hamkins, [FH07]): Für alle Kardinalzahlen κ gilt

$$(\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa) \wedge 2^{<\kappa} = \kappa) \longrightarrow (\star)_\kappa^{\mathsf{Tree}}.$$

Ist H eine Gruppe, $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung und $V[\mathrm{G}]$ eine $\mathbb{P}$-generische Erweiterung des Grundmodells V, so folgt aus $\tau(\mathrm{H})_V > 0$ trivialerweise auch $\tau(\mathrm{H})_{V[\mathrm{G}]} > 0$. Die obigen Resultate zeigen nun, dass dies die einzige nichttriviale in ZFC beweisbare Aussage über den Zusammenhang von $\tau(\mathrm{H})_V$ und $\tau(\mathrm{H})_{V[\mathrm{G}]}$ für beliebige Gruppen H und partielle Ordnungen $\mathbb{P}$ ist.

Kapitel 2

Gruppen von Automorphismen

In diesem Kapitel leiten wir die technischen Grundlagen zur Konstruktion der Gruppen aus Satz A und zum Nachweis ihrer geforderten Eigenschaften her. Diese Gruppen werden aus Automorphismen gewisser mathematischer Objekte bestehen. Dies eröffnet uns die Möglichkeit, anhand der Operationen der Automorphismen zusätzliche Informationen über die Struktur der jeweiligen Gruppen zu gewinnen.

Um möglichst allgemein über mathematische Strukturen zu sprechen, verwenden wir die Sprache der Kategorientheorie, die im ersten Abschnitt vorgestellt wird. In den folgenden beiden Abschnitten verallgemeinern wir die Begriffe der disjunkten Vereinigung und der Permutationsgruppe von der Kategorie der Mengen auf beliebige Kategorien. Mit Hilfe dieser Begriffe werden dann in den letzten beiden Abschnitten Objekte und Gruppen konstruiert, die im Beweis von Satz A verwendet werden.

2.1 Kategorien

Wir geben eine kurze Einführung in die Sprache der Kategorientheorie und entwickeln Begriffe, die für spätere Konstruktionen verwendet werden. Dabei folgen wir der Darstellung in [Mac98].

2.1.1 Definition: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Tupel

$$\mathcal{C} = \langle \mathsf{Ob}(\mathcal{C}), \mathsf{Mor}(\mathcal{C}), \mathsf{dom}_{\mathcal{C}}, \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}, \circ_{\mathcal{C}}, \mathsf{I}_{\mathcal{C}} \rangle$$

bestehend aus:

· Einer Klasse $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, den Objekten von $\mathcal{C}$.
· Einer Klasse $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$, den Morphismen oder Pfeilen von $\mathcal{C}$.
· Abbildungen $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}, \mathsf{cod}_{\mathcal{C}} : \mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, die jedem Morphismus seine Domäne und Kodomäne zuordnen.
· Einer Verknüpfungsabbildung

$$\circ_{\mathcal{C}} : \{\, \langle \varphi, \psi \rangle \in \mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \times \mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \,|\, \mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\psi) \,\} \longrightarrow \mathsf{Mor}(\mathcal{C}).$$

· Einer Abbildung $\mathsf{I}_{\mathcal{C}} : \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Mor}(\mathcal{C})$, die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ einen Identitäts-Morphismus $\mathsf{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})$ zuordnet.

für die folgende Axiome gelten:
(C1) $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\mathsf{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})) = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\mathsf{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})) = \mathrm{X}$ für alle $\mathrm{X} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.
(C2) $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\varphi \circ_{\mathcal{C}} \psi) = \mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\psi)$, $\mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\varphi \circ_{\mathcal{C}} \psi) = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ mit $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\psi)$.
(C3) $\varphi \circ_{\mathcal{C}} \mathsf{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}) = \varphi$, $\mathsf{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}) \circ_{\mathcal{C}} \psi = \psi$ für alle $\varphi, \psi \in \mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ mit $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathrm{X}$ und $\mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\psi) = \mathrm{X}$.
(C4) $\varphi \circ_{\mathcal{C}} (\psi \circ_{\mathcal{C}} \xi) = (\varphi \circ_{\mathcal{C}} \psi) \circ_{\mathcal{C}} \xi$ für alle $\varphi, \psi, \xi \in \mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ mit $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\psi)$ und $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\psi) = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\xi)$.

Immer wenn im Folgenden klar ist, von welcher Kategorie gesprochen wird, schreiben wir $\mathsf{id}_{\mathrm{X}} := \mathsf{I}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})$ und verzichten auf die entsprechenden Indizes.

Im Blickpunkt der Kategorientheorie liegt die Existenz von Morphismen mit gewissen Eigenschaften zwischen Objekten einer Kategorie.
Für $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ definieren wir die Klasse der Morphismen von X nach Y als

$$\mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) := \{\, \varphi \in \mathsf{Mor}(\mathcal{C}) \,|\, \mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathrm{X},\ \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\varphi) = \mathrm{Y} \,\}$$

und schreiben $\varphi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ oder $\mathrm{X} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Y}$ für $\varphi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.
Wichtige Eigenschaften von Morphismen können dabei häufig durch kommutative Diagramme dargestellt werden. Zum Beispiel besagt das Axiom (C4), dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W} \arrow[r, "\xi"] \arrow[dr, "\psi\circ_{\mathcal{C}}\xi"'] & \mathrm{X} \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi\circ_{\mathcal{C}}\psi"] & \\
& \mathrm{Y} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Z}
\end{tikzcd}$$

für alle $\xi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{W}, \mathrm{X})$, $\psi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ und $\varphi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ kommutiert.
Wir definieren einige weitere Begriffe, die wir später benötigen werden.

2.1.2 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

(i) $\mathcal{C}$ heißt lokal-klein, falls $\mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ für alle $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

(ii) Ein Morphismus φ heißt Monomorphismus, falls für alle Morphismen ψ, ξ mit $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\psi) = \mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\xi)$, $\mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\psi) = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}}(\xi) = \mathsf{dom}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ und $\varphi \circ \psi = \varphi \circ_{\mathcal{C}} \xi$ schon $\psi = \xi$ gilt.

(iii) Ein Morphismus $\varphi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ heißt Isomorphismus von X nach Y, falls ein $\varphi^{-1} \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ mit $\varphi \circ_{\mathcal{C}} \varphi^{-1} = \mathsf{id}_{\mathrm{Y}}$ und $\varphi^{-1} \circ_{\mathcal{C}} \varphi = \mathsf{id}_{\mathrm{X}}$ existiert. Mit $\mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ bezeichnen wir die Klasse der Isomorphismen von X nach Y. Wir schreiben $\mathrm{X} \cong \mathrm{Y}$, falls $\mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \neq \emptyset$, und sagen X und Y sind isomorph.

(iv) Für ein Objekt X von $\mathcal{C}$ definieren wir die Klasse der Automorphismen von X als $\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}) := \mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$.

Die folgenden Aussagen leiten sich direkt aus den jeweiligen Definitionen ab.

2.1.3 Proposition: (i) Die Komposition von zwei Monomorphismen ist wieder ein Monomorphismus, die Komposition von zwei Isomorphismen ist wieder ein Isomorphismus und alle Isomorphismen sind Monomorphismen.

(ii) $\cong$ ist eine Äquivalenzrelation.

(iii) Ist $\mathcal{C}$ lokal-klein, so verfügt die Menge $\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})$ für jedes Objekt $\mathrm{X} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ über eine Gruppenstruktur mit der Kompositionsabbildung als Verknüpfung und id_{X} als Eins.
Für $\varphi \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ ist

$$k_{\varphi} : \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y}),\ \pi \longmapsto \pi^{\varphi} := \varphi \circ \pi \circ \varphi^{-1} \tag{2.1}$$

ein Isomorphismus von Gruppen mit $k_{\varphi}^{-1} = k_{\varphi^{-1}}$.

2.1.4 Definition: Eine Kategorie $\mathcal{D}$ heißt Unterkategorie einer Kategorie $\mathcal{C}$, falls $\mathsf{Ob}(\mathcal{D}) \subseteq \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathsf{Mor}(\mathcal{D}) \subseteq \mathsf{Mor}(\mathcal{C})$, $\mathsf{dom}_{\mathcal{D}} = \mathsf{dom}_{\mathcal{C}} \restriction \mathsf{Mor}(\mathcal{D})$, $\mathsf{cod}_{\mathcal{D}} = \mathsf{cod}_{\mathcal{C}} \restriction \mathsf{Mor}(\mathcal{D})$, $\mathsf{I}_{\mathcal{D}} = \mathsf{I}_{\mathcal{C}} \restriction \mathsf{Ob}(\mathcal{D})$ und $\varphi \circ_{\mathcal{C}} \psi = \varphi \circ_{\mathcal{D}} \psi$ für alle passenden $\varphi, \psi \in \mathsf{Mor}(\mathcal{D})$.
$\mathcal{D}$ heißt volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$, wenn zusätzlich $\mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathsf{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ für alle $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{D})$ gilt.

Jede Teilklasse von $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ definiert also eine eindeutige volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ und eine volle Unterkategorie wird eindeutig durch ihre Objekte definiert.

Als Nächstes geben wir eine Übersicht über alle im Folgenden auftretenden Kategorien. Um diese Kategorien mit wenig Aufwand einzuführen, bemerken wir zunächst, dass eine Kategorie $\mathcal{C}$ schon vollständig durch die Festlegung der folgenden Punkte charakterisiert wird:
· Die Klasse $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.
· Definition der Klasse $\mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ in den Parametern X,Y.
· Eine Abbildung $\mathsf{I} : \mathsf{Ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow V$ mit $\mathsf{I}(\mathrm{X}) \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X},\mathrm{X})$ für alle $\mathrm{X} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.
· Definition einer Verknüpfungsabbildung

$$\circ_{\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}} : \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \times \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Z}),$$

die (C3)+(C4) erfüllt, in den Parametern X,Y,Z.
Dann kann man zum Beispiel

$$\mathsf{Mor}(\mathcal{C}) := \{\, \langle \varphi, \mathrm{X},\mathrm{Y} \rangle \,|\, \mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C}), \varphi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \,\}$$

setzen und alle Abbildungen aus 2.1.1 in offensichtlicher Weise definieren.

Bei jeder im Weiteren auftretenden Kategorie $\mathcal{C}$ existieren zu zwei Objekten $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ Mengen $a(\mathrm{X})$, $a(\mathrm{Y})$ mit $\mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \subseteq {}^{a(\mathrm{X})}a(\mathrm{Y})$. Identität und Verknüpfung sind durch die Identitätsabbildung $\mathsf{id}_{a(\mathrm{X})}$ und die Komposition von Abbildungen gegeben.
Damit beweist ZFC, dass jede dieser Kategorien lokal-klein ist.

2.1.5 Beispiele: (i) Die Kategorie Set der Mengen:
Objekte von Set sind Mengen. Morphismen von Set sind Abbildungen zwischen Mengen. Es gilt also $\mathsf{Ob}(\mathsf{Set}) = V$ und $\mathsf{Mor}_{\mathsf{Set}}(x,y) = {}^{x}y$.

(ii) Die Kategorie Graph der (ungerichteten) Graphen:
Objekte von Graph sind Graphen, das heißt Paare $\Gamma = \langle\, \mathrm{P},\mathrm{K} \rangle$ bestehend aus einer Menge P, den Punkten von Γ, und $\mathrm{K} \subseteq \{\, k \subseteq \mathrm{P} \,|\, 1 \leq |k| \leq 2 \,\}$, den Kanten von Γ.
Ein Morphismus f zwischen zwei Graphen $\langle\, \mathrm{P},\mathrm{K} \rangle$ und $\langle\, \mathrm{Q},\mathrm{L} \rangle$ ist eine Abbildung $f : \mathrm{P} \longrightarrow \mathrm{Q}$ mit $f\,''\, k \in \mathrm{L}$ für alle $k \in \mathrm{K}$.

(iii) Die Kategorie Graph_{con} der zusammenhängenden Graphen:
Ein Weg der Länge $n < \omega$ durch einen Graphen $\Gamma = \langle \mathrm{P},\mathrm{K} \rangle$ ist eine Abbildung $w : n+1 \longrightarrow \mathrm{P}$ mit $\{w(m), w(m+1)\} \in \mathrm{K}$ für alle $m < n$.
Ein nicht-leere Teilmenge X von P heißt zusammenhängend, wenn für alle $p, q \in \mathrm{X}$ ein $n < \omega$ und ein Weg w der Länge n mit $w(0) = p$ und $w(n) = q$ existieren. Eine $\subseteq$-maximale zusammenhängende Teilmenge von P

heißt Zusammenhangskomponente von Γ. Γ heißt zusammenhängend, falls P zusammenhängend ist.
Die Kategorie Graph_{con} ist die volle Unterkategorie von Graph, deren Objekte zusammenhängende Graphen sind.

(iv) Die Kategorie Field der Körper:
Objekte sind Körper, Morphismen sind Körperhomomorphismen.

(v) Die Kategorie $\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}$ der $\mathfrak{L}$-Strukturen:
Sei $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{P} \rangle$ eine Sprache der Logik 1. Stufe. Objekte von $\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}$ sind $\mathfrak{L}$-Strukturen $\mathcal{S} = \langle \mathbb{S}, \mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathbb{P} \rangle$. Ein Morphismus φ zwischen zwei Strukturen $\mathcal{S} = \langle \mathbb{S}, \mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathbb{P} \rangle$ und $\mathcal{S}' = \langle \mathbb{S}', \mathbb{C}', \mathbb{F}', \mathbb{P}' \rangle\rangle$ ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}'$ mit:
(a) $\varphi(c_{\mathcal{S}}) = c_{\mathcal{S}'}$ für alle $c \in \mathfrak{C}$.
(b) $\varphi(f_{\mathcal{S}}(x_1, \ldots, x_n)) = f_{\mathcal{S}'}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$ für alle $f \in \mathfrak{F}$ mit $\#f = n$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{S}$.
(c) $(x_1, \ldots, x_n) \in P_{\mathcal{S}} \Rightarrow (\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) \in P_{\mathcal{S}'}$ für alle $P \in \mathfrak{P}$ mit $\#P = n$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{S}$.
Außerdem definieren wir für eine Kardinalzahl κ

$$\mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\leq \kappa} = \{ \langle \mathbb{S}, \mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathbb{P} \rangle \in \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}) \mid |\mathbb{S}| \leq \kappa \}$$

und analog $\mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\kappa}$ für die Klasse der $\mathfrak{L}$-Strukturen, deren Träger Kardinalität κ besitzt.

(vi) Die Kategorie PO der partiellen Ordnungen:
Objekte von PO sind partielle Ordnungen, das heißt Paare $\mathbb{P} = \langle \mathsf{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ bestehend aus einer Menge P und einer reflexiven und transitiven Relation $\leq_{\mathbb{P}}$ auf P. Ein Morphismus zwischen zwei partiellen Ordnungen $\mathbb{P} = \langle \mathsf{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ und $\mathbb{Q} = \langle \mathsf{Q}, \leq_{\mathbb{Q}} \rangle$ ist eine Abbildung $\varphi : \mathsf{P} \longrightarrow \mathsf{Q}$ mit $\varphi(p) \leq_{\mathbb{Q}} \varphi(q)$ für alle $p, q \in \mathsf{P}$ mit $p \leq_{\mathbb{P}} q$.
Wir nennen $\mathbb{P}$ strikt, falls für alle $p, q \in \mathsf{P}$ mit $p \leq_{\mathbb{P}} q$ und $q \leq_{\mathbb{P}} p$ bereits $p = q$ gilt.
Ist $\mathfrak{L}_{\leq}$ die Sprache der Logik 1. Stufe mit einem zweistelligen Prädikatensymbol $\leq$, so kann PO als volle Unterkategorie von $\mathsf{S}_{\mathfrak{L}_{\leq}}$ aufgefasst werden, indem man $\langle \mathsf{P}, \leq_{\mathbb{P}} \rangle$ mit der Struktur $\langle \mathsf{P}, \emptyset, \emptyset, \{\leq_{\mathbb{P}}\} \rangle$ identifiziert.

(vii) Die Kategorie Tree der Bäume:
Wir nennen eine partielle Ordnung $\mathbb{T} = \langle \mathsf{T}, \leq_{\mathbb{T}} \rangle$ einen Baum, falls $\mathbb{T}$ strikt ist und für alle $t \in \mathbb{T}$

$$s <_{\mathbb{P}} t \;:=\; s \leq_{\mathbb{T}} t \wedge s \neq t$$

eine Wohlordnung auf

$$pred_{\mathbb{T}}(t) := \{ s \in \mathsf{T} \mid s <_{\mathbb{T}} t \}$$

definiert. Tree ist die volle Unterkategorie von PO mit Bäumen als Objekte.

Die Automorphismengruppen, die wir konstruieren werden, sollen auch in generischen Erweiterungen des Grundmodells auf den zugehörigen Objekten operieren. Dazu muss zunächst sichergestellt werden, dass die Objekte und Morphismen der Kategorie aus dem Grundmodell auch in der generischen Erweiterung dieser Kategorie angehören.

2.1.6 Definition: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt aufwärts-absolut, falls die definierenden Formeln für die Klassen $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathsf{Mor}(\mathcal{C})$ und Abbildungen $\mathsf{dom}_{\mathcal{C}}$, $\mathsf{cod}_{\mathcal{C}}$, $\mathsf{I}_{\mathcal{C}}$, $\circ_{\mathcal{C}}$ aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle sind.

Alle in 2.1.5 verwendeten Formeln zur Definition der jeweiligen Kategorien sind absolut bezüglich transitiven ZFC-Modellen. Somit sind alle aufgeführten Kategorien aufwärts-absolut.

2.2 Koprodukte

Der Begriff des Koproduktes verallgemeinert die Eigenschaften der disjunkten Vereinigung einer Familie von Mengen auf beliebige Kategorien. Er wird es uns ermöglichen, aus einer gegebenen Familie von Objekten ein neues Objekt mit nützlichen Eigenschaften zu konstruieren.

2.2.1 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, I eine Indexmenge und $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{C}$.
Ein Paar $\mathrm{K} = \langle \mathrm{X}, (\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ heißt Koprodukt der $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, falls gilt:

- $\mathrm{X} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $\iota_{\mathrm{i}} \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i}, \mathrm{X})$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.
- Für alle $\mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ und jede Familie von Morphismen $(\varphi_{\mathrm{i}} \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i}, \mathrm{Y}))_{\mathrm{I}\in\mathrm{I}}$ existiert ein eindeutiger Morphismus $\Phi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, so dass $\varphi_{\mathrm{i}} = \Phi \circ \iota_{\mathrm{i}}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ gilt und somit das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, dashed, "\Phi"] & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X_i} \arrow[u, "\iota_{\mathrm{i}}"] \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{i}}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

kommutiert.

Die zu einem Koprodukt gehörigen Morphismen $(\iota_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ werden als Einbettungen in das Koprodukt bezeichnet.

Das folgende Lemma zeigt, dass das Objekt X durch die universelle Eigenschaft des Koproduktes schon bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist.

2.2.2 Lemma: Seien $\langle\,\mathrm{X}, (\iota_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ und $\langle\,\mathrm{X}', (\iota'_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ Koprodukte einer Familie $(\mathrm{X}_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$.

(i) Gilt für $\mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ und $\varphi, \psi \in \mathsf{Mor}_\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ $\varphi \circ \iota_\mathrm{i} = \psi \circ \iota_\mathrm{i}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$, so folgt $\varphi = \psi$.

(ii) Es existiert ein Isomorphismus $\Phi \in \mathsf{Iso}_\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ mit

$$\iota'_\mathrm{i} = \Phi \circ \iota_\mathrm{i} \tag{2.3}$$

für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.

(iii) Ist die Einbettung ι_i für ein $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ ein Monomorphismus, so auch ι'_i.

Beweis. (i) Aus der universellen Eigenschaft des Koproduktes folgt die Existenz eines eindeutigen Morphismus $\Phi \in \mathsf{Mor}_\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ mit $\Phi \circ \iota_\mathrm{i} = \varphi \circ \iota_\mathrm{i}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Da sowohl φ als auch ψ diese Gleichungen für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ erfüllen, folgt $\varphi = \Phi = \psi$.
(ii) Die universelle Eigenschaft des Koproduktes liefert Morphismen $\Phi \in \mathsf{Mor}_\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ und $\Psi \in \mathsf{Mor}_\mathcal{C}(\mathrm{X}', \mathrm{X})$ mit $\iota'_\mathrm{i} = \Phi \circ \iota_\mathrm{i}$ und $\iota_\mathrm{i} = \Psi \circ \iota'_\mathrm{i}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Daraus folgt $\mathsf{id}_\mathrm{X} \circ \iota_\mathrm{i} = \iota_\mathrm{i} = \Psi \circ \iota'_\mathrm{i} = (\Psi \circ \Phi) \circ \iota_\mathrm{i}$ und $\mathsf{id}_{\mathrm{X}'} \circ \iota'_\mathrm{i} = \iota'_\mathrm{i} = \Phi \circ \iota_\mathrm{i} = (\Phi \circ \Psi) \circ \iota'_\mathrm{i}$ und mit (i) folgt $\Psi = \Phi^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[rr, "\mathsf{id}_\mathrm{X}"] \arrow[dr, dashed, "\Phi"] & & \mathrm{X} \\
& \mathrm{X}' \arrow[ur, dashed, "\Psi"'] & \\
& \mathrm{X}_\mathrm{i} \arrow[u, "\iota'_\mathrm{i}"'] \arrow[uul, "\iota_\mathrm{i}"] \arrow[uur, "\iota_\mathrm{i}"'] &
\end{tikzcd}$$

(iii) Sei Φ der Isomorphismus mit (2.3). Nach 2.1.3,(i) ist dann auch ι'_i ein Monomorphismus. □

2.2.3 Beispiele: (i) Koprodukte in Set:
Sei $(\Delta_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine beliebige Familie von Mengen. Wir definieren

$$\bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta_\mathrm{i} := \{\,\langle x, \mathrm{i}\rangle \mid \mathrm{i} \in \mathrm{I}, x \in \Delta_\mathrm{i}\,\}$$

und für $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ Einbettungen

$$e_\mathrm{i} : \Delta_\mathrm{i} \longrightarrow \bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta_\mathrm{i},\ x \longmapsto \langle\, x, \mathrm{i}\rangle.$$

Dann ist $\langle \bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta_\mathrm{i}, (e_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ ein Koprodukt der $(\Delta_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, da für jede Menge Ω und Abbildungen $(\varphi_\mathrm{i} : \Delta_\mathrm{i} \longrightarrow \Omega)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ die eindeutig bestimmte Abbildung mit (2.2) durch $\Phi\langle\, x, \mathrm{i}\rangle := \varphi_\mathrm{i}(x)$ gegeben ist.
Ist $\mathrm{I} = \{\mathrm{i}_0, \ldots, \mathrm{i}_n\}$ endlich, so schreiben wir auch

$$\Delta_{\mathrm{i}_0} \sqcup \cdots \sqcup \Delta_{\mathrm{i}_n} := \bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta_\mathrm{i}.$$

Da alle e_i injektiv sind, folgt aus 2.2.2,(iii), dass die Einbettungen aller Koprodukte von Set Monomorphismen sind.

(ii) Koprodukte in Graph:
Für eine Familie $(\Gamma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von Graphen mit $\Gamma_\mathrm{i} = \langle \mathrm{P}_\mathrm{i}, \mathrm{K}_\mathrm{i}\rangle$ definieren wir den Graphen

$$\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i} := \langle \bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{P}_\mathrm{i}, \{\, \{\langle\, p, \mathrm{i}\rangle, \langle\, q, \mathrm{i}\rangle\} \mid \mathrm{i} \in \mathrm{I},\ \{p, q\} \in \mathrm{K}_\mathrm{i}\, \}\rangle.$$

Dann gilt $e_\mathrm{i} \in \mathsf{Mor}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma_\mathrm{i}, \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i})$ und $\langle \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i}, (e_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ bildet ein Koprodukt der $(\Gamma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$. Wie in (i) folgt, dass alle Einbettungen in Koprodukte in Graph Monomorphismen sind.
Ist $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und X eine Zusammenhangskomponente von Γ_i, so ist nach Konstruktion $\mathrm{X} \times \{\mathrm{i}\}$ eine Zusammenhangskomponente von $\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i}$ und jede Zusammenhangskomponente von $\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i}$ ist von dieser Form.

Das folgende Lemma soll eine ausreichende Flexibilität beim Rechnen mit Koprodukten sicherstellen.

2.2.4 Lemma: Seien I,J,K Indexmengen, $\sigma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{K}$ eine Bijektion und

$$\mathrm{K} = \dot{\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}} \mathrm{K}_\mathrm{j}$$

eine Partition von K. Zu Familien $(\mathrm{X}_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, $(\mathrm{Y}_\mathrm{k})_{\mathrm{k}\in\mathrm{K}}$ von Objekten einer Kategorie $\mathcal{C}$ sei $\pi_\mathrm{i} \in \mathsf{Iso}_\mathcal{C}(\mathrm{X}_\mathrm{i}, \mathrm{Y}_{\sigma(\mathrm{i})})$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.
Ist $\langle\, \mathrm{Y}^\mathrm{j}, (\iota^\mathrm{j}_\mathrm{k})_{\mathrm{k}\in\mathrm{K}_\mathrm{j}}\rangle$ für jedes $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ ein Koprodukt der $(\mathrm{Y}_\mathrm{k})_{\mathrm{k}\in\mathrm{K}_\mathrm{j}}$ und $\langle\, \mathrm{Y}, (\iota_\mathrm{j})_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}\rangle$ ein Koprodukt der $(\mathrm{Y}^\mathrm{j})_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}$, so bildet $\langle\, \mathrm{Y}, (\iota_\mathrm{j} \circ \iota^\mathrm{j}_{\sigma(\mathrm{i})} \circ \pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ ein Koprodukt der $(\mathrm{X}_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$.

Beweis. Sei $\mathrm{Z} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ und $\varphi_\mathrm{i} \in \mathsf{Mor}_\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$ für $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Dann ist $\varphi_{\sigma^{-1}(\mathrm{k})} \circ \pi^{-1}_{\sigma^{-1}(\mathrm{k})} \in \mathsf{Mor}_\mathcal{C}(\mathrm{Y_k}, \mathrm{Z})$ für alle $\mathrm{k} \in \mathrm{K_j}$ und für $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ existiert ein eindeutiger Morphismus $\Phi_\mathrm{j} : \mathrm{Y^j} \longrightarrow \mathrm{Z}$ mit $\Phi_\mathrm{j} \circ \iota^\mathrm{j}_{\sigma(\mathrm{i})} = \varphi_\mathrm{i} \circ \pi_\mathrm{i}^{-1}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ mit $\sigma(\mathrm{i}) \in \mathrm{K_j}$. Damit existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\Phi : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Z}$ mit $\Phi \circ \iota_\mathrm{j} = \Phi_\mathrm{j}$ für alle $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ und $\Phi \circ \iota_\mathrm{j} \circ \iota^\mathrm{j}_{\sigma(\mathrm{i})} \circ \pi_\mathrm{i} = \Phi_\mathrm{j} \circ \iota^\mathrm{j}_{\sigma(\mathrm{i})} \circ \pi_\mathrm{i} = \varphi_\mathrm{i} \circ \pi_\mathrm{i}^{-1} \circ \pi_\mathrm{i} = \varphi_\mathrm{i}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[rr, dashed, "\Phi"] & & \mathrm{Z} \\
\mathrm{Y^j} \arrow[u, "\iota_\mathrm{j}"] \arrow[urr, dashed, "\Phi_\mathrm{j}"] & & \\
\mathrm{Y}_{\sigma(\mathrm{i})} \arrow[u, "\iota^j_{\sigma(\mathrm{i})}"] \arrow[uurr, "\varphi_\mathrm{i} \circ \pi_\mathrm{i}^{-1}"'] & & \mathrm{X_i} \arrow[ll, "\pi_\mathrm{i}"] \arrow[uu, "\varphi_\mathrm{i}"']
\end{tikzcd}$$

Aus der Eindeutigkeit der Φ_j folgt die Eindeutigkeit von Φ mit dieser Eigenschaft. $\square$

Im Beweis von Satz A wollen wir die universelle Eigenschaft (2.2) von konstruierten Koprodukten auch in generischen Erweiterungen des Grundmodells verwenden. Dies motiviert die folgende Definition.

2.2.5 Definition: Wir sagen eine Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt aufwärts-absolute Koprodukte, falls $\mathcal{C}$ aufwärts-absolut ist und für jede Familie $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ von Objekten von $\mathcal{C}$ die Aussage

„K *ist Koprodukt der* $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$“

aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle ist.

Die Konstruktionen beliebiger Koprodukte in Set und Graph aus 2.2.3 sind aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle. Da jedes Koprodukt in Set und Graph isomorph zu einer solchen Konstruktion ist und Isomorphie in aufwärts-absoluten Kategorien eine bezüglich transitiver ZFC-Modelle aufwärts-absolute Eigenschaft ist, besitzen die Kategorien Set und Graph aufwärts-absolute Koprodukte.

2.3 Die Kategorie $\mathcal{A}(\mathcal{C})$

Ist $\Delta \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Set})$ eine Menge, so nennen wir eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathsf{Sym}(\Delta) := \{\, f : \Delta \longrightarrow \Delta \mid f \text{ ist bijektiv} \,\}$ eine Permutationsgruppe. Die folgende Definition erweitert diesen Begriff auf beliebige lokal-kleine Kategorien.

2.3.1 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine lokal-kleine Kategorie.
Die Kategorie $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ der Gruppen von $\mathcal{C}$-Automorphismen wird definiert durch:

· Objekte sind Paare $\langle \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle$, wobei X ein Objekt von $\mathcal{C}$ und G eine Untergruppe von $\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})$ ist.
· Ein Morphismus von $\langle \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle$ nach $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle$ ist ein Paar $\langle \varphi, f \rangle$, wobei $\varphi \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ und $f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ ein Homomorphismus von Gruppen ist, so dass $\varphi \circ_{\mathcal{C}} \pi = f(\pi) \circ_{\mathcal{C}} \varphi$ für alle $\pi \in \mathrm{G}$ gilt. Das heißt, das folgende Diagramm kommutiert für alle $\pi \in \mathrm{G}$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Y} \arrow[d, "f(\pi)"] \\ \mathrm{X} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Y} \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

· Der Identitäts-Morphismus eines Objektes $\langle \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle$ ist $\langle \mathsf{id}_{\mathrm{X}}, \mathsf{id}_{\mathrm{G}} \rangle$.
· Die Verknüpfung von passenden Morphismen ist durch die Verknüpfung in $\mathcal{C}$ und die Komposition von Gruppenhomomorphismen gegeben

$$\langle \varphi, f \rangle \circ_{\mathcal{A}(\mathcal{C})} \langle \psi, g \rangle := \langle \varphi \circ_{\mathcal{C}} \psi, f \circ g \rangle$$

Die Verknüpfung ist wohldefiniert, da der Morphismus $\langle \varphi \circ_{\mathcal{C}} \psi, f \circ g \rangle$ wieder (2.4) erfüllt:

$$(\varphi \circ \psi) \circ \pi = \varphi \circ g(\pi) \circ \psi = (f \circ g)(\pi) \circ (\varphi \circ \psi).$$

2.3.2 Beispiel: Die Objekte der Kategorie $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$ sind Paare $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$ bestehend aus einer Menge Δ und einer Untergruppe G von $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Set}}(\Delta) = \mathsf{Sym}(\Delta)$. Wir nennen ab jetzt die Objekte von $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$ Permutationsgruppen und schreiben $\mathcal{PG} := \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathsf{Set}))$.

Die folgende Proposition stellt sicher, dass $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ für alle von uns betrachteten Kategorien $\mathcal{C}$ aufwärts-absolut ist.

2.3.3 Proposition: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit $\mathsf{ZFC} \vdash$ „$\mathcal{C}$ *ist lokal klein*“.
Ist dann $\mathcal{C}$ aufwärts-absolut, so auch $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Beweis. Die Aussagen „$\mathrm{P} = \langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle$“ und „*$H$ ist eine Untergruppe von G*“ sind aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle. Da $\mathcal{C}$ aufwärts-absolut ist, gilt dies ebenfalls für die Aussagen „X *ist ein Objekt von* $\mathcal{C}$, π *ist ein* $\mathcal{C}$*-Automorphismus von* X *und* $\langle\, \varphi, f\rangle$ *ist ein* $\mathcal{A}(\mathcal{C})$*-Morphismus*“ und die Verküpfungsabbildung von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.
Für transitive ZFC-Modelle M, N mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ und $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))_{\mathrm{M}}$ gilt dann $\mathrm{X} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})_{\mathrm{N}}$, $\mathrm{G} \leq \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})_{\mathrm{M}} \leq \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})_{\mathrm{N}}$ und damit $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))_{\mathrm{M}}$. □

Wir bestimmen nun die konkrete Gestalt sämtlicher Isomorphismen zwischen Objekten von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. Dadurch können wir später ausschließen, dass gewisse Objekte isomorph sind.

2.3.4 Lemma: Für Objekte $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle, \langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle$ von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ gilt

$$\mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle, \langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle) = \{\, \langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle \mid \varphi \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),\ k_\varphi{}'' \,\mathrm{G} = \mathrm{H}\,\} \tag{2.5}$$

und $\langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle^{-1} = \langle\, \varphi^{-1}, k_{\varphi^{-1}} \restriction \mathrm{H}\rangle$.

Beweis. Ist $\langle\, \varphi, f\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle, \langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle)$ und $\langle\, \psi, g\rangle = \langle\, \varphi, f\rangle^{-1}$, so gilt nach Definition der Verknüpfung in $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ bereits $\psi = \varphi^{-1}$ und $g = f^{-1}$. Aus (2.4) folgt dann $f(\pi) = \varphi \circ \pi \circ \varphi^{-1} = k_\varphi(\pi)$ für alle $\pi \in \mathrm{G}$. Damit gilt $f = k_\varphi \restriction \mathrm{G}$ und auch $k_\varphi{}'' \,\mathrm{G} = \mathrm{H}$, weil f ein Gruppenisomorphismus ist.

Ist $\varphi \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ und $k_\varphi{}'' \,\mathrm{G} = \mathrm{H}$, so ist (2.4) erfüllt und $\langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle, \langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle)$.
Analog folgt $\langle\, \varphi^{-1}, k_{\varphi^{-1}} \restriction \mathrm{H}\rangle \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle, \langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle)$. Nach Definition der Verknüpfung in $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ gilt dann $\langle\, \varphi^{-1}, k_{\varphi^{-1}} \restriction \mathrm{H}\rangle = \langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle^{-1}$ und damit $\langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle, \langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle)$. □

Um Automorphismengruppen verschiedener mathematischer Strukturen zu vergleichen, führen wir den Begriff der Äquivalenz ein. Um spezielle Eigenschaften einer Kategorie $\mathcal{D}$ zu nutzen, wird es wichtig sein, für Objekte $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$ ein äquivalentes Objekt in $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ konstruieren zu können.

2.3.5 Definition: Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ lokal-kleine Kategorien.
Zwei Objekte $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))$ und $\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathcal{D}))$ heißen äquivalent, falls ein Gruppenisomorphismus $F : \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{D}}(\mathrm{Y})$ existiert, der $\mathrm{H} = F'' \,\mathrm{G}$ erfüllt.

2.3.6 Proposition: In $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ isomorphe Objekte sind auch äquivalent.

Beweis. Für $\langle \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle, \langle \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle)$ erfüllt $F = k_\varphi$ nach (2.1) und (2.5) die Bedingungen aus 2.3.5. $\square$

Wir zitieren nun einen Satz, der Beispiele für äquivalente Objekte in verschiedenen Kategorien liefert. Er ermöglicht es uns, zu jedem $\langle \Gamma, \mathrm{H}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathsf{Graph}))$ ein äquivalentes Objekt von $\mathcal{A}(\mathsf{Field})$ zu konstruieren.

2.3.7 Satz (E. Fried, J. Kollár, [FK81])**:** Sei $\Gamma = \langle \mathrm{P}, \mathrm{K}\rangle$ ein Graph.
Dann existiert ein Körper F_Γ mit:
(a) $|\mathrm{F}_\Gamma| = \max\{|\mathrm{P}|, \omega\}$.
(b) P ist eine $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{F}_\Gamma)$-invariante Teilmenge von F_Γ, das heißt $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{F}_\Gamma$ und $\mathrm{P} = \pi\,''\,\mathrm{P}$ für alle $\pi \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{F}_\Gamma)$.
(c) Die Abbildung

$$\chi : \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{F}_\Gamma) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma),\ \pi \longmapsto \pi \restriction \mathrm{P} \tag{2.6}$$

ist wohldefiniert und ein Isomorphismus von Gruppen.

Eine genaue Analyse der Konstruktion von F_Γ aus Γ im Beweis des Satzes zeigt außerdem, dass die Eigenschaften (b)+(c) aus 2.3.7 aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle sind. Eine solche Analyse der verwendeten Definitionen findet sich in [Tho], Kapitel 4.

2.3.8 Korollar: Sei M ein transitives ZFC-Modell und $\langle \Gamma, \mathrm{H}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathsf{Graph}))_\mathrm{M}$. Dann existiert ein Objekt $\langle \mathrm{F}_\Gamma, \mathrm{A}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathsf{Field}))_\mathrm{M}$, so dass für jedes transitive ZFC-Modell N mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ gilt

$$(\langle \Gamma, \mathrm{H}\rangle \textit{ und } \langle \mathrm{F}_\Gamma, \mathrm{A}\rangle \textit{ sind äquivalent})_\mathrm{N}.$$

Beweis. Sei F_Γ der Körper aus 2.3.7, $\mathrm{A} := \chi_\mathrm{M}^{-1}\,''\,\mathrm{H}$ mit χ_M wie in (2.6) und N ein transitives ZFC-Modell mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$.
Da Graph und Field aufwärts-absolute Kategorien sind, bleiben Automorphismen aus M in N Automorphismen und es gilt

$$\mathrm{H} \leq \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma)_\mathrm{M} \leq \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma)_\mathrm{N}$$

sowie

$$\mathrm{A} \leq \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{F}_\Gamma)_\mathrm{M} \leq \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{F}_\Gamma)_\mathrm{N}.$$

Wegen der Aufwärts-Absolutheit in 2.3.7 ist

$$\chi_\mathrm{N} : \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{F}_\Gamma)_\mathrm{N} \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma)_\mathrm{N},\ \pi \longmapsto \pi \restriction \mathrm{P}$$

ein Gruppenisomorphismus, der χ_M fortsetzt, und durch

$$A = \chi_M^{-1}{}'' H = \chi_N^{-1}{}'' H$$

bezeugt, dass $\langle \Gamma, H\rangle$ und $\langle F_\Gamma, A\rangle$ in N äquivalent sind. □

2.4 Direkte Produkte in $\mathcal{A}(\mathcal{C})$

Ist $(\Delta_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, so induziert jedes Element $(\pi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathsf{Sym}(\Delta_i)$ durch $\pi\langle x, i\rangle := \langle \pi_i(x), i\rangle$ eine Bijektion π der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i\in I} \Delta_{i\in I}$. Mittels Koprodukten verallgemeinern wir diese Konstruktion auf beliebige Kategorien.

2.4.1 Lemma: Sei $\langle X, (\iota_i)_{i\in I}\rangle$ ein Koprodukt einer Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Objekten einer lokal-kleinen Kategorie $\mathcal{C}$.

(i) Es existiert ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus $\Lambda_I : \prod_{i\in I} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ mit

$$\iota_i \circ \pi_i = \Lambda_I((\pi_i)_{i\in I}) \circ \iota_i \tag{2.7}$$

für alle $i \in I$ und alle $(\pi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i)$.
Für $(\pi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i)$ ist $\Lambda_I((\pi_i)_{i\in I})$ dabei der eindeutig bestimmte Morphismus, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Lambda_I((\pi_i)_{i\in I})"] & X \\ X_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[r, "\pi_i"'] & X_i \arrow[u, "\iota_i"'] \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

für alle $i \in I$ kommutiert.

(ii) Sind sämtliche ι_i Monomorphismen, so auch Λ_I.

Beweis. (i) Für $(\pi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i)$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\Lambda_I((\pi_i)_{i\in I}) : X \longrightarrow X$ mit (2.8) für alle $i \in I$.
Dann gilt $\Lambda_I((\pi_i)_{i\in I}) \circ \Lambda_I((\pi'_i)_{i\in I}) \circ \iota_i = \Lambda_I((\pi_i)_{i\in I}) \circ \iota_i \circ \pi'_i = \iota_i \circ (\pi_i \circ \pi'_i)$ für alle $i \in I$ und somit $\Lambda_I((\pi_i)_{i\in I}) \circ \Lambda_I((\pi'_i)_{i\in I}) = \Lambda_I((\pi_i)_{i\in I} \circ (\pi'_i)_{i\in I})$ für alle $(\pi_i)_{i\in I}, (\pi'_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i)$. Außerdem gilt wegen $\Lambda_I((\mathsf{id}_{X_i})_{i\in I}) \circ \iota_i = \iota_i$ schon $\Lambda_I((\mathsf{id}_{X_i})_{i\in I}) = \mathsf{id}_X$. Damit sind alle $\Lambda_I((\pi_i)_{i\in I})$ Automorphismen und Λ_I ein Gruppenhomomorphismus.
(ii) Sei $(\pi_i)_{i\in I} \in \mathsf{Ker}(\Lambda_I)$. Mit (2.7) gilt dann $\iota_i \circ \pi_i = \mathsf{id}_X \circ \iota_i = \iota_i \circ \mathsf{id}_{X_i}$ für alle $i \in I$ und damit $\pi_i = \mathsf{id}_{X_i} = \mathbb{1}_{\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X_i)}$. □

2.4.2 Definition: Sei $\mathcal{C}$ eine lokal-kleine Kategorie, I eine Indexmenge und $(\langle \mathrm{X_i}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine Familie von Objekten von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.
Ein Objekt $\langle \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle$ von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ heißt direktes Produkt der $(\langle \mathrm{X_i}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, falls eine Familie $(\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von Morphismen existiert, so dass gilt:
· $\iota_{\mathrm{i}} \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i}, \mathrm{X})$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.
· $\langle \mathrm{X}, (\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ ist ein Koprodukt der $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$.
· für den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus Λ_{I} mit (2.7) gilt

$$\mathrm{G} = \Lambda_{\mathrm{I}}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i}. \tag{2.9}$$

Wir zeigen zunächst, von welcher Gestalt direkte Produkte in $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$ und $\mathcal{A}(\mathsf{Graph})$ sind.

2.4.3 Beispiele: (i) Definiere für eine Familie $(\langle \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von Permutationsgruppen einen Gruppenhomomorphismus

$$d_{\mathrm{I}} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_{\mathrm{i}}) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta_{\mathrm{i}})$$

durch $d_{\mathrm{I}}((\sigma_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})\langle x, \mathrm{i}\rangle := \langle \sigma_{\mathrm{i}}(x), \mathrm{i}\rangle$. Für die Einbettungen e_{i} gilt dann

$$(d_{\mathrm{I}}((\sigma_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ e_{\mathrm{i}})\,(x) = \langle \sigma_{\mathrm{i}}(x), \mathrm{i}\rangle = (e_{\mathrm{i}} \circ \sigma_{\mathrm{i}})\,(x)$$

für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und $x \in \Delta_{\mathrm{i}}$. Damit bildet

$$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \langle \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle := \langle \bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta_{\mathrm{i}}, d_{\mathrm{I}}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i}\rangle$$

ein direktes Produkt der $(\langle \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ in $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$.

(ii) Für eine Familie $(\langle \Gamma_{\mathrm{i}}, \mathrm{H_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von Objekten von $\mathcal{A}(\mathsf{Graph})$ definieren wir wie oben

$$d_{\mathrm{I}} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma_{\mathrm{i}}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_{\mathrm{i}})$$

durch $d_{\mathrm{I}}((\pi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})\langle p, \mathrm{i}\rangle := \langle \pi_{\mathrm{i}}(p), \mathrm{i}\rangle$. Dann bildet auch

$$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \langle \Gamma_{\mathrm{i}}, \mathrm{H_i}\rangle := \langle \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_{\mathrm{i}}, d_{\mathrm{I}}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i}\rangle$$

ein direktes Produkt der $(\langle \Gamma_{\mathrm{i}}, \mathrm{H_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ in $\mathcal{A}(\mathsf{Graph})$.

Wie im zweiten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wir in den nächsten drei Lemmata die Eindeutigkeit, Flexibilität und Aufwärts-Absolutheit dieser Konstruktion.

2.4.4 Lemma: Zwei direkte Produkte einer Familie $(\langle\, \mathrm{X}_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von Objekten von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ sind isomorph in $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Beweis. Seien $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle$ und $\langle\, \mathrm{X}', \mathrm{G}'\rangle$ direkte Produkte der $(\langle\, \mathrm{X}_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ und $(\iota_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, Λ_I und $(\iota'_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, Λ'_I Zeugen hierfür.
Sei $\Phi \in \mathsf{Iso}_\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ der Isomorphismus mit (2.3). Für $(\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_\mathcal{C}(\mathrm{X}_\mathrm{i})$ und alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}' \arrow[rrr, "(k_\Phi\circ\Lambda_\mathrm{I})((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})"] & & & \mathrm{X}' \\
& \mathrm{X} \arrow[ul, "\Phi"'] \arrow[r, "\Lambda_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})"] & \mathrm{X} \arrow[ur, "\Phi"] & \\
\mathrm{X}_\mathrm{i} \arrow[uu, "\iota'_\mathrm{i}"] \arrow[ur, "\iota_\mathrm{i}"'] \arrow[rrr, "\pi_\mathrm{i}"'] & & & \mathrm{X}_\mathrm{i} \arrow[uu, "\iota'_\mathrm{i}"'] \arrow[ul, "\iota_\mathrm{i}"]
\end{tikzcd}$$

und es gilt

$$\Lambda'_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ \iota'_\mathrm{i} \overset{(2.7)}{=} \iota'_\mathrm{i} \circ \pi_\mathrm{i} = (k_\Phi \circ \Lambda_\mathrm{I})((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ \iota'_\mathrm{i}.$$

Mit 2.2.2,(i) folgt $\Lambda'_\mathrm{I} = k_\Phi \circ \Lambda_\mathrm{I}$ und damit

$$\mathrm{G}' = \Lambda'_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_\mathcal{C}(\mathrm{X}_\mathrm{i}) = k_\Phi{}'' \,(\Lambda_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_\mathcal{C}(\mathrm{X}_\mathrm{i})) \overset{(2.9)}{=} k_\Phi{}'' \,\mathrm{G}.$$

Nach (2.5) ist dann $\langle\, \Phi, k_\Phi \restriction \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G}\rangle, (\mathrm{X}', \mathrm{G}'))$. □

2.4.5 Lemma: Seien I,J,K Indexmengen, $\sigma : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{K}$ eine Bijektion,

$$\mathrm{K} = \dot{\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}} \mathrm{K}_\mathrm{j}$$

eine Partition von K und $(\langle\, \mathrm{X}_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, $(\langle\, \mathrm{Y}_\mathrm{k}, \mathrm{H}_\mathrm{k}\rangle)_{\mathrm{k}\in\mathrm{K}}$ Familien von Objekten von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$. Für $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ sei $\langle\, \varphi_\mathrm{i}, k_{\varphi_\mathrm{i}} \restriction \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle$ ein Isomorphismus von $\langle\, \mathrm{X}_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle$ nach $\langle\, \mathrm{Y}_{\sigma(\mathrm{i})}, \mathrm{H}_{\sigma(\mathrm{i})}\rangle$.
Ist $\langle\, \mathrm{Y}^\mathrm{j}, \mathrm{H}^\mathrm{j}\rangle$ für jedes $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ ein direktes Produkt der $(\langle\, \mathrm{Y}_\mathrm{k}, \mathrm{H}_\mathrm{k}\rangle)_{\mathrm{k}\in\mathrm{K}_\mathrm{j}}$ und $\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle$ ein direktes Produkt der $(\langle\, \mathrm{Y}^\mathrm{j}, \mathrm{H}^\mathrm{j}\rangle)_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}$, so ist $\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle$ auch ein direktes Produkt der $(\langle\, \mathrm{X}_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$.

Beweis. Für $\mathrm{j} \in \mathrm{J}$ und $\mathrm{k} \in \mathrm{K_j}$ seien $\iota^{\mathrm{j}}_{\mathrm{k}} : \mathrm{Y_k} \longrightarrow \mathrm{Y^j}$ und $\iota_{\mathrm{j}} : \mathrm{Y^j} \longrightarrow \mathrm{Y}$ die Einbettungen in die entsprechenden Koprodukte und $\Lambda_{\mathrm{K_j}}$ und Λ_{J} die induzierten Gruppenhomomorphismen mit (2.7).
Nach 2.2.4 ist dann $\langle\, \mathrm{Y}, (\iota_{\mathrm{j}} \circ \iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})} \circ \varphi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ ein Koprodukt der $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ und induziert einen Gruppenhomomorphismus Λ_{I} mit (2.7).
Für $(\pi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i})$ und alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ mit $\sigma(\mathrm{i}) \in \mathrm{K_j}$ kommutiert wegen $k_{\varphi_{\mathrm{i}}}(\pi_{\mathrm{i}}) \in \mathrm{H}_{\sigma(\mathrm{i})}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[rrr, "\Lambda_{\mathrm{J}}((\Lambda_{\mathrm{K_j}}((k_{\varphi_{\mathrm{i}}}(\pi_{\mathrm{i}}))_{\sigma(\mathrm{i})\in\mathrm{K_j}}))_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}})"] & & & \mathrm{Y} \\
& \mathrm{Y^j} \arrow[ul, "\iota_{\mathrm{j}}"'] \arrow[r, "\Lambda_{\mathrm{K_j}}((k_{\varphi_{\mathrm{i}}}(\pi_{\mathrm{i}}))_{\sigma(\mathrm{i})\in\mathrm{K_j}})"] & \mathrm{Y^j} \arrow[ur, "\iota_{\mathrm{j}}"] & \\
& \mathrm{Y}_{\sigma(\mathrm{i})} \arrow[u, "\iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})}"'] \arrow[r, "k_{\varphi_{\mathrm{i}}}(\pi_{\mathrm{i}})"'] & \mathrm{Y}_{\sigma(\mathrm{i})} \arrow[u, "\iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathrm{i}}^{-1}"] & \\
\mathrm{X_i} \arrow[uuu, "\iota_{\mathrm{J}}\circ\iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})}\circ\varphi_{\mathrm{i}}"] \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{i}}"] \arrow[rrr, "\pi_{\mathrm{i}}"'] & & & \mathrm{X_i} \arrow[uuu, "\iota_{\mathrm{J}}\circ\iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})}\circ\varphi_{\mathrm{i}}"']
\end{tikzcd}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mathrm{I}}((\pi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ \iota_{\mathrm{j}} \circ \iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})} \circ \varphi_{\mathrm{i}} &\overset{(2.7)}{=} \iota_{\mathrm{j}} \circ \iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})} \circ \varphi_{\mathrm{i}} \circ \pi_{\mathrm{i}} \\
&= \Lambda_{\mathrm{J}}((\Lambda_{\mathrm{K_j}}((k_{\varphi_{\mathrm{i}}}(\pi_{\mathrm{i}}))_{\sigma(\mathrm{i})\in\mathrm{K_j}}))_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}}) \circ \iota_{\mathrm{j}} \circ \iota^{\mathrm{j}}_{\sigma(\mathrm{i})} \circ \varphi_{\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\Lambda_{\mathrm{I}}((\pi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) = \Lambda_{\mathrm{J}}((\Lambda_{\mathrm{K_j}}((k_{\varphi_{\mathrm{i}}}(\pi_{\mathrm{i}}))_{\sigma(\mathrm{i})\in\mathrm{K_j}}))_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}})$ und damit

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mathrm{I}}\,{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i} &= \Lambda_{\mathrm{J}}\,{}'' \prod_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}} (\Lambda_{\mathrm{K_j}}\,{}'' \prod_{\sigma(\mathrm{i})\in\mathrm{K_j}} (k_{\varphi_{\mathrm{i}}}\,{}'' \,\mathrm{G_i})) \\
&= \Lambda_{\mathrm{J}}\,{}'' \prod_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}} (\Lambda_{\mathrm{K_j}}\,{}'' \prod_{k\in\mathrm{K_j}} \mathrm{H_k}) = \Lambda_{\mathrm{J}}\,{}'' \prod_{\mathrm{j}\in\mathrm{J}} \mathrm{H^j} = \mathrm{H}
\end{aligned}$$

□

2.4.6 Lemma: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit aufwärts-absoluten Koprodukten und $\mathsf{ZFC} \vdash$ „$\mathcal{C}$ *ist lokal klein*“, M ein transitives ZFC-Modell und $(\langle\, \mathrm{X_i}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in$ M eine Familie von Objekten von $\mathcal{A}(\mathcal{C})_{\mathrm{M}}$.
Bezeugt $(\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ in M, dass $\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))_{\mathrm{M}}$ ein direktes Produkt der $(\langle\, \mathrm{X_i}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ bildet, so gilt dies auch in jedem transitiven ZFC-Modell N mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ und $({}^{\mathrm{I}}\mathrm{M}) \cap \mathrm{N} = ({}^{\mathrm{I}}\mathrm{M}) \cap \mathrm{M}$.

Beweis. Sei $\Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i})_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y})_{\mathrm{M}}$ der in M durch das Koprodukt $\langle\, \mathrm{Y}, (\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ induzierte Gruppenhomomorphismus mit (2.7).
Nach Voraussetzung ist $\langle\, \mathrm{Y}, (\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ auch in N ein Koprodukt der $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ und induziert auch hier einen Gruppenhomomorphismus $\Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{N}} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i})_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y})_{\mathrm{N}}$ mit (2.7).
Für $(\pi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i})_{\mathrm{M}}$ und alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ gilt dann

$$\Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{N}}((\pi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ \iota_{\mathrm{i}} = \iota_{\mathrm{i}} \circ \pi_{\mathrm{i}} = \Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}}((\pi_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ \iota_{\mathrm{i}}$$

und damit $\Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}} = \Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{N}} \restriction (\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X_i}))_{\mathrm{M}}$.
Da M und N die gleichen I-Sequenzen besitzen, gilt $(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i})_{\mathrm{M}} = (\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i})_{\mathrm{N}}$ und somit

$$\Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{N}}{}'' \,(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i})_{\mathrm{N}} = \Lambda_{\mathrm{I}}^{\mathrm{M}}{}'' \,(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i})_{\mathrm{M}} = \mathrm{H}.$$

Damit bezeugt $(\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, dass $\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle$ auch in N ein direktes Produkt der $(\mathrm{X_i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ bildet. □

Abschließend geben wir noch eine später nützliche Anwendung des Entwickelten in der Kategorie Graph. Wir bestimmen dabei Teilgraphen, die unter den Automorphismen der gegebenen Gruppe invariant sind, und können so die Struktur der Automorphismengruppen durch eine Zerlegung in Produkte genauer bestimmen.
Das Resultat zeigt, warum die im Prinzip $(\star)_{\kappa}^{\mathsf{Graph}_{con}}$ vorkommenden zusammenhängenden Graphen paarweise nicht-isomorph sein sollen.

Ist $\Gamma = \langle\, \mathrm{P}, \mathrm{K}\rangle$ ein Graph und X eine Teilmenge von P, so nennen wir

$$\Gamma \restriction \mathrm{X} := \langle\, \mathrm{X}, \mathrm{K} \cap \mathit{Pot}(\mathrm{X})\rangle$$

den durch X induzierten Teilgraphen von Γ.

2.4.7 Lemma: Seien Γ, Γ' Graphen und $F \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma, \Gamma')$. Für jede Zusammenhangskomponente X von Γ ist dann $F\,''\,\mathrm{X}$ eine Zusammenhangskomponente von Γ' und $F \restriction \mathrm{X} \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}_{con}}(\Gamma \restriction \mathrm{X}, \Gamma' \restriction (F\,''\,\mathrm{X}))$.

Beweis. Ist $f \in \mathsf{Mor}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma, \Gamma')$ und w ein Weg der Länge n durch Γ, so ist $f \circ w$ ein Weg der Länge n durch Γ'. Somit ist $F\,''\,\mathrm{X}$ zusammenhängend und in einer Zusammenhangskomponente Y von Γ' enthalten.
Sei $x \in \mathrm{X}$. Für jedes $y \in \mathrm{Y}$ existiert dann ein Weg w der Länge n von $f(x)$ nach y durch Γ'. Dann ist $f^{-1} \circ w$ ein Weg von $x \in \mathrm{X}$ nach $f^{-1}(y)$ durch Γ. Aus der Maximalität von X folgt $f^{-1}(y) \in \mathrm{X}$ und damit $f\,''\,\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. □

Wir sagen, die Zusammenhangskomponenten einer Familie $(\Gamma_i)_{i\in I}$ von Graphen sind paarweise nicht-isomorph, falls für alle $i_0, i_1 \in i$ mit $i_0 \neq i_1$ und Zusammenhangskomponenten X_0 von Γ_{i_0} und X_1 von Γ_{i_1} die Graphen $\Gamma_{i_0} \restriction X_0$ und $\Gamma_{i_1} \restriction X_1$ nicht isomorph sind.

2.4.8 Lemma: Sei $(\Gamma_i)_{i\in I}$ eine Familie von Graphen, deren Zusammenhangskomponenten paarweise nicht-isomorph sind.
Dann ist der Gruppenhomomorphismus

$$d_I : \prod_{i\in I} \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma_i) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{i\in I} \Gamma_i)$$

aus 2.4.3,(ii) ein Isomorphismus.

Beweis. Sei $\Gamma_i = \langle P_i, K_i \rangle$ für alle $i \in I$.
Einbettungen in Koprodukte von Graph sind Monomorphismen, also ist d_I nach 2.4.1,(ii) injektiv.
Sei $\pi \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{i\in I} \Gamma_i)$. Für alle $i \in I$ und jede Zusammenhangskomponente X von Γ_i existiert dann nach 2.2.3,(ii) und 2.4.7 ein $j \in J$ und eine Zusammenhangskomponente Y von Γ_j mit $\pi''\ (X \times \{i\}) = Y \times \{j\}$. Dann vermittelt π einen Isomorphismus der Graphen $\Gamma_i \restriction X$ und $\Gamma_J \restriction Y$ und aus der Voraussetzung folgt $i = j$.
Damit gilt $\pi''\ P_i \times \{i\} = P_i \times \{i\}$ und für jedes $i \in I$ existiert ein $\pi_i \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma_i)$ mit $\pi\langle p, i\rangle = \langle \pi_i(p), i\rangle$ für alle $p \in P_i$, das heißt $\pi = d_I((\pi_i)_{i\in I})$. $\square$

2.5 Umsetzungen von Permutationsgruppen

Die Motivation für die Konstruktion des direkten Produktes im letzten Abschnitt war die Operation des Produktes $\prod_{i\in I} \mathsf{Sym}(\Delta_I)$ der symmetrischen Gruppen auf der ersten Komponente der Elemente der disjunkten Vereinigung $\coprod_{i\in I} \Delta_i$.
Sind alle Mengen der Familie $(\Delta_i)_{i\in I}$ gleich der Menge Δ, so kann man zusätzlich eine Operation der symmetrischen Gruppe $\mathsf{Sym}(I)$ auf der zweiten Komponente der Elemente von $\coprod_{i\in I} \Delta$ durch $\langle x, i\rangle \mapsto \langle x, \sigma(i)\rangle$ definieren. Wieder verallgemeinern wir diese Konstruktion mittels Koprodukten auf beliebige lokal-kleine Kategorien.

2.5.1 Lemma: Sei X ein Objekt einer lokal-kleinen Kategorie $\mathcal{C}$, I eine Indexmenge und $\langle Y, (\iota_i)_{i\in I}\rangle$ ein Koprodukt der Familie $(X)_{i\in I}$.

(i) Es existiert ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus $\Theta_{\mathrm{I}} : \mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y})$ mit

$$\Theta_{\mathrm{I}}(\sigma) \circ \iota_{\mathrm{i}} = \iota_{\sigma(\mathrm{i})} \tag{2.10}$$

für alle $\sigma \in \mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ und $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.
Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ ist $\Theta_{\mathrm{I}}(\sigma)$ der eindeutig bestimmte Morphismus, für den das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y} \arrow[rr, "\Theta_{\mathrm{I}}(\sigma)"] & & \mathrm{Y} \\ & \mathrm{X} \arrow[ul, "\iota_{\mathrm{i}}"] \arrow[ur, "\iota_{\sigma(\mathrm{i})}"'] & \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ kommutiert.

(ii) Folgt für alle $\mathrm{i}_0, \mathrm{i}_1 \in \mathrm{I}$ aus $\mathrm{i}_0 \neq \mathrm{i}_1$ bereits $\iota_{\mathrm{i}_0} \neq \iota_{\mathrm{i}_1}$, so ist Θ_{I} ein Monomorphismus.

Beweis. (i) Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\Theta_{\mathrm{I}}(\sigma) : \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Y}$ mit (2.11) für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.
Dann gilt $\Theta_{\mathrm{I}}(\sigma) \circ \Theta_{\mathrm{I}}(\sigma') \circ \iota_{\mathrm{i}} = \Theta_{\mathrm{I}}(\sigma) \circ \iota_{\sigma'(\mathrm{i})} = \iota_{(\sigma\circ\sigma')(\mathrm{i})}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und somit $\Theta_{\mathrm{I}}(\sigma) \circ \Theta_{\mathrm{I}}(\sigma') = \Theta_{\mathrm{I}}(\sigma \circ \sigma')$. Zusätzlich gilt wegen $\Theta_{\mathrm{I}}(\mathsf{id}_{\mathrm{I}}) \circ \iota_{\mathrm{i}} = \iota_{\mathrm{i}}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ auch $\Theta_{\mathrm{I}}(\mathsf{id}_{\mathrm{I}}) = \mathsf{id}_{\mathrm{Y}}$. Damit ist $\Theta_{\mathrm{I}}(\sigma)$ ein Automorphismus von Y und Θ_{I} ein Gruppenhomomorphismus.
(ii) Für $\sigma \in \mathsf{Ker}(\Theta_{\mathrm{I}})$ gilt $\iota_{\sigma(\mathrm{i})} = \iota_{\mathrm{i}}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und nach Voraussetzung bedeutet das schon $\sigma = \mathsf{id}_{\mathrm{I}}$. □

2.5.2 Definition: Sei $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ eine Permutationsgruppe und X ein Objekt einer lokal-kleinen Kategorie $\mathcal{C}$.
Ein Objekt $\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle$ von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ heißt Umsetzung von $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ durch X, falls eine Familie $(\iota_x)_{x\in\Delta}$ von Morphismen existiert, so dass gilt:
· $\iota_x \in \mathsf{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ für alle $x \in \Delta$.
· $\langle\, \mathrm{Y}, (\iota_x)_{x\in\Delta}\rangle$ ist ein Koprodukt der Familie $(\mathrm{X})_{x\in\Delta}$.
· für den eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus Θ_Δ mit (2.10) gilt

$$\mathrm{H} = \Theta_\Delta{}'' \, \mathrm{G}.$$

In $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$ und $\mathcal{A}(\mathsf{Graph})$ können Umsetzungen von Permutationsgruppen wie folgt konstruiert werden.

2.5.3 Beispiele: (i) Für eine Menge Ω und eine Indexmenge I definieren wir einen Gruppenhomomorphismus

$$u_{\mathrm{I}} : \mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Omega)$$

durch $u_{\mathrm{I}}(\sigma)\langle\, x, \mathrm{i}\rangle = \langle\, x, \sigma(\mathrm{i})\rangle$.
Für eine Permutationsgruppe $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ bildet $\langle \bigsqcup_{x\in\Delta} \Omega, u_\Delta\,''\,\mathrm{G}\rangle$ dann eine Umsetzung von $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ durch Ω.

(ii) Für einen Graphen Γ definieren wir wie oben den Gruppenhomomorphismus

$$u_{\mathrm{I}} : \mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma)$$

durch $u_{\mathrm{I}}(\sigma)\langle\, p, \mathrm{i}\rangle = \langle\, p, \sigma(\mathrm{i})\rangle$.
Für eine Permutationsgruppe $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ bildet dann

$$\Gamma\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle := \langle \coprod_{x\in\Delta} \Gamma, u_\Delta\,''\,\mathrm{G}\rangle$$

eine Umsetzung von $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ durch Γ.

Wie im vorigen Abschnitt leiten wir durch drei Lemmata grundlegende Eigenschaften der Umsetzungen her.

2.5.4 Lemma: Zwei Umsetzungen einer Permutationsgruppe $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ durch ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ sind isomorph in $\mathcal{A}(\mathcal{C})$.

Beweis. Seien $\langle\, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\rangle$, $\langle\, \mathrm{Y}', \mathrm{H}'\rangle$ Umsetzungen von $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ durch X und $(\iota_x)_{x\in\Delta}$, Θ_Δ sowie $(\iota'_x)_{x\in\Delta}$, Θ'_Δ Zeugen hierfür.
Sei $\Phi \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}')$ der Isomorphismus mit (2.3). Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(\Delta)$ und alle $x \in \Delta$ kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[rr, "\Theta_\Delta(\sigma)"] \arrow[dd, "\Phi"'] & & \mathrm{Y} \arrow[dd, "\Phi"] \\
& \mathrm{X} \arrow[ul, "\iota_x"'] \arrow[ur, "\iota_{\sigma(x)}"] \arrow[dl, "\iota'_x"] \arrow[dr, "\iota'_{\sigma(x)}"'] & \\
\mathrm{Y}' \arrow[rr, "(k_\Phi\circ\Theta_\Delta)(\sigma)"'] & & \mathrm{Y}'
\end{tikzcd}$$

und es gilt

$$\Theta'_\Delta(\sigma) \circ \iota'_x \overset{(2.10)}{=} \iota'_{\sigma(x)} = (k_\Phi \circ \Theta_\Delta)(\sigma) \circ \iota'_x.$$

Daraus folgt $\Theta'_\Delta = k_\Phi \circ \Theta_\Delta$ und

$$\mathrm{H}' = \Theta'_\Delta{}'' \, \mathrm{G} = k_\Phi{}'' \, (\Theta_\Delta{}'' \, \mathrm{G}) = k_\Phi{}'' \, \mathrm{H}.$$

Mit (2.5) gilt dann $\langle \Phi, k_\Phi \restriction \mathrm{H} \rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathcal{C})}(\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle, \langle \mathrm{Y}', \mathrm{H}' \rangle)$. $\square$

2.5.5 Lemma: Seien $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$, $\langle \Delta', \mathrm{G}' \rangle$ Permutationsgruppen, X, X' Objekte einer lokal-kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ und $\langle f, k_f \restriction \mathrm{G} \rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle, \langle \Delta', \mathrm{G}' \rangle)$, $\varphi \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ Isomorphismen.
Jede Umsetzung $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle$ von $\langle \Delta', \mathrm{G}' \rangle$ durch X' ist dann auch eine Umsetzung von $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$ durch X.

Beweis. Für $y \in \Delta'$ sei $\iota_y : \mathrm{X}' \longrightarrow \mathrm{Y}$ die entsprechende Einbettung in das Koprodukt und $\Theta_{\Delta'} : \mathsf{Sym}(\Delta') \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y})$ der induzierte Gruppenhomomorphismus mit (2.10).
Für $x \in \Delta$ setze $\iota^*_x := \iota_{f(x)} \circ \varphi$. Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(\Delta)$ gilt dann $\iota^*_{\sigma(x)} = \iota_{f(\sigma(x))} \circ \varphi = \iota_{k_f(\sigma)(f(x))} \circ \varphi$. Mit 2.2.4 ist dann $\langle \mathrm{Y}, (\iota^*_x)_{x \in \Delta} \rangle$ ein Koprodukt der Familie $(\mathrm{X})_{x \in \Delta}$. Sei Θ_Δ der induzierte Gruppenhomomorphismus mit (2.10).
Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(\Delta)$ und $x \in \Delta$ kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[rr, "\Theta_{\Delta'}(k_f(\sigma))"] & & \mathrm{Y} \\
& \mathrm{X}' \arrow[ul, "\iota_{f(x)}"'] \arrow[ur, "\iota_{k_f(\sigma)(f(x))}"] & \\
& \mathrm{X} \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[uul, bend left, "\iota^*_x"] \arrow[uur, bend right, "\iota^*_{\sigma(x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

und es gilt

$$\Theta_\Delta(\sigma) \circ \iota^*_x \overset{(2.10)}{=} \iota^*_{\sigma(x)} = (\Theta_{\Delta'} \circ k_f)(\sigma) \circ \iota^*_x.$$

Damit ist $\Theta_\Delta = \Theta_{\Delta'} \circ k_f$ und somit

$$\Theta_\Delta{}'' \, \mathrm{G} = \Theta_{\Delta'}{}'' \, (k_f{}'' \, \mathrm{G}) = \Theta_{\Delta'}{}'' \, \mathrm{G}' = \mathrm{H}.$$

$\square$

2.5.6 Lemma: Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit aufwärts-absoluten Koprodukten und $\mathsf{ZFC} \vdash$ „$\mathcal{C}$ *ist lokal klein*“, M ein transitives ZFC-Modell, $\mathrm{X} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})_{\mathrm{M}}$ und $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle \in \mathcal{PG}_{\mathrm{M}}$ eine Permutationsgruppe.
Bezeugt $(\iota_x)_{x\in\Delta}$ in M, dass $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathcal{C}))_{\mathrm{M}}$ eine Umsetzung von $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$ durch X bildet, so gilt dies auch in jedem transitiven ZFC-Modell N mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$.

Beweis. Sei $\Theta^{\mathrm{M}}_{\Delta} : \mathsf{Sym}(\Delta)_{\mathrm{M}} \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y})_{\mathrm{M}}$ der durch das Koprodukt $\langle \mathrm{Y}, (\iota_x)_{x\in\Delta} \rangle$ in M induzierte Gruppenhomomorphismus mit (2.10).
Durch die Aufwärts-Absolutheit bildet $\langle \mathrm{Y}, (\iota_x)_{x\in\Delta} \rangle$ auch in N ein Koprodukt der $(\mathrm{X})_{x\in\Delta}$ und induziert auch hier einen Gruppenhomomorphismus $\Theta^{\mathrm{N}}_{\Delta} : \mathsf{Sym}(\Delta)_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y})_{\mathrm{N}}$ mit (2.10).
Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(\Delta)_{\mathrm{M}} \leq \mathsf{Sym}(\Delta)_{\mathrm{N}}$ und alle $x \in \Delta$ gilt dann

$$\Theta^{\mathrm{N}}_{\Delta}(\sigma) \circ \iota_x = \iota_{\sigma(x)} = \Theta^{\mathrm{M}}_{\Delta}(\sigma) \circ \iota_x$$

und somit $\Theta^{\mathrm{M}}_{\Delta} = \Theta^{\mathrm{N}}_{\Delta} \restriction \mathsf{Sym}(\Delta)_{\mathrm{M}}$. Daraus folgt

$$\Theta^{\mathrm{N}}_{\Delta}{}'' \, \mathrm{G} = \Theta^{\mathrm{M}}_{\Delta}{}'' \, \mathrm{G} = \mathrm{H}$$

und $(\iota_x)_{x\in\Delta}$ bezeugt auch in N , dass $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle$ eine Umsetzung von $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$ durch X ist. □

Das folgende Lemma zeigt, wie direkte Produkte und Umsetzungen von Permutationsgruppen kombiniert werden können.

2.5.7 Lemma: Sei $(\langle \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G}_{\mathrm{i}} \rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine Familie von Permutationsgruppen und X ein Objekt einer lokal-kleinen Kategorie $\mathcal{C}$.
Ist für $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ $\langle \mathrm{Y}_{\mathrm{i}}, \mathrm{H}_{\mathrm{i}} \rangle$ eine Umsetzung von $\langle \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G}_{\mathrm{i}} \rangle$ durch X und $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle$ ein direktes Produkt der $(\langle \mathrm{Y}_{\mathrm{i}}, \mathrm{H}_{\mathrm{i}} \rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, so ist $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle$ auch eine Umsetzung von $\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \langle \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G}_{\mathrm{i}} \rangle$ durch X.

Beweis. Seien $(\iota^{\mathrm{i}}_x)_{x\in\Delta_{\mathrm{i}}}$, $\Theta_{\Delta_{\mathrm{i}}}$ Zeugen für die Umsetzung von $\langle \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G}_{\mathrm{i}} \rangle$ durch X und $(\iota_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$, Λ_{I} die Zeugen für die universelle Eigenschaft des direkten Produktes $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle$.
Definiere $\Delta^* := \bigsqcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta_{\mathrm{i}}$. Mit $\iota^*_{\langle x,\mathrm{i} \rangle} := \iota_{\mathrm{i}} \circ \iota^{\mathrm{i}}_x$ bildet dann $\langle \mathrm{Y}, (\iota^*_{\langle x,\mathrm{i} \rangle})_{\langle x,\mathrm{i} \rangle \in\Delta^*} \rangle$ nach 2.2.4 ein Koprodukt der $(\mathrm{X})_{\langle x,\mathrm{i} \rangle\in\Delta^*}$.
Sei $\Theta_{\Delta^*} : \mathsf{Sym}(\Delta^*) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Y})$ der induzierte Gruppenhomomorphismus mit (2.10) und $d_{\mathrm{I}} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_{\mathrm{i}}) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\Delta^*)$ wie in 2.4.3,(i). Für $(\sigma_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_{\mathrm{i}})$ gilt $\iota^*_{d_{\mathrm{I}}((\sigma_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})\langle x,\mathrm{i} \rangle} = \iota_{\mathrm{i}} \circ \iota^{\mathrm{i}}_{\sigma_{\mathrm{i}}(x)}$.

Für alle $(\sigma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_\mathrm{i})$ und $\langle\, x, \mathrm{i}\rangle \in \Delta^*$ kommutiert dann wegen $\Theta_{\Delta_\mathrm{i}}(\sigma_\mathrm{i}) \in \mathrm{H}_\mathrm{i}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Y} \arrow[rrrr, "\Lambda_\mathrm{I}((\Theta_{\Delta_\mathrm{i}}(\sigma_\mathrm{i}))_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})"] & & & & \mathrm{Y} \\
& \mathrm{Y}_\mathrm{i} \arrow[ul, "\iota_\mathrm{i}"'] \arrow[rr, "\Theta_{\Delta_\mathrm{i}}(\sigma_\mathrm{i})"] & & \mathrm{Y}_\mathrm{i} \arrow[ur, "\iota_\mathrm{i}"] & \\
& & \mathrm{X} \arrow[ul, "\iota^\mathrm{i}_x"] \arrow[ur, "\iota^\mathrm{i}_{\sigma_\mathrm{i}(x)}"'] \arrow[uull, bend left, "\iota^*_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}"] \arrow[uurr, bend right, "\iota^*_{d_\mathrm{I}((\sigma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}"'] & &
\end{tikzcd}$$

und es gilt

$$(\Theta_{\Delta^*} \circ d_\mathrm{I})((\sigma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ \iota^*_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle} = \iota^*_{d_\mathrm{I}((\sigma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})\langle\, x,\mathrm{i}\rangle} = \Lambda_\mathrm{I}((\Theta_{\Delta_\mathrm{i}}(\sigma_\mathrm{i}))_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \circ \iota^*_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}.$$

Das zeigt $(\Theta_{\Delta^*} \circ d_\mathrm{I})((\sigma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) = \Lambda_\mathrm{I}((\Theta_{\Delta_\mathrm{i}}(\sigma_\mathrm{i}))_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})$ und damit

$$\Theta_{\Delta^*}\,''\,(d_\mathrm{I}\,''\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G}_\mathrm{i}) = \Lambda_\mathrm{I}\,''\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(\Theta_{\Delta_\mathrm{i}}\,''\,\mathrm{G}_\mathrm{i}) = \Lambda_\mathrm{I}\,''\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{H}_\mathrm{i} = \mathrm{H}.$$

□

Mit 2.5.4 gilt also für jeden Graphen Γ

$$\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle \;\cong\; \Gamma\,(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle). \tag{2.12}$$

Anknüpfend an 2.4.8 zeigt das folgende Lemma, weshalb die zusammenhängenden Graphen des Prinzips $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ rigide sein sollen.

2.5.8 Lemma: Sei $\Gamma = \langle\, \mathrm{P}, \mathrm{K}\rangle$ ein rigider, zusammenhängender Graph.
Für jede Menge I ist dann der Gruppenhomomorphismus

$$u_\mathrm{I} : \mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma)$$

ein Isomorphismus.
Insbesondere sind $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ und $\Gamma\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ für jede Permutationsgruppe $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$ äquivalent.

Beweis. Weil für die Einbettungen $e_{\mathrm{i}} : \Gamma \longrightarrow \coprod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \Gamma$ aus $\mathrm{i}_0 \neq \mathrm{i}_1$ bereits $e_{\mathrm{i}_0} \neq e_{\mathrm{i}_1}$ folgt, ist u_{I} nach 2.5.1,(ii) injektiv.
Sei $\pi \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \Gamma)$. Da die Zusammenhangskomponenten von $\coprod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \Gamma$ genau von der Form $\mathrm{P} \times \{\mathrm{i}\}$ mit $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ sind, existiert ein $\sigma \in \mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ mit $\pi'' \, (\mathrm{P} \times \{\mathrm{i}\}) = \mathrm{P} \times \{\sigma(\mathrm{i})\}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Für jedes $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ induziert π somit einen Automorphismus π_{i} von Γ mit $\pi\langle p, \mathrm{i}\rangle = \langle \pi_{\mathrm{i}}(p), \sigma(\mathrm{i})\rangle$ für alle $p \in \mathrm{P}$.
Da Γ rigide ist folgt $\pi_{\mathrm{i}} = \mathsf{id}_{\Gamma}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und $\pi = u_{\mathrm{I}}(\sigma)$. $\square$

Kapitel 3

Normalisatortürme

Eine der Hauptaufgaben im Beweis von Satz A wird in der Analyse der Automorphismentürme von Gruppen liegen. Dies ist im Allgemeinen ein sehr schwieriges Unterfangen, da für manche Gruppen G allein die Berechnung von $\mathsf{Aut}(G)$ extrem kompliziert ist.

Wir wollen dieses Problem umgehen und verwenden dazu eine von Simon Thomas in [Tho85] entwickelte Technik. Dabei betrachten wir anstelle des Automorphismenturms einer Gruppe eine ähnlich definierte aufsteigende Sequenz von Gruppen, den sogenannten Normalisatorturm einer Untergruppe H von G. Der Vorteil dieser Konstruktion ist, dass alle Gruppen der Sequenz Untergruppen der Gruppe G sind und diese Gruppe zu Beginn der Konstruktion bekannt ist, im Gegensatz zu $H^{\tau(H)}$ im Automorphismenturm.

Im ersten Abschnitt definieren wir den Normalisatorturm einer Untergruppe und leiten einige grundlegende Eigenschaften her. Anschließend führen wir mehrere konkrete Berechnungen durch, die in späteren Beweisen benötigt werden.

Im zweiten Abschnitt ordnen wir dann jeder Automorphismengruppe H eines Graphen eine Gruppe G_H mit trivialem Zentrum zu, so dass sich die Höhe des Automorphismenturms von G_H durch den Normalisatorturm von H bestimmen lässt.

3.1 Normalisatortürme von Untergruppen

3.1.1 Definition: Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Wir definieren den Normalisator von H in G als die kleinste Untergruppe $\mathsf{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ von G, die H als Normalteiler enthält, das heißt

$$\mathsf{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) := \{\, g \in \mathrm{G} \mid h^g = g \circ h \circ g^{-1} \in \mathrm{H} \text{ für alle } h \in \mathrm{H} \,\}.$$

Für eine Ordinalzahl α definieren wir rekursiv $\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$, die α-te Stufe des Normalisatorturms von H in G, durch:
· $\mathsf{N}^{0}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) := \mathrm{H}$.
· $\mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) := \mathsf{N}_{\mathrm{G}}(\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}))$.
· $\mathsf{N}^{\lambda}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ für $\lambda \in \mathsf{Lim}$.
Für eine lokal-kleine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle$ von $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ schreiben wir $\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{X}}(\mathrm{G}) := \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})}(\mathrm{G})$ und $\mathsf{N}^{\alpha}\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle := \langle\, \mathrm{X}, \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{X}}(\mathrm{G}) \rangle$.

Mit einem einfachen Argument lässt sich zeigen, dass der Normalisatorturm jeder Untergruppe terminiert.

3.1.2 Proposition: Sei G eine Gruppe der Kardinalität κ.
Für jede Untergruppe H von G existiert eine Ordinalzahl $\alpha < \kappa^+$ mit

$$\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \mathsf{N}^{\beta}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \text{ für alle } \beta \geq \alpha. \tag{3.1}$$

Beweis. Sonst würde für jedes $\alpha < \kappa^+$ ein $g_\alpha \in \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) \setminus \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ existieren und $\{\, g_\alpha \mid \alpha < \kappa^+ \,\}$ wäre eine Teilmenge von G mit Kardinalität κ^+. □

Für eine Untergruppe H von G nennen wir die kleinste Ordinalzahl $\nu_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ mit (3.1) die Höhe des Normalisatorturms von H in G.
Für $\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ schreiben wir $\nu\,(\langle\, \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle)$ für $\nu_{\mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X})}(\mathrm{G})$.

Die nächsten Punkte zeigen, wie sich Normalisatoren von Untergruppen und die Höhe von Normalisatortürmen bestimmen lassen.

3.1.3 Lemma: Seien G, G′ Gruppen und $\varphi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'$ ein Isomorphismus von Gruppen. Für jede Untergruppe H von G und jede Ordinalzahl α gilt dann

$$\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}'}(\varphi\,''\, \mathrm{H}) = \varphi\,''\, \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$$

und insbesondere $\nu_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \nu_{\mathrm{G}'}(\varphi\,''\, \mathrm{H})$.

Beweis. Für $g, h \in \mathrm{G}$ gilt $\varphi(g)^{\varphi(h)} = \varphi(g^h)$. Daraus folgt induktiv die Behauptung. $\square$

3.1.4 Korollar: Seien $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ lokal-kleine Kategorien und $\langle \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$, $\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle \in \mathcal{A}(\mathcal{D})$ äquivalente Objekte.
Für alle $\alpha \in \mathsf{Ord}$ sind dann auch $\mathsf{N}^\alpha \langle \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle$ und $\mathsf{N}^\alpha \langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle$ äquivalent und es gilt $\nu(\langle \mathrm{X}, \mathrm{G} \rangle) = \nu(\langle \mathrm{Y}, \mathrm{H} \rangle)$.

3.1.5 Lemma: Sei I eine Indexmenge, $(\mathrm{G_i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ eine Familie von Gruppen und $\mathrm{H_i}$ für jedes $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ eine Untergruppe von $\mathrm{G_i}$.

(i) Es gilt

$$\mathsf{N}_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{H_i}\Big) = \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathsf{N}_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}).$$

(ii) Existiert für eine endliche Teilmenge J von I ein $n < \omega$ mit $\nu_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \leq n$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}$ und $\nu_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \geq n$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{J}$, so folgt

$$\nu_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{H_i}\Big) = \max\{\, \nu_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \mid \mathrm{i} \in \mathrm{J} \,\}.$$

Beweis. (i) Für alle $(g_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}, (h_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}$ gilt $(g_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}^{(h_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}} = (g_\mathrm{i}^{h_\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$.
(ii) Wir zeigen für $\alpha \geq n$ induktiv

$$\mathsf{N}^\alpha_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{H_i}\Big) = \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{N}^\alpha_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}} \mathsf{N}^n_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}).$$

$(\alpha = n)$: Die Behauptung folgt aus der n-fachen Anwendung von (i).
$(\alpha \to \alpha + 1):$ Im Nachfolgerfall gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}^{\alpha+1}_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{H_i}\Big) = \mathsf{N}_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\mathsf{N}^\alpha_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{H_i}\Big)\Big) &\overset{\text{I.A.}}{=} \mathsf{N}_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{N}^\alpha_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}} \mathsf{N}^n_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i})\Big) \\
&\overset{(i)}{=} \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}} \mathsf{N}^{n+1}_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \overset{\text{Vor.}}{=} \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}} \mathsf{N}^n_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}).
\end{aligned}$$

$\mathsf{Lim}(\lambda):$ Für eine Limesordinalzahl λ gilt

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}^\lambda_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{H_i}\Big) = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathsf{N}^\alpha_{\prod\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G_i}}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{H_i}\Big) &\overset{\text{I.A.}}{=} \bigcup_{\alpha < \lambda}\Big(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{N}^\alpha_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}} \mathsf{N}^n_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i})\Big) \\
&\subseteq \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{N}^\lambda_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}} \mathsf{N}^n_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}).
\end{aligned}$$

Umgekehrt existiert für $(g_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{N}^\lambda_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{J}} \mathsf{N}^n_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i})$ wegen der Endlichkeit von J bereits ein $n \leq \alpha < \lambda$ mit

$$(g_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{J}} \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \times \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}\setminus\mathrm{J}} \mathsf{N}^{n}_{\mathrm{G_i}}(\mathrm{H_i}) \overset{\mathrm{I.A.}}{=} \mathsf{N}^{\alpha}_{\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathrm{G_i}}(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{H_i}) \subseteq \mathsf{N}^{\lambda}_{\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathrm{G_i}}(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{H_i}).$$

□

Durch den folgenden Satz erhalten wir die Möglichkeit, die Höhe des Normalisatorturms von Automorphismengruppen spezieller Graphen zu berechnen. Alle Graphen, die für den Beweis von Satz A wichtig sind, werden diese spezielle Gestalt haben.

3.1.6 Satz: Sei $(\Gamma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine Familie von paarweise nicht-isomorphen rigiden, zusammenhängenden Graphen und $(\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine Familie von Permutationsgruppen.
Existiert ein $n < \omega$ und $\mathrm{i}_0 \in \mathrm{I}$ mit $\nu(\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G_i}\rangle) \leq n$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \{\mathrm{i}_0\}$ und $\nu(\langle\, \Delta_{\mathrm{i}_0}, \mathrm{G}_{\mathrm{i}_0}\rangle) \geq n$, so folgt

$$\nu(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i}\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G_i}\rangle) = \nu(\langle\, \Delta_{\mathrm{i}_0}, \mathrm{G}_{\mathrm{i}_0}\rangle). \tag{3.2}$$

Beweis. Nach Konstruktion sind die Zusammenhangskomponenten der Graphen $(\coprod_{x\in\Delta_\mathrm{i}} \Gamma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ paarweise nicht-isomorph. Mit Lemma 2.4.8 ist dann der Gruppenhomomorphismus

$$d_\mathrm{I} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{x\in\Delta_\mathrm{i}} \Gamma_\mathrm{i}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(\coprod_{x\in\Delta_\mathrm{i}} \Gamma_\mathrm{i}))$$

ein Isomorphismus. Da alle Γ_i rigide Graphen sind, folgt mit Lemma 2.5.8, dass auch alle Gruppenhomomorphismen

$$u_{\Delta_\mathrm{i}} : \mathsf{Sym}(\Delta_\mathrm{i}) \longrightarrow \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{x\in\Delta_\mathrm{i}} \Gamma_\mathrm{i})$$

Isomorphismen sind und somit gilt für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$

$$\nu(\Gamma_\mathrm{i}\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G_i}\rangle) = \nu(\langle \coprod_{x\in\Delta_\mathrm{i}} \Gamma_\mathrm{i}, u_{\Delta_\mathrm{i}}{}'' \,\mathrm{Gi}\rangle) = \nu(\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G_i}\rangle).$$

Daraus folgt mit einer Anwendung von Lemma 3.1.5,(ii) mit $u_{\Delta_\mathrm{i}}{}'' \;\mathrm{G_i} \leq$

$\mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{x\in\Delta_{\mathrm{i}}}\Gamma_{\mathrm{i}})$ und $\mathrm{J}=\{\mathrm{i}_0\}$

$$\begin{aligned}
\nu(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\Gamma_{\mathrm{i}}\langle\,\Delta_{\mathrm{i}},\mathrm{G}_{\mathrm{i}}\rangle) &\overset{2.4.8}{=} \nu_{d_{\mathrm{I}}\,''\,\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{x\in\Delta_{\mathrm{i}}}\Gamma_{\mathrm{i}})}(d_{\mathrm{I}}\,''\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}u_{\Delta_{\mathrm{i}}}\,''\,\mathrm{G}_{\mathrm{i}})\\
&\overset{3.1.3}{=} \nu_{\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{x\in\Delta_{\mathrm{i}}}\Gamma_{\mathrm{i}})}(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}(u_{\Delta_{\mathrm{i}}}\,''\,\mathrm{G}_{\mathrm{i}}))\\
&\underset{(ii)}{\overset{3.1.5}{=}} \nu_{\mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(\coprod_{x\in\Delta_{\mathrm{i}_0}}\Gamma_{\mathrm{i}_0})}(u_{\Delta_{\mathrm{i}_0}}\,''\,\mathrm{G}_{\mathrm{i}_0}) = \nu(\Gamma_{\mathrm{i}_0}\langle\,\Delta_{\mathrm{i}_0},\mathrm{G}_{\mathrm{i}_0}\rangle)\\
&\underset{3.1.4}{\overset{2.5.8}{=}} \nu(\langle\,\Delta_{\mathrm{i}_0},\mathrm{G}_{\mathrm{i}_0}\rangle).
\end{aligned}$$

□

Um Normalisatoren von Permutationsgruppen genauer zu untersuchen, müssen wir zunächst das passende Vokabular entwickeln.
Für eine Permutationsgruppe $\langle\,\Delta,\mathrm{G}\rangle$ und $x\in\Delta$ schreiben wir

$$\mathrm{G}x := \{\,\sigma(x)\,|\,\sigma\in\mathrm{G}\,\}$$

für die G-Bahn von x und $\mathrm{G}\setminus\Delta$ für die Menge aller G-Bahnen von Δ. Ist $\Delta\neq\emptyset$, so sagen wir, G operiert transitiv auf Δ, falls $\mathrm{G}\setminus\Delta$ einelementig ist.
Wir schreiben

$$\mathcal{PG}^{trans} := \{\,\langle\,\Delta,\mathrm{G}\rangle\in\mathcal{PG}\,|\,\Delta\neq\emptyset,\ \mathrm{G}\text{ operiert transitiv auf }\Delta\,\}$$

3.1.7 Proposition: Sei $\langle\,\varphi,k_\varphi\restriction\mathrm{G}\rangle:\langle\,\Delta,\mathrm{G}\rangle\longrightarrow\langle\,\Omega,\mathrm{H}\rangle$ ein Isomorphismus. Ist $\langle\,\Delta,\mathrm{G}\rangle$ ein Element von $\mathcal{PG}^{trans}$, so auch $\langle\,\Omega,\mathrm{H}\rangle$.

Beweis. Für $\varphi(x),\varphi(y)\in\Omega$ existiert ein $g\in\mathrm{G}$ mit $g(x)=y$. Damit gilt $k_\varphi(g)(\varphi(x))=\varphi(g(x))=\varphi(y)$ und $\mathrm{H}=k_\varphi\,''\,\mathrm{G}$ operiert transitiv auf $\Omega=\varphi\,''\,\Delta$. □

Ist $\langle\,\Delta,\mathrm{G}\rangle$ eine Permutationsgruppe und $x\in\Delta$, so erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\rho_x:\mathrm{G}\longrightarrow\mathsf{Sym}(\mathrm{G}x),\ \sigma\longmapsto\sigma\restriction\mathrm{G}x$$

und eine neue Permutationsgruppe $\langle\,\Delta,\mathrm{G}\rangle_x:=\langle\,\mathrm{G}x,\rho_x\,''\,\mathrm{G}\rangle$.
Für uns sind die Bahnen von Elementen in direkten Produkten von Permutationsgruppen von besonderem Interesse.

3.1.8 Lemma: Sei $(\langle\, \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine Familie von Permutationsgruppen. Für jedes $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und jedes $x \in \Delta_{\mathrm{i}}$ gilt dann

$$\langle\, \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle_x \cong (\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle\, \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}$$

Beweis. Setze $\langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^*\rangle := \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle\, \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle$. Fixiere ein $\langle\, x, \mathrm{i}\rangle \in \Delta^*$.
Sei $p_{\mathrm{i}} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i} \longrightarrow \mathrm{G_i}$ die kanonische Projektion und $t_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle} \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Set}}(\mathrm{G_i}x, \mathrm{G}^*\langle\, x, i\rangle)$ definiert durch $t_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}(g(x)) := \langle\, g(x), \mathrm{i}\rangle$.
Für $(g_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i}$ und $\langle\, h(x), \mathrm{i}\rangle \in \mathrm{G}^*\langle\, x, \mathrm{i}\rangle$ gilt dann

$$(k_{t_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}} \circ \rho_x)(g_{\mathrm{i}})\langle\, h(x), \mathrm{i}\rangle = \langle\, (g_{\mathrm{i}} \circ h)(x), \mathrm{i}\rangle = (\rho_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle} \circ d_{\mathrm{I}})((g_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})\langle\, h(x), \mathrm{i}\rangle,$$

das heißt folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G_i} \arrow[dd, "\rho_x"] & \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i} \arrow[l, "p_{\mathrm{i}}"'] \arrow[d, "d_{\mathrm{I}}"] \\
 & \mathrm{G}^* \arrow[d, "\rho_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}"] \\
\mathsf{Sym}(\mathrm{G_i}x) \arrow[r, "k_{t_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}}"'] & \mathsf{Sym}(\mathrm{G}^*\langle\, x, \mathrm{i}\rangle)
\end{tikzcd}$$

und es gilt $k_{t_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}}{}'' \, (\rho_x{}'' \, \mathrm{G_i}) = \rho_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}{}'' \, (d_{\mathrm{I}}{}'' \, \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G_i}) = \rho_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}{}'' \, \mathrm{G}^*$. Damit ist $\langle\, t_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}, k_{t_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle}} \restriction \rho_x{}'' \, \mathrm{G_i}\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\langle\, \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle_x, (\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle\, \Delta_{\mathrm{i}}, \mathrm{G_i}\rangle)_{\langle\, x,\mathrm{i}\rangle})$. □

Wir sind nun an Bijektionen von Δ interessiert, die die G-Bahnen bildweise permutieren. Dafür definieren wir die Gruppe

$$\mathsf{P}_{\langle\, \Delta,\mathrm{G}\rangle} := \{\, \sigma \in \mathsf{Sym}(\Delta) \,|\, \sigma'' \, \mathrm{G}x = \mathrm{G}\sigma(x) \text{ für alle } x \in \Delta \,\}.$$

Jedes Element σ von $\mathsf{P}_{\langle\, \Delta,\mathrm{G}\rangle}$ induziert durch $\mathrm{G}x \mapsto \mathrm{G}\sigma(x)$ eine Bijektion von $\mathrm{G} \setminus \Delta$. Gilt nämlich $\mathrm{G}\sigma(x) = \mathrm{G}\sigma(y)$ für $x, y \in \Delta$, so folgt $\sigma(x) \in \mathrm{G}\sigma(y) = \sigma'' \, \mathrm{G}y$ und somit gilt wegen $x \in \mathrm{G}y$ schon $\mathrm{G}x = \mathrm{G}y$.

3.1.9 Lemma: Sei $\langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle : \langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle \longrightarrow \langle\, \Omega, \mathrm{H}\rangle$ ein Isomorphismus.

(i) Für $x \in \Delta$ gilt $\varphi'' \, \mathrm{G}x = \mathrm{H}\varphi(x)$. Damit induziert φ eine wohldefinierte Bijektion

$$\varphi^* : \mathrm{G} \setminus \Delta \longrightarrow \mathrm{H} \setminus \Omega,\ Gx \longmapsto \mathrm{H}\varphi(x).$$

(ii) Es gilt $k_\varphi{}'' \, \mathsf{P}_{\langle\, \Delta,\mathrm{G}\rangle} = \mathsf{P}_{\langle\, \Omega,\mathrm{H}\rangle}$.

Beweis. (i) Die erste Behauptung und die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt direkt aus $\varphi(g(x)) = k_\varphi(g)(\varphi(x))$ für alle $x \in \Delta$ und $g \in \mathrm{G}$. Gilt $\varphi'' \, \mathrm{G}x = \varphi'' \, \mathrm{G}y$ für $x, y \in \Delta$, so folgt aus der Injektivität von φ, dass $x \in \mathrm{G}y$ und damit $\mathrm{G}x = \mathrm{G}y$ gilt. Die Surjektivität der Abbildung folgt aus der Surjektivität von φ.
(ii) Für $\sigma \in \mathsf{P}_{\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle}$ gilt mit (i)

$$k_\varphi(\sigma)'' \, \mathrm{H}\varphi(x) = (k_\varphi(\sigma) \circ \varphi)'' \, \mathrm{G}x = (\varphi \circ \sigma)'' \, \mathrm{G}x = \varphi'' \, \mathrm{G}\sigma(x) = \mathrm{H}k_\varphi(\sigma)(\varphi(x))$$

für alle $\varphi(x) \in \Omega$. Es folgt $k_\varphi(\sigma) \in \mathsf{P}_{\langle \Omega, \mathrm{H} \rangle}$ und die entsprechende Argumentations mit φ^{-1} liefert die Behauptung. $\square$

Das folgende Lemma zeigt, warum die Gruppe $\mathsf{P}_{\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle}$ in unserem Zusammenhang interessant ist.

3.1.10 Lemma: $\mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G}) \leq \mathsf{P}_{\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle}$ und jedes $\sigma \in \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$ induziert für $x \in \Delta$ einen Isomorphismus von $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle_x$ und $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle_{\sigma(x)}$ in $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$.

Beweis. Nach Lemma 2.3.4 ist $\langle \pi, k_\pi \restriction \mathrm{G} \rangle \in \mathsf{Aut}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle)$ für alle $\pi \in \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$. Aus dem ersten Punkt des vorigen Lemmas. folgt dann $\pi'' \, \mathrm{G}x = \mathrm{G}\pi(x)$ für alle $x \in \Delta$ und damit $\pi \restriction \mathrm{G}x \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Set}}(\mathrm{G}x, \mathrm{G}\pi(x))$.
Für alle $x \in \Delta$ und $g, h \in \mathrm{G}$ gilt dann

$$(k_{\pi \restriction \mathrm{G}x} \circ \rho_x)(g)(h(\pi(x))) = (g^\pi \circ h)(\pi(x)) = (\rho_{\pi(x)} \circ (k_\pi \restriction \mathrm{G}))(g)(h(\pi(x)))$$

und damit $k_{\pi \restriction \mathrm{G}x}'' \; (\rho_x'' \; \mathrm{G}) = \rho_{\pi(x)}'' \; (k_\pi'' \; \mathrm{G}) = \rho_{\pi(x)}'' \; \mathrm{G}$. Daraus folgt $\langle \pi \restriction \mathrm{G}x, k_{\pi \restriction \mathrm{G}x} \restriction \rho_x'' \, \mathrm{G} \rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle_x, \langle \Delta, \mathrm{G} \rangle_{\sigma(x)})$. $\square$

Wir können nun ein Analogon zu Satz 3.1.6 für direkte Produkte von speziellen Familien von Permutationsgruppen beweisen.

3.1.11 Satz: Sei $(\langle \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i} \rangle)_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ eine Familie von Permutationsgruppen, $\langle \Delta, (\iota_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \rangle$ ein Koprodukt der $(\Delta_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ und Λ_I der induzierte Gruppenhomomorphismus mit (2.7).
Gilt dann für alle $\mathrm{i}, \mathrm{j} \in \mathrm{I}$ mit $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ bereits

$$\langle \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i} \rangle_x \not\cong \langle \Delta_\mathrm{j}, \mathrm{G}_\mathrm{j} \rangle_y$$

für alle $x \in \Delta_\mathrm{i}$ und $y \in \Delta_\mathrm{j}$, so folgt

$$\mathsf{N}^1_\Delta(\Lambda_\mathrm{I}'' \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_\mathrm{i}) = \Lambda_\mathrm{I}'' \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathsf{N}^1_{\Delta_\mathrm{i}}(\mathrm{G}_\mathrm{i}).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst das direkte Produkt $\langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^*\rangle = \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle$. Ist $\pi \in \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*) = \mathsf{N}_{\mathsf{Sym}(\Delta^*)}(d_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G}_\mathrm{i})$, $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$, $x \in \Delta_\mathrm{i}$ und $\langle\, y, \mathrm{j}\rangle = \pi\langle\, x, \mathrm{i}\rangle$, so gilt mit 3.1.8 und 3.1.10

$$\langle\, \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{G}_\mathrm{i}\rangle_x \overset{3.1.8}{\cong} \langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^*\rangle_{\langle x,\mathrm{i}\rangle} \overset{3.1.10}{\cong} \langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^*\rangle_{\langle y,\mathrm{j}\rangle} \overset{3.1.8}{\cong} \langle\, \Delta_\mathrm{j}, \mathrm{G}_\mathrm{j}\rangle_y$$

Aus der Voraussetzung folgt dann i=j. Damit gilt $\pi{''}\,(\Delta_\mathrm{i} \times \{\mathrm{i}\}) = \Delta_\mathrm{i} \times \{\mathrm{i}\}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und $\pi \in d_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_\mathrm{i})$. Wie in 3.1.6 folgt

$$\begin{aligned} \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*) &= \mathsf{N}_{d_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_\mathrm{i})}(\mathrm{G}^*) = \mathsf{N}_{d_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_\mathrm{i})}(d_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G}_\mathrm{i}) \\ &\overset{3.1.3}{=} d_\mathrm{I}{''}\, \mathsf{N}_{\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta_\mathrm{i})}(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G}_\mathrm{i}) \underset{(i)}{\overset{3.1.5}{=}} d_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^1_{\Delta_\mathrm{i}}(\mathrm{G}_\mathrm{i}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sei nun $\langle\, \Delta, (\iota_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\rangle$ ein beliebiges Koprodukt und Λ_I der induzierte Gruppenhomomorphismus. Wie im Beweis von 2.4.4 existiert dann ein Isomorphismus $\Phi : \Delta^* \longrightarrow \Delta$ mit $\Lambda_\mathrm{I} = k_\Phi \circ d_\mathrm{I}$ und damit

$$\begin{aligned} \mathsf{N}^1_{\Delta}(\Lambda_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G}_\mathrm{i}) &\overset{3.1.3}{=} k_\Phi{''}\, \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*) \\ &\overset{(3.3)}{=} (k_\Phi \circ d_\mathrm{I}){''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^1_{\Delta_\mathrm{i}}(\mathrm{G}_\mathrm{i}) = \Lambda_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^1_{\Delta_\mathrm{i}}(\mathrm{G}_\mathrm{i}). \end{aligned}$$

□

Wir wollen nun die Normalisatoren einer weiteren Familie von Permutationsgruppen konkret bestimmen. Dazu sei im Weiteren $\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle \in \mathcal{PG}^{trans}$ und I eine Indexmenge.
Für $\Delta^* := \coprod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Delta$ sei $d_\mathrm{I} : \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\Delta^*)$ die Abbildung aus 2.4.3 und $u_\mathrm{I} : \mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\Delta^*)$ die Abbildung aus 2.5.3.
Für $\mathrm{G}^* := d_\mathrm{I}{''} \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G}$ gilt dann $\langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^*\rangle = \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle\, \Delta, \mathrm{G}\rangle$.

Unser nächstes Ziel ist es, $\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$ vollständig zu bestimmen. Dazu brauchen wir noch den gruppentheoretischen Begriff des semi-direkten Produktes.

3.1.12 Definition: Sei G eine Gruppe und H, N Untergruppen von G. Wir schreiben $G = H \ltimes N$, falls gilt:
· $G = \{\, hn \mid h \in H,\ n \in N \,\}$.
· $N \trianglelefteq G$.
· $H \cap N = \{\mathbb{1}_G\}$.

Jedes Element g von G besitzt dann eine eindeutige Darstellung $g = hn$ mit $h \in H$ und $n \in N$.

3.1.13 Lemma: Für $\langle\, \Delta^*, G^* \rangle$ wie oben definiert gilt:
(i) $\Delta^* \setminus G^* = \{\, \Delta \times \{i\} \mid i \in I \,\}$.
(ii) $(u_I{}'' \,\mathsf{Sym}(I)) \cap (d_I{}'' \prod_{i\in I} \mathsf{Sym}(\Delta)) = \{\mathsf{id}_{\Delta^*}\}$.
(iii) $u_I{}'' \,\mathsf{Sym}(I) \leq \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(d_I{}'' \prod_{i\in I} H)$ für jede Untergruppe H von $\mathsf{Sym}(\Delta)$.
(iv) $\mathsf{P}_{\langle\, \Delta^*, G^* \rangle} = u_I{}'' \,\mathsf{Sym}(I) \ltimes d_I{}'' \prod_{i\in I} \mathsf{Sym}(\Delta)$.

Beweis. (i) Aus $d_I((\sigma_i)_{i\in I})\langle\, x, i \rangle = \langle\, \sigma_i(x), i \rangle$ folgt $G^*\langle\, x, i \rangle \subseteq \Delta \times \{i\}$ und, da G transitiv auf Δ operiert, gilt auch $\Delta \times \{i\} \subseteq G^*\langle\, x, i \rangle$.
(ii) Für $(\sigma_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathsf{Sym}(\Delta)$ gilt

$$d_I((\sigma_i)_{i\in I})'' \, G^*\langle\, x, i \rangle = d_I((\sigma_i)_{i\in I})'' \, (\Delta \times \{i\}) = \Delta \times \{i\} = G^* d_I((\sigma_i)_{i\in I})\langle\, x, i \rangle.$$

Damit ist $d_I{}'' \prod_{i\in I} \mathsf{Sym}(\Delta) \leq \mathsf{P}_{\langle\, \Delta^*, G^* \rangle}$ und jedes Element induziert die triviale Bijektion auf $\Delta^* \setminus G^*$. Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(I)$ ist

$$u_I(\sigma)'' \, G^*\langle\, x, i \rangle = u_I(\sigma)'' \, (\Delta \times \{i\}) = \Delta \times \{\sigma(i)\} = G^* u_I(\sigma)\langle\, x, i \rangle$$

und somit $u_I{}'' \,\mathsf{Sym}(I) \leq \mathsf{P}_{\langle\, \Delta^*, G^* \rangle}$. Weil jedes nicht-triviale Element von $\mathsf{Sym}(I)$ eine nicht-triviale Permutation von $\Delta^* \setminus G^*$ induziert, folgt die Behauptung.
(iii) Für $\sigma \in \mathsf{Sym}(I)$ und $(\pi_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H$ gilt

$$d_I((\pi_i)_{i\in I})^{u_I(\sigma)}\langle\, x, i \rangle = (u_I(\sigma) \circ d_I((\pi_i)_{i\in I}))\langle\, x, \sigma^{-1}(i) \rangle = \langle\, \pi_{\sigma^{-1}(i)}(x), i \rangle$$

und damit $d_I((\pi_i)_{i\in I})^{u_I(\sigma)} = (\pi_{\sigma^{-1}(i)})_{i\in I} \in \prod_{i\in I} H$.
(iv) Für jedes $\pi \in \mathsf{P}_{\langle\, \Delta^*, G^* \rangle}$ existiert ein $\sigma \in \mathsf{Sym}(I)$ mit $\pi'' \, (\Delta \times \{i\}) = \Delta \times \sigma(i)$ für alle $i \in I$. Wegen $(u_I(\sigma^{-1}) \circ \pi)'' \, (\Delta \times \{i\}) = \Delta \times \{i\}$ existiert dann für jedes $i \in I$ ein $\sigma_i \in \mathsf{Sym}(\Delta)$ mit $(u_I(\sigma^{-1}) \circ \pi)\langle\, x, i \rangle = \langle\, \sigma_i(x), i \rangle$ und es gilt $\pi = u_I(\sigma) \circ d_I((\sigma_i)_{i\in I})$.
Mit (iii) für $H = \mathsf{Sym}(\Delta)$ gilt dann $d_I{}'' \prod_{i\in I} \mathsf{Sym}(\Delta) \trianglelefteq \mathsf{P}_{\langle\, \Delta^*, G^* \rangle}$ und mit (ii) folgt die Behauptung. □

Jetzt können wir die Struktur von $\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$ vollständig angeben.

3.1.14 Satz: $\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*) = u_\mathrm{I}{}'' \,\mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \ltimes d_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$.

Beweis. Aus der Injektivität von d_I folgt

$$\begin{aligned} d_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}_{\mathsf{Sym}(\Delta)}(\mathrm{G}) &\overset{3.1.5}{=} d_\mathrm{I}{}'' \,\mathsf{N}_{\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathsf{Sym}(\Delta)}(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{G}) \\ &\overset{3.1.3}{=} \mathsf{N}_{d_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathsf{Sym}(\Delta)}(\mathrm{G}^*) \le \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nach Lemma 3.1.13,(iii) gilt auch $u_\mathrm{I}{}'' \,\mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \le \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$.
Für jedes $\pi \in \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$ existiert nach Lemma 3.1.13,(iv) ein $\sigma \in \mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ und $(\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta)$ mit $\pi = u_\mathrm{I}(\sigma) \circ d_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})$. Mit 3.1.13,(iii) folgt $d_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) = u_\mathrm{I}(\sigma^{-1}) \circ \pi \in \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$. Aus (3.4) folgt

$$d_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \in \mathsf{N}_{d_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\mathsf{Sym}(\Delta)}(\mathrm{G}^*) = d_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$$

und damit erzeugen $u_\mathrm{I}{}'' \,\mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ und $d_\mathrm{I}{}'' \prod_\mathrm{I} \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$ bereits $\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$.
Aus 3.1.13,(ii)+(iii) folgt dann die Behauptung. □

Zusätzlich können wir noch die Gestalt derjenigen Elemente in der nächsten Stufe des Normalisatorturms von $\langle \Delta^*, \mathrm{G}^* \rangle$ bestimmen, die die G^*-Bahnen von Δ^* permutieren.

3.1.15 Satz: $\mathsf{N}^2_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*) \cap \mathcal{P}_{\langle \Delta^*, \mathrm{G}^* \rangle} \le u_\mathrm{I}{}'' \,\mathsf{Sym}(\mathrm{I}) \ltimes d_\mathrm{I}{}'' \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^2_\Delta(\mathrm{G})$

Beweis. Sei $\pi \in \mathsf{N}^2_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*) \cap \mathcal{P}_{\langle \Delta^*, \mathrm{G}^* \rangle}$. Nach Lemma 3.1.13,(iv) ist dann $\pi = u_\mathrm{I}(\sigma) \circ d_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})$ mit $\sigma \in \mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ und $(\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{Sym}(\Delta)$. Wegen $u_\mathrm{I}(\sigma) \in \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*) \le \mathsf{N}^2_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$ folgt $d_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \in \mathsf{N}^2_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$.
Wir wollen nun $(\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^2_\Delta(\mathrm{G})$ zeigen.
Für $g \in \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$ ist $d_\mathrm{I}((g)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})^{d_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})} \in \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{G}^*)$ und nach Satz 3.1.14 existiert ein $\sigma_g \in \mathsf{Sym}(\mathrm{I})$ und $(g_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$ mit

$$d_\mathrm{I}((g)^{(\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}}_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) = d_\mathrm{I}((g)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})^{d_\mathrm{I}((\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})} = u_\mathrm{I}(\sigma_g) \circ d_\mathrm{I}((g_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}).$$

Mit 3.1.13,(ii) folgt $\sigma_g = \mathsf{id}_\mathrm{I}$ und $(g)^{(\pi_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}}_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} = (g_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathsf{N}^1_\Delta(\mathrm{G})$, weil d_I injektiv ist. Damit gilt $\pi_\mathrm{i} \in \mathsf{N}^2_\Delta(\mathrm{G})$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und π ist von der gewünschten Gestalt. □

3.2 Die Normalisatorturmtechnik

Als erstes Ziel dieses Abschnittes wollen wir Gruppen bestimmen, deren Automorphismen- und Normalisatorturm gleich hoch sind.

Zunächst einige gruppentheoretische Vorbereitungen.
Für Untergruppen A, B einer Gruppe G definieren wir den Kommutator von A und B als

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}] := \langle\, aba^{-1}b^{-1} \mid a \in \mathrm{A},\ b \in \mathrm{B} \,\rangle \leq \mathrm{G}.$$

3.2.1 Lemma: Seien A,B Untergruppen einer Gruppe G.
(i) $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \{\mathbb{1}_{\mathrm{G}}\} \iff \mathrm{A} \leq \mathsf{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})$.
(ii) $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] \leq \mathrm{A} \iff \mathrm{B} \leq \mathsf{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{A})$.
(iii) Ist G eine Gruppe mit trivialem Zentrum und N ein Normalteiler von $\mathsf{Aut}(\mathrm{G})$ mit $\mathrm{N} \cap \mathsf{Inn}(\mathrm{G}) = \{\mathsf{id}_{\mathrm{G}}\}$, so gilt bereits $\mathrm{N} = \{\mathsf{id}_{\mathrm{G}}\}$.

Beweis. (i) $aba^{-1}b^{-1} = \mathbb{1}_{\mathrm{G}} \Leftrightarrow ab = ba$.
(ii) Die Behauptung folgt direkt aus $aba^{-1}b^{-1} = a(a^{-1})^b$.
(iii) Es gilt $\mathrm{N}, \mathsf{Inn}(\mathrm{G}) \leq \mathsf{Aut}(G) = \mathsf{N}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{G})}(\mathrm{N}) = \mathsf{N}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{G})}(\mathsf{Inn}(\mathrm{G}))$ und mit (ii) folgt $[\mathrm{N}, \mathsf{Inn}(\mathrm{G})] \leq \mathrm{N} \cap \mathsf{Inn}(\mathrm{G}) = \{\mathsf{id}_{\mathrm{G}}\}$. Wegen (i) und (1.2) gilt dann schon $\mathrm{N} \leq \mathsf{C}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{G})}(\mathsf{Inn}(\mathrm{G})) = \{\mathsf{id}_{\mathrm{G}}\}$. □

Wir interessieren uns im Weiteren für einfache Gruppen, das heißt Gruppen, deren einziger nicht-trivialer Normalteiler die ganze Gruppe ist.

3.2.2 Satz: Sei S eine einfache, nicht-abelsche Gruppe und G eine Untergruppe von $\mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ mit $\mathsf{Inn}(\mathrm{S}) \leq \mathrm{G}$. Dann ist $\mathsf{Inn}(\mathrm{S})$ der eindeutig bestimmte minimale nicht-triviale Normalteiler von G.

Beweis. Ist S einfach und nicht-abelsch, so folgt aus $\mathsf{C}(\mathrm{S}) \trianglelefteq \mathrm{S}$ und $\mathsf{C}(\mathrm{S}) \neq \mathrm{S}$ schon $\mathsf{C}(\mathrm{S}) = \{\mathbb{1}_{\mathrm{S}}\}$.
Wegen (1.1) ist $\mathsf{Inn}(\mathrm{S})$ ein Normalteiler von G. Für jeden nicht-trivialen Normalteiler N von G mit $\mathrm{N} \subseteq \mathsf{Inn}(\mathrm{S})$ ist $i_{\mathrm{S}}^{-1\,\prime\prime}\,\mathrm{N}$ als nicht-trivialer Normalteiler von S schon die ganze Gruppe S und somit auch $\mathrm{N} = \mathsf{Inn}(\mathrm{S})$. Daraus folgt die Minimalität von $\mathsf{Inn}(\mathrm{S})$.
Angenommen, N ist ein weiterer minimaler nicht-trivialer Normalteiler von G. Dann gilt

$$\mathrm{N}, \mathsf{Inn}(\mathrm{S}) \leq \mathrm{G} = \mathsf{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{N}) = \mathsf{N}_{\mathrm{G}}(\mathsf{Inn}(\mathrm{S}))$$

und mit Lemma 3.2.1,(ii) folgt $[\mathrm{N}, \mathsf{Inn}(\mathrm{S})] \leq \mathrm{N} \cap \mathsf{Inn}(\mathrm{S})$. Da N und $\mathsf{Inn}(\mathrm{S})$ verschiedene minimale Normalteiler von G sind, folgt $\{\mathsf{id}_{\mathrm{S}}\} = \mathrm{N} \cap \mathsf{Inn}(\mathrm{S}) =$

$[\mathrm{N}, \mathsf{Inn}(\mathrm{S})]$. Mit 3.2.1,(i) und 1.2 gilt dann $\mathrm{N} \leq \mathsf{C}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathsf{Inn}(\mathrm{S})) = \{\mathsf{id}_\mathrm{S}\}$ im Widerspruch zur Annahme. □

3.2.3 Satz: Sei S eine einfache, nicht-abelsche Gruppe und G, H Untergruppen von $\mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ mit $\mathsf{Inn}(\mathrm{S}) \leq \mathrm{G}, \mathrm{H}$. Ist $\varphi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ ein Gruppenisomorphismus, so existiert ein eindeutiges $\pi \in \mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ mit $\varphi = i_\pi \restriction \mathrm{G}$.

Beweis. Mit $\mathsf{Inn}(\mathrm{S})$ ist auch $\varphi'' \,\mathsf{Inn}(\mathrm{S})$ ein minimaler nicht-trivialer Normalteiler von H und aus 3.2.2 folgt $\varphi'' \,\mathsf{Inn}(\mathrm{S}) = \mathsf{Inn}(\mathrm{S})$. Damit existiert ein $\pi \in \mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ mit $\varphi(i_s) = i_{\pi(s)} = \pi \circ i_s \circ \pi^{-1}$ für alle $s \in \mathrm{S}$.
Für jeden weiteren Automorphimus π', der dies erfüllt, gilt dann $\pi^{-1} \circ \pi' \circ i_s = i_s \circ \pi^{-1} \circ \pi'$ für alle $s \in \mathrm{S}$ und somit $\pi^{-1} \circ \pi' \in \mathsf{C}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathsf{Inn}(\mathrm{S})) = \{\mathsf{id}_\mathrm{S}\}$. Damit ist π eindeutig bestimmt.
Für alle $g \in \mathrm{G}$ und $s \in \mathrm{S}$ gilt

$$\begin{aligned} {i_s}^{(\pi \circ g)} &= ({i_s}^g)^\pi = \varphi({i_s}^g) = \varphi(g) \circ \varphi(i_s) \circ \varphi(g)^{-1} = \varphi(g) \circ i_{\pi(s)} \circ \varphi(g)^{-1} \\ &= \varphi(g) \circ \pi \circ i_s \circ \pi^{-1} \circ \varphi(g)^{-1} = {i_s}^{(\varphi(g) \circ \pi)}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\pi^{-1} \circ \varphi(g)^{-1} \circ \pi \circ g \in \mathsf{C}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathsf{Inn}(\mathrm{S})) = \{\mathsf{id}_\mathrm{S}\}$$

und somit $\varphi(g) = g^\pi = i_\pi(g)$. □

Der folgende Satz zeigt, dass bei einer Gruppe von Automorphismen einer einfachen Gruppe S, die die inneren Automorphismen enthält, der Normalisatorturm der Gruppe in $\mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ und der Automorphismenturm der Gruppe isomorph sind.

3.2.4 Satz: Sei S eine einfache, nicht-abelsche Gruppe, G eine Untergruppe von $\mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ mit $\mathsf{Inn}(\mathrm{S}) \leq \mathrm{G}$ und $\langle (\mathrm{G}^\alpha)_{\alpha \in \mathsf{Ord}}, (\xi^\alpha_\beta)_{\beta \leq \alpha \in \mathsf{Ord}} \rangle$ der Automorphismenturm von G.
Dann ist G eine Gruppe mit trivialem Zentrum und für jede Ordinalzahl α existiert ein Gruppenisomorphismus $n_\alpha : \mathrm{G}^\alpha \longrightarrow \mathsf{N}^\alpha_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G})$ mit $n_\alpha \circ \xi^\alpha_\beta = n_\beta$ für alle $\beta \leq \alpha$.
Insbesondere gilt $\tau(\mathrm{G}) = \nu_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G})$.

Beweis. Sei zunächst H eine beliebige Gruppe mit $\mathsf{Inn}(\mathrm{S}) \leq \mathrm{H} \leq \mathsf{Aut}(\mathrm{S})$. Mit (1.2) ist dann $\mathsf{C}(\mathrm{H}) \leq \mathsf{C}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathsf{Inn}(\mathrm{S})) = \{\mathsf{id}_\mathrm{S}\}$, weil S eine Gruppe mit

trivialem Zentrum ist.
Für $\varphi \in \mathsf{Aut}(\mathrm{H})$ existiert mit 3.2.3 ein eindeutiges $\pi_\varphi \in \mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ mit

$$\varphi = i_{\pi_\varphi} \restriction \mathrm{H} \tag{3.5}$$

und somit $\pi_\varphi \in \mathsf{N}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{H})$. Die Abbildung

$$n : \mathsf{Aut}(\mathrm{H}) \longrightarrow \mathsf{N}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{H}),\ \varphi \longmapsto \pi_\varphi \tag{3.6}$$

ist dann ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.
Aus der Eindeutigkeit von π_φ mit (3.5) folgt $n(i_h) = h$ für alle $h \in \mathrm{H}$. Damit ist $n\,''\ \mathsf{Inn}(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$ und n ist injektiv auf H. Für $\mathsf{Ker}(n) \trianglelefteq \mathsf{Aut}(\mathrm{H})$ gilt also $\mathsf{Ker}(n) \cap \mathsf{Inn}(\mathrm{H}) = \{\mathsf{id}_\mathrm{H}\}$ und aus 3.2.1,(iii) folgt die Injektivität von n.
Für $g \in \mathsf{N}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{H})$ ist $i_g \restriction \mathrm{H} \in \mathsf{Aut}(\mathrm{H})$. Aus der Eindeutigkeit in (3.5) folgt $n(i_g \restriction \mathrm{H}) = g$ und die Surjektivität von n.
Wir definieren nun rekursiv die Isomorphismen n_α:
$(\alpha = 0):$ Wir setzen $n_0 := \mathsf{id}_\mathrm{G}$.
$(\alpha \to \alpha + 1):$ Mit n_α ist nach 2.1.3,(iii) auch $k_{n_\alpha} : \mathrm{G}^{\alpha+1} \longrightarrow \mathsf{Aut}(\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G}))$ ein Isomorphismus von Gruppen. Nach oben Gezeigtem existiert dann ein Isomorphismus $n : \mathsf{Aut}(\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G})) \longrightarrow \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G})$ mit $n(i_h) = h$ für alle $h \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G})$. Wir setzen $n_{\alpha+1} := n \circ k_{n_\alpha}$.
Für $\beta \leq \alpha$ und $h \in \mathrm{G}^\beta$ gilt dann $(n_{\alpha+1} \circ \xi^{\alpha+1}_\beta)(h) = (n \circ k_{n_\alpha} \circ \xi^{\alpha+1}_\alpha)(\xi^\alpha_\beta(h)) = (n \circ k_{n_\alpha})(i_{\xi^\alpha_\beta(h)}) = n(i_{(n_\alpha \circ \xi^\alpha_\beta)(h)}) = (n_\alpha \circ \xi^\alpha_\beta)(h) = n_\beta(h)$.
$\mathsf{Lim}(\lambda):$ Nach 1.1.2,(iii) gilt $\mathrm{G}^\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \xi^{\lambda}_\alpha{}''\ \mathrm{G}^\alpha$. Durch die bisherige Konstruktion definiert $n_\lambda(\xi^\lambda_\alpha(h)) := n_\alpha(h)$ einen Isomorphismus von G^λ und $\mathsf{N}^{\lambda}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G}) = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathsf{Aut}(\mathrm{S})}(\mathrm{G})$ mit den gewünschten Eigenschaften.

$\square$

Im Rest dieses Abschnittes wollen wir zu einer gegebenen Automorphismengruppe H eines Graphen eine einfache Gruppe S und eine Untergruppe G von $\mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ konstruieren, für die wir mit den oben hergeleiteten Techniken zeigen können, dass die Höhe des Automorphismenturms von G gleich der Höhe des Normalisatorturms von G in $\mathsf{Aut}(\mathrm{S})$ ist. Dafür benutzen wir zwei klassische Resultate aus der Theorie der projektiven Gruppen. Zu diesem Zweck geben wir eine kleine Einführung in die Begriffe dieser Theorie.
Sei K ein beliebiger Körper und V ein K-Vektorraum. Wir nennen

$$\mathsf{PV} := \{\, \mathrm{U} \subseteq \mathrm{V} \mid \mathrm{U} \text{ ist ein 1-dimensionaler K-Untervektorraum von V} \,\}$$

den projektiven Raum von V. Ist $\mathrm{U} \in \mathsf{PV}$ und $v \in \mathrm{U} \setminus \{0_{\mathrm{V}}\}$, so schreiben wir auch $\mathrm{U} = \mathrm{K}v$.
Für $n < \omega$ heißt $\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}} := \mathsf{PK}^{n+1}$ der n-dimensionale projektive Raum über K. Wir schreiben $\mathsf{GL}(n, \mathrm{K})$ für die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K und $\mathsf{SL}(n, \mathrm{K})$ für die Untergruppe der Elemente von $\mathsf{GL}(n, \mathrm{K})$ mit Determinante 1. Da das Bild eines 1-dimensionalen Untervektorraumes unter einem Element von $\mathsf{GL}(n+1, \mathrm{K})$ wieder ein 1-dimensionaler Untervektorraum ist, induziert jedes $\mathrm{A} \in \mathsf{GL}(n+1, \mathrm{K})$ eine Bijektion A^* von $\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}}$ durch $\mathrm{A}^*(\mathrm{K}v) := \mathrm{K}(\mathrm{A}(v))$ und wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$p_n : \mathsf{GL}(n+1, \mathrm{K}) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}}),\ \mathrm{A} \longmapsto \mathrm{A}^*.$$

Dann heißt $\mathsf{PGL}(n+1, \mathrm{K}) := p_n{}'' \,\mathsf{GL}(n+1, \mathrm{K})$ die allgemeine projektive lineare Gruppe vom Grad $n{+}1$ über K und $\mathsf{PSL}(n+1, \mathrm{K}) := p_n{}'' \,\mathsf{SL}(n+1, \mathrm{K})$ die spezielle projektive lineare Gruppe vom Grad $n{+}1$ über K.

Der folgende Satz fasst die für unsere Anwendung wichtigsten Eigenschaften der projektiven Gruppen zusammen. Beweise für die Aussagen finden sich zum Beispiel in [Rob96], Seite 73.

3.2.5 Satz (Struktur projektiver Gruppen)**:** Sei K ein Körper und $n < \omega$.
(i) $\mathsf{Ker}(p_n) = \mathsf{C}(\mathsf{GL}(n+1, \mathrm{K})) = \{\, a \cdot \mathbb{1}_{\mathsf{GL}(n+1,\mathrm{K})} \mid a \in \mathrm{K}^{\mathrm{x}} \,\}$.
(ii) $\mathsf{Ker}(p_n \restriction \mathsf{SL}(n+1, \mathrm{K})) = \mathsf{C}(\mathsf{SL}(n+1, \mathrm{K})) = \mathsf{C}_{\mathsf{GL}(n+1,\mathrm{K})}(\mathsf{SL}(n+1, \mathrm{K})) = \{\, a \cdot \mathbb{1}_{\mathsf{GL}(n+1,\mathrm{K})} \mid a^{n+1} = 1 \,\}$.
(iii) $\mathsf{PSL}(n+1, \mathrm{K}) \trianglelefteq \mathsf{PGL}(n+1, \mathrm{K})$.
(iv) (Jordan, Dickson) Ist $n = 1$ und $|\mathrm{K}| > 3$ oder $n > 1$, so ist $\mathsf{PSL}(n+1, \mathrm{K})$ eine einfache Gruppe.

Für $\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})$ sei $\alpha_n \in \mathsf{Sym}(\mathrm{K}^n)$ durch die komponentenweise Anwendung von α definiert. Dann induziert α wegen $\alpha_n(k \cdot v) = \alpha(k) \cdot \alpha_n(v)$ eine Bijektion α^*_n von $\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}}$ durch $\alpha^*_n(\mathrm{K}v) := \mathrm{K}(\alpha_{n+1}(v))$. Die Abbildung

$$a_n : \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K}) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}}),\ \alpha \longmapsto \alpha^*_n$$

ist ein Monomorphismus von Gruppen, da für $\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})$ und $k \in \mathrm{K}$ mit $\alpha(k) \neq k$ schon $\alpha^*_n(\mathrm{K}\langle k, 1, \ldots, 1\rangle) = \mathrm{K}\langle \alpha(k), 1, \ldots, 1\rangle \neq \mathrm{K}\langle k, 1, \ldots, 1\rangle$ gilt, weil $\langle k, 1, \ldots, 1\rangle$ und $\langle \alpha(k), 1, \ldots, 1\rangle$ linear unabhängig über K sind. Wir schreiben $\mathfrak{A}_n := a_n{}'' \,\mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})$.
Durch komponentenweise Anwendung induziert $\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})$ auch eine

Bijektion $\alpha_{n\times n}$ von $\mathsf{GL}(n,\mathrm{K})$ mit $\alpha_{n\times n}{}''\ \mathsf{SL}(n,\mathrm{K}) = \mathsf{SL}(n,\mathrm{K})$ und für alle $\mathrm{A} \in \mathsf{GL}(n+1,\mathrm{K})$ gilt

$$p_n(A)^{a_n(\alpha)} = p_n(\alpha_{(n+1)\times(n+1)}(\mathrm{A})). \tag{3.7}$$

Damit gilt $\mathfrak{A}_n \leq \mathsf{N}_{\mathsf{Sym}(\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}})}(\mathsf{PGL}(n+1,\mathrm{K})), \mathsf{N}_{\mathsf{Sym}(\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}})}(\mathsf{PSL}(n+1,\mathrm{K}))$.
Mit $\mathsf{P\Gamma L}(n+1,\mathrm{K})$ bezeichnen wir die von $\mathsf{PGL}(n+1,\mathrm{K})$ und $\mathfrak{A}_n$ erzeugte Untergruppe von $\mathsf{Sym}(\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}})$.
Für $0 \leq k \leq n$ sei e_k das Element von K^{n+1}, das eine 1 in der k-ten Komponente und Nullen in allen anderen Komponenten besitzt. Sei nun $\sigma = p_n(\mathrm{A}) = a_n(\alpha) \in \mathsf{PGL}(n+1,\mathrm{K}) \cap \mathfrak{A}_n$ mit $\mathrm{A} = (c_{\mathrm{i,j}})_{0\leq \mathrm{i,j}\leq n}$ und $\alpha \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})$. Für alle k gilt dann $\mathrm{K}e_k = \alpha_n^*(\mathrm{K}e_k) = \mathrm{A}^*(\mathrm{K}e_k) = \mathrm{K}\langle c_{0,k},\ldots,c_{n,k}\rangle$ und damit $c_{l,k} = 0$ für $l \neq k$. Wegen $\mathrm{K}\langle 1,\ldots,1\rangle = \alpha_n^*(\mathrm{K}\langle 1,\ldots,1\rangle) = \mathrm{A}^*(\mathrm{K}\langle 1,\ldots,1\rangle) = \mathrm{K}\langle c_{0,0},\ldots,c_{n,n}\rangle$ existiert dann ein $k \in \mathrm{K}$ mit $k = c_{0,0} = \cdots = c_{n,n}$ und aus 3.2.5,(i) folgt $\mathrm{A} \in \mathsf{Ker}(p_n)$.
Damit gilt $\mathsf{PGL}(n+1,\mathrm{K}) \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathsf{id}_{\mathsf{P}^n_{\mathrm{K}}}\}$ und mit oben Gezeigtem folgt

$$\mathsf{P\Gamma L}(n+1,\mathrm{K}) = \mathfrak{A}_n \ltimes \mathsf{PGL}(n+1,\mathrm{K}).$$

Wegen 3.2.5,(iii) und (3.7) ist $\mathsf{PSL}(n+1,\mathrm{K})$ ein Normalteiler von $\mathsf{P\Gamma L}(n+1,\mathrm{K})$ und wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$t_n : \mathsf{P\Gamma L}(n+1,\mathrm{K}) \longrightarrow \mathsf{Aut}(\mathsf{PSL}(n+1,\mathrm{K})),\ \sigma \longmapsto i_\sigma \restriction \mathsf{PSL}(n+1,\mathrm{K}).$$

mit $t_n{}''\ \mathsf{PSL}(n+1,\mathrm{K}) = \mathsf{Inn}(\mathsf{PSL}(n+1,\mathrm{K}))$.

Wir interessieren uns im Weiteren nur für die Gruppe $\mathsf{P\Gamma L}(2,\mathrm{K})$ und zitieren das folgende, klassische Resultat:

3.2.6 Satz (O. Schreier, B.L. van der Waerden, [Wae28])**:**
Für $|\mathrm{K}| > 3$ ist t_1 ein Isomorphismus von Gruppen.

Wir wollen nun Untergruppen von $\mathsf{P\Gamma L}(2,\mathrm{K})$ untersuchen, die die Form $(a_1{}''\ \mathrm{H}) \ltimes \mathsf{PGL}(2,\mathrm{K})$ besitzen, wobei H eine Untergruppe $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})$ ist.

3.2.7 Lemma: Sei G eine Gruppe und H, N Untergruppen von G mit $\mathrm{G} = \mathrm{H} \ltimes \mathrm{N}$. Existiert zu einer Untergruppe D von G eine Untergruppe E von H mit $\mathrm{D} = \mathrm{E} \ltimes \mathrm{N}$, so gilt für alle $\alpha \in \mathsf{Ord}$

$$\mathsf{N}^\alpha_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \mathsf{N}^\alpha_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}) \ltimes \mathrm{N}. \tag{3.8}$$

Insbesondere gilt $\nu_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \nu_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$.

Beweis. Wir zeigen induktiv, dass für jede Ordinalzahl α jedes Element g von $\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$ eine Darstellung $e \circ n$ mit $e \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$ und $n \in \mathrm{N}$ besitzt und $\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}) \leq \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$ gilt. Mit den gegebenen Voraussetzungen folgt damit schon die Behauptung.

$(\alpha = 0):$ Gilt nach Voraussetzungen.

$(\alpha \to \alpha + 1):$ Sei $h \in \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$ und $g \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$. Nach Induktionsannahme existiert dann ein $e \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$ und $n \in \mathrm{N}$ mit $g = e \circ n$. Wegen $e^h \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$ und $n^h \in \mathrm{N}$ gilt dann $g^h = e^h \circ n^h \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$. Somit gilt $\mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}) \leq \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$.
Ist $h \circ n \in \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) \leq \mathrm{G} = \mathrm{H} \ltimes \mathrm{N}$ mit $h \in \mathrm{H}$ und $n \in \mathrm{N}$, so gilt wegen $n \in \mathsf{N}^{0}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) \leq \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$ auch $h \in \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$. Für $e \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}) \leq \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$ existiert also $e' \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$ und $n' \in \mathrm{N}$ mit $e^h = e' \circ n'$. Dann ist $(e')^{-1} \circ e^h = n' \in \mathrm{H} \cap \mathrm{N} = \{\mathbb{1}_{\mathrm{G}}\}$, $e^h = e' \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$ und $h \in \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$.
Damit besitzten die Elemente von $\mathsf{N}^{\alpha+1}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$ die gewünschte Gestalt.

$\mathsf{Lim}(\lambda):$ Für $\alpha < \lambda$ ist nach Induktionsannahme $\mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}) \leq \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) \leq \mathsf{N}^{\lambda}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$ und damit auch $\mathsf{N}^{\lambda}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}) \leq \mathsf{N}^{\lambda}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$.
Für $h \in \mathsf{N}^{\lambda}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$ existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $h \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D})$. Es gilt somit mit der Induktionsannahme $h = e \circ n$ mit $e \in \mathsf{N}^{\alpha}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}) \leq \mathsf{N}^{\lambda}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E})$ und $n \in \mathrm{N}$. □

Mit diesen Vorbereitungen können wir nun den angestrebten Satz von Simon Thomas beweisen.

3.2.8 Satz (S. Thomas, [Tho85])**:** Sei M ein transitives ZFC-Modell, $\mathrm{K} \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Field})_{\mathrm{M}}$ mit $|\mathrm{K}| > 3$ und $\mathrm{H} \in \mathrm{M}$ eine Untergruppe von $\mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})_{\mathrm{M}}$.
Dann existiert eine Gruppe $\mathrm{G} \in \mathrm{M}$ mit trivialem Zentrum, so dass für jedes transitive ZFC-Modell N mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$ gilt

$$\tau(\mathrm{G})_{\mathrm{N}} = \nu(\langle \mathrm{K}, \mathrm{H} \rangle)_{\mathrm{N}}. \tag{3.9}$$

Beweis. Definiere in M

$$\mathrm{G} := t_1{}'' \, ((a_1{}'' \, \mathrm{H}) \ltimes \mathsf{PGL}(2, \mathrm{K})).$$

Sei nun N ein transitives ZFC-Modell mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$. Dann ist $\mathrm{K} \in \mathsf{Ob}(\mathsf{Field})_{\mathrm{N}}$, $\mathsf{PGL}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{M}} = \mathsf{PGL}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{N}}$ und $\mathsf{PSL}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{M}} = \mathsf{PSL}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{N}}$. Außerdem gilt $\mathrm{H} \leq \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})_{\mathrm{M}} \leq \mathsf{Aut}_{\mathsf{Field}}(\mathrm{K})_{\mathrm{N}}$, $\mathsf{P\Gamma L}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{M}} \leq \mathsf{P\Gamma L}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{N}}$,
$\mathsf{Aut}(\mathsf{PSL}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{M}})_{\mathrm{M}} \leq \mathsf{Aut}(\mathsf{PSL}(2, \mathrm{K})_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}}$, $(a_1)_{\mathrm{N}}$ ist eine Fortsetzung von $(a_1)_{\mathrm{M}}$

und $(t_1)_{\mathrm{N}}$ setzt $(t_1)_{\mathrm{M}}$ fort.
In N gilt damit $\mathrm{G} := t_1{}'' \, ((a_1{}'' \, \mathrm{H}) \ltimes \mathsf{PGL}(2, \mathrm{K}))$ und

$$\mathsf{Inn}(\mathsf{PSL}(2, \mathrm{K})) = t_1{}'' \, \mathsf{PSL}(2, \mathrm{K}) \leq \mathrm{G} \leq \mathsf{Aut}(\mathsf{PSL}(2, \mathrm{K})).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tau(\mathrm{G}) &\overset{3.2.4}{=} \nu_{\mathsf{Aut}(\mathsf{PSL}(2,\mathrm{K}))}(\mathrm{G}) \underset{3.1.3}{\overset{3.2.6}{=}} \nu_{\mathsf{P\Gamma L}(2,\mathrm{K})}((a_1{}'' \, \mathrm{H}) \ltimes \mathsf{PGL}(2, \mathrm{K})) \\ &\overset{3.2.7}{=} \nu_{\mathfrak{A}_1}(a_1{}'' \, \mathrm{H}) \overset{3.1.3}{=} \nu(\langle \mathrm{K}, \mathrm{H} \rangle). \end{aligned}$$

□

3.2.9 Korollar: Sei κ eine Kardinalzahl, $\alpha < \kappa$, $\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathsf{Graph}))$ und $(\mathbb{P}_\beta)_{0<\beta<\kappa}$ ein Familie von partiellen Ordnungen mit:
· $\nu(\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle) = \alpha$.
· „$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \nu(\langle \check{\Gamma}, \check{\mathrm{H}} \rangle) = \check{\beta}$“ für alle $0 < \beta < \kappa$.
Dann existiert eine Gruppe G mit trivialem Zentrum, für die gilt:
· $\tau(\mathrm{G}) = \alpha$.
· „$\mathbb{1}_{\mathbb{P}_\beta} \Vdash \tau(\check{\mathrm{G}}) = \check{\beta}$“ für alle $0 < \beta < \kappa$.

Beweis. Sei $\langle \mathrm{K}_\Gamma, \mathrm{A}_\Gamma \rangle \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A}(\mathsf{Field}))$ das zu $\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle$ äquivalente Objekt aus 2.3.8 mit $|\mathrm{K}_\Gamma| \geq \omega > 3$. Mit 3.1.4 folgt dann $\nu(\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle) = \nu(\langle \mathrm{K}_\Gamma, \mathrm{A}_\Gamma \rangle)$. Sei G die Gruppe aus 3.2.8 die (3.9) für $\langle \mathrm{K}_\Gamma, \mathrm{A}_\Gamma \rangle$ erfüllt. Dann gilt $\tau(\mathrm{G}) = \nu(\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle) = \alpha$.
Sei nun $V[\mathrm{F}]$ eine $\mathbb{P}_\beta$-generische Erweiterung von V. Nach Voraussetzung gilt dann $\nu(\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle)_{V[\mathrm{F}]} = \beta$. Außerdem sind nach 2.3.8 $\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle$ und $\langle \mathrm{K}_\Gamma, \mathrm{A}_\Gamma \rangle$ auch in $V[\mathrm{F}]$ äquivalent. Mit (3.9) folgt dann

$$\tau(\mathrm{G})_{V[\mathrm{F}]} = \nu(\langle \mathrm{K}_\Gamma, \mathrm{A}_\Gamma \rangle)_{V[\mathrm{F}]} = \nu(\langle \Gamma, \mathrm{H} \rangle)_{V[\mathrm{F}]} = \beta.$$

□

Mit Hilfe von $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ werden wir zu Beginn des nächsten Kapitels Graphen und Forcings konstruieren, die die Voraussetzungen des vorangegangenen Korollars erfüllen, und so Satz A beweisen.

Kapitel 4

Stark manipulierbare Normalisatortürme

In diesem Kapitel beweisen wir Satz A mit den in den letzten beiden Kapiteln eingeführten Techniken. Wir konstruieren dazu mit Hilfe des kombinatorischen Prinzips $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ Automorphismengruppen von Graphen, deren Normalisatortürme wir durch Hinzufügen der entsprechenden Isomorphismen wie gewollt manipulieren können. Die Normalisatorturmtechnik liefert uns dann Gruppen mit entsprechend stark manipulierbaren Automorphismentürmen. Die konstruierten Automorphismengruppen werden direkte Produkte von Umsetzungen spezieller Permutationsgruppen durch die rigiden Graphen des Prinzips $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ sein.

Im ersten Abschnitt benennen wir die Eigenschaften, die diese Permutationsgruppen haben sollen, und zeigen, wie sich die Normalisatortürme der Gruppen von Graphenautomorphismen mit ihrer Hilfe manipulieren lassen. Um Permutationsgruppen mit den gewünschten Eigenschaften zu finden, entwickeln wir im zweiten Abschnitt Techniken zur Analyse von Permutationsgruppen $\langle \Delta, \mathrm{G}\rangle$ und ihrer Normalisatoren $\mathsf{N}_\Delta^1(\mathrm{G})$ durch Betrachtung von G-invarianten Äquivalenzrelationen auf Δ. Im dritten Abschnitt weisen wir auf diese Weise die geforderten Eigenschaften bei den von uns definierten Permutationsgruppen nach.

4.1 $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ und Normalisatortürme

In den nächsten zwei Abschnitten wird der folgende Satz bewiesen werden.

4.1.1 Satz: Sei κ eine Kardinalzahl.
Dann existiert eine Sequenz $(\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle)_{\alpha<\kappa}$ von Permutationsgruppen, so dass mit $\mathrm{F}_\alpha := \mathsf{N}^{\alpha}_{\Delta_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha)$ für alle $\alpha < \kappa$ gilt:
(a) $|\Delta_\alpha| \leq \max\{\omega, |\alpha|\}$.
(b) $\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \cong \langle \Delta_\beta, \mathrm{H}_\beta\rangle \times \prod_{\beta\leq\gamma<\alpha}\langle \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle$ für alle $\beta < \alpha$.
(c) $\nu(\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle) = \alpha$ und somit $\nu(\langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle) = 0$.
(d) $\nu(\langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle \times \langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle) = 1$.
(e) $\nu(\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \langle \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle \times \langle \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle) = \beta$ für alle $\beta < \alpha$.

Umsetzungen dieser Permutationsgruppen $\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle$ und $\langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle$ durch rigide Graphen bilden die Bausteine, um entsprechend manipulierbare Automorphismengruppen von Graphen zu konstruieren.

Beweis von Satz A durch Satz 4.1.1. Seien $(\Gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ und $(\mathbb{P}^\alpha_\beta)_{0<\beta\leq\alpha<\kappa}$ Zeugen für $(\star)^{\mathsf{Graph}_{con}}_\kappa$ und $\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle$ und $\langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle$ für $\alpha < \kappa$ die Permutationsgruppen aus 4.1.1.
Definiere für $\alpha < \kappa$ Objekte von $\mathcal{A}(\mathsf{Graph})$ durch

$$\langle \Omega_\alpha, \mathrm{E}_\alpha\rangle := \Gamma_0\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \prod_{0<\gamma<\alpha} \Gamma_\gamma(\langle \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \times \langle \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\kappa} \Gamma_{\gamma+1}\langle \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle.$$

Nach Voraussetzung sind alle verwendeten Graphen zusammenhängend, rigide und paarweise nicht-isomorph. Für $\alpha > 0$ kann man wegen 4.1.1(c)+(d) Satz 3.1.6 mit $\mathrm{i}_0 = 0$ und $n = 1$ anwenden und

$$\nu(\langle \Omega_\alpha, \mathrm{E}_\alpha\rangle) = \nu(\langle \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle) \underset{(c)}{\overset{4.1.1}{=}} \alpha \tag{4.1}$$

folgern. Für $\alpha = 0$ folgert man (4.1) analog mit 3.1.6 für $\mathrm{i}_0 = 0$ und $n = 0$.

Sei $\mathbb{P}$ zunächst eine beliebige partielle Ordnung, die Kardinalitäten und Kofinalitäten erhält und keine neuen κ-Folgen von Elementen des Grundmodells hinzufügt, und $V[\mathrm{G}]$ eine $\mathbb{P}$-generische Erweiterung von V. Wegen $({}^\kappa V)\cap V = ({}^\kappa V)\cap V[\mathrm{G}]$, gilt $\mathsf{Sym}(\Delta)_V = \mathsf{Sym}(\Delta)_{V[\mathrm{G}]}$ für alle Mengen $\Delta \in V$ mit $|\Delta|_V \leq \kappa$. Außerdem haben wir in Lemma 2.4.6 gezeigt, dass für jede Sequenz $(\langle \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{H}_\mathrm{i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \in V$ von Permutationsgruppen mit $|\mathrm{I}|_V \leq \kappa$ auch $(\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{H}_\mathrm{i}\rangle)_V = (\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}\langle \Delta_\mathrm{i}, \mathrm{H}_\mathrm{i}\rangle)_{V[\mathrm{G}]}$ gilt. Für $\alpha < \kappa$ gilt dann wegen 4.1.1(a) $\mathsf{Sym}(\Delta_\alpha)_V = \mathsf{Sym}(\Delta_\alpha)_{V[\mathrm{G}]}$, $\mathsf{N}^\gamma_{\Delta_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha)_V = \mathsf{N}^\gamma_{\Delta_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha)_{V[\mathrm{G}]}$ für alle $\gamma \in \mathsf{Ord}$ und damit $(\mathrm{F}_\alpha)_V = (\mathrm{F}_\alpha)_{V[\mathrm{G}]}$. Da auch die auftretenden disjunkten Vereinigungen der Δ_α in V und $V[\mathrm{G}]$ die gleichen Bijektionen besitzen, gelten alle Aussagen von Satz 4.1.1 auch in $V[\mathrm{G}]$.

Nach Lemma 2.5.6 ist für jeden Graph Γ und jede Permutationsgruppe $\langle\, \Delta, \mathrm{E}\rangle$ aus V schon $\Gamma\langle\, \Delta, \mathrm{E}\rangle_V = \Gamma\langle\, \Delta, \mathrm{E}\rangle_{V[\mathrm{G}]}$. Mit einer weiteren Anwendung von 2.4.6 auf das direkte Produkt $\langle\, \Omega_\alpha, \mathrm{E}_\alpha\rangle$ mit κ Faktoren ergibt sich

$$\langle\, \Omega_\alpha, \mathrm{E}_\alpha\rangle_V = \langle\, \Omega_\alpha, \mathrm{E}_\alpha\rangle_{V[\mathrm{G}]}$$

für alle $\alpha < \kappa$.

Fixiere nun ein $\alpha < \kappa$ und setze $\langle\, \Omega, \mathrm{E}\rangle := \langle\, \Omega_\alpha, \mathrm{E}_\alpha\rangle_V$. Wir definieren partielle Ordnungen $(\mathbb{Q}_\beta)_{0<\beta<\kappa}$, die den in Satz A geforderten Bedingungen genügen, durch $\mathbb{Q}_\beta := \mathbb{P}_\beta^\beta$ für $\beta < \alpha$ und $\mathbb{Q}_\beta := \mathbb{P}_\beta^\alpha$ für $\alpha \leq \beta$. Nach Voraussetzung erfüllen alle $\mathbb{Q}_\beta$ die oben gemachten Anforderungen an partielle Ordnungen und wir müssen nicht mehr unterscheiden, ob die auftauchenden Objekte aus $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$ und $\mathcal{A}(\mathsf{Graph})$ im Grundmodell oder in der generischen Erweiterung konstruiert wurden.

Sei zunächst $1 \leq \beta < \alpha$ und $V[\mathrm{G}]$ eine $\mathbb{Q}_\beta$-generische Erweiterung von V. Weil R_β^β durch $\mathbb{Q}_\beta$ mit $(\Gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ realisiert wird, gilt für $\gamma, \delta < \kappa$ mit $\gamma \neq \delta$

$$(\,\Gamma_\gamma \cong \Gamma_\delta)_{V[\mathrm{G}]} \iff \{\gamma, \delta\} = \{0, \beta\}.$$

Mit den in Kapitel 2 hergeleiteten Umformungsregeln für direkte Produkte und Umsetzungen von Permutationsgruppen und der Eindeutigkeit der Konstruktionen bis auf Isomorphie gilt dann in $V[\mathrm{G}]$

$$\begin{aligned}
\langle\, \Omega, \mathrm{E}\rangle &\overset{2.4.5}{\cong} \Gamma_0\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \Gamma_\beta(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle) \\
&\qquad \times \prod_{\substack{0<\gamma<\alpha \\ \gamma\neq\beta}} \Gamma_\gamma(\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \times \langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\kappa} \Gamma_{\gamma+1}\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \\
&\underset{2.5.5}{\overset{2.4.5}{\cong}} \Gamma_0\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \Gamma_0(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle) \\
&\qquad \times \prod_{\substack{0<\gamma<\alpha \\ \gamma\neq\beta}} \Gamma_\gamma(\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \times \langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\kappa} \Gamma_{\gamma+1}\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \\
&\underset{2.5.7}{\overset{2.4.5}{\cong}} \Gamma_0(\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle) \\
&\qquad \times \prod_{\substack{0<\gamma<\alpha \\ \gamma\neq\beta}} \Gamma_\gamma(\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \times \langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\kappa} \Gamma_{\gamma+1}\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle.
\end{aligned}$$

Alle hier verwendeten Graphen sind nach Voraussetzung rigide, paarweise nicht-isomorph und zusammenhängend in $V[\mathrm{G}]$. Wegen 4.1.1(c)+(d) können wir Satz 3.1.6 mit $\mathrm{i}_0 = 0$ und $n = 1$ anwenden und folgern

$$\nu(\langle\,\Omega, \mathrm{E}\rangle) = \nu(\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \langle\,\Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle \times \langle\,\Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle) \overset{4.1.1}{\underset{(e)}{=}} \beta.$$

Sei nun $\alpha \leq \beta$ und $V[\mathrm{G}]$ eine $\mathbb{Q}_\beta$-generische Erweiterung von V. Da in diesem Fall R^α_β durch $\mathbb{Q}_\beta$ mit $(\Gamma_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ realisiert wird, gilt jetzt für $\gamma, \delta < \kappa$ mit $\gamma \neq \delta$

$$(\,\Gamma_\gamma \cong \Gamma_\delta)_{V[\mathrm{G}]} \iff \{\gamma, \delta\} \subseteq \{0\} \cup [\alpha, \beta]\,.$$

Mit den Hilfsmitteln aus Kapitel 2 kann man auch in diesem Fall folgern, dass in $V[\mathrm{G}]$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle\,\Omega, \mathrm{E}\rangle &\overset{2.4.5}{\cong} \Gamma_0\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\beta} \Gamma_{\gamma+1}\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \\
&\qquad \times \prod_{0<\gamma<\alpha} \Gamma_\gamma(\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \times \langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \times \prod_{\beta\leq\gamma<\kappa} \Gamma_{\gamma+1}\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \\
&\overset{2.4.5}{\underset{2.5.5}{\cong}} \Gamma_0\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\beta} \Gamma_0\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \\
&\qquad \times \prod_{0<\gamma<\alpha} \Gamma_\gamma(\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \times \langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \times \prod_{\beta\leq\gamma<\kappa} \Gamma_{\gamma+1}\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \\
&\overset{2.4.5}{\underset{2.5.7}{\cong}} \Gamma_0(\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\beta} \langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \\
&\qquad \times \prod_{0<\gamma<\alpha} \Gamma_\gamma(\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle \times \langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \times \prod_{\beta\leq\gamma<\kappa} \Gamma_{\gamma+1}\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle
\end{aligned}$$

Wieder sind alle verwendeten Graphen rigide, paarweise nicht-isomorph und zusammenhängend in $V[\mathrm{G}]$. Eine weitere Anwendung von Satz 3.1.6 mit $\mathrm{i}_0 = 0$ und $n = 1$ liefert

$$\nu(\langle\,\Omega, \mathrm{E}\rangle) = \nu(\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\beta} \langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle) \overset{4.1.1}{\underset{(b)}{=}} \nu(\langle\,\Delta_\beta, \mathrm{H}_\beta\rangle) \overset{4.1.1}{\underset{(c)}{=}} \beta.$$

Zusammengefasst gilt also

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}_\beta} \Vdash \nu(\langle\,\check{\Omega}, \check{\mathrm{E}}\rangle) = \check{\beta}$$

für alle $1 \leq \beta < \kappa$. Korollar 3.2.9 liefert dann die Existenz einer Gruppe G mit trivialem Zentrum und den in Satz A geforderten Eigenschaften. $\square$

4.2 Imprimitive Blöcke und Sequenzen

Die folgende Definition ist unser Ansatzpunkt zur Untersuchung von Permutationsgruppen und ihrer Normalisatoren.

4.2.1 Definition: Sei $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle \in \mathcal{PG}^{trans}$.
Eine nicht-leere Teilmenge Z von Δ heißt imprimitiver Block von $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$, falls für alle $g \in \mathrm{G}$ gilt

$$g\,''\,\mathrm{Z} = \mathrm{Z} \ \vee \ (g\,''\,\mathrm{Z}) \cap \mathrm{Z} = \emptyset.$$

Für $x \in \Delta$ definieren wir

$$\mathcal{B}_{\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle}(x) := \{\, \mathrm{Z} \subseteq \Delta \,|\, x \in \mathrm{Z},\ \mathrm{Z} \text{ ist ein imprimitiver Block von } \langle \Delta, \mathrm{G} \rangle \,\}.$$

Den Zusammenhang zwischen imprimitiven Blöcken und G-invarianten Äquivalenzrelationen auf Δ erläutert das folgende Lemma.

4.2.2 Proposition: Sei $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle \in \mathcal{PG}^{trans}$.
(i) Ist Z ein imprimitiver Block von $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$, so definiert

$$x \ \mathrm{E}_{\mathrm{Z}}^{\Delta,\mathrm{G}}\ y \ :\Leftrightarrow \ (\exists g \in \mathrm{G})\ x, y \in g\,''\,\mathrm{Z}$$

eine G-invariante Äquivalenzrelation auf Δ.
(ii) Ist E eine G-invariante Äquivalenzrelation auf Δ, so ist jede Äquivalenzklasse von E ein imprimitiver Block von $\langle \Delta, \mathrm{G} \rangle$.

Beweis. (i) Nach Definition ist $\mathrm{E}_{\mathrm{Z}}^{\Delta,\mathrm{G}}$ symmetrisch und aus der Transitivität der G-Operation folgt die Reflexivität von $\mathrm{E}_{\mathrm{Z}}^{\Delta,\mathrm{G}}$, weil für jedes $x \in \Delta$ ein $g \in \mathrm{G}$ mit $g(x) \in \mathrm{Z}$ existiert. Seien nun $g, h \in \mathrm{G}$ und $x, y, z \in \Delta$ mit $x, y \in g\,''\,\mathrm{Z}$ und $y, z \in h\,''\,\mathrm{Z}$. Aus $y \in (g\,''\,\mathrm{Z}) \cap (h\,''\,\mathrm{Z})$ folgt $h^{-1}(y) \in ((h^{-1} \circ g)\,''\,\mathrm{Z}) \cap \mathrm{Z} \neq \emptyset$ und somit $(h^{-1} \circ g)\,''\,\mathrm{Z} = \mathrm{Z}$, weil Z ein imprimitiver Block ist. Daraus folgt $g\,''\,\mathrm{Z} = h\,''\,\mathrm{Z}$ und $x \ \mathrm{E}_{\mathrm{Z}}^{\Delta,\mathrm{G}}\ z$.
(ii) Sei Z eine Äquivalenzklasse von E, $g \in \mathrm{G}$ und $y \in (g\,''\,\mathrm{Z}) \cap \mathrm{Z}$. Dann existiert ein $x \in \mathrm{Z}$ mit $g(x) = y$. Für alle $z \in \mathrm{Z}$ gilt $x \,\mathrm{E}\, z$ und wegen der G-Invarianz von E auch $y \,\mathrm{E}\, g(z)$. Somit ist $g(z) \in \mathrm{Z}$ und $g\,''\,\mathrm{Z} = \mathrm{Z}$. $\square$

Wir zeigen zunächst die Verträglichkeit unserer Definition mit Isomorphismen zwischen Permutationsgruppen.

4.2.3 Lemma: Sind $\langle \Delta, \mathrm{G}\rangle, \langle \Omega, \mathrm{H}\rangle \in \mathcal{PG}^{trans}$ und $\langle \varphi, k_\varphi \upharpoonright \mathrm{G}\rangle : \langle \Delta, \mathrm{G}\rangle \longrightarrow \langle \Omega, \mathrm{H}\rangle$ ein Isomorphismus, so ist für jedes $x \in \Delta$

$$b_x^\varphi : \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x) \longrightarrow \mathcal{B}_{\langle \Omega,\mathrm{H}\rangle}(\varphi(x)),\ \mathrm{Z} \longmapsto \varphi'' \mathrm{Z}$$

eine wohldefinierte Bijektion. Außerdem gilt

$$x\ \mathrm{E}_{\mathrm{Z}}^{\Delta,\mathrm{G}}\ y \iff \varphi(x)\ \mathrm{E}_{\varphi'' \mathrm{Z}}^{\Omega,\mathrm{H}}\ \varphi(y) \tag{4.2}$$

für alle $\mathrm{Z} \in \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x)$.

Beweis. Sei $\mathrm{Z} \in \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x)$ und $h \in \mathrm{H}$ mit $y \in ((h \circ \varphi)'' \mathrm{Z}) \cap (\varphi'' \mathrm{Z})$. Nach Lemma 2.3.4 existiert dann ein $z \in \Delta$ mit $y = \varphi(z)$ und $g \in \mathrm{G}$ mit $h = k_\varphi(g)$. Damit gilt $\varphi(z) \in ((k_\varphi(g) \circ \varphi)'' \mathrm{Z}) \cap (\varphi'' \mathrm{Z}) = \varphi'' ((g'' \mathrm{Z}) \cap \mathrm{Z})$ und wegen $z \in (g'' \mathrm{Z}) \cap \mathrm{Z}$ gilt $g'' \mathrm{Z} = \mathrm{Z}$. Mit $(h \circ \varphi)'' \mathrm{Z} = (\varphi \circ g)'' \mathrm{Z} = \varphi'' \mathrm{Z}$ und $\varphi(x) \in \varphi'' \mathrm{Z}$ ist dann $(\varphi'' \mathrm{Z}) \in \mathcal{B}_{\langle \Omega,\mathrm{H}\rangle}(\varphi(x))$. Damit ist die Abbildung b_x^φ wohldefiniert.
Nach 2.3.4 ist $\langle \varphi^{-1}, k_{\varphi^{-1}} \upharpoonright \mathrm{H}\rangle : \langle \Omega, \mathrm{H}\rangle \longrightarrow \langle \Delta, \mathrm{G}\rangle$ ein Isomorphismus und für alle $\mathrm{Z}' \in \mathcal{B}_{\langle \Omega,\mathrm{H}\rangle}(\varphi(x))$ ist auch ${\varphi^{-1}}'' \mathrm{Z}' \in \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x)$. b_x^φ besitzt somit eine Umkehrabbildung.

Existiert für $x, y \in \Delta$ ein $g \in \mathrm{G}$ mit $x, y \in g'' \mathrm{Z}$, so folgt $\varphi(x), \varphi(y) \in (\varphi \circ g)'' \mathrm{Z} = k_\varphi(g)'' (\varphi'' \mathrm{Z})$ und somit $\varphi(x)\, \mathrm{E}_{\varphi'' \mathrm{Z}}^{\Omega,\mathrm{H}}\, \varphi(y)$. Die gleiche Argumentation mit φ^{-1} liefert die zweite Behauptung. □

Das nächste Lemma gibt uns in speziellen Fällen Auskunft über die Gestalt der Bijektionen im Normalisator einer transitiven Permutationsgruppe. Mit seiner Hilfe werden wir die Höhe der Normalisatortürme in Satz 4.1.1 bestimmen.

4.2.4 Lemma: Ist $\langle \Delta, \mathrm{G}\rangle \in \mathcal{PG}^{trans}$ und $x \in \Delta$, so dass $\langle \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x), \subsetneq\rangle$ eine Wohlordnung ist.
Dann ist $\mathrm{E}_{\mathrm{Z}}^{\Delta,\mathrm{G}}$ für jedes $\mathrm{Z} \in \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x)$ $\mathsf{N}_\Delta^1(\mathrm{G})$-invariant.

Beweis. Sei $\pi \in \mathsf{N}_\Delta^1(\mathrm{G})$ und $g \in \mathrm{G}$ mit $(g \circ \pi)(x) = x$. Dann ist auch $g \circ \pi \in \mathsf{N}_\Delta^1(\mathrm{G})$ und nach Lemma 2.3.4 ist $\langle g \circ \pi, k_{g\circ\pi} \upharpoonright \mathrm{G}\rangle \in \mathsf{Aut}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\langle \Delta, \mathrm{G}\rangle)$. Mit 4.2.3 ist $b_x^{g\circ\pi}$ eine Bijektion von $\mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x)$, die nach Definition ordnungserhaltend bezüglich „$\subsetneq$“ ist. $b_x^{g\circ\pi}$ ist also ein Automorphismus der Wohlordnung $\langle \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x), \subsetneq\rangle$ und somit die Identität. Das heißt $(g \circ \pi)'' \mathrm{Z} = \mathrm{Z}$ und $(\pi^{-1} \circ g^{-1})'' \mathrm{Z} = \mathrm{Z}$ für alle $\mathrm{Z} \in \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x)$.
Ist nun $\mathrm{Z} \in \mathcal{B}_{\langle \Delta,\mathrm{G}\rangle}(x)$ und $h \in \mathrm{G}$ mit $x, y \in h'' \mathrm{Z} = (h \circ \pi^{-1} \circ g^{-1})'' \mathrm{Z}$, so folgt $\pi(x), \pi(y) \in (h^\pi \circ g^{-1})'' \mathrm{Z}$ und damit $\pi(x)\ \mathrm{E}_{\mathrm{Z}}^{\Delta,\mathrm{G}}\ \pi(y)$. □

Die folgende Definition bildet das Herzstück der Konstruktion im nächsten Abschnitt. Wir wollen die Sequenz $(\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle)_{\alpha<\kappa}$ in 4.1.1 so konstruieren, dass die folgenden Bedingungen für alle $\alpha < \kappa$ von $(\langle\, \mathrm{F}_\beta, \Delta_\beta\rangle)_{\beta\leq\alpha}$ mit $\mathrm{F}_\beta := \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta)$ erfüllt werden.
Im Anschluss leiten wir die für uns wichtigen Folgerungen aus der Definition her.

4.2.5 Definition: Sei α eine Ordinalzahl.
Eine Sequenz $(\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle)_{\beta\leq\alpha}$ von Elementen von $\mathcal{PG}^{trans}$ heißt imprimitive Sequenz der Länge α, falls gilt
· $\Delta_0 = \{x_0\}$.
· $\Delta_\gamma \subsetneq \Delta_\beta$ für alle $\gamma < \beta \leq \alpha$.
· $\mathcal{B}_{\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{G}_\beta\rangle}(x_0) = \{\, \Delta_\gamma \,|\, \gamma \leq \beta \,\}$ für alle $\beta \leq \alpha$.

4.2.6 Lemma: Sei $(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{G}_\beta\rangle)_{\beta\leq\alpha}$ eine imprimitive Sequenz der Länge α.

(i) Ist $\Delta_0 = \{x_0\}$, so ist $\langle \mathcal{B}_{\langle\, x_0, \Delta_\alpha\rangle}(\mathrm{G}_\alpha), \subsetneq\rangle$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $\alpha + 1$.

(ii) Ist $(\langle\, \Omega_\delta, \mathrm{H}_\delta\rangle)_{\delta\leq\gamma}$ eine weitere imprimitive Sequenz und $\langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}\rangle : \langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle \longrightarrow \langle\, \Omega_\gamma, \mathrm{H}_\gamma\rangle$ ein Isomorphismus, so gilt bereits $\alpha = \gamma$.

(iii) Für alle $\gamma < \beta \leq \alpha$ sind $\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{G}_\beta\rangle$ und $\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{G}_\gamma\rangle$ nicht-isomorph in $\mathcal{A}(\mathsf{Set})$.

Beweis. (i) Die Abbildung $\mathcal{B}_{\langle\, x_0, \Delta_\alpha\rangle}(\mathrm{G}_\alpha) \to \alpha + 1, \Delta_\beta \mapsto \beta$ erfüllt die eindeutigen Eigenschaften des transitiven Kollaps.
(ii) Ist $\Omega_0 = \{y_0\}$, so existiert nach Voraussetzung ein $h \in \mathrm{H}_\gamma$ mit $(h \circ \varphi)(x_0) = y_0$ und mit 2.3.4 ist $\langle\, h \circ \varphi, k_{h\circ\varphi} \restriction \mathrm{G}_\alpha\rangle$ ein Isomorphismus von $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle$ und $\langle\, \Omega_\gamma, \mathrm{H}_\gamma\rangle$, der x_0 auf y_0 abbildet.
Nach Konstruktion ist die Abbildung $b^{h\circ\varphi}_{x_0}$ aus Lemma 4.2.3 ein Isomorphismus der Wohlordnungen $\langle\, \mathcal{B}_{\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle}(x_0), \subsetneq\rangle$ vom Ordnungstyp $\alpha + 1$ und $\langle\, \mathcal{B}_{\langle\, \Omega_\gamma, \mathrm{H}_\gamma\rangle}(y_0), \subsetneq\rangle$ vom Ordnungstyp $\gamma + 1$. Daraus folgt $\alpha = \gamma$.
(iii) Seien $\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{G}_\beta\rangle$ und $\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{G}_\gamma\rangle$ isomorph für $\beta, \gamma \leq \alpha$. Nach Definition ist dann auch $(\langle\, \Delta_\delta, \mathrm{G}_\delta\rangle)_{\delta\leq\beta}$ eine imprimitive Sequenz der Länge β und $(\langle\, \Delta_\delta, \mathrm{G}_\delta\rangle)_{\delta\leq\gamma}$ eine der Länge γ. Mit (ii) folgt dann $\beta = \gamma$. □

4.2.7 Lemma: Ist $(\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle)_{\beta\leq\alpha}$ eine imprimitive Sequenz und $\gamma \leq \beta < \alpha$. Dann ist $\Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta$ die Vereinigung von $\mathrm{E}^{\Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha}_{\Delta_\gamma}$-Äquivalenzklassen.

Beweis. Fixiere für jedes $y \in \Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta$ ein $g_y \in \mathrm{G}_\alpha$ mit $g_y(x_0) = y$.
Dann gilt $y \in (g_y{}''\ \Delta_{\beta+1}) \cap \Delta_{\beta+1}$ und mit $\Delta_{\beta+1} \in \mathcal{B}_{\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle}(x_0)$ folgt

$g_y{}'' \; \Delta_{\beta+1} = \Delta_{\beta+1}$. Außerdem gilt $y \in (g_y{}'' \; \Delta_\beta) \setminus \Delta_\beta$ und da auch Δ_β ein imprimitiver Block von $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle$ ist, folgt $(g_y{}'' \; \Delta_\beta) \cap \Delta_\beta = \emptyset$ und $g_y{}'' \; \Delta_\beta \subseteq \Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta$.
Für $\gamma \leq \beta$ gilt dann $y \in g_y{}'' \; \Delta_\gamma \subseteq g_y{}'' \; \Delta_\beta \subseteq \Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta$ und damit

$$\Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta = \bigcup_{y \in \Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta} g_y{}'' \; \Delta_\gamma.$$

Alle $g_y{}'' \; \Delta_\gamma$ sind Äquivalenzklassen von $\mathrm{E}_{\Delta_\gamma}^{\Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha}$. Deshalb folgt für $y, y' \in \Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta$ aus $(g_y{}'' \; \Delta_\gamma) \cap (g_{y'}{}'' \; \Delta_\gamma) \neq \emptyset$ schon $g_y{}'' \; \Delta_\gamma = g_{y'}{}'' \; \Delta_\gamma$ und es existiert eine Teilmenge $\mathrm{I} \subseteq \Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta$ mit

$$\Delta_{\beta+1} \setminus \Delta_\beta = \dot{\bigcup_{y \in \mathrm{I}}} g_y{}'' \; \Delta_\gamma.$$

□

Zuletzt wollen wir eine Möglichkeit angeben, eine imprimitive Sequenz um eine Permutationsgruppe zu verlängern. Im Beweis von Satz 4.1.1 werden wir dies an zwei Stellen anwenden.

4.2.8 Lemma: Sei $(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{G}_\beta\rangle)_{\beta \leq \alpha}$ eine imprimitive Sequenz der Länge α mit $\nu(\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle) = 0$, $\langle\, \Delta_{\alpha+1}, \mathrm{G}_{\alpha+1}\rangle$ eine Permutationsgruppe mit $\Delta_\alpha \subsetneq \Delta_{\alpha+1}$ und

$$\langle\, \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{G}_{\alpha+1}\rangle : \langle\, \Delta_{\alpha+1}, \mathrm{G}_{\alpha+1}\rangle \longrightarrow \mathsf{N}^1(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle)$$

ein Isomorphismus für den ein $\mathrm{i}_0 \in \mathrm{I}$ existiert mit $\varphi(x) = \langle\, x, \mathrm{i}_0\rangle$ für alle $x \in \Delta_\alpha$.
Dann ist $(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{G}_\beta\rangle)_{\beta \leq \alpha+1}$ eine imprimitive Sequenz der Länge $\alpha + 1$.

Beweis. Setze $\Delta^* = \coprod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \Delta_\alpha$ und $\mathrm{G}^* = (u_\mathrm{I}{}'' \; \mathsf{Sym}(\mathrm{I})) \ltimes d_\mathrm{I}{}'' \; \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \mathrm{G}_\alpha$. Wegen Satz 3.1.14 und der Voraussetzung gilt dann $\langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^*\rangle = \mathsf{N}^1(\prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} \langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha\rangle)$. Da G_α transitiv auf Δ_α operiert, operiert G^* damit auch tranistiv auf Δ^* und mit 3.1.7 folgt $\langle\, \Delta_{\alpha+1}, \mathrm{G}_{\alpha+1}\rangle \in \mathcal{PG}^{trans}$.
Für $\Delta_0 = \{x_0\}$ zeigen wir

$$\mathcal{B}_{\langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^*\rangle}(\langle\, x_0, \mathrm{i}_0\rangle) = \{\, \Delta_\beta \times \{\mathrm{i}_0\} \mid \beta \leq \alpha \,\} \cup \{\Delta^*\}. \tag{4.3}$$

Sei $\beta \leq \alpha$ und $\pi = u_\mathrm{I}(\sigma) \circ d_\mathrm{I}((g_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}) \in \mathrm{G}^*$ mit $(\Delta_\beta \times \{\mathrm{i}_0\}) \cap \pi{}'' \; (\Delta_\beta \times \{\mathrm{i}_0\}) \neq \emptyset$. Dann gilt $\sigma(\mathrm{i}_0) = \mathrm{i}_0$ und $\pi{}'' \; (\Delta_\beta \times \{\mathrm{i}_0\}) = (g_{\mathrm{i}_0}{}'' \; \Delta_\beta) \times \{\mathrm{i}_0\}$. Da

Δ_β ein imprimitiver Block von $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{G}_\alpha \rangle$ ist, folgt aus $(g_{\mathrm{i}_0}{}'' \,\Delta_\beta) \cap \Delta_\beta \neq \emptyset$ schon $g_{\mathrm{i}_0}{}'' \,\Delta_\beta = \Delta_\beta$ und damit $\pi'' \,(\Delta_\beta \times \{\mathrm{i}_0\}) = \Delta_\beta \times \{\mathrm{i}_0\}$.

Sei nun Z ein imprimitiver Block von $\langle\, \Delta^*, \mathrm{G}^* \rangle$ mit $\langle\, x_0, \mathrm{i}_0 \rangle \in \mathrm{Z}$.
Sei zunächst $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}' \times \{\mathrm{i}_0\}$ mit $\mathrm{Z}' \subseteq \Delta_\alpha$. Ist $g_{\mathrm{i}_0} \in \mathrm{G}_\alpha$ mit $(g_{\mathrm{i}_0}{}'' \,\mathrm{Z}') \cap \mathrm{Z}' \neq \emptyset$, so gilt für $d_\mathrm{I}((g_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \in \mathrm{G}^*$ mit $g_\mathrm{i} = \mathsf{id}_{\Delta_\alpha}$ für $\mathrm{i} \neq \mathrm{i}_0$ bereits $(d_\mathrm{I}((g_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})'' \,\mathrm{Z}) \cap \mathrm{Z} \neq \emptyset$. Aus $\mathrm{Z} = d_\mathrm{I}((g_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}})'' \,\mathrm{Z} = (g_{\mathrm{i}_0}{}'' \,\mathrm{Z}') \times \{\mathrm{i}_0\}$ folgt dann $g_{\mathrm{i}_0}{}'' \,\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}'$ und $\mathrm{Z}' = \Delta_\beta$ für ein $\beta \leq \alpha$.

Existiere nun ein $z \in \Delta_\alpha$ und ein $\mathrm{i}_1 \in \mathrm{I} \setminus \{\mathrm{i}_0\}$ mit $\langle\, z, \mathrm{i}_1 \rangle \in \mathrm{Z}$. Für jedes $y \in \Delta_\alpha$ existiert nach Voraussetzung ein $g^y_{\mathrm{i}_0} \in \mathrm{G}_\alpha$ mit $g^y_{\mathrm{i}_0}(x_0) = y$. Setze $g^y_\mathrm{i} = \mathsf{id}_{\Delta_\alpha}$ für $\mathrm{i} \neq \mathrm{i}_0$ und $\pi_y := d_\mathrm{I}((g^y_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}) \in \mathrm{G}^*$.
Nach Konstruktion gilt dann $\langle\, z, \mathrm{i}_1 \rangle \in \mathrm{Z} \cap \pi_y{}'' \,\mathrm{Z}$ und damit $\langle\, y, \mathrm{i}_0 \rangle \in \pi_y{}'' \,\mathrm{Z} = \mathrm{Z}$ für alle $y \in \Delta_\alpha$, das heißt $\Delta_\alpha \times \{\mathrm{i}_0\} \subseteq \mathrm{Z}$.
Definiere für $\mathrm{i} \in \mathrm{I} \setminus \{\mathrm{i}_0\}$ und beliebiges $y \in \Delta_\alpha$

$$\pi^\mathrm{i}_y := u_\mathrm{I}((\mathrm{i}, \mathrm{i}_1)) \circ (\pi_y \circ \pi_z^{-1})^{u_\mathrm{I}((\mathrm{i}_0, \mathrm{i}_1))} \in \mathrm{G}^*,$$

wobei $(\mathrm{i}_0, \mathrm{i}_1)$ die Permutation von I ist, die i_0 und i_1 vertauscht und die Identität auf $\mathrm{I} \setminus \{\mathrm{i}_0, \mathrm{i}_1\}$ ist. Es gilt dann $\pi^\mathrm{i}_y \langle\, x_0, \mathrm{i}_0 \rangle = \langle\, x_0, \mathrm{i}_0 \rangle \in \mathrm{Z} \cap \pi^\mathrm{i}_y{}'' \,\mathrm{Z}$ und $\pi^\mathrm{i}_y \langle\, z, \mathrm{i}_1 \rangle = \langle\, y, \mathrm{i} \rangle$. Damit ist $\langle\, y, \mathrm{i} \rangle \in \pi^\mathrm{i}_y{}'' \,\mathrm{Z} = \mathrm{Z}$ und $\mathrm{Z} = \Delta^*$.

Die Behauptung folgt dann aus (4.3) mit Hilfe von Lemma 4.2.3 und der Voraussetzung an φ. □

4.3 Die Gruppen H_α und F_α

Wir können nun die Permutationsgruppen aus Satz 4.1.1 konstruieren und mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts die geforderten Eigenschaften herleiten.

4.3.1 Definition: Für $\alpha \in \mathsf{Ord}$ definieren wir rekursiv Permutationsgruppen $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha \rangle$ und $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha \rangle$ durch
· $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha \rangle := \langle\, 1, \mathsf{id}_1 \rangle \times (\prod_{\beta<\alpha} \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle)$,
· $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha \rangle := \mathsf{N}^\alpha \langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha \rangle$.

Dann ist $\Delta_0 = \{x_0\}$ mit $x_0 := \langle\, 0, 0 \rangle$ und für $\alpha \in \mathsf{Ord}$ gilt

$$\Delta_\alpha = \{0\} \sqcup (\bigsqcup_{\beta<\alpha} \Delta_\beta) = \{\langle\, 0, 0 \rangle\} \cup \{\, \langle\, \langle\, x, \beta \rangle, 1 \rangle \mid \beta < \alpha,\, x \in \Delta_\beta \,\}.$$

Nach Konstruktion der disjunkten Vereinigung gilt $\Delta_\beta \subsetneq \Delta_\alpha$ für $\beta < \alpha$ und mit $i^{\alpha,\beta} : \Delta_\beta \longrightarrow \Delta_\alpha$ bezeichnen wir die Einbettung der Teilmenge.

Rekursiv folgt $|\Delta_\alpha| \leq \max\{|\alpha|, \omega\}$ für alle $\alpha \in \mathsf{Ord}$ und $\Delta_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Delta_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathsf{Lim}$.
Ist $\beta < \alpha$ und

$$i^\alpha_\beta : \Delta_\beta \longrightarrow \Delta_\alpha,\ y \longmapsto \langle\, \langle\, y, \beta\rangle, 1\rangle$$

die Einbettung von Δ_β in das Produkt im zweiten Faktor von Δ_α, so bildet $\langle\, \Delta_\alpha, (i^{\alpha,0}, (i^\alpha_\beta)_{\beta<\alpha})\rangle$ ein Koprodukt der Familie $(\Delta_0, (\Delta_\beta)_{\beta<\alpha})$. $i^{\alpha,\beta}$ ist dann für jedes $\beta < \alpha$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit

$$i^{\alpha,\beta} \circ i^\beta_\gamma = i^\alpha_\gamma \tag{4.4}$$

für alle $\gamma < \beta$. Wie im Beweis zu Lemma 2.2.4 bildet dann $\langle\, \Delta_\alpha, (i^{\alpha,\beta}, (i^\alpha_\gamma)_{\beta\leq\gamma<\alpha})\rangle$ ein Koprodukt der Familie $(\Delta_\beta, (\Delta_\gamma)_{\beta\leq\gamma<\alpha})$ und induziert nach Lemma 2.4.1 einen Monomorphismus von Gruppen

$$d^\alpha_\beta : \mathsf{Sym}(\Delta_\beta) \times \prod_{\beta\leq\gamma<\alpha} \mathsf{Sym}(\Delta_\gamma) \longrightarrow \mathsf{Sym}(\Delta_\alpha)$$

mit (2.7). Nach Definition der Permutationsgruppen gilt $\mathrm{F}_0 = \mathrm{H}_0 = \{\mathsf{id}_{\Delta_0}\}$ und damit

$$\mathrm{H}_\alpha = d^\alpha_0{}'' \,(\mathrm{F}_0 \times \prod_{\beta<\alpha} \mathrm{F}_\beta). \tag{4.5}$$

Wie im Beweis von Lemma 2.4.5 folgt aus (4.4) für $\gamma < \beta < \alpha$

$$d^\alpha_\gamma\langle\, g, (g_\delta)_{\gamma\leq\delta<\alpha}\rangle = d^\alpha_\beta\langle\, d^\beta_\gamma\langle\, g, (g_\delta)_{\gamma\leq\delta<\beta}\rangle, (g_\delta)_{\beta\leq\delta<\alpha}\rangle \tag{4.6}$$

für alle $\langle\, g, (g_\delta)_{\gamma\leq\delta<\alpha}\rangle \in \mathsf{Sym}(\Delta_\gamma) \times \prod_{\gamma\leq\delta<\alpha} \mathsf{Sym}(\Delta_\delta)$ und zusammen mit (4.5) ergibt sich

$$\mathrm{H}_\alpha = d^\alpha_\beta{}'' \,(\mathrm{H}_\beta \times \prod_{\beta\leq\gamma<\alpha} \mathrm{F}_\gamma)$$

für alle $\beta < \alpha$. Damit bezeugt $(i^{\alpha,\beta}, (i^\alpha_\gamma)_{\beta\leq\gamma<\alpha})$, dass $\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle$ ein direktes Produkt der Familie $(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{H}_\beta\rangle, (\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle)_{\beta\leq\gamma<\alpha})$ bildet und wegen der Eindeutigkeit des direkten Produktes bis auf Isomorphie gilt dann

$$\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle \cong \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{H}_\beta\rangle \times \prod_{\beta\leq\gamma<\alpha} \langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle.$$

Wir setzen $\Delta^1_\alpha := i^{\alpha+1}_\alpha{}'' \ \Delta_\alpha = \Delta_{\alpha+1} \setminus \Delta_\alpha = \{\, \langle\, \langle\, x, \alpha\rangle, 1\rangle \,|\, x \in \Delta_\alpha \,\}$ und $x^1 := i^{\alpha+1}_\alpha(x)$ für alle $x \in \Delta_\alpha$. Für alle $\beta < \alpha$ gilt dann

$$\Delta_\alpha = \Delta_\beta \,\dot{\cup} \dot{\bigcup_{\beta\leq\gamma<\alpha}} \Delta^1_\gamma.$$

Außerdem existiert eine eindeutige Involution $\sigma_* \in \mathsf{Sym}(\Delta_{\alpha+1})$ mit $\sigma_*(x) = x^1$ und $\sigma_*(x^1) = x$ für alle $x \in \Delta_\alpha$.

Bis jetzt haben wir gezeigt, dass die konstruierten Gruppen die Eigenschaften (a) und (b) aus Satz 4.1.1 besitzen. Der folgende Satz gibt wesentliche Einblicke in die Struktur der Permutationsgruppen und liefert die Eigenschaften (c) und (d).

4.3.2 Satz: Für alle $\alpha \in \mathsf{Ord}$ gilt

$(\mathrm{a})_\alpha$ Für alle $\beta < \alpha$ ist

$$\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha) = d^{\alpha}_{\beta}\,{}'' \,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta \leq \gamma < \alpha} \mathrm{F}_\gamma)$$

und somit bezeugt $(i^{\alpha,\beta}, (i^{\alpha}_{\gamma})_{\beta \leq \gamma < \alpha})$, dass $\mathsf{N}^{\beta}\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha\rangle$ ein direktes Produkt der Familie $(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle, (\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle)_{\beta \leq \gamma < \alpha})$ bildet.

$(\mathrm{b})_\alpha$ $(\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle)_{\beta \leq \alpha}$ ist eine imprimitive Sequenz.

$(\mathrm{c})_\alpha$ Für $\beta < \alpha$ besteht $\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha)$ genau aus den Elementen π von F_α, die

$$\pi\,''\,\Delta_\beta = \Delta_\beta \;\wedge\; \pi\,''\,\Delta^1_\gamma = \Delta^1_\gamma$$

für alle $\beta \leq \gamma < \alpha$ erfüllen.

$(\mathrm{d})_\alpha$ $\nu_{\Delta_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha) = \alpha$.

Wir beweisen den Satz induktiv, wobei im Induktionsanfang nichts zu zeigen ist.

Beweis von $(\mathrm{a})_{\alpha+1}$. Wir beweisen die Aussage induktiv für $\beta < \alpha + 1$.

$(\beta = 0):$ Der Induktionsanfang gilt nach (4.5).

$(\beta \to \beta + 1):$ Nach Induktionsvoraussetzung $(\mathrm{a})_{\beta+1}$ bezeugen $(i^{\beta+1,\beta}, i^{\beta+1}_{\beta})$, dass $\langle\, \Delta_{\beta+1}, \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\beta+1}}(\mathrm{H}_{\beta+1})\rangle = \langle\, \Delta_{\beta+1}, d^{\beta+1}_{\beta}\,{}''\,(\mathrm{F}_\beta \times \mathrm{F}_\beta)\rangle$ ein direktes Produkt von $\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle$ und $\langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle$ bildet. F_β operiert nach $(\mathrm{b})_\beta$ transitiv auf Δ_β und mit 3.1.8 und 3.1.9 folgt

$$\langle\, \Delta_{\beta+1}, \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\beta+1}}(\mathrm{H}_{\beta+1})\rangle_x \;\cong\; \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle \tag{4.7}$$

für alle $x \in \Delta_{\beta+1}$. Mit der Induktionsannahme gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) &\overset{\text{I.A}}{=} d^{\alpha+1}_{\beta}{}''\,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta \le \gamma < \alpha+1} \mathrm{F}_\gamma) \\ &\overset{(4.6)}{=} d^{\alpha+1}_{\beta+1}{}''\,(d^{\beta+1}_{\beta}{}''\,(\mathrm{F}_\beta \times \mathrm{F}_\beta) \times \prod_{\beta < \gamma \le \alpha} \mathrm{F}_\gamma) \\ &\overset{(a)_{\beta+1}}{=} d^{\alpha+1}_{\beta+1}{}''\,(\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\beta+1}}(\mathrm{H}_{\beta+1}) \times \prod_{\beta+1 \le \gamma < \alpha+1} \mathrm{F}_\gamma) \end{aligned} \tag{4.8}$$

und $(i^{\alpha+1,\beta+1}, (i^{\alpha+1}_{\gamma})_{\beta<\gamma\le\alpha})$ bezeugen, dass $\langle\, \Delta_{\alpha+1}, \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1})\rangle$ ein direktes Produkt der Familie $(\langle\, \Delta_{\beta+1}, \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\beta+1}}(\mathrm{H}_{\beta+1})\rangle, (\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle)_{\beta<\gamma\le\alpha})$ bildet. Für $\beta < \gamma \le \alpha$ operiert F_γ nach $(\mathrm{b})_\gamma$ transitiv auf Δ_γ und für jedes $x \in \Delta_\gamma$ gilt

$$\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle_x \;\cong\; \langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle. \tag{4.9}$$

Nach $(\mathrm{b})_\alpha$ ist $(\langle\, \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle)_{\gamma\le\alpha}$ eine imprimitive Sequenz und aus (4.7) und (4.9) folgt, dass die durch Bahnen induzierten Permutationsgruppen in den verschiedenen Faktoren des direkten Produkts (4.8) paarweise nicht-isomorph sind. Damit kann Satz 3.1.11 auf das direkte Produkt angewendet werden und liefert

$$\begin{aligned} \mathsf{N}^{\beta+1}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) &= \mathsf{N}^{1}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1})) \\ &= \mathsf{N}^{1}_{\Delta_{\alpha+1}}(d^{\alpha+1}_{\beta+1}{}''\,(\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\beta+1}}(\mathrm{H}_{\beta+1}) \times \prod_{\beta<\gamma\le\alpha} \mathrm{F}_\gamma)) \\ &\overset{3.1.11}{=} d^{\alpha+1}_{\beta+1}{}''\,(\mathsf{N}^{\beta+1}_{\Delta_{\beta+1}}(\mathrm{H}_{\beta+1}) \times \prod_{\beta<\gamma\le\alpha} \mathsf{N}^{1}_{\Delta_\gamma}(\mathrm{F}_\gamma)) \\ &\overset{(d)_\gamma}{=} d^{\alpha+1}_{\beta+1}{}''\,(\mathrm{F}_{\beta+1} \times \prod_{\beta+1\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma). \end{aligned}$$

$\mathsf{Lim}(\lambda)$: Für alle $\beta < \lambda$ gilt

$$\begin{aligned}\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) &\overset{\text{I.A.}}{=} d^{\alpha+1}_{\beta}{}'' \,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma) \\ &\overset{(4.6)}{=} d^{\alpha+1}_{\lambda}{}'' \,(d^{\lambda}_{\beta}{}'' \,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta\le\gamma<\lambda} \mathrm{F}_\gamma) \times \prod_{\lambda\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma) \\ &\overset{(\mathrm{a})_\lambda}{=} d^{\alpha+1}_{\lambda}{}'' \,(\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \times \prod_{\lambda\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma) \\ &\subseteq d^{\alpha+1}_{\lambda}{}'' \,(\mathrm{F}_\lambda \times \prod_{\lambda\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma)\end{aligned}$$

und somit $\mathsf{N}^{\lambda}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) \subseteq d^{\alpha+1}_{\lambda}{}'' \,(\mathrm{F}_\lambda \times \prod_{\lambda\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma)$.
Umgekehrt existiert wegen $\mathrm{F}_\lambda = \mathsf{N}^{\lambda}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$ für jedes $\pi \in d^{\alpha+1}_{\lambda}{}'' \,(\mathrm{F}_\lambda \times \prod_{\lambda\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma)$ ein $\beta < \lambda$ mit

$$\begin{aligned}\pi \in d^{\alpha+1}_{\lambda}{}'' \,(\mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \times \prod_{\lambda\le\gamma<\alpha+1} \mathrm{F}_\gamma) &= d^{\alpha+1}_{\lambda}{}'' \,(d^{\lambda}_{\beta}{}'' \,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta\le\gamma<\lambda} \mathrm{F}_\gamma) \times \prod_{\lambda\le\gamma\le\alpha} \mathrm{F}_\gamma) \\ = d^{\alpha+1}_{\beta}{}'' \,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta\le\gamma\le\alpha} \mathrm{F}_\gamma) = \mathsf{N}^{\beta}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) &\subseteq \mathsf{N}^{\lambda}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}).\end{aligned}$$

□

Beweis von $(\mathrm{b})_{\alpha+1}$. Nach $(\mathrm{a})_{\alpha+1}$ bezeugen $(i^{\alpha+1,\alpha}, i^{\alpha+1}_{\alpha})$, dass $\mathsf{N}^{\alpha}\langle \Delta_{\alpha+1}, \mathrm{H}_{\alpha+1}\rangle$ ein direktes Produkt von $\langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle$ und $\langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle$ bildet. Seien $e_0, e_1 : \Delta_\alpha \longrightarrow \Delta_\alpha \sqcup \Delta_\alpha$ die kanonischen Einbettungen und $\varphi : \Delta_{\alpha+1} \longrightarrow \Delta_\alpha \sqcup \Delta_\alpha$ die Bijektion aus 2.2.2 mit $e_0 = \varphi \circ i^{\alpha+1,\alpha}$ und $e_1 = \varphi \circ i^{\alpha+1}_{\alpha}$. Dann ist $\langle \varphi, k_\varphi \restriction \mathsf{N}^{\alpha}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1})\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\mathsf{N}^{\alpha}\langle \Delta_{\alpha+1}, \mathrm{H}_{\alpha+1}\rangle, \langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle \times \langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle)$. Mit Lemma 3.1.3 und (2.5) folgt dann

$$\langle \varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{F}_{\alpha+1}\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\langle \Delta_{\alpha+1}, \mathrm{F}_{\alpha+1}\rangle, \mathsf{N}^{1}(\langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle \times \langle \Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle)).$$

Nach Satz 3.1.14 gilt

$$\begin{aligned}\mathsf{N}^{1}_{\Delta_\alpha\sqcup\Delta_\alpha}(d_2{}'' \,(\mathrm{F}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha)) &= u_2{}'' \,\mathsf{Sym}(2) \ltimes d_2{}'' \,(\mathsf{N}^{1}_{\Delta_\alpha}(\mathrm{F}_\alpha) \times \mathsf{N}^{1}_{\Delta_\alpha}(\mathrm{F}_\alpha)) \\ &= \langle u_2(\sigma)\rangle \ltimes d_2{}'' \,(\mathrm{F}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha),\end{aligned}$$

wobei σ das nicht-triviale Element von $\mathsf{Sym}(2)$ ist.
Für $x \in \Delta_\alpha$ gilt dann $k_{\varphi^{-1}}(u_2(\sigma))(x) = (\varphi^{-1} \circ u_2(\sigma) \circ \varphi)(i^{\alpha+1,\alpha}(x)) =$

$\varphi^{-1}\langle\, x, 1\rangle = (\varphi^{-1} \circ e_1)(x) = i_\alpha^{\alpha+1}(x) = x^1$ und ebenso $k_{\varphi^{-1}}(u_2(\sigma))(x^1) = x$. Damit gilt $k_{\varphi^{-1}}(u_2(\sigma)) = \sigma_*$ und

$$\mathrm{F}_{\alpha+1} = \langle\sigma_*\rangle \ltimes d_\alpha^{\alpha+1}{}'' \,(\mathrm{F}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha).$$

Wegen $\varphi''\,\Delta_\alpha = (\varphi \circ i^{\alpha+1,\alpha})''\,\Delta_\alpha = e_0{}''\,\Delta_\alpha = \Delta_\alpha \times \{0\}$ können wir aus Lemma 4.2.8 die Behauptung folgern. $\square$

Beweis von $(\mathrm{c})_{\alpha+1}$. Sei $\beta \leq \alpha$ und $\pi \in \mathsf{N}^\beta_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) \leq \mathrm{F}_{\alpha+1}$. Nach $(\mathrm{a})_{\alpha+1}$ existieren dann $g \in \mathrm{F}_\beta$ und $g_\gamma \in \mathrm{F}_\gamma$ für $\beta \leq \gamma \leq \alpha$ mit $\pi = d_\beta^{\alpha+1}(g, (g_\gamma)_{\beta\leq\gamma\leq\alpha})$. Für $y \in \Delta_\beta$ gilt dann $\pi(y) = (\pi \circ i^{\alpha+1,\beta})(y) = (i^{\alpha+1,\beta} \circ g)(y) \in \Delta_\beta$. Ist $\beta \leq \gamma \leq \alpha$ und $y \in \Delta_\gamma^1$, so existiert ein $z \in \Delta_\gamma$ mit $y = i_\gamma^{\alpha+1}(z)$ und damit $\pi(y) = (\pi \circ i_\gamma^{\alpha+1})(z) = (i_\gamma^{\alpha+1} \circ g_\gamma)(z) \in \Delta_\gamma^1$.

Ist umgekehrt $\pi = \sigma_*^{\mathrm{i}} \circ d_\alpha^{\alpha+1}(g_0, g_1) \in \mathrm{F}_{\alpha+1}$ mit diesen Eigenschaften gegeben, so existieren nach Konstruktion $\sigma \in \mathsf{Sym}(\Delta_\beta)$ und für $\beta \leq \gamma \leq \alpha$ $\sigma_\gamma \in \mathsf{Sym}(\Delta_\gamma)$ mit $\pi = d_\beta^{\alpha+1}(\sigma, (\sigma_\gamma)_{\beta\leq\gamma\leq\alpha}) = d_\alpha^{\alpha+1}(d_\beta^\alpha(\sigma, (\sigma_\gamma)_{\beta\leq\gamma<\alpha}), \sigma_\alpha)$. Damit ist $\mathrm{i} = 0$ und aus der Injektivität von $d_\alpha^{\alpha+1}$ folgt $\sigma_\alpha = g_1 \in \mathrm{F}_\alpha$ und $g_0 = d_\beta^\alpha(\sigma, (\sigma_\gamma)_{\beta\leq\gamma<\alpha}) \in \mathrm{F}_\alpha$.
Es gilt $g_0{}''\,\Delta_\beta = \pi''\,\Delta_\beta = \Delta_\beta$ und $g_0{}''\,\Delta_\gamma^1 = \pi''\,\Delta_\gamma^1 = \Delta_\gamma^1$ für alle $\beta \leq \gamma < \alpha$. Mit der Induktionsannahme $(\mathrm{c})_\alpha$ folgt dann $g_0 \in \mathsf{N}^\beta_{\Delta_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha) = d_\beta^\alpha{}''\,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta\leq\gamma<\alpha} \mathrm{F}_\gamma)$. Aus der Injektivität von d_β^α folgt $\sigma \in \mathrm{F}_\beta$ und $\sigma_\gamma \in \mathrm{F}_\gamma$ für alle $\beta \leq \gamma < \alpha$. Insgesamt gilt $\pi \in d_\beta^{\alpha+1}{}''\,(\mathrm{F}_\beta \times \prod_{\beta\leq\gamma\leq\alpha} \mathrm{F}_\gamma) = \mathsf{N}^\beta_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1})$. $\square$

Beweis von $(\mathrm{d})_{\alpha+1}$. Sie $\pi \in \mathsf{N}^{\alpha+2}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) = \mathsf{N}^1_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{F}_{\alpha+1})$. Nach $(\mathrm{b})_{\alpha+1}$ ist $(\langle\,\Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle)_{\beta\leq\alpha+1}$ eine imprimitive Sequenz und mit Lemma 4.2.4 ist $\mathrm{E}_{\Delta_\alpha}^{\Delta_{\alpha+1},\mathrm{F}_{\alpha+1}}$ π-invariant. Somit permutiert π die Menge $\{\Delta_\alpha, \Delta_\alpha^1\}$ der $\mathrm{E}_{\Delta_\alpha}^{\Delta_{\alpha+1},\mathrm{F}_{\alpha+1}}$-Äquivalenzklassen bildweise. Nach $(\mathrm{a})_{\alpha+1}$ für $\beta = \alpha$ ist dies aber auch die Menge der $\mathsf{N}^\alpha_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1})$-Bahnen auf $\Delta_{\alpha+1}$ und es gilt

$$\pi \in \mathsf{N}^2_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathsf{N}^\alpha_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1})) \cap \mathsf{P}_{\mathsf{N}^\alpha\langle\,\Delta_{\alpha+1},\mathrm{H}_{\alpha+1}\rangle}.$$

Für die Bijektion φ aus dem Beweis von $(\mathrm{b})_{\alpha+1}$ gilt dann auch

$$\langle\,\varphi, k_\varphi \restriction \mathsf{N}^1_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{F}_{\alpha+1})\rangle \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{A}(\mathsf{Set})}(\mathsf{N}^1\langle\,\Delta_{\alpha+1}, \mathrm{F}_{\alpha+1}\rangle, \mathsf{N}^2(\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle \times \langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle))$$

Mit $(\mathrm{d})_\alpha$, Lemma 3.1.9,(ii) und Satz 3.1.15 folgert man dann

$$\begin{aligned} k_\varphi(\pi) &\in \mathsf{N}^2_{\Delta_\alpha\sqcup\Delta_\alpha}(d_2{}''\,(\mathrm{F}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha)) \cap \mathsf{P}_{\langle\,\Delta_\alpha,\mathrm{F}_\alpha\rangle\times\langle\,\Delta_\alpha,\mathrm{F}_\alpha\rangle} \\ &\leq \langle u_2(\sigma)\rangle \ltimes d_2{}''\,(\mathsf{N}^2_{\Delta_\alpha}(\mathrm{F}_\alpha) \times \mathsf{N}^2_{\Delta_\alpha}(\mathrm{F}_\alpha)) \\ &= \langle u_2(\sigma)\rangle \ltimes d_2{}''\,(\mathrm{F}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha) = \mathsf{N}^1_{\Delta_\alpha\sqcup\Delta_\alpha}(d_2{}''\,(\mathrm{F}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha)) = k_\varphi{}''\,\mathrm{F}_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Es folgt $\pi \in \mathrm{F}_{\alpha+1}$ und die Behauptung. □

Sei nun λ eine Limesordinalzahl.

Beweis von $(\mathrm{a})_\lambda$. Wir beweisen die Aussage wieder durch Induktion nach $\alpha < \lambda$.
$(\alpha = 0):$ Die Behauptung haben wir schon in (4.5) gezeigt.
$(\alpha \to \alpha+1):$ Mit den gleichen Begründungen wie im Nachfolgerfall erhalten wir aus der Induktionsannahme

$$\begin{aligned}\mathsf{N}^{\alpha+1}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) &= \mathsf{N}^{1}_{\Delta_\lambda}(d^{\lambda}_{\alpha+1}{}''\,(d^{\alpha+1}_{\alpha}{}''\,(\mathrm{F}_\alpha \times \mathrm{F}_\alpha) \times \prod_{\alpha<\beta<\lambda} \mathrm{F}_\beta)) \\ &= \mathsf{N}^{1}_{\Delta_\lambda}(d^{\lambda}_{\alpha+1}{}''\,(\mathsf{N}^{\alpha}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_{\alpha+1}) \times \prod_{\alpha<\beta<\lambda} \mathrm{F}_\beta)).\end{aligned}$$

Wie dort folgert man für jedes Element von $\Delta_{\alpha+1}$, dass die von ihm induzierte Permutationsgruppe im ersten Faktor isomorph zu $\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle$ ist. Für $\alpha < \beta < \lambda$ induziert jedes Element von Δ^1_β eine zu $\langle\,\Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle$ isomorphe Permutationsgruppe. Da für alle $\alpha < \lambda$ schon $(\mathrm{b})_\alpha$ gilt, sind alle $(\langle\,\Delta_\alpha, \mathrm{F}_\alpha\rangle)_{\alpha<\lambda}$ paarweise nicht-isomorph. Die Voraussetzungen für Satz 3.1.11 sind damit erfüllt und wir können folgern

$$\mathsf{N}^{\alpha+1}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \overset{3.1.11}{=} d^{\lambda}_{\alpha+1}{}''\,(\mathsf{N}^{\alpha+1}_{\Delta_{\alpha+1}}(\mathrm{H}_\alpha) \times \prod_{\alpha<\beta<\lambda} \mathsf{N}^{1}_{\Delta_\beta}(\mathrm{F}_\beta)) = d^{\lambda}_{\alpha+1}{}''\,(\mathrm{F}_{\alpha+1} \times \prod_{\alpha+1\le\beta<\lambda} \mathrm{F}_\beta).$$

$\mathsf{Lim}(\mu):$ Wie im Nachfolgerfall schließt man aus der Induktionsannahme und $(\mathrm{a})_{\alpha+1}$, dass $\mathsf{N}^{\alpha}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \subseteq d^{\lambda}_{\mu}{}''\,(\mathrm{F}_\mu \times \prod_{\mu\le\alpha<\lambda} \mathrm{F}_\alpha)$ für alle $\alpha < \mu$ und damit $\mathsf{N}^{\mu}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \subseteq d^{\lambda}_{\mu}{}''\,(\mathrm{F}_\mu \times \prod_{\mu\le\alpha<\lambda} \mathrm{F}_\alpha)$ gilt.
Für $\pi \in d^{\lambda}_{\mu}{}''\,(\mathrm{F}_\mu \times \prod_{\mu\le\alpha<\lambda} \mathrm{F}_\alpha)$ existiert wie oben ein $\alpha < \mu$ mit

$$\begin{aligned}\pi \in d^{\lambda}_{\mu}{}''\,(\mathsf{N}^{\alpha}_{\Delta_\mu}(\mathrm{H}_\mu) \times \prod_{\mu\le\beta<\beta} \mathrm{F}_\alpha) &= d^{\lambda}_{\mu}{}''\,(d^{\mu}_{\alpha}{}''\,(\mathrm{F}_\alpha \times \prod_{\alpha\le\beta<\mu} \mathrm{F}_\beta) \times \prod_{\mu\le\beta<\lambda} \mathrm{F}_\beta) \\ &= d^{\lambda}_{\alpha}{}''\,(\mathrm{F}_\alpha \times \prod_{\alpha\le\beta<\lambda} \mathrm{F}_\beta) \overset{\text{I.A}}{=} \mathsf{N}^{\alpha}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \subseteq \mathsf{N}^{\mu}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda).\end{aligned}$$

□

Beweis von $(\mathrm{b})_\lambda$. Für $x, y \in \Delta_\lambda$ existiert ein $\alpha < \lambda$ mit $x, y \in \Delta_\alpha$ und nach $(\mathrm{b})_\alpha$ ein $g \in \mathrm{F}_\alpha$ mit $g(x) = y$. Dann gilt für $\pi := d^{\lambda}_{\alpha}(g, (\mathsf{id}_{\Delta_\beta})_{\alpha\le\beta<\lambda}) \in$

$d_\alpha^{\lambda}{}''\ (\mathrm{F}_\alpha \times \prod_{\alpha\leq\beta<\lambda} \mathrm{F}_\beta) = \mathsf{N}^\alpha_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \leq \mathrm{F}_\lambda$ bereits $\pi(x) = (\pi \circ i^{\lambda,\alpha})(x) = (i^{\lambda,\alpha} \circ g)(x) = y$ und F_λ operiert transitiv auf Δ_λ.

Sei nun $\pi \in \mathrm{F}_\lambda$ und $\alpha < \lambda$ mit $\Delta_\alpha \cap \pi''\ \Delta_\alpha \neq \emptyset$. Dann existiert ein $\beta < \lambda$ mit $\pi \in \mathsf{N}^\beta_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$. Sei nun $\alpha, \beta < \delta < \lambda$. Nach $(\mathrm{a})_\lambda$ gilt auch $\pi \in \mathsf{N}^\delta_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) = d_\delta^{\lambda}{}''\ (\mathrm{F}_\delta \times \prod_{\delta\leq\gamma<\lambda} \mathrm{F}_\gamma)$ und damit existieren $g \in \mathrm{F}_\delta$ und $g_\gamma \in \mathrm{F}_\gamma$ für $\delta \leq \gamma < \lambda$ mit $\pi = d_\delta^\lambda(g, (g_\gamma)_{\delta\leq\gamma<\lambda})$. Nach Konstruktion gilt dann $\pi''\ \Delta_\alpha = g''\ \Delta_\alpha$ und da wegen $(\mathrm{b})_\delta$ Δ_α ein imprimitiver Block von $\langle\, \Delta_\delta, \mathrm{F}_\delta\rangle$ ist, gilt $\Delta_\alpha = g''\ \Delta_\alpha = \pi''\ \Delta_\alpha$.
Somit ist Δ_γ für $\gamma \leq \lambda$ ein imprimitiver Block von $\langle\, \Delta_\lambda, \mathrm{F}_\lambda\rangle$.

Sei Z ein imprimitiver Block von $\langle\, \Delta_\lambda, \mathrm{F}_\lambda\rangle$ mit $x_0 \in \mathrm{Z}$. Ist die Menge

$$\mathrm{I}_\mathrm{Z} := \{\, \gamma < \lambda \,|\, \mathrm{Z} \cap \Delta^1_\gamma \neq \emptyset \,\}$$

durch ein $\alpha < \lambda$ beschränkt, so gilt $\mathrm{Z} \subseteq \Delta_{\alpha+1}$ und wegen $(\mathrm{a})_\lambda$ ist Z auch ein imprimitiver Block von $\langle\, \Delta_{\alpha+1}, \mathrm{F}_{\alpha+1}\rangle$. Wegen $(\mathrm{b})_{\alpha+1}$ gilt dann $\mathrm{Z} = \Delta_\beta$ für ein $\beta \leq \alpha + 1$.
Im Weiteren sei I_Z kofinal in λ. Ist $\gamma \in \mathrm{I}_\mathrm{Z}$, so existiert für alle $y \in \Delta_\gamma$ nach $(\mathrm{b})_\gamma$ ein $g_y \in \mathrm{F}_\gamma$ mit $g_y(x_0) = y$. Setze

$$\pi_y := d_\gamma^\lambda(g_y, (\mathsf{id}_{\Delta_\alpha})_{\gamma\leq\alpha<\lambda}) \in d_\gamma^{\lambda}{}''\ (\mathrm{F}_\gamma \times \prod_{\gamma\leq\alpha<\lambda} \mathrm{F}_\alpha) = \mathsf{N}^\gamma_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \leq \mathrm{F}_\lambda.$$

Für $z \in \Delta^1_\gamma \cap \mathrm{Z}$ gilt dann $\pi_y(z) = z$ und $z \in \mathrm{Z} \cap (\pi_y{}''\ \mathrm{Z})$ für alle $y \in \Delta_\gamma$. Da Z ein imprimitiver Block ist, gilt $y \in \pi_y{}''\ \mathrm{Z} = \mathrm{Z}$ für alle $y \in \Delta_\gamma$. Es gilt also $\Delta_\gamma \subseteq \mathrm{Z}$ für unbeschränkt viele $\gamma < \lambda$ und damit $\mathrm{Z} = \Delta_\lambda$. □

Beweis von $(\mathrm{c})_\lambda$. Wie im Nachfolgerschritt zeigt man, dass für $\alpha < \lambda$ jedes $\pi \in \mathsf{N}^\alpha_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) = d_\alpha^{\lambda}{}''\ \mathrm{F}_\alpha \times \prod_{\alpha\leq\beta<\lambda} \mathrm{F}_\beta$ die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Besitzt umgekehrt $\pi \in \mathrm{F}_\lambda$ die gegebene Eigenschaft für $\alpha < \lambda$, so existiert ein $\alpha < \beta < \lambda$ mit $\pi \in \mathsf{N}^\beta_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$. Wegen $(\mathrm{a})_\lambda$ gilt dann $\pi = d_\beta^\lambda(g, (g_\gamma)_{\beta\leq\gamma<\lambda})$. Für alle Teilmengen Z von Δ_β gilt dann $\pi''\ \mathrm{Z} = g''\ \mathrm{Z}$ und damit $g''\ \Delta_\alpha = \Delta_\alpha$ sowie $g''\ \Delta^1_\gamma = \Delta^1_\gamma$ für alle $\gamma < \beta$. Aus $(\mathrm{c})_\beta$ folgt dann $g \in \mathsf{N}^\alpha_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta) = d_\alpha^{\beta}{}''\ (\mathrm{F}_\alpha \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\beta} \mathrm{F}_\gamma)$. Mit (4.6) folgt dann wieder $\pi \in d_\alpha^{\lambda}{}''\ (\mathrm{F}_\alpha \times \prod_{\alpha\leq\gamma<\lambda} \mathrm{F}_\gamma) = \mathsf{N}^\alpha_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$. □

Beweis von $(\mathrm{d})_\lambda$. Sei $\pi \in \mathsf{N}^{\lambda+1}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) = \mathsf{N}^1_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$. Aus $(\mathrm{b})_\lambda$ folgt dann mit Lemma 4.2.4, dass $\mathrm{E}^{\Delta_\lambda, \mathrm{F}_\lambda}_{\Delta_\alpha}$ für alle $\alpha < \lambda$ π-invariant ist.
Wir wollen nun zeigen, dass ein $\alpha < \lambda$ existiert mit $\pi''\ \Delta^1_\beta = \Delta^1_\beta$ für alle $\alpha \leq \beta < \lambda$ und somit $\pi \in d_\alpha^{\lambda}{}''\ (\mathsf{Sym}(\Delta_\alpha \times \prod_{\alpha\leq\beta<\lambda} \mathsf{Sym}(\Delta_\beta)))$ gilt.

Ist das nicht der Fall, so ist

$$\mathrm{I}_\pi := \{\, \gamma < \lambda \,|\, \pi'' \,\Delta^1_\gamma \neq \Delta^1_\gamma \,\}$$

kofinal in λ.
Sei $\gamma \in \mathrm{I}_\pi$. Da Δ^1_γ eine $\mathrm{E}^{\Delta_\lambda,\mathrm{F}_\lambda}_{\Delta_\gamma}$-Äquivalenzklasse ist und die Relation π-invariant ist, ist auch $\pi''\,\Delta^1_\gamma$ eine $\mathrm{E}^{\Delta_\lambda,\mathrm{F}_\lambda}_{\Delta_\gamma}$-Äquivalenzklasse. Da $\pi''\,\Delta^1_\gamma \neq \Delta^1_\gamma$ gilt, muss einer der folgenden zwei Fälle eintreten:
(1) $\pi''\,\Delta^1_\gamma = \Delta_\gamma$.
(2) $\pi''\,\Delta^1_\gamma \subseteq \Delta_\lambda \setminus \Delta_{\gamma+1}$.
Für $\gamma, \delta \in \mathrm{I}_\pi$ mit $\gamma \neq \delta$ gilt wegen $\Delta^1_\gamma \cap \Delta^1_\delta = \emptyset$ schon $\pi''\,\Delta^1_\gamma \cap \pi''\,\Delta^1_\delta = \emptyset$ und Fall (1) kann somit höchstens für ein $\gamma_0 \in \mathrm{I}_\pi$ eintreten. Für alle anderen existiert ein $f(\gamma) > \gamma$ mit $\pi''\,\Delta^1_\gamma \cap \Delta^1_{f(\gamma)} \neq \emptyset$. Nach (b)$_\lambda$ und Lemma 4.2.7 ist $\Delta^1_{f(\gamma)}$ die disjunkte Vereinigung gewisser $\mathrm{E}^{\Delta_\lambda,\mathrm{F}_\lambda}_{\Delta_\gamma}$-Äquivalenzklassen. Da auch $\pi''\,\Delta_\gamma$ eine $\mathrm{E}^{\Delta_\lambda,\mathrm{F}_\lambda}_{\Delta_\gamma}$-Äquivalenzklasse ist, gilt $\pi''\,\Delta_\gamma \subseteq \Delta^1_{f(\gamma)}$. Weil auch $\mathrm{E}^{\Delta_\lambda,\mathrm{F}_\lambda}_{\Delta_{f(\gamma)}}$ π-invariant ist, gilt dann $\pi''\,\Delta_{f(\gamma)} = \Delta^1_{f(\gamma)}$ und $\pi''\,\Delta^1_\gamma \subsetneq \Delta^1_{f(\gamma)}$.

Dann existiert eine in λ unbeschränkte Teilmenge I_0 von I_π und eine Injektion $f : \mathrm{I}_0 \longrightarrow \lambda$ mit $\pi''\,\Delta^1_\gamma \subsetneq \Delta^1_{f(\gamma)}$ für alle $\gamma \in \mathrm{I}_0$.

Es gilt $\mathrm{H}_\lambda = d^\lambda_0{}''\,(\mathrm{F}_0 \times \prod_{\mu<\lambda} \mathrm{F}_\mu)$ und nach (b)$_\mu$ operiert F_μ transitiv auf Δ_μ für alle $\mu < \lambda$. Somit existiert ein $\psi \in \mathrm{H}_\lambda \leq \mathrm{F}_\lambda$ mit $(\psi \circ \pi)''\,\Delta^1_\gamma \neq \pi''\,\Delta^1_\gamma$ für alle $\gamma \in \mathrm{I}_0$. Damit ist $\psi^{\pi^{-1}} \in \mathrm{F}_\lambda$ und es existiert ein $\beta < \lambda$ mit $\psi^{\pi^{-1}} \in \mathsf{N}^\beta_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$. Dann existiert ein $\gamma \in \mathrm{I}_0$ mit $\beta < \gamma$ und für dieses gilt $\psi^{\pi^{-1}}{}''\,\Delta^1_\gamma \neq \Delta^1_\gamma$ im Widerspruch zu (c)$_\lambda$.

Es existiert also ein $\alpha < \lambda$ mit $\pi \in d^\lambda_\alpha{}''\,(\mathsf{Sym}(\Delta_\alpha) \times \prod_{\alpha\leq\beta<\lambda} \mathsf{Sym}(\Delta_\beta))$. Für $g \in \mathsf{N}^\alpha_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$ ist dann $g^\pi \in \mathrm{F}_\lambda$ und nach Voraussetzung gilt $g^\pi{}''\,\Delta_\alpha = \Delta_\alpha$, sowie $g^\pi{}''\,\Delta^1_\beta = \Delta^1_\beta$ für alle $\alpha \leq \beta < \lambda$.
Aus (c)$_\lambda$ folgt dann $g^\pi \in \mathsf{N}^\alpha_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$ für alle $g \in \mathsf{N}^\alpha_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda)$ und damit $\pi \in \mathsf{N}^{\alpha+1}_{\Delta_\lambda}(\mathrm{H}_\lambda) \leq \mathrm{F}_\lambda$. Damit ist F_λ selbstnormalisierend in $\mathsf{Sym}(\Delta_\lambda)$. □

Wir müssen jetzt nur noch zeigen, dass die konstruierten Gruppen die Eigenschaft (e) aus Satz 4.1.1 besitzen.

4.3.3 Lemma: Für $\beta < \alpha$ gilt $\nu(\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha \rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle) = \beta$.

Beweis. Nach Definition und den in Kapitel 2 gezeigten Umformungen gilt mit $\langle\, \Delta^*, \mathrm{F}^* \rangle := \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle$

$$\langle\, \Delta_\alpha, \mathrm{H}_\alpha \rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle \times \langle\, \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta \rangle \cong \langle\, \Omega, \mathrm{G} \rangle := \mathrm{H}_\beta \times \langle\, \Delta^*, \mathrm{F}^* \rangle \times \prod_{\beta<\gamma<\alpha} \mathrm{F}_\gamma$$

Zunächst bestimmen wir den Normalisatorturm von $\langle\,\Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle$. Mit Satz 3.1.14 und 4.3.2,(d)$_\beta$ gilt

$$\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) = (u_3\,''\,\mathsf{Sym}(3)) \ltimes d_3\,''\,(\mathrm{F}_\beta \times \mathrm{F}_\beta \times \mathrm{F}_\beta).$$

Sei $\Delta^*_{\beta+1}$ eine Menge mit $\Delta^*_{\beta+1} \cap \Delta_\beta = \Delta_\beta$ für die eine Bijektion $\varphi : \Delta^*_{\beta+1} \longrightarrow \Delta^*$ existiert, die $\varphi(x) = \langle\,x, 0\rangle$ für alle $x \in \Delta_\beta$ erfüllt. Setze $\mathrm{F}^*_{\beta+1} := k_\varphi^{-1}\,''\,\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*)$.
Dann kann wegen $\nu_{\Delta_\beta}(\mathrm{F}_\beta) = 0$ Lemma 4.2.8 mit $(\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle)_{\gamma\leq\beta}$, $\langle\,\varphi, k_\varphi \restriction \mathrm{F}^*_{\beta+1}\rangle$ und $\mathrm{i}_0 = 0$ angewendet werden. $((\langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle)_{\gamma\leq\beta}, \langle\,\Delta^*_{\beta+1}, \mathrm{F}^*_{\beta+1}\rangle)$ ist damit eine imprimitive Sequenz der Länge $\beta + 1$.
Da für jedes $\gamma < \alpha$ $(\langle\,\Delta_\delta, \mathrm{F}_\delta\rangle)_{\delta\leq\gamma}$ eine imprimitive Sequenz der Länge γ ist, folgt aus Lemma 4.2.6,(ii)

$$\mathsf{N}^1(\langle\,\Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle) \cong \langle\,\Delta^*_{\beta+1}, \mathrm{F}^*_{\beta+1}\rangle \ncong \langle\,\Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle$$

für $\gamma \neq \beta + 1$. Wir zeigen nun auch noch

$$\mathsf{N}^1(\langle\,\Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle) \ncong \langle\,\Delta_{\beta+1}, \mathrm{F}_{\beta+1}\rangle. \tag{4.10}$$

Angenommen, $\langle\,\varphi, k_\varphi \restriction \mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*)\rangle$ ist ein solcher Isomorphismus. Da $\mathrm{F}_{\beta+1}$ transitiv auf $\Delta_{\beta+1}$ operiert, kann wie im Beweis von 4.2.4 angenommen werden, dass $\varphi\langle\,x_0, 0\rangle = x_0$ gilt.
Die Abbildung $b^\varphi_{\langle\,x_0,0\rangle}$ aus 4.2.3 ist dann ein Isomorphismus der Wohlordnungen

$$\langle\,\mathcal{B}_{\langle\,\Delta^*,\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*)\rangle}(\langle\,x_0, 0\rangle), \subsetneq\rangle \overset{(4.3)}{=} \langle\,\{\,\Delta_\gamma \times \{0\} \,|\, \gamma \leq \beta\,\} \cup \{\Delta_*\}, \subsetneq\rangle$$

und

$$\langle\,\mathcal{B}_{\langle\,\Delta_{\beta+1},\mathrm{F}_{\beta+1}\rangle}(x_0), \subsetneq\rangle = \langle\,\{\,\Delta_\gamma \,|\, \gamma \leq \beta + 1\,\}, \subsetneq\rangle$$

vom Ordnungstyp $\beta + 2$. Aus Ordnungsgründen muss dann schon $\varphi\,''\,(\Delta_\beta \times \{0\}) = \Delta_\beta$ gelten.
Mit (4.2) folgt dann für alle $y, z \in \Delta^*$

$$y\ \mathrm{E}^{\Delta^*,\mathsf{N}^1_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*)}_{\Delta_\beta\times\{0\}}\ z \iff \varphi(y)\ \mathrm{E}^{\Delta_{\beta+1},\mathrm{F}_{\beta+1}}_{\Delta_\beta}\ \varphi(z).$$

Die linke Äquivalenzrelation besitzt die drei Äquivalenzklassen $\Delta_\beta \times \{0\}$, $\Delta_\beta \times \{1\}$ und $\Delta_\beta \times \{2\}$, die Rechte besitzt die Äquivalenzklassen Δ_β und Δ^1_β. Dies führt die Annahme zum Widerspruch und es gilt (4.10).

Jetzt können wir induktiv zeigen, dass für alle $\gamma \leq \beta$ gilt

$$\mathsf{N}^{\gamma}(\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle) = \mathsf{N}^{\gamma}_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta) \times \mathsf{N}^{1}(\langle \Delta^*_\beta, \mathrm{F}^*_\beta\rangle) \times \prod_{\beta<\gamma<\alpha} \mathrm{F}_\alpha.$$

$(\gamma = 1)$: Sei $\langle y, \mathrm{i}\rangle \in \Omega$ für $\mathrm{i} \in 3$. Ist $\mathrm{i} = 0$, so ist die durch $\langle y, \mathrm{i}\rangle$ induzierte Permutationsgruppe $\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle_{\langle y,\mathrm{i}\rangle}$ isomorph zu $\langle \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle$ für ein $\gamma < \beta$. Für $\mathrm{i} = 1$ gilt $\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle_{\langle y,\mathrm{i}\rangle} \cong \langle \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle$ und für $\mathrm{i} = 2$ gilt $\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle_{\langle y,\mathrm{i}\rangle} \cong \langle \Delta_\gamma, \mathrm{F}_\gamma\rangle$ für ein $\gamma > \beta$. Damit sind die induzierten Permutationsgruppen in den verschiedenen Faktoren paarweise nicht-isomorph und die Voraussetzungen für Satz 3.1.11 werden erfüllt. Dieser liefert zusammen mit $\nu_{\Delta_\gamma}(\mathrm{F}_\gamma) = 0$ die Behauptung.

$(\gamma \to \gamma + 1)$: Sei wieder $\langle y, \mathrm{i}\rangle \in \Omega$. Für $\mathrm{i} = 0$ gilt nach $(\mathrm{a})_\beta$ und Induktionsannahme $\mathsf{N}^{\gamma}_{\mathrm{G}}(\Omega)_{\langle y,0\rangle} \cong \mathsf{N}^{\gamma}(\langle \Delta_\beta, \mathrm{H}_\beta\rangle)_y \cong \langle \Delta_\delta, \mathrm{F}_\delta\rangle$ für ein $\gamma \leq \delta < \beta$. Weil $\mathsf{N}^{1}_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*)$ transitiv auf Δ^* operiert, gilt $\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle_{\langle y,1\rangle} \cong \mathsf{N}^{1}(\langle \Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle)_y = \mathsf{N}^{1}(\langle \Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle)$ und wie oben ist $\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle_{\langle y,2\rangle} \cong \langle \Delta_\delta, \mathrm{F}_\delta\rangle$ für ein $\delta > \beta$.

Damit sind die induzierten Permutationsgruppen in den verschiedenen Faktoren wieder paarweise nicht-isomorph und Satz 3.1.11 liefert

$$\mathsf{N}^{\gamma+1}(\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle) = \mathsf{N}^{\gamma+1}(\langle \Delta_\beta, \mathrm{H}_\beta\rangle) \times \mathsf{N}^{2}(\langle \Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle) \times \prod_{\beta<\delta<\alpha} \langle \Delta_\delta, \mathrm{F}_\delta\rangle.$$

Es bleibt also nur noch $\nu_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) = 1$ zu zeigen. Mit oben Gezeigtem können wir wie im Beweis von $(\mathrm{d})_{\alpha+1}$ folgern, dass $\mathsf{N}^{2}_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) \leq \mathsf{P}_{\langle \Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle}$ gilt. Satz 3.1.15 und $\nu_{\Delta_\beta}(\mathrm{F}_\beta) = 0$ liefern dann die Behauptung.

$\mathsf{Lim}(\lambda)$: Für $\pi \in \mathsf{N}^{\lambda}_{\Omega}(\mathrm{G})$ existiert ein $\gamma < \lambda$ mit $\pi \in \mathsf{N}^{\gamma}_{\Omega}(\mathrm{G}) = d_3{}'' \,(\mathsf{N}^{\gamma}_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta) \times \mathsf{N}^{1}_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) \times \prod_{\beta<\delta<\alpha} \mathrm{F}_\alpha) \leq d_3{}'' \,(\mathsf{N}^{\lambda}_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta) \times \mathsf{N}^{1}_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) \times \prod_{\beta<\delta<\alpha} \mathrm{F}_\alpha)$.
Umgekehrt existiert für $\pi \in d_3{}'' \,(\mathsf{N}^{\lambda}_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta) \times \mathsf{N}^{1}_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) \times \prod_{\beta<\delta<\alpha} \mathrm{F}_\alpha)$ ein $\gamma < \lambda$ mit $\pi \in d_3{}'' \,(\mathsf{N}^{\gamma}_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta) \times \mathsf{N}^{1}_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) \times \prod_{\beta<\delta<\alpha} \mathrm{F}_\alpha) \leq \mathsf{N}^{\lambda}_{\Omega}(\mathrm{G})$.
Daraus folgt $\mathsf{N}^{\lambda}_{\Omega}(\mathrm{G}) = d_3{}'' \,(\mathsf{N}^{\lambda}_{\Delta_\beta}(\mathrm{H}_\beta) \times \mathsf{N}^{1}_{\Delta^*}(\mathrm{F}^*) \times \prod_{\beta<\delta<\alpha} \mathrm{F}_\alpha)$ und die Behauptung.

Es gilt also $\mathsf{N}^{\beta}(\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle) = \langle \Delta_\beta, \mathrm{F}_\beta\rangle \times \mathsf{N}^{1}(\langle \Delta^*, \mathrm{F}^*\rangle) \times \prod_{\beta<\gamma<\alpha} \mathrm{F}_\gamma$. Alle drei Faktoren sind transitive, selbstnormalisierende Permutationsgruppen und nach den obigen Herleitungen induzieren Elemente aus verschiedenen Faktoren paarweise nicht-isomorphe Permutationsgruppen. Eine letzte Anwendung von Satz 3.1.11 zeigt, dass dann auch $\mathsf{N}^{\beta}(\langle \Omega, \mathrm{G}\rangle)$ selbstnormalisierend in $\mathsf{Sym}(\Omega)$ ist. $\square$

Kapitel 5

Die Konsistenz von $\mathsf{ZFC} + (\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$

In diesem Kapitel zeigen wir, dass aus der Konsistenz von ZFC die Existenz eines ZFC-Modells folgt, in dem das kombinatorische Prinzip $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ für unbeschränkt viele Kardinalzahlen κ gilt und in dem somit Gruppen mit stark manipulierbaren Automorphismentürmen existieren.

Im ersten Abschnitt beweisen wir durch Kodierung erststufiger Strukturen in zusammenhängenden Graphen Satz B und reduzieren das Problem auf die Konstruktion von Bäumen mit den geforderten Eigenschaften.
Abschließend stellen wir ein Verfahren von Gunter Fuchs und Joel Hamkins vor, das für eine reguläre Kardinalzahl κ mit ${}^{<\kappa}2 = \kappa$ mit Hilfe einer $\Diamond_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$-Sequenz die Bäume und partiellen Ordnungen für $(\star)_\kappa^{\mathsf{Tree}}$ definiert.

5.1 Kodierung von Strukturen in Graphen

Der Beweis von Satz B wird im Wesentlichen durch folgenden Satz geschehen, der eine leichte Abwandlung von Satz 5.5.1. aus [Hod93] ist.

5.1.1 Satz (W. Hodges, [Hod93])**:** Sei $\mathfrak{L}$ eine Sprache der Logik 1. Stufe und $\kappa \geq \max\{\omega, |\mathfrak{L}|\}$ eine Kardinalzahl.
Dann existiert eine Abbildung

$$h_\kappa : \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\leq\kappa} \longrightarrow \mathsf{Ob}(\mathsf{Graph}_{con}),$$

so dass für alle $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\leq\kappa}$ gilt:

(a) $\mathsf{Aut}_{\mathsf{S}_\mathfrak{L}}(\mathcal{S}) \cong \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(h_\kappa(\mathcal{S}))$.
(b) $\mathcal{S} \cong \mathcal{T} \iff h_\kappa(\mathcal{S}) \cong h_\kappa(\mathcal{T})$.
Zusätzlich sind diese Eigenschaften aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle.

Wir zeigen zunächst, wie man mit Hilfe dieses Satzes den Beweis von Satz B führt.

5.1.2 Lemma: Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien mit

$$\mathsf{ZFC} \vdash \text{„}\mathcal{D} \textit{ ist eine volle Unterkategorie von } \mathcal{C}\text{“}.$$

Dann gilt für jede Kardinalzahl $\kappa \geq \omega$

$$(\star)_\kappa^{\mathcal{D}} \longrightarrow (\star)_\kappa^{\mathcal{C}}.$$

Beweis. Ist $\mathcal{D}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$, so gilt für alle Objekte $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{D})$ bereits $\mathsf{Iso}_\mathcal{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathsf{Iso}_\mathcal{D}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ und $\mathsf{Aut}_\mathcal{C}(\mathrm{X}) = \mathsf{Aut}_\mathcal{D}(\mathrm{X})$.
Sind $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ und $(\mathbb{P}_\beta^\alpha)_{0<\alpha\leq\beta<\kappa}$ Zeugen für $(\star)_\kappa^{\mathcal{D}}$, so folgt aus der Voraussetzung, dass sie auch $(\star)_\kappa^{\mathcal{C}}$ bezeugen. $\square$

Beweis von Satz B durch 5.1.1. Es gelte $(\star)_\kappa^{\mathsf{Tree}}$. Aus dem vorigen Lemma und den Bemerkungen in 2.1.5,(vi)+(vii) folgt dann, dass auch $(\star)_\kappa^{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}_\leq}}$ gilt.
Seien $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ und $(\mathbb{P}_\beta^\alpha)_{0<\alpha\leq\beta<\kappa}$ Zeugen hierfür. Setze $\lambda := \sup_{\alpha<\kappa} |\mathcal{S}_\alpha|$.
Wir zeigen, dass dann $(h_\lambda(\mathcal{S}_\alpha))_{\alpha<\kappa}$ und $(\mathbb{P}_\beta^\alpha)_{0<\alpha\leq\beta<\kappa}$ Zeugen für $(\star)_\kappa^{\mathsf{Graph}_{con}}$ sind.
Aus 5.1.1 und den gegebenen Eigenschaften der $\mathcal{S}_\alpha$ folgt, dass $(h_\lambda(\mathcal{S}_\alpha))_{\alpha<\kappa}$ eine Sequenz von rigiden, paarweise nicht-isomorphen, zusammenhängenden Graphen ist.
Ist $V[\mathrm{G}]$ eine $\mathbb{P}_\beta^\alpha$-generische Erweiterung von V, so folgt aus der Aufwärts-Absolutheit in 5.1.1 die Rigidität aller $h_\lambda(\mathcal{S}_\gamma)$. Genauso gilt in $V[\mathrm{G}]$

$$h_\lambda(\mathcal{S}_\gamma) \cong h_\lambda(\mathcal{S}_\delta) \iff \mathcal{S}_\gamma \cong \mathcal{S}_\delta \iff \gamma \; R_\beta^\alpha \; \delta$$

für alle $\gamma, \delta < \kappa$. $\square$

Für den Beweis von Satz 5.1.1 benötigen wir noch einige graphentheoretische Begriffe.

5.1.3 Definition: Sei $\Gamma = \langle\, \mathrm{P}, \mathrm{K}\rangle$ ein Graph, $x \in \mathrm{P}$ und $n < \omega$. Wir setzen

$$\mathrm{U}^n_\Gamma(x) := \{y \in \mathrm{P} \mid \text{Es existiert ein Weg } w \text{ der Länge } m \leq n \\ \text{mit } w(0) = x \text{ und } w(m) = y\}.$$

Außerdem sei $\mathrm{v}^{n+1}_\Gamma(x) := \left|\mathrm{U}^{n+1}_\Gamma(x) \setminus \mathrm{U}^n_\Gamma(x)\right|$.

5.1.4 Lemma: Ist $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ ein Isomorphismus von Graphen, so gilt für jeden Punkt x von Γ und $n < \omega$

$$\varphi'' \, \mathrm{U}^n_\Gamma(x) = \mathrm{U}^n_{\Gamma'}(\varphi(x)).$$

Damit gilt auch $\mathrm{v}^{n+1}_\Gamma(x) = \mathrm{v}^{n+1}_{\Gamma'}(\varphi(x))$.

Beweis. Für einen Weg f der Länge $m \leq n$ von x nach y ist $(\varphi \circ f)$ ein Weg der Länge m von $\varphi(x)$ nach $\varphi(y)$. Damit ist $\varphi'' \, \mathrm{U}^n_\Gamma(x) \subseteq \mathrm{U}^n_{\Gamma'}(\varphi(x))$ und die gleiche Argumentation mit φ^{-1} liefert die Behauptung. □

Als nächstes definieren wir für einen Graphen $\Gamma = \langle\, \mathrm{P}, \mathrm{K}\rangle$

$$\mathrm{P}_{inf} := \{\, x \in \mathrm{P} \mid \mathrm{v}^1_\Gamma(x) \geq \omega \,\} \text{ und } \Gamma_{fin} := \Gamma \restriction (\mathrm{P} \setminus \mathrm{P}_{inf}).$$

5.1.5 Lemma: Sei $\varphi : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ ein Isomorphismus von Graphen.
Für jede Zusammenhangskomponente X von Γ_{fin} ist φ'' X dann eine Zusammenhangskomponente von Γ'_{fin}.

Beweis. Sei $\Gamma = \langle\, \mathrm{P}, \mathrm{K}\rangle$ und $\Gamma' = \langle\, \mathrm{P}', \mathrm{K}'\rangle$. Nach dem vorigen Lemma gilt $\varphi'' \, \mathrm{P}_{inf} = \mathrm{P}'_{inf}$ und damit ist $\varphi \restriction (\mathrm{P} \setminus \mathrm{P}_{inf})$ ein Isomorphismus von Γ_{fin} und Γ'_{fin}. In 2.4.7 haben wir schon gezeigt, dass Isomorphismen von Graphen Zusammenhangskomponenten auf Zusammenhangskomponenten abbilden. □

Wir wollen nun eine Familie $(\Gamma_\mathrm{i})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} = (\langle\, \mathrm{P_i}, \mathrm{K_i}\rangle)_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von Graphen zu einem Graphen zusammenfügen. Dazu definieren wir

$$\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i} := \langle \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{P_i}, \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{K_i}\rangle.$$

Dies ist wieder ein Graph.

5.1.6 Lemma: Ist $\mathrm{A} \subseteq \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{P_i}$ mit $\mathrm{P_i} \cap \mathrm{P_j} \subseteq \mathrm{A}$ für alle $\mathrm{i}, \mathrm{j} \in \mathrm{I}$ mit $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, so gilt für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und $x \in \mathrm{P_i} \setminus \mathrm{A}$

$$\mathrm{U}^1_{\bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i}}(x) = \mathrm{U}^1_{\Gamma_\mathrm{i}}(x).$$

Beweis. Ist $x \in \mathrm{P_i} \setminus \mathrm{A}$ und $y \in \mathrm{U}^1_{\bigcup_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}} \Gamma_\mathrm{i}}(x) \setminus \{x\}$, so gilt $\{x, y\} \in \bigcup_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{K_i}$ und es existiert ein $\mathrm{j} \in \mathrm{I}$ mit $\{x, y\} \in \mathrm{K_j}$. Dann gilt $x \in \mathrm{P_i} \cap \mathrm{P_j}$ und aus der Voraussetzung folgt $\mathrm{i} = \mathrm{j}$. Damit ist $y \in \mathrm{U}^1_{\Gamma_\mathrm{i}}(x)$. Die Umkehrung gilt nach Definition. □

Die folgenden drei Begriffe werden wir zur Kodierung von Strukturen in Graphen verwenden, indem wir die dort definierten Graphen zu größeren Graphen zusammensetzen, in denen alle Informationen der Strukturen kodiert sind.

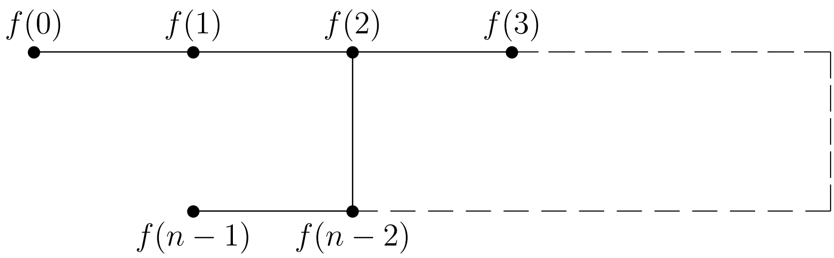
5.1.7 Definition: Sei $1 \leq n < \omega$ und $f : n \longrightarrow V$ eine Injektion.

(i) Der durch f induzierten Pfad von $f(0)$ nach $f(n-1)$ ist definiert als der Graph

$$Path(f) := \langle\, f\,''\, n, \{\, \{f(k), f(k+1)\} \mid k < n-1 \,\}\rangle.$$

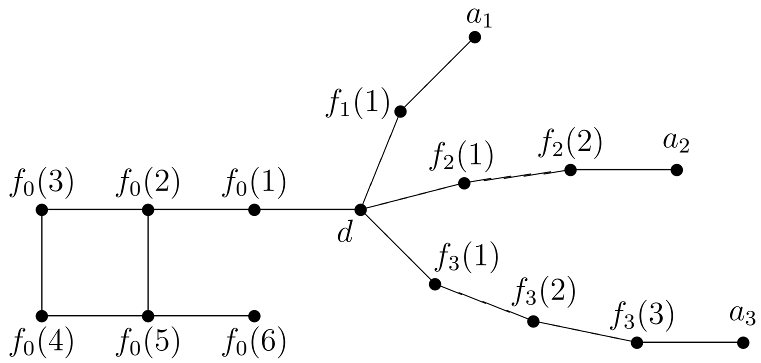
(ii) Für $n \geq 6$ definieren wir das durch f induzierte n-Etikett von $f(0)$ als den Graphen

$$Tag(f) := Path(f) \cup \langle\, f\,''\, n, \{\{f(2), f(n-2)\}\}\rangle.$$



(iii) Ein Graph $\Gamma = \langle\, \mathrm{P}, \mathrm{K}\rangle$ heißt m-n-Pass von $\langle d, a_1, \ldots, a_n\rangle$ für $6 \leq m < \omega$, falls Injektionen $f_0 : m \longrightarrow \mathrm{P}$ und $f_k : k+2 \longrightarrow \mathrm{P}$ für $1 \leq k \leq n$ existieren, so dass für $\mathrm{P}_0 := f_0\,''\, m$ und $\mathrm{P}_k := f_k\,''\,(k+2)$ gilt:

· $\Gamma = Tag(f_0) \cup \bigcup_{1\leq i\leq n} Path(f_i)$.
· $\mathrm{P}_i \cap \mathrm{P}_j = \{d\}$ für alle $i \neq j$.
· $f_k(k+1) = a_k$ für alle $1 \leq k \leq n$.
· $f_i(0) = d$ für alle $0 \leq i \leq n$.



Ein Beispiel für einen 7-3-Pass

5.1.8 Lemma: (i) Ist $n \geq 6$ und $f : n \longrightarrow V$ eine Injektion, so ist $Tag(f)$ ein rigider Graph.

(ii) Jeder m-n-Pass ist ein rigider Graph.

Beweis. (i) Sei $\pi \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Graph}}(Tag(f))$. Da $f(0)$ der eindeutige Punkt x von $Tag(f)$ mit $\mathrm{v}^1_{Tag(f)}(x) = \mathrm{v}^2_{Tag(f)}(x) = 1$ ist, gilt mit Lemma 5.1.4 $\pi(f(0)) = f(0)$. Weil f ein Isomorphismus ist, gilt auch $\pi(f(1)) = f(1)$ und $\pi(f(2)) = f(2)$. Nach Konstruktion ist $\{f(2), f(n-2)\}$ die Menge der Punkte x von $Tag(f)$ mit $\mathrm{v}^1_{Tag(f)}(x) = 3$. Da diese Eigenschaft invariant unter Automorphismen ist, permutiert π die Menge bildweise und aus $\pi(f(2)) = f(2)$ folgt $\pi(f(n-2)) = f(n-2)$. Die gleiche Argumentation für die Menge $\{f(0), f(n-1)\}$ der Punkte x von $Tag(f)$ mit $\mathrm{v}^1_{Tag(f)}(x) = 1$ liefert $\pi(f(n-1)) = f(n-1)$. Induktiv folgt dann auch $\pi(f(k) = f(k)$ für alle $2 < k < n-2$.
(ii) Sei Γ ein Graph und $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ Zeugen dafür, dass Γ ein m-n-Pass von $\langle d, a_1, \ldots, a_n\rangle$ ist. Für $1 \leq k \leq n$ ist a_k der eindeutige Punkt x von Γ mit $\mathrm{v}^{k+2}_\Gamma(x) = n$ und $\mathrm{v}^l_\Gamma(x) = 1$ für alle $l \leq k+1$. Für alle $1 \leq k \leq n$ gilt dann $\pi(a_k) = \pi(f_k(k+1)) = a_k$ und induktiv folgt $\pi(f_k(l)) = f_k(l)$ für alle $0 \leq l \leq k+1$.
Damit gilt $\pi \restriction \bigcup_{1\leq i\leq k} \mathrm{P}_i = \mathsf{id}_{\bigcup 1\leq i\leq k \mathrm{P}_i}$ und somit $\pi'' \, \mathrm{P}_0 = \mathrm{P}_0$. π induziert also einen Automorphismus von $Tag(f_0)$ und mit (i) folgt $\pi \restriction \mathrm{P}_0 = \mathsf{id}_{\mathrm{P}_0}$. $\square$

Mit Hilfe der folgenden Charakterisierung von Rigidität werden wir die Isomorphismen der kodierenden Graphen kontrollieren können.

5.1.9 Lemma: Ein Objekt X einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist genau dann rigide, wenn für alle $\mathrm{Y} \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ gilt

$$|\mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})| \leq 1. \tag{5.1}$$

Beweis. Die Rigidität von X folgt aus (5.1) mit X=Y und $\mathsf{id}_X \in \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$. Sind umgekehrt $\varphi, \psi \in \mathsf{Iso}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, so gilt nach 2.1.3,(i) $\varphi^{-1} \circ \psi \in \mathsf{Aut}_{\mathcal{C}}(X) = \{\mathsf{id}_X\}$ und somit $\varphi = \varphi \circ \mathsf{id}_X = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \psi = \psi$. □

Das folgende Lemma ermöglicht es uns, beim Beweis von Satz 5.1.1 nur Strukturen mit bestimmten Eigenschaften betrachten zu müssen.

5.1.10 Lemma: Sei $\kappa \geq \omega$ eine Kardinalzahl. Es existiert eine abzählbare, relationale Sprache $\mathfrak{L}_\kappa = \langle \emptyset, \emptyset, \{\, \mathrm{P}_n \,|\, n < \omega \,\}\rangle$ der Logik 1. Stufe, so dass für jede erststufige Sprache $\mathfrak{L}$ mit $|\mathfrak{L}| \leq \kappa$ eine Abbildung

$$g_\kappa : \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\leq \kappa} \longrightarrow \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}_\kappa})^{\kappa},$$

existiert und für alle $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\leq \kappa}$ gilt:
(a) $\mathsf{Aut}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S}) \cong \mathsf{Aut}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}^0}}(g_\kappa(\mathcal{S}))$.
(b) $\mathcal{S} \cong \mathcal{T} \iff g_\kappa(\mathcal{S}) \cong g_\kappa(\mathcal{T})$.
(c) Ist $g_\kappa(\mathcal{S}) = \langle \mathbb{T}, \dots \rangle$, so gilt

$$(\mathrm{P}_0)_{g_\kappa(\mathcal{S})} = \{\, \langle x, y \rangle \in \mathbb{T} \times \mathbb{T} \,|\, x \neq y \,\}.$$

Zusätzlich sind diese Eigenschaften aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle.

Beweis. Definiere $\mathfrak{L}_\kappa := \langle \emptyset, \emptyset, \{<_\kappa, <_3, P_\kappa, P_3\} \cup \{\, S_n \,|\, n < \omega \,\}\rangle$ mit:
· einstelligen Prädikatensymbolen P_κ, P_3.
· zweistelligen Prädikatensymbolen $<_\kappa, <_3$.
· $n{+}2$-stelligen Prädikatensymbolen S_n für $n < \omega$.
Sei nun $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{C}, \mathfrak{F}, \mathfrak{P} \rangle$ eine Sprache der Logik 1. Stufe mit $|\mathfrak{L}| \leq \kappa$, wobei:
· $\mathfrak{C} = \{\, c_\alpha \,|\, \alpha < \lambda_0 \,\}$ für ein $\lambda_0 \leq \kappa$.
· $\mathfrak{F} = \bigcup_{1 \leq n < \omega} \mathfrak{F}_n$ und für $\lambda_1^n \leq \kappa$ ist $\mathfrak{F}_n = \{\, f_\alpha^n \,|\, \alpha < \lambda_1^n \,\}$ die Menge der n-stelligen Funktionssymbole von $\mathfrak{L}$.
· $\mathfrak{P} = \bigcup_{1 \leq n < \omega} \mathfrak{P}_n$ und für $\lambda_2^n \leq \kappa$ ist $\mathfrak{P}_n = \{\, P_\alpha^n \,|\, \alpha < \lambda_2^n \,\}$ die Menge der n-stelligen Prädikatensymbole von $\mathfrak{L}$.
Für $\mathcal{S} = \langle \mathbb{S}, \mathbb{C}, \mathbb{F}, \mathbb{P} \rangle \in \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\leq \kappa}$ definiere $\mathcal{S}^* := \langle\, \mathbb{S}^*, \dots \rangle$ durch:
· $\mathbb{S}^* := \mathbb{S} \sqcup \kappa \sqcup 3$.
· $(P_\kappa)_{\mathcal{S}^*} := \kappa \times \{1\}$, $(P_3)_{\mathcal{S}^*} := 3 \times \{2\}$.
· $(<_\kappa)_{\mathcal{S}^*} := \{\, \langle\, \langle\, \alpha, 1 \rangle, \langle\, \beta, 1 \rangle\rangle \,|\, \alpha < \beta < \kappa \,\}$.
· $(<_3)_{\mathcal{S}^*} := \{\, \langle\, \langle\, m, 2 \rangle, \langle\, k, 2 \rangle\rangle \,|\, m < k < 3 \,\}$.
· $(S_0)_{\mathcal{S}^*} = \{\, x, y \in \mathbb{S}^* \,|\, x \neq y \,\}$

· Ist $n \geq 1$, so soll genau dann $\langle x_1, \ldots, x_n, y, z\rangle \in (S_n)_{\mathcal{S}^*}$ gelten, wenn einer der drei folgenden Fälle eintritt:
  (1) $n = 1$, $y = \langle \alpha, 1\rangle$ für ein $\alpha < \lambda_0$, $z = \langle 0, 2\rangle$ und $x_1 = \langle (c_\alpha)_{\mathcal{S}}, 0\rangle$.
  (2) $n > 1$, $y = \langle \alpha, 1\rangle$ für ein $\alpha < \lambda_1^{n-1}$, $z = \langle 1, 2\rangle$, $x_k = \langle s_k, 0\rangle$ für $1 \leq k \leq n$ und $(f_\alpha^{n-1})_{\mathcal{S}}(s_1, \ldots, s_{n-1}) = s_n$.
  (3) $y = \langle \alpha, 1\rangle$ für ein $\alpha < \lambda_2^n$, $z = \langle 2, 2\rangle$, $x_k = \langle s_k, 0\rangle$ für $1 \leq k \leq n$ und $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle \in (P_\alpha^n)_{\mathcal{S}}$.

Setze dann $g_\kappa(\mathcal{S}) := \mathcal{S}^*$.

Seien nun M und N transitive ZFC-Modelle mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$.
Wir zeigen, dass in N für alle $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})^{\leq\kappa}_{\mathrm{M}}$ eine Bijektion

$$\varphi : \mathsf{Isos}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}_\kappa}}(g_\kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{M}}, g_\kappa(\mathcal{T})_{\mathrm{M}})_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathsf{Isos}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})_{\mathrm{N}}$$

existiert, die für $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ ein Automorphismus von Gruppen ist.

Da die oben verwendeten Definitionen aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle sind, gilt $g_\kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{M}} = \mathcal{S}^*_{\mathrm{N}}$. In N gilt dann für $\pi \in \mathsf{Isos}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}_\kappa}}(\mathcal{S}^*, \mathcal{T}^*)$ schon $\pi''\,(\kappa \times \{1\}) = \pi''\,(P_\kappa)_{\mathcal{S}^*} = (P_\kappa)_{\mathcal{T}^*} = \kappa \times \{1\}$ und $\pi''\,(3 \times \{2\}) = \pi''\,(P_3)_{\mathcal{S}^*} = (P_3)_{\mathcal{T}^*} = 3 \times \{2\}$. Dann induziert π einen Automorphismus der Wohlordnungen $\langle \kappa \times \{1\}, (<_\kappa)_{\mathcal{S}^*}\rangle$ und $\langle 3 \times \{2\}, (<_3)_{\mathcal{S}^*}\rangle$ und es gilt $\pi \restriction (\kappa \times \{1\}) = \mathsf{id}_{\kappa\times\{1\}}$ sowie $\pi \restriction (3 \times \{2\}) = \mathsf{id}_{3\times\{2\}}$. Somit existiert eine Bijektion $\pi_0 : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{T}$ mit $\pi\langle s, 0\rangle = \langle \pi_0(s), 0\rangle$ für alle $s \in \mathbb{S}$.
Es ist nun leicht zu sehen, dass auch $\pi_0 \in \mathsf{Isos}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ gilt. Ist zum Beispiel $(f_\alpha^{n-1})_{\mathcal{S}}(s_1, \ldots, s_{n-1}) = s_n$ für $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{S}$, so gilt

$$\langle\langle s_0, 0\rangle, \ldots, \langle s_n, 0\rangle, \langle \alpha, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\rangle \in (S_n)_{\mathcal{S}^*}$$

und damit auch

$$\begin{aligned}&\langle\langle \pi_0(s_1), 0\rangle, \ldots, \langle \pi_0(s_n), 0\rangle, \langle \alpha, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\rangle \\ &\qquad = \langle\pi\langle s_1, 0\rangle, \ldots, \pi\langle s_n, 0\rangle, \pi\langle \alpha, 1\rangle, \pi\langle 1, 2\rangle\rangle \in (S_n)_{\mathcal{T}^*}.\end{aligned}$$

Nach Definition gilt dann $(f_\alpha^{n-1})_{\mathcal{T}}(\pi_0(s_1), \ldots, \pi_0(s_{n-1})) = \pi_0(s_n)$. Die anderen beiden Fälle zeigt man auf die gleiche Art. Definiere $\varphi(\pi) = \pi_0$.

Umgekehrt definieren wir für $\pi_0 \in \mathsf{Isos}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ eine Bijektion $\pi_0^* : \mathbb{S}^* \longrightarrow \mathbb{T}^*$ durch $\pi_0^*\langle s, 0\rangle := \langle \pi_0(s), 0\rangle$ für $s \in \mathbb{S}$, $\pi_0^*\langle \alpha, 1\rangle := \langle \alpha, 1\rangle$ für alle $\alpha < \kappa$ und $\pi_0^*\langle m, 2\rangle := \langle m, 2\rangle$ für $m < 3$.
Ist $\langle\langle s_1, 0\rangle, \ldots, \langle s_n, 0\rangle, \langle \alpha, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\rangle \in (S_n)_{\mathcal{S}^*}$, so gilt nach Definition schon $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle \in (P_\alpha^n)_{\mathcal{S}}$ und damit $\langle \pi_0(s_1), \ldots, \pi_0(s_n)\rangle \in (P_\alpha^n)_{\mathcal{T}}$. Dann gilt aber auch schon

$$\begin{aligned}&\langle\langle \pi_0(s_1), 0\rangle, \ldots, \langle \pi_0(s_n), 0\rangle, \langle \alpha, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\rangle \\ &\qquad = \langle\pi_0^*\langle s_0, 0\rangle, \ldots, \pi_0^*\langle s_n, 0\rangle, \pi_0^*\langle \alpha, 1\rangle, \pi_0^*\langle 2, 2\rangle\rangle \in (S_n)_{\mathcal{T}^*}.\end{aligned}$$

Damit gilt $\pi_0^* \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}_\kappa}}(\mathcal{S}^*, \mathcal{T}^*)$. Wegen $\varphi(\pi)^* = \pi$ und $\varphi(\pi_0^*) = \pi_0$ ist φ eine Bijektion und nach Definition ein Automorphismus, falls $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. $\square$

Wir haben nun alle Hilfsmittel entwickelt, um den Satz beweisen zu können.

Beweis von 5.1.1. Durch Lemma 5.1.10 können wir annehmen, dass die betrachtete Sprache von der Form $\mathfrak{L} = \langle \emptyset, \emptyset, \{\, P_n \,|\, n < \omega \,\}\rangle$ mit c_n-stelligen Prädikatensymbolen P_n ist, und uns auf Strukturen $\mathcal{S} = \langle\, \mathbb{S}, \dots \rangle$ mit $|\mathbb{S}| = \kappa$ und $(P_0)_{\mathcal{S}} = \{\, \langle\, x, y\rangle \in \mathbb{S} \times \mathbb{S} \,|\, x \neq y \,\}$ beschränken.

Für solche Strukturen $\mathcal{S}$ definieren wir nun einen zusammenhängenden Graphen $\Gamma_{\mathcal{S}} = \langle\, \mathrm{P}_{\mathcal{S}}, \mathrm{K}_{\mathcal{S}}\rangle$.
Für $\vec{s} = \langle s_1, \dots, s_{c_n}\rangle \in (P_n)_{\mathcal{S}}$ setze $d_n^{\vec{s}} := \langle 1, n, \vec{s}\rangle$.
Definiere Funktion $f_{n,0}^{\vec{s}} : n + 5 \longrightarrow V$ durch $f_{n,0}^{\vec{s}}(0) := d_n^{\vec{s}}$ und $f_{n,0}^{\vec{s}}(l) := p_{n,l}^{\vec{s}} := \langle 2, n, \vec{s}, l\rangle$ für $1 \leq l \leq n + 4$.
Für $1 \leq k \leq c_n$ definiere $f_{n,k}^{\vec{s}} : k+2 \longrightarrow V$ durch $f_{n,k}^{\vec{s}}(0) := d_n^{\vec{s}}$, $f_{n,k}^{\vec{s}}(k+1) := s_k^* := \langle\, 0, s_k\rangle$ und $f_{n,k}^{\vec{s}}(l) := w_{n,k,l}^{\vec{s}} := \langle 3, n, \vec{s}, k, l\rangle$ für $1 \leq l \leq k$. Setze

$$\Gamma_{\vec{s}}^n := \langle\, \mathrm{P}_{\vec{s}}^n, \mathrm{K}_{\vec{s}}^n\rangle := Tag(f_{n,0}^{\vec{s}}) \cup \bigcup_{1 \leq k \leq c_n} Path(f_{n,k}^{\vec{s}}).$$

$\Gamma_{\vec{s}}^n$ ist dann ein $(n+5)$-c_n-Pass und damit zusammenhängend. Definiere

$$\Gamma_{\mathcal{S}} := \bigcup_{n<\omega} \Big(\bigcup_{\vec{s} \in (P_n)_{\mathcal{S}}} \Gamma_{\vec{s}}^n \Big).$$

Seien nun p, q Punkte von $\Gamma_{\mathcal{S}}$ mit $p \in \mathrm{P}_{\vec{s}}^n$ und $q \in \mathrm{P}_{\vec{t}}^m$. Gilt dann $\vec{s} \neq \vec{t}$, so existiert ein $k \leq c_n$ und ein $l \leq c_m$ mit $s_k \neq t_l$ und damit $\langle\, s_k, t_l\rangle \in (P_0)_{\mathcal{S}}$. s_k^* und t_l^* sind also Punkte des zusammenhängenden Graphen $\Gamma_{\langle\, s_k, t_l\rangle}^0$. Damit existiert ein Weg von p nach s_k^*, von s_k^* nach t_l^* und von t_l^* nach q.
Somit ist $\Gamma_{\mathcal{S}}$ ein zusammenhängender Graph und wir setzen $h_\kappa(\mathcal{S}) := \Gamma_{\mathcal{S}}$.

Seien nun M und N transitive ZFC-Modelle mit $\mathrm{M} \subseteq \mathrm{N}$.
Wir zeigen, dass in N für alle $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathsf{Ob}(\mathsf{S}_{\mathfrak{L}})_{\mathrm{M}}^\kappa$ eine Bijektion

$$\varphi : \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}}(h_\kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{M}}, h_\kappa(\mathcal{T})_{\mathrm{M}})_{\mathrm{N}} \longrightarrow \mathsf{Iso}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})_{\mathrm{N}}$$

existiert, die für $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ ein Automorphismus von Gruppen ist.

Die Definition von $\Gamma_{\mathcal{S}}$ ist aufwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle sind, also gilt $h_\kappa(\mathcal{S})_{\mathrm{M}} = (\Gamma_{\mathcal{S}})_{\mathrm{N}}$.

Sei nun $\pi \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma_{\mathcal{S}}, \Gamma_{\mathcal{T}})_{\mathrm{N}}$ mit $\mathfrak{L}$-Strukturen $\mathcal{S} = \langle \mathbb{S}, \dots \rangle$, $\mathcal{T} = \langle \mathbb{T}, \dots \rangle$ aus M. Für $s \in \mathbb{S}$ gilt nach Konstruktion

$$\{ w_{0,1,1}^{\langle s,s_0 \rangle} \mid s_0 \in \mathbb{S} \setminus \{s\} \} \subseteq \mathrm{U}^1_{\Gamma_{\mathcal{S}}}(s^*) \setminus \mathrm{U}^0_{\Gamma_{\mathcal{S}}}(s^*) = \mathrm{U}^1_{\Gamma_{\mathcal{S}}}(s^*) \setminus \{s^*\}$$

und aus $|\mathbb{S}| = \kappa \geq \omega$ folgt $\mathrm{v}^1_{\Gamma_{\mathcal{S}}}(s^*) \geq \omega$.
Ist umgekehrt $p \in \mathrm{P}^n_{\vec{s}} \setminus \{0\} \times \mathbb{S}$, so folgt aus Lemma 5.1.6 mit $\mathrm{A} = \{0\} \times \mathbb{S}$ schon $\mathrm{v}^1_{\Gamma_{\mathcal{S}}}(p) = \mathrm{v}^1_{\Gamma^n_{\vec{s}}}(p) \leq |\mathrm{P}^n_{\vec{s}}| < \omega$.
Zusammengefasst gilt also für alle $p \in \mathrm{P}_{\mathcal{S}}$

$$p \in \{0\} \times \mathbb{S} \iff \mathrm{v}^1_{\Gamma_{\mathcal{S}}}(p) \geq \omega. \tag{5.2}$$

Die gleiche Argumentation für $\mathcal{T}$ liefert die Existenz einer Bijektion $\pi_0 : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{T}$ mit $\pi(s^*) = (\pi_0(s))^*$ für alle $s \in \mathbb{S}$.

Wir zeigen, dass gilt $\pi_0 \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$. Nach Konstruktion und (5.2) sind alle Zusammenhangskomponenten von $(\Gamma_{\mathcal{S}})_{fin}$ von der Form

$$\Gamma^*_{n,\vec{s}} = \langle \mathrm{P}^*_{n,\vec{s}}, \mathrm{K}^*_{n,\vec{s}} \rangle := \Gamma_{\mathcal{S}} \restriction (\mathrm{P}^n_{\vec{s}} \setminus \{s_1^*, \dots, s_{c_n}^*\}) = \Gamma^n_{\vec{s}} \restriction (\mathrm{P}^n_{\vec{s}} \setminus \{s_1^*, \dots, s_{c_n}^*\}).$$

Nach Lemma 5.1.5 existiert also für $n < \omega$ und $\vec{s} = \langle s_1, \dots, s_{c_n} \rangle \in (P_n)_{\mathcal{S}}$ ein $m < \omega$ und $\vec{t} = \langle t_1, \dots, t_{c_m} \rangle \in (P_m)_{\mathcal{T}}$ mit $\pi'' \, \mathrm{P}^*_{n,\vec{s}} = \mathrm{P}^*_{m,\vec{t}}$ und $\pi \restriction \mathrm{P}^*_{n,\vec{s}} \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}}(\mathrm{P}^*_{n,\vec{s}}, \mathrm{P}^*_{m,\vec{t}})$.
Nach Konstruktion besitzt $\Gamma^*_{n,\vec{s}}$ genau $c_n + 1$ Punkte p mit $\mathrm{v}^1_{(\Gamma_{\mathcal{S}})_{fin}}(p) = 1$ und somit gilt $c_n = c_m$. Aus $\left|\mathrm{P}^*_{n,\vec{s}}\right| = (\sum_{k=1}^{c_n} k) + n + 5$ folgt dann auch $n = m$.

Wir definieren einen Isomorphismus $\psi^{\vec{s}}_{\vec{t}} : \Gamma^n_{\vec{s}} \longrightarrow \Gamma^n_{\vec{t}}$ durch:
· $\psi^{\vec{s}}_{\vec{t}}(s^*_k) := t^*_k$ für alle $1 \leq k \leq c_n$.
· $\psi^{\vec{s}}_{\vec{t}}(d^{\vec{s}}_n) := d^{\vec{t}}_n$.
· $\psi^{\vec{s}}_{\vec{t}}(p^{\vec{s}}_{n,l}) := p^{\vec{t}}_{n,l}$ für alle $1 \leq l \leq n + 4$.
· $\psi^{\vec{s}}_{\vec{t}}(w^{\vec{s}}_{n,k,l}) := w^{\vec{t}}_{n,k,l}$ für alle $1 \leq k \leq c_n$ und $1 \leq l \leq k$.

Aus den Eigenschaften eines Isomorphismus und der Konstruktion der Graphen folgt dann auch $\pi'' \, \mathrm{P}^n_{\vec{s}} = \mathrm{P}^n_{\vec{t}}$ und $\pi \restriction \mathrm{P}^n_{\vec{s}} \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma^n_{\vec{s}}, \Gamma^n_{\vec{t}})$. Weil $\Gamma^n_{\vec{s}}$ ein rigider Graph ist, folgt aus (5.1) $\pi \restriction \mathrm{P}^n_{\vec{s}} = \psi^{\vec{s}}_{\vec{t}}$ und $\pi_0(s_k) = t_k$ für alle $1 \leq k \leq c_n$. Damit gilt $\langle \pi_0(s_1), \dots, \pi_0(s_{c_n}) \rangle \in (P_n)_{\mathcal{T}}$ und π_0 ist ein Isomorphismus von Strukturen.
Definiere $\varphi(\pi) := \pi_0$.

Für $\pi_0 \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ definiere Bijektion $\pi_0^* : \mathrm{P}_{\mathcal{S}} \longrightarrow \mathrm{P}_{\mathcal{T}}$ durch:
· $\pi_0^*(s^*) := (\pi_0(s))^*$ für alle $s \in \mathbb{S}$.
· $\pi_0^*(d_n^{\langle s_1, \dots, s_{c_n} \rangle}) := d_n^{\langle \pi_0(s_1), \dots, \pi_0(s_{c_n}) \rangle}$ für alle $n < \omega$ und $\langle s_1, \dots, s_{c_n} \rangle \in (P_n)_{\mathcal{S}}$.

· $\pi_0^*(p_{n,l}^{\langle s_1,\ldots,s_{c_n}\rangle}) := p_{n,l}^{\langle \pi_0(s_1),\ldots,\pi_0(s_{c_n})\rangle}$ für $n<\omega$, $1 \leq l \leq n+4$ und $\langle s_1,\ldots,s_{c_n}\rangle \in (P_n)_{\mathcal{S}}$.
· $\pi_0^*(w_{n,k,l}^{\langle s_1,\ldots,s_{c_n}\rangle}) := w_{n,k,l}^{\langle \pi_0(s_1),\ldots,\pi_0(s_{c_n})\rangle}$ für $n<\omega$, $1 \leq k \leq c_n$, $1 \leq l \leq k$ und $\langle s_1,\ldots,s_{c_n}\rangle \in (P_n)_{\mathcal{S}}$.

Nach Konstruktion der Graphen gilt dann $\pi_0^* \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma_{\mathcal{S}}, \Gamma_{\mathcal{T}})$.
Zunächst gilt $\varphi(\pi_0^*) = \pi_0$ nach Definition von φ für $\pi_0 \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{S}_{\mathfrak{L}}}(\mathcal{S},\mathcal{T})$.
Für $\pi \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Graph}}(\Gamma_{\mathcal{S}}, \Gamma_{\mathcal{T}})$ mit $\varphi(\pi) = \pi_0$ und $p \in \mathrm{P}^n_{\langle s_1,\ldots,s_{c_n}\rangle}$ gilt dann, wie oben gezeigt, $\pi(p) = \psi^{\langle s_1,\ldots,s_{c_n}\rangle}_{\langle \pi_0(s_1),\ldots,\pi_0(s_{c_n})\rangle}(p) = \pi_0^*(p)$ und damit gilt $\varphi(\pi)^* = \pi$.
φ ist also eine Bijektion und nach Definition ein Gruppenautomorphismus, falls $\mathcal{S} = \mathcal{T}$ gilt. $\square$

5.2 $(\Diamond_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa) \wedge 2^{<\kappa} = \kappa) \longrightarrow (\star)_\kappa^{\mathsf{Tree}}$

Bevor wir mit der Konstruktion der Objekte des kombinatorischen Prinzips beginnen, erläutern wir die verwendete Terminologie.

Sei T ein Baum und $p \in \mathsf{T}$. Wir schreiben $|p|_{\mathsf{T}} := otp\langle pred_{\mathsf{T}}(p), \leq_{\mathsf{T}}\rangle$ für die Höhe des Baumelements, $\mathsf{T}(\alpha) = \{\, q \in \mathsf{T} \mid |q|_{\mathsf{T}} = \alpha \,\}$ für den α-ten Level des Baumes, $\mathsf{height}(\mathsf{T}) := \min\{\, \alpha \in \mathsf{Ord} \mid \mathsf{T}(\alpha) = \emptyset \,\}$ für die Höhe von T und $\mathsf{T} \upharpoonright \alpha := \{\, q \in \mathsf{T} \mid |q|_{\mathsf{T}} < \alpha \,\}$ für die Einschränkung auf die Höhe α.

Ist κ eine Kardinalzahl und $\alpha < \kappa$, so sagen wir, T ist ein κ-normaler α-Baum, falls gilt:
· $\mathsf{height}(\mathsf{T}) = \alpha$ und $|\mathsf{T}(\beta)| < \kappa$ für alle $\beta < \alpha$.
· T besitzt ein eindeutiges $\leq_{\mathsf{T}}$-minimales Element $\langle\rangle$.
· Jedes $p \in \mathsf{T}$ mit $|p|_{\mathsf{T}} + 1 < \alpha$ besitzt mindestens zwei unmittelbare Nachfolger.
· Für alle $\gamma < \beta < \alpha$ und $p \in \mathsf{T}(\gamma)$ existiert ein $q \in \mathsf{T}(\beta)$ mit $p \leq_{\mathsf{T}} q$.
· Für $\lambda \in \mathsf{Lim}$ ist jedes Element von $\mathsf{T}(\lambda)$ eindeutig durch seine Vorgänger bestimmt.

Wir sagen, T ist 2-spaltend, falls jedes $p \in \mathsf{T}$ mit $|p|_{\mathsf{T}} + 1 < \mathsf{height}(\mathsf{T})$ genau zwei unmittelbare Nachfolger besitzt.

T heißt $<\kappa$-abgeschlossen, falls für alle $\lambda \in \mathsf{Lim}$ mit $\lambda < \mathsf{height}(\mathsf{T})$ und $\mathsf{cof}(\lambda) < \kappa$ alle kofinalen Zweige von $\mathsf{T} \upharpoonright \lambda$ in $\mathsf{T}(\lambda)$ fortgesetzt werden.

Für eine partielle Ordnung $\mathbb{P} = \langle\, \mathsf{P}, \leq_{\mathbb{P}}\rangle$ defininieren wir $\mathbb{P}^{op} := \langle\, \mathsf{P}, \geq_{\mathbb{P}}\rangle$. T ist ein κ-Suslin-Baum, falls $\mathsf{height}(\mathsf{T}) = \kappa$ gilt, jeder Zweig Mächtigkeit kleiner κ besitzt und T^{op} die $<\kappa$-C.C. besitzt.

Eine Teilmenge S von T heißt Teilbaum von T, falls sie $\leq_{\mathsf{T}}$-abgeschlossen ist.

Die von uns konstruierten Bäume werden alle Teilbäume von ${}^{<\kappa^+}2$ für eine Kardinalzahl κ sein. Wir zeigen zunächst, auf welche Art wir neue Isomorphismen zwischen diesen Bäumen erzwingen wollen. Die folgende Definition zeigt, von welcher Gestalt diese Isomorphismen in den generischen Erweiterungen sein werden.

5.2.1 Definition: Sei μ eine Ordinalzahl und $s \in {}^{\mu}2$. Wir definieren einen Automorphismus π_s von ${}^{\leq\mu}2$ durch

$$\pi_s(p)(\gamma) = p(\gamma) \;:\Longleftrightarrow\; s(\gamma) = 0$$

für $p \in {}^{\leq\mu}2$ und $\gamma \in \mathsf{dom}(p)$.
Für $s_0, \ldots, s_n \in {}^{\mu}2$ definiere $\pi_{\langle s_0,\ldots,s_n\rangle} := \pi_{s_1} \circ \cdots \circ \pi_{s_n}$.

Diese Automorphismen haben einige praktische Eigenschaften.

5.2.2 Lemma: Seien $s, t \in {}^{\mu}2$ und $p \in {}^{\leq\mu}2$.
(i) $\pi_s(p)(\gamma) = p(\gamma) + s(\gamma) \, mod\, 2$ für alle $\gamma \in \mathsf{dom}(p)$.
(ii) $\pi_s^2 = \mathsf{id}_{\leq\mu 2}$.
(iii) $\pi_s \circ \pi_t = \pi_{\pi_s(t)}$.
(iv) $\pi_s \circ \pi_t = \pi_t \circ \pi_s$.

Beweis. (i) Ist $\gamma \in \mathsf{dom}(p)$ und $s(\gamma) = 0$, so folgt aus der Definition $\pi_s(p)(\gamma) = p(\gamma) + 0 = p(\gamma) + s(\gamma) \, mod\, 2$. Ist andererseits $s(\gamma) = 1$, so gilt $\pi_s(p)(\gamma) \neq p(\gamma)$ und damit $\pi_s(p)(\gamma) = p(\gamma) + 1 \, mod\, 2 = p(\gamma) + s(\gamma) \, mod\, 2$.
(ii) Sei $\gamma \in \mathsf{dom}(p)$. Mit (i) gilt $\pi_s^2(p)(\gamma) = \pi_s(p)(\gamma) + s(\gamma) \, mod\, 2 = p(\gamma) + 2 \cdot s(\gamma) \, mod\, 2 = p(\gamma)$.
(iii) Sei $\gamma \in \mathsf{dom}(p)$. $\pi_{\pi_s(t)}(p)(\gamma) = p(\gamma) + \pi_s(t)(p) \, mod\, 2 = p(\gamma) + s(\gamma) + t(\gamma) \, mod\, 2 = \pi_t(p)(\gamma) + s(\gamma) \, mod\, 2 = (\pi_s \circ \pi_t)(p)(\gamma)$.
(iv) Mit (ii) und (iii) gilt $(\pi_s \circ \pi_t)^2 = \pi^2_{\pi_s(t)} = \mathsf{id}_{\leq\mu 2}$ und damit $\pi_s \circ \pi_t = \pi_t^{-1} \circ \pi_s^{-1} = \pi_t \circ \pi_s$. □

Für $\lambda \in \mathsf{Lim}$ können wir jeden kofinalen Zweig b von ${}^{<\lambda}2$ durch die Abbildung $b \mapsto \bigcup b$ eindeutig mit einem Element von ${}^{\lambda}2$ identifizieren. Für einen Teilbaum T von ${}^{<\lambda}2$ sei

$$[\mathsf{T}]_\lambda := \{\, s \in {}^{\lambda}2 \mid s \upharpoonright \alpha \in \mathsf{T} \text{ für alle } \alpha < \lambda \,\}$$

die Menge der eindeutigen Fortsetzungen von kofinalen Zweigen von T. Wir sagen, $\mathrm{A} \subseteq [\mathsf{T}]_\lambda$ überdeckt T, falls für jedes $p \in \mathsf{T}$ ein $s \in \mathrm{A}$ mit $p \subseteq s$

existiert.

Ist T ein Teilbaum von ${}^{<\alpha}2$ für eine Ordinalzahl $\alpha < \kappa$, so erfüllt T die zweite und die letzte Bedingung für κ-normale α-Bäume. Sind für jedes $s \in \mathsf{T}$ mit $|s|_\mathsf{T} + 1 < \alpha$ auch die beiden unmittelbaren Nachfolger von s aus ${}^{<\alpha}2$ Elemente von T, so erfüllt T die dritte Bedingung für κ-normale α-Bäume und ist 2-spaltend.

Wir werden für $\gamma < \kappa$ induktiv Objektbäume T_γ und für $1 \leq \delta < \kappa$ Kontrollbäume C_δ der Höhe κ^+ konstruieren. Die Objektbäume werden rigide und paarweise nicht-isomorph sein und die Sequenz von Objekten in $(\star)_\kappa^{\mathsf{Tree}}$ bilden. Die Kontrollbäume werden κ^+-Suslin-Bäume sein und in jeder C_δ^{op}-generischen Erweiterung gilt $\mathsf{T}_0 \cong \mathsf{T}_\delta$. Teilordnungen von Produkten der C_δ^{op} bilden dann die partiellen Ordnungen mit den in $(\star)_\kappa^{\mathsf{Tree}}$ geforderten Eigenschaften.

Der Isomorphismus zwischen T_0 und T_δ soll dabei von der Form π_b sein, wobei b ein kofinaler Zweig von C_δ ist, der in der C_δ^{op}-generischen Erweiterung hinzugefügt wurde. Um dies zu erreichen, sollen die Einschränkungen $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma \upharpoonright \alpha)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta \upharpoonright \alpha)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ der konstruierten Bäume auf jede Stufe $\alpha < \kappa^+$ die folgende Eigenschaft erfüllen.

5.2.3 Definition: Sei κ eine Kardinalzahl.
Wir sagen, ein Paar $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\alpha)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\alpha)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ von Sequenzen von Bäumen erfüllt die Bedingung $(\times)_\alpha^\kappa$ für $\alpha < \kappa^+$, falls für alle $\gamma < \kappa$ und $1 \leq \delta < \kappa$ gilt:

(1) T_γ^α, C_δ^α sind 2-spaltende κ^+-normale α-Teilbäume von ${}^{<\alpha}2$.
(2) T_γ^α, C_δ^α sind $< \kappa$-abgeschlossen.
(3) Ist $\mu < \alpha$ und $s \in \mathsf{C}_\delta^\alpha(\mu)$, so ist

$$\pi_s \upharpoonright (\mathsf{T}_0^\alpha \upharpoonright (\mu+1)) \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0^\alpha \upharpoonright (\mu+1), \mathsf{T}_\delta^\alpha \upharpoonright (\mu+1)).$$

Aus dieser Eigenschaft gewinnen wir dann die gewünschten Isomorphismen zwischen den Objektbäumen.

5.2.4 Lemma: Sei κ eine Kardinalzahl und $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ ein Paar von Sequenzen von Bäumen der Höhe κ^+, so dass $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma \upharpoonright \alpha)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta \upharpoonright \alpha)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ für jedes $\alpha < \kappa^+$ die Bedingung $(\times)_\alpha^\kappa$ erfüllt.
Ist dann $1 \leq \delta < \kappa$ und $s \in [\mathsf{C}_\delta]_{\kappa^+}$, so gilt

$$\pi_s \upharpoonright \mathsf{T}_0 \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_\delta).$$

Beweis. Wegen $\pi_s \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Tree}}({}^{\leq\kappa^+}2)$ ist nur $\pi_s{}'' \,\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}_\delta$ zu zeigen. Für $p \in \mathsf{T}$ existiert dann ein $\mu < \kappa^+$ mit $p \in \mathsf{T} \restriction (\mu+1)$. Dann ist $s \restriction \mu \in \mathsf{C}_\delta(\mu)$ und aus der Voraussetzung folgt $\pi_s(p) = \pi_{s\restriction\mu}(p) \in \mathsf{T}_\delta \restriction (\mu+1) \subseteq \mathsf{T}_\delta$. Umgekehrt existiert für jedes $q \in \mathsf{T}_\delta \restriction (\mu+1)$ ein $p \in \mathsf{T}_0 \restriction (\mu+1)$ mit $q = \pi_{s\restriction\mu}(p) = \pi_s(p)$. □

Wir wollen nun induktiv Sequenzen von Bäumen mit dieser Eigenschaft konstruieren. Das folgende Lemma zeigt, wie die Konstruktion in den einfachen Fällen durchgeführt wird.

5.2.5 Lemma: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl mit $2^{<\kappa} = \kappa$.

(i) $\langle\, (\,\langle\rangle\,)_{\gamma<\kappa}, (\,\langle\rangle\,)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ erfüllt die Bedingung $(\times)_1^\kappa$.

(ii) Erfüllt $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^{\alpha+1})_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^{\alpha+1})_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ die Begingung $(\times)_{\alpha+1}^\kappa$ und sind $\mathsf{T}_\gamma^* := \{\, p \in {}^{\alpha+1}2 \,|\, p \restriction \alpha \in \mathsf{T}_\gamma^{\alpha+1}\,\}$ und $\mathsf{C}_\delta^* := \{\, p \in {}^{\alpha+1}2 \,|\, p \restriction \alpha \in \mathsf{C}_\delta^{\alpha+1}\,\}$ die Mengen der unmittelbaren Nachfolger in ${}^{\alpha+1}2$, so erfüllt

$$\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^{\alpha+1} \cup \mathsf{T}_\gamma^*)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^{\alpha+1} \cup \mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$$

die Bedingung $(\times)_{\alpha+2}^\kappa$.

(iii) Ist $\lambda \in \mathsf{Lim} \cap \kappa^+$ und $(\mathsf{T}_\gamma^\alpha)_{\alpha<\lambda,\gamma<\kappa}$, $(\mathsf{C}_\delta^\alpha)_{\alpha<\lambda,1\leq\delta<\kappa}$ Familien von Bäumen, so dass $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\alpha)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\alpha)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ für jedes $\alpha < \lambda$ die Bedingung $(\times)_\alpha^\kappa$ erfüllt und für $\beta < \alpha < \lambda$ schon $\mathsf{T}_\gamma^\beta \subseteq \mathsf{T}_\gamma^\alpha$ und $\mathsf{C}_\delta^\beta \subseteq \mathsf{C}_\delta^\alpha$ gilt. Dann erfüllt

$$\langle\, (\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathsf{T}_\gamma^\alpha)_{\gamma<\kappa}, (\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathsf{C}_\delta^\alpha)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$$

die Bedingung $(\times)_\lambda^\kappa$.

(iv) Ist $\lambda \in \mathsf{Lim} \cap \kappa^+$ mit $\mathsf{cof}(\lambda) < \kappa$ und erfüllt $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\lambda)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\lambda)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ die Bedingung $(\times)_\lambda^\kappa$, so erfüllt

$$\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\lambda \cup \left[\mathsf{T}_\gamma^\lambda\right]_\lambda)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\lambda \cup \left[\mathsf{C}_\delta^\lambda\right]_\lambda)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$$

die Bedingung $(\times)_{\lambda+1}^\kappa$.

Beweis. (i) Alle drei Bedingungen sind hier trivialerweise erfüllt.
(ii) Der $(\alpha+1)$-Level der neu konstruierten Bäume besteht aus den zwei unmittelbaren Nachfolgern der Elemente aus $\mathsf{T}_\gamma^{\alpha+1}(\alpha)$ und $\mathsf{C}_\delta^{\alpha+1}(\alpha)$ in ${}^{\alpha+1}2$. Nach Voraussetzung gilt dann $\left|\mathsf{T}_\gamma^*\right|, |\mathsf{C}_\delta^*| \leq \kappa$ und die neu konstruierten Bäume sind 2-spaltende κ^+-normale $(\alpha+2)$-Bäume. Nach Voraussetzung sind sie auch $<\kappa$-abgeschlossen. Die Bedingung (3) ist erfüllt, weil $\pi_{s\restriction\alpha}$ für

$s \in \mathsf{C}_\delta^*$ schon ein Isomorphismus von $\mathsf{T}_0^{\alpha+1}$ und $\mathsf{T}_\delta^{\alpha+1}$ ist und π_s die zwei unmittelbaren Nachfolger eines $p \in \mathsf{T}_0^{\alpha+1}(\alpha)$ in T_0^* auf die zwei unmittelbaren Nachfolger von $\pi_{s\restriction\alpha}(p)$ in T_δ^* abbildet.
(iii) Da sich alle Bedingungen nur auf Level $< \lambda$ beziehen, sind sie durch die Voraussetzungen erfüllt.
(iv) Sei $\theta = \mathsf{cof}(\lambda) < \kappa$ und $(a_\mu)_{\mu<\theta}$ eine kofinale Folge in λ. Jedes Element s von $\left[\mathsf{T}_\gamma^\lambda\right]_\lambda$ oder $[\mathsf{C}_\delta]_\lambda$ ist dann eindeutig durch die Sequenz $(s \restriction a_\mu)_{\mu<\theta}$ bestimmt. Da κ regulär ist und $2^{<\kappa} = \kappa$ gilt, folgt aus $\left|\mathsf{T}_\gamma^\lambda(a_\mu)\right|, \left|\mathsf{C}_\delta^\lambda(a_\mu)\right| \leq \kappa$ für $\mu < \theta$, dass es höchstens κ-viele solche Sequenzen gibt. Es gilt also $\left|\left[\mathsf{T}_\gamma^\lambda\right]_\lambda\right|, \left|\left[\mathsf{C}_\delta^\lambda\right]_\lambda\right| \leq \kappa$.
Da jeder kofinale Zweig durch die gegebenen Bäume auf dem λ-ten Level fortgesetzt wird, sind die neu konstruierten Bäume 2-spaltende, $< \kappa$-abgeschlossene κ^+-normale $(\lambda+1)$-Bäume.
Für $s \in \left[\mathsf{C}_\delta^\lambda\right]_\lambda$ ist $\pi_{s\restriction\lambda}$ nach Voraussetzung ein Isomorphismus von T_0^λ und $\mathsf{T}_\delta^\lambda$. Für jeden kofinalen Zweig b durch T_0^λ, der durch $p \in \left[\mathsf{T}_0^\lambda\right]_\lambda$ fortgesetzt wird, ist $\pi_{s\restriction\lambda}{}'' \, b$ ein kofinaler Zweig durch $\mathsf{C}_\delta^\lambda$, der durch $q \in \left[\mathsf{T}_\delta^\lambda\right]_\lambda$ fortgesetzt wird, und es gilt $\pi_s(p) = q$. Damit ist auch die dritte Bedingung erfüllt. $\square$

Es fehlt also noch der Fall $(\times)_{\lambda+1}^\kappa$ mit $\lambda \in \mathsf{Cof}_\kappa$. Hier liegt das Herzstück unserer Konstruktion, da wir durch die Wahl der Fortsetzungen in diesen Schritten den konstruierten Bäumen bestimmte Eigenschaften verleihen können. So werden wir die Fortsetzungen so wählen können, dass sie ungewollte Isomorphismen und große Antiketten ausschließen.

Wir zeigen zunächst, nach welchem Muster wir bei der Konstruktion vorgehen wollen.

5.2.6 Definition: Sei κ eine Kardinalzahl und $(\mathsf{C}_\delta)_{1\leq\delta<\kappa}$ eine Sequenz von Bäumen der Höhe $\lambda+1$ für $\lambda \in \mathsf{Lim}$. Für $\gamma_0, \gamma_1 < \kappa$ nennen wir eine endliche Sequenz $\vec{s} = \langle s_0, \dots, s_n\rangle$ von Elementen von ${}^\lambda 2$ eine Fährte von γ_0 nach γ_1 durch $(\mathsf{C}_\delta(\lambda))_{1\leq\delta<\kappa}$, falls eine Sequenz $\langle\zeta_0, \dots, \zeta_{n+1}\rangle$ von Ordinalzahlen existiert, für die gilt:
· $\zeta_0 = \gamma_0$, $\zeta_{n+1} = \gamma_1$.
· $\zeta_k = 0 \;\Leftrightarrow\; \zeta_{k+1} \neq 0$ für alle $k \leq n$.
· $s_k \in \mathsf{C}_{\max\{\zeta_k, \zeta_{k+1}\}}$ für alle $k \leq n$.
Ist $\vec{s} = \langle s_0, \dots, s_n\rangle$ eine Fährte von γ_0 nach γ_1 durch $(\mathsf{C}_\delta(\lambda))_{1\leq\delta<\kappa}$, so schreiben wir $\pi_{\vec{s}} := \pi_{s_0} \circ \dots \circ \pi_{s_n}$ für den induzierten Automorphismus von ${}^{\leq\lambda}2$.

Aus gegebenen Überdeckungen $(\mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\delta<\kappa}$ der Kontrollbäume $(\mathsf{C}_\delta^\lambda)_{1\leq\delta<\kappa}$ und Γ_{γ_0} des γ_0-ten Objektbaumes $\mathsf{T}_{\gamma_0}^\lambda$ wollen wir Überdeckungen $(\mathsf{T}_\gamma^*)_{\gamma<\kappa}$ der

Objektbäume $(\mathsf{T}_\gamma^\lambda)_{\gamma<\kappa}$ mit $\Gamma_{\gamma_0} \subseteq \mathsf{T}_{\gamma_0}^*$ defininieren, so dass $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\lambda \cup \mathsf{T}_\gamma^*)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\lambda \cup \mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\delta<\kappa} \rangle$ die Bedingung $(\times)_{\lambda+1}^\kappa$ erfüllt.

Existieren solche Überdeckungen, so muss für jedes $\gamma < \kappa$, jedes $p \in \Gamma_{\gamma_0}$ und jede Fährte $\vec{s}$ von γ_0 nach γ durch $(\mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\delta<\kappa}$ das Element $\pi_{\vec{s}}(p)$ wegen der letzten Bedingung von $(\times)_{\lambda+1}^\kappa$ und der Definition der Fährte bereits in T_γ^* liegen.
Diese Überlegung motiviert die nachfolgende Konstruktion der Überdeckungen.

5.2.7 Lemma: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl mit $2^{<\kappa} = \kappa$, $\lambda \in \mathsf{Cof}_\kappa$ und $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\lambda)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\lambda)_{1\leq\delta<\kappa} \rangle$ erfülle die Bedingung $(\times)_\lambda^\kappa$.
Sei $\gamma_0 < \kappa$, Γ_{γ_0} eine Überdeckung von $\mathsf{T}_{\gamma_0}^\lambda$ mit $|\Gamma_{\gamma_0}| \leq \kappa$ und für $1 \leq \delta < \kappa$ sei C_δ^* eine Überdeckung von $\mathsf{C}_\delta^\lambda$ mit $|\mathsf{C}_\delta^*| \leq \kappa$. Definiere für $\gamma < \kappa$

$$\mathsf{T}_\gamma^* := \{\, \pi_{\vec{s}}(q) \,|\, q \in \Gamma_{\gamma_0} \text{ und } \vec{s} \text{ ist eine Fährte von } \gamma_0 \text{ nach } \gamma \text{ durch } (\mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\delta<\kappa} \,\}.$$

Dann erfüllt $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\lambda \cup \mathsf{T}_\gamma^*)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\lambda \cup \mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\delta<\kappa} \rangle$ die Bedingung $(\times)_{\lambda+1}^\kappa$.

Beweis. Für alle $1 \leq \delta < \kappa$ gilt nach Voraussetzung $|\mathsf{C}_\delta^*| \leq \kappa$ und nach Konstruktion ist $\mathsf{C}_\delta^\lambda \cup \mathsf{C}_\delta^*$ wieder ein $<\kappa$-abgeschlossener 2-spaltender κ^+-normaler $(\lambda+1)$-Baum. Außerdem existieren für alle $\gamma < \kappa$ wegen $2^{<\kappa} = \kappa$ höchstens κ viele Fährten von γ_0 nach γ. Mit $|\Gamma_{\gamma_0}| \leq \kappa$ folgt dann $\left|\mathsf{T}_\gamma^*\right| \leq \kappa$.
Für $p \in \mathsf{T}_\gamma^\lambda(\alpha)$ mit $\alpha < \lambda$ und $\gamma < \kappa$ seien $s_0 \in \mathsf{C}_{\gamma_0}^*$ und $s_1 \in \mathsf{C}_\gamma^*$ beliebig gewählt. Da $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\lambda)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\lambda)_{1\leq\delta<\kappa} \rangle$ die Bedingung $(\times)_\lambda^\kappa$ erfüllt, ist $\pi_{\langle\, s_1, s_0 \rangle}(p) = (\pi_{s_1\restriction(\alpha+1)} \circ \pi_{s_0\restriction(\alpha+1)})(p) = (\pi_{s_1\restriction(\alpha+1)} \circ \pi^{-1}_{s_0\restriction(\alpha+1)})(p) \in \mathsf{T}_{\gamma_0}$ und es existiert ein $q \in \Gamma_{\gamma_0}$ mit $\pi_{\langle\, s_1, s_0 \rangle}(p) \leq q$. $\langle\, s_0, s_1 \rangle$ ist eine Fährte von γ_0 nach γ durch $(\mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\kappa}$ und somit gilt $p \leq \pi_{\langle\, s_0, s_1 \rangle}(q) \in \mathsf{T}_\gamma^*$. Damit ist auch $\mathsf{T}_\gamma^\lambda \cup \mathsf{T}_\gamma^*$ ein $<\kappa$-abgeschlossener 2-spaltender κ^+-normaler $(\lambda+1)$-Baum.
Sei nun $t \in \mathsf{C}_\delta^*$ und $\pi_{\vec{s}}(q) \in \mathsf{T}_0^*$, wobei $q \in \Gamma_{\gamma_0}$ gilt und $\vec{s} = \langle s_0, \ldots, s_n \rangle$ eine Fährte von γ_0 nach 0 ist. Dann ist $\langle s_0, \ldots, s_n, t \rangle$ eine Fährte von γ_0 nach γ und mit Lemma 5.2.2,(iv) gilt $\pi_t(\pi_{\vec{s}}(q)) = (\pi_t \circ \pi_{s_0} \circ \cdots \circ \pi_{s_n})(q) = \pi_{\langle s_0, \ldots, s_n, t \rangle}(q) \in \mathsf{T}_\delta^*$. Analog folgert man $\pi_t^{-1}{}'' \; \mathsf{T}_\delta^* = \mathsf{T}_0^\delta$ und $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\lambda \cup \mathsf{T}_\gamma^*)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\lambda \cup \mathsf{C}_\delta^*)_{1\leq\delta<\kappa} \rangle$ erfüllt auch die dritte Bedingung von $(\times)_{\lambda+1}^\kappa$. $\square$

Wir geben zunächst die partiellen Ordnungen an, die im kombinatorischen Prinzip $(\star)_\kappa^{\mathsf{Tree}}$ verwendet werden sollen.

Für eine Familie$(\mathbb{P}_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ von partiellen Ordnungen schreiben wir $\prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathbb{P}_{\mathrm{i}}$ für die Produktordnung mit vollem Support.
Ist $(\mathsf{C}_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ eine Familie von Bäumen und $\emptyset \neq \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}$, so schreiben wir

$$\mathsf{C}_{\mathrm{J}} := \{\, (s_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{J}} \in \prod_{\mathrm{i}\in\mathrm{J}} \mathsf{C}_{\mathrm{i}} \,|\, (\forall \mathrm{i}_0, \mathrm{i}_1 \in \mathrm{J})\ |s_{\mathrm{i}_0}|_{\mathsf{C}_{\mathrm{i}_0}} = |s_{\mathrm{i}_1}|_{\mathsf{C}_{\mathrm{i}_1}} \,\}.$$

Für $\vec{s} \in \mathsf{C}_\mathrm{J}$ setze $|\vec{s}|_{\mathsf{C}_\mathrm{J}} := |s_\mathrm{i}|_{\mathsf{C}_\mathrm{i}}$ für ein beliebiges $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$.
Für $\vec{p}, \vec{q}, \vec{s} \in \mathsf{C}_\mathrm{J}$ mit $\vec{p} \neq \vec{q}$ und $\vec{p}, \vec{q} \leq \vec{s}$ existiert ein $\mathrm{i}_0 \in \mathrm{I}$ mit $p_{\mathrm{i}_0} \neq q_{\mathrm{i}_0}$. Wegen $p_{\mathrm{i}_0}, q_{\mathrm{i}_0} \leq s_{\mathrm{i}_0}$ gilt dann ohne Einschränkung $p_{\mathrm{i}_0} < q_{\mathrm{i}_0}$. Dann ist $|\vec{p}|_{\mathsf{C}_\mathrm{J}} < |\vec{q}|_{\mathsf{C}_\mathrm{J}}$ und aus $p_\mathrm{i}, q_\mathrm{i} \leq s_\mathrm{i}$ folgt $p_\mathrm{i} < q_\mathrm{i} \leq s_\mathrm{i}$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$. Damit gilt $\vec{p} < \vec{q}$ und C_J ist linear unterhalb von $\vec{s}$.
Sei $\mathrm{X} \subseteq pred_{\mathsf{C}_\mathrm{J}}(\vec{s})$. Dann besitzt die Menge $\{\, |\vec{p}|_{\mathsf{C}_\mathrm{J}} \mid \vec{p} \in \mathrm{X} \,\}$ ein $\in$-minimales Element $|\vec{p}|_{\mathsf{C}_\mathrm{J}}$ und $\vec{p}$ ist ein minimales Element von X.
C_J ist damit wieder ein Baum und $|\vec{s}|_{\mathsf{C}_\mathrm{J}}$ ist die Höhe eines Elements in C_J.
Sind alle C_i Teilbäume von ${}^{<\lambda}2$ für $\lambda \in \mathsf{Lim}$ und C_i^* für $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ eine Überdeckung von C_i, so schreiben wir $\mathsf{C}_\mathrm{J}^* := \prod_{\mathrm{i} \in \mathrm{J}} \mathsf{C}_\mathrm{i}^*$ für das Produkt der Überdeckungen mit vollem Support.

Wir zeigen nun, wie wir erreichen wollen, dass $\mathsf{C}_{[\nu,\mu]}$ für alle $1 \leq \nu \leq \mu < \kappa$ ein κ^+-Suslin-Baum ist.

5.2.8 Definition: Sei $\lambda \in \mathsf{Lim}$, $(\mathsf{C}_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ eine Familie von Teilbäumen von ${}^{<\lambda}2$ und für jedes $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ sei C_i^* eine Überdeckung von C_i.
Wir sagen, $(\mathsf{C}_\mathrm{i}^*)_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ versiegelt eine Antikette A in $(\mathsf{C}_\mathrm{I})^{op}$, falls für jedes $\vec{s} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}^*$ ein Element $\vec{a} \in \mathrm{A}$ mit $\vec{a} \leq \vec{s}$ existiert.

5.2.9 Lemma: Sei κ ein reguläre Kardinalzahl und $(\mathsf{C}_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ eine Familie von Teilbäumen von ${}^{<\kappa^+}2$ mit $\kappa^{|\mathrm{I}|} = \kappa$, so dass $\mathsf{C}_\mathrm{i} \restriction \alpha$ für alle $\alpha < \kappa^+$ und $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ ein κ^+-normaler α-Baum ist.
Für eine maximale Antikette A von $(\mathsf{C}_\mathrm{I})^{op}$ definiere

$$\mathrm{B}_\mathrm{A} := \{\, \lambda \in \mathsf{Lim} \cap \kappa^+ \mid \mathrm{A} \cap (\mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda) \text{ ist eine maximale Antikette von } (\mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda)^{op} \,\}.$$

Dann gilt

(i) Existiert für jede Antikette A von $(\mathsf{C}_\mathrm{I})^{op}$ ein $\lambda_\mathrm{A} \in \mathrm{B}_\mathrm{A}$, so dass $\mathrm{A} \cap (\mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda_\mathrm{A})$ durch $(\mathsf{C}_\mathrm{i}(\lambda_\mathrm{A}))_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ versiegelt wird, so ist C_I ein κ^+-Suslin-Baum.

(ii) B_A ist eine club-Teilmenge von κ^+.

Beweis. (i) Sei A eine maximale Antikette von $(\mathsf{C}_\mathrm{I})^{op}$ und λ_A das gegebene Element von B_A. Für jedes $\vec{a}_0 \in \mathrm{A}$ existiert nach Voraussetzung ein kompatibles Element $\vec{p}_{\vec{a}_0} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}(\lambda_\mathrm{A})$. Da $\mathrm{A} \cap (\mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda_\mathrm{A})$ durch $(\mathsf{C}_\mathrm{i}(\lambda_\mathrm{A}))_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ versiegelt wird, existiert ein $\vec{a}_1 \in \mathrm{A} \cap (\mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda_\mathrm{A})$ mit $\vec{a}_1 \leq \vec{p}_{\vec{a}_0}$. Damit sind $\vec{a}_0$ und $\vec{a}_1$ kompatibel und es gilt $\vec{a}_0 = \vec{a}_1 \in \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda_\mathrm{A}$. Die Abbildung $\vec{a} \mapsto \vec{p}_{\vec{a}}$ ist eine Injektion von A nach $\mathsf{C}_\mathrm{I}(\lambda_\mathrm{A})$. Nach Voraussetzung gilt $|\mathsf{C}_\mathrm{i}(\lambda_\mathrm{A})| \leq \kappa$ für alle $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ und damit $|\mathrm{A}| \leq |\mathsf{C}_\mathrm{I}(\lambda_\mathrm{A})| \leq \kappa^{|\mathrm{I}|} = \kappa$.

Nach Voraussetzung besitzt jedes Element von C_{I} mehr als einen unmittelbaren Nachfolger und mit jeder Antikette von $(\mathsf{C}_{\mathrm{I}})^{op}$ besitzt somit auch jeder Zweig von C_{I} eine Kardinalität von höchstens κ.
(ii) Für $\vec{p} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}$ definiere

$$\beta_{\vec{p}} := \min\{\, \mu < \kappa^+ \,|\, (\exists \vec{a} \in \mathrm{A} \cap \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\mu))\ [\vec{a} \leq \vec{p} \vee \vec{p} \leq \vec{a}]\,\} < \kappa^+.$$

Sei $\alpha_0 < \kappa^+$. Definiere rekursiv

$$\alpha_{n+1} := \max\{\alpha_n + 1, \sup\{\, \beta_{\vec{p}} \,|\, \vec{p} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\alpha_n)\,\}\}.$$

Wegen $\kappa^{|\mathrm{I}|} = \kappa$, gilt dann $|\mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\alpha_n)| \leq \kappa$ und damit $\alpha_{n+1} < \kappa^+$. Setze $\alpha^* := \sup\{\, \alpha_n \,|\, n < \omega\,\} \in \mathsf{Lim} \cap \kappa^+$.
Sei $\vec{p} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \alpha^*$. Dann existiert ein $n < \omega$ und ein $\vec{q} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\alpha_n)$ mit $\vec{p} \leq \vec{q}$. Damit existiert ein mit $\vec{q}$ kompatibles $\vec{a} \in \mathrm{A} \cap (\mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \alpha_{n+1})$ und dieses $\vec{a}$ ist dann auch mit $\vec{p}$ kompatibel. Damit ist jedes Element von $\mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \alpha^*$ kompatibel mit einem Element von $\mathrm{A} \cap (\mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \alpha^*)$ und es gilt $\alpha_0 < \alpha^* \in \mathrm{B}_{\mathrm{A}}$.

Sei $\lambda \in \mathsf{Lim}(\mathrm{B}_{\mathrm{A}}) \subseteq \mathsf{Lim}$ und $\vec{p} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \lambda$. Dann existiert ein $\nu < \lambda$ mit $\vec{p} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\nu)$ und ein $\nu < \mu < \lambda$ mit $\mu \in \mathrm{B}_{\mathrm{A}}$. Damit existiert ein $\vec{s} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \mu$ und $\vec{a} \in \mathrm{A}$ mit $\vec{a}, \vec{p} \leq \vec{s}$. Wie oben gilt dann $\lambda \in \mathrm{B}_{\mathrm{A}}$. □

Unser Ziel ist es also, mit Hilfe der $\Diamond_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$-Sequenz die Bäume so zu konstruieren, dass für jede maximale Antikette A von $(\mathsf{C}_{[\nu,\mu]})^{op}$ bereits ein $\lambda \in \mathsf{Cof}_\kappa \cap \mathrm{B}_{\mathrm{A}}$ existiert, für das im $(\lambda+1)$-Schritt der Konstruktion die $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$ so gewählt wurden, dass $\mathrm{A} \cap \mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}$ durch $(\mathsf{C}^\delta_*)_{\nu \leq \delta \leq \mu}$ versiegelt wird. Die $\Diamond_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$-Sequenz wird dabei benutzt, um die Antiketten der noch nicht vollständig konstruierten Bäumen $\mathsf{C}_{[\nu,\mu]}$ zu antizipieren, indem sie die Anfangsstücke $\mathrm{A} \cap \mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}$ dieser Antiketten aufzählt.

Um ungewollte Isomorphismen zwischen den Objektbäumen zu verhindern, wollen wir zunächst den Namen für Isomorphismen in generischen Erweiterungen eine konkrete Gestalt geben. Die folgende Definition erweitert den Begriff des Isomorphismus zum Begriff des potentiellen Isomorphismus.

5.2.10 Definition: Seien T_0 und T_1 Bäume. Wir definieren

$$\mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_1)^{par} := \bigcup\{\, \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{S}_0, \mathsf{S}_1) \,|\, \mathsf{S}_{\mathrm{i}} \text{ ist Teilbaum von } \mathsf{T}_{\mathrm{i}} \text{ für } \mathrm{i} \in 2\,\}.$$

Ist $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung und $p \in \mathbb{P}$, so heißt

$$f \in \mathsf{Mor}_{\mathsf{PO}}(\langle\, pred_{\mathbb{P}}(p), \leq_{\mathbb{P}}\rangle, \langle\, \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_1)^{par}, \supseteq\rangle)$$

ein $\mathbb{P}$-potentieller T_0-T_1-Isomorphismus von p, falls für alle $s \in \mathsf{T}_0$ und $t \in \mathsf{T}_1$ die Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_s^0 &:= \{\, r \in \mathbb{P} \mid p_\perp r \ \vee\ s \in \mathsf{dom}(f(r)) \,\} \\ \mathrm{D}_t^1 &:= \{\, r \in \mathbb{P} \mid p_\perp r \ \vee\ t \in \mathsf{ran}(f(r)) \,\} \end{aligned}$$

dicht in $\mathbb{P}$ sind.
Wir sagen, ein $\mathbb{P}$-potentieller T-Automorphismus f von p ist nicht-trivial, falls die Menge $\{\, q \leq_{\mathbb{P}} p \mid f(q) \neq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}(f(q))} \,\}$ dicht unter p ist.

Den Zusammenhang zu $\mathbb{P}$-Namen für Isomorphismen in generischen Erweiterungen erläutert das nächste Lemma.

5.2.11 Lemma: Sei $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung, T_0, T_1 Bäume, τ ein $\mathbb{P}$-Name und

$$p \Vdash \tau \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\check{\mathsf{T}}_0, \check{\mathsf{T}}_1).$$

für ein $p \in \mathbb{P}$.
(i) Dann definiert

$$f_\tau(q) := \{\, \langle t, s \rangle \mid q \Vdash \tau(\check{s}) = \check{t} \,\}$$

einen $\mathbb{P}$-potentiellen T_0-T_1-Isomorphismus von p.
(ii) Gilt $\mathsf{T}_0 = \mathsf{T}_1$ und $p \Vdash \tau \neq \mathsf{id}_{\check{\mathsf{T}}_0}$, so ist f_τ nicht-trivial.
(iii) Ist f ein $\mathbb{P}$-potentieller T_0-T_1-Isomorphismus von p und H ein $(\mathrm{D}_s^0)_{s\in\mathsf{T}_0}$, $(\mathrm{D}_t^1)_{t\in\mathsf{T}_1}$-generischer Filter in $\mathbb{P}$ mit $p \in \mathrm{H}$, so ist

$$f_{\mathrm{H}} := \bigcup f\,''\,(\mathrm{H} \cap pred_{\mathbb{P}}(p)) \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_1). \tag{5.3}$$

Beweis. (i) Ist $r \leq_{\mathbb{P}} q \leq_{\mathbb{P}} p$ und $\langle t, s \rangle \in f_\tau(q)$, so gilt auch $r \Vdash \tau(\check{s}) = \check{t}$ und damit $f_\tau(q) \subseteq f_\tau(r)$. Wegen $p \Vdash \tau \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\check{\mathsf{T}}_0, \check{\mathsf{T}}_1)$ ist f_τ wohldefiniert und injektiv. Somit ist $f_\tau(q) \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{dom}(f_\tau(q)), \mathsf{ran}(f_\tau(q)))$ für alle $q \leq_{\mathbb{P}} p$.
Ist $q \leq_{\mathbb{P}} p$, so gilt für alle $s \in \mathsf{T}_0$ und $t \in \mathsf{T}_1$

$$q \Vdash (\exists x \in \check{\mathsf{T}}_1)\, \tau(\check{s}) = x \ \wedge\ (\exists y \in \check{\mathsf{T}}_0)\, \tau(y) = \check{t}.$$

Damit existiert ein $r \leq_{\mathbb{P}} q$ mit $s \in \mathsf{dom}(f_\tau(r))$ und $t \in \mathsf{ran}(f_{\tau(r)})$.
(ii) Nach Voraussetzung gilt $p \Vdash (\exists s \in \check{\mathsf{T}}_0)\, \tau(s) \neq s$ und deswegen ist die Menge $\{\, q \leq_{\mathbb{P}} p \mid (\exists s \in \mathsf{T}_0)\, f_\tau(q)(s) \neq s \,\}$ dicht unter p.

(iii) Sei $s \in \mathsf{T}_0$ und $t, t' \in \mathsf{T}_1$ mit $\langle t, s\rangle, \langle t', s\rangle \in \bigcup(f\,''\ \mathrm{H})$. Dann existieren $q, q' \in \mathrm{H} \cap pred_{\mathbb{P}}(p)$ mit $\langle t, s\rangle \in f(q)$ und $\langle s, t'\rangle \in f(q')$. Wegen $q, q' \in \mathrm{H}$ existiert ein $r \leq_{\mathbb{P}} p$ mit $r \leq_{\mathbb{P}} q, q'$. Dann sind $f(q), f(q') \subseteq f(r) \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_1)^{par}$, es gilt $t = t'$ und f_{H} ist eine wohldefinierte Abbildung. Analog zeigt man die Injektivität von f_{H}. Da H $(\mathrm{D}^0_s)_{s\in\mathsf{T}_0}$, $(\mathrm{D}^1_t)_{t\in\mathsf{T}_1}$-generisch ist und $p \in \mathrm{H}$ gilt, folgt $\mathsf{dom}(f_{\mathrm{H}}) = \mathsf{T}_0$ und $\mathsf{ran}(f_{\mathrm{H}}) = \mathsf{T}_1$. □

Die folgende Definition zeigt, mit welchen Mitteln wir ungewollte Isomorphismen der Objektbäume verhindern wollen. Dies soll durch Versiegelung von Isomorphismen zwischen den Anfangsstücken der Bäume erreicht werden.

5.2.12 Definition: Sei $\lambda \in \mathsf{Lim}$, T_0, T_1 Teilbäume von ${}^{<\lambda}2$ der Höhe λ, $\mathbb{P}$ eine partielle Ordnung und f ein $\mathbb{P}$-potentieller T_0-T_1-Isomorphismus von $p \in \mathbb{P}$.
Ist T_0^* eine Überdeckung von T_0, T_1^* eine Überdeckung von T_1 und H ein Filter in $\mathbb{P}$, so sagen wir, dass f durch T_0^*, T_1^* und H versiegelt wird, falls H $(\mathrm{D}^0_s)_{s\in\mathsf{T}}, (\mathrm{D}^1_t)_{t\in\mathsf{T}'}$-generisch ist, $p \in \mathrm{H}$ gilt und ein kofinaler Zweig b von T_0 existiert, so dass für den induzierten Isomorphismus $f_{\mathrm{H}} : \mathsf{T}_0 \longrightarrow \mathsf{T}_1$ aus (5.3) gilt

$$\bigcup b \in \mathsf{T}_0^* \ \wedge\ \bigcup(f_{\mathrm{H}}\,''\ b) \notin \mathsf{T}_1^*.$$

5.2.13 Lemma: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl und T_0, T_1 und $(\mathsf{C}_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}}$ Teilbäume von ${}^{<\kappa^+}2$ mit $\kappa^{|\mathrm{I}|} = \kappa$, so dass $\mathsf{T}_0 \restriction \alpha$, $\mathsf{T}_1 \restriction \alpha$ und $\mathsf{C}_{\mathrm{i}} \restriction \alpha$ für alle $\alpha < \kappa^+$ und $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ κ^+-normale α-Bäume sind.
Ist f dann ein $(\mathsf{C}_{\mathrm{I}})^{op}$-potentieller T_0-T_1-Isomorphismus von $\vec{s} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\alpha)$, so definiere für alle $\alpha < \lambda < \kappa^+$

$$f \restriction \lambda : pred_{(\mathsf{C}_{\mathrm{I}}\restriction\lambda)^{op}}(\vec{s}) \longrightarrow \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0 \restriction \lambda, \mathsf{T}_1 \restriction \lambda)^{par};$$
$$\vec{q} \longmapsto f(\vec{q}) \restriction (\mathsf{dom}(f(\vec{q})) \cap (\mathsf{T}_0 \restriction \lambda))$$

und

$$\mathrm{B}_f := \{\, \lambda \in \mathsf{Lim} \cap \kappa^+ \mid \lambda > \alpha \text{ und } f \restriction \lambda \text{ ist ein } (\mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \lambda)^{op}\text{-potentieller } (\mathsf{T}_0 \restriction \lambda)\text{-}(\mathsf{T}_1 \restriction \lambda)\text{-Isomorphismus von } \vec{s}\,\}$$

Dann gilt

(i) Für $\lambda \in \mathrm{B}_f$ und alle $\vec{s} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\lambda)$ wird $f \restriction \lambda$ nicht durch $\mathsf{T}_0(\lambda)$, $\mathsf{T}_1(\lambda)$ und $pred_{\mathsf{C}_{\mathrm{I}}}(\vec{s})$ versiegelt.

(ii) B_f ist eine club-Teilmenge von κ^+.

Beweis. (i) Angenommen, es existiert ein $\lambda \in \mathrm{B}_f$ und $\vec{s} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}(\lambda)$, so dass $f \restriction \lambda$ durch $\mathsf{T}_0(\lambda)$, $\mathsf{T}_1(\lambda)$ und $pred_{\mathsf{C}_\mathrm{I}}(\vec{s})$ versiegelt wird. Sei b ein kofinaler Zweig durch $\mathsf{T}_0 \restriction \lambda$, der dies bezeugt. Aus der Definition potentieller Isomorphismen folgt die Existenz eines $\vec{t} \geq \vec{s}$ mit $\bigcup b \in \mathsf{dom}(f(\vec{t}))$. Für alle $\vec{p} \in pred_{\mathsf{C}_\mathrm{I}}(\vec{s})$ gilt dann $f(\vec{p}) \subseteq f(\vec{t})$ und damit bildet $f(\vec{t})$ eine Fortsetzung von $f_{pred_{\mathsf{C}_\mathrm{I}}(\vec{s})}$, für die gilt

$$f(\vec{t})(\bigcup b) = \bigcup (f(\vec{t})\,''\, b) = \bigcup (f_{pred_{\mathsf{C}_\mathrm{I}}(\vec{s})}\,''\, b) \notin \mathsf{T}_1(\lambda).$$

Da $f(\vec{t})$ ein partieller Isomorphismus von T_0 und T_1 ist und $\bigcup b \in \mathsf{T}_0(\lambda)$ gilt, ist dies ein Widerspruch.
(ii) Für $\alpha < \kappa^+$, $p \in \mathsf{T}_0(\alpha)$, $q \in \mathsf{T}_1(\alpha)$ und $\vec{t} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}(\alpha)$ definiere

$$\beta^{\vec{t}}_{p,q} := \min\{\, \gamma < \kappa^+ \,|\, (\exists \vec{u} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}(\gamma))\ \big[\vec{u} \geq \vec{t} \wedge p \in \mathsf{dom}(f(u)) \wedge q \in \mathsf{ran}(f(u))\big]\,\}.$$

Dann gilt $\beta^{\vec{t}}_{p,q} < \kappa^+$. Sei nun $\alpha_0 < \kappa^+$. Definiere rekursiv

$$\alpha_{n+1} := \max\{\alpha_n + 1, \sup\{\, \beta^{\vec{t}}_{p,q} \,|\, p \in \mathsf{T}_0(\alpha_n), q \in \mathsf{T}_1(\alpha_n), \vec{t} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}(\alpha_n)\,\}.$$

Wie im Beweis von 5.2.9 gilt dann wegen $|\mathsf{T}_0(\alpha_n)|$, $|\mathsf{T}_1(\alpha_n)|$, $|\mathsf{C}_\mathrm{I}(\alpha_n)| \leq \kappa$ wieder $\alpha_{n+1} < \kappa^+$. Setze $\alpha^* := \sup\{\, \alpha_n \,|\, n < \omega\,\} \in \mathsf{Lim} \cap \kappa^+$.
Sei nun $\vec{t} \in \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \alpha^*$, $p \in \mathsf{T}_0 \restriction \alpha^*$ und $q \in \mathsf{T}_1 \restriction \alpha^*$. Es existieren $n < \omega$, $\vec{u} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}(\alpha_n)$, $p' \in \mathsf{T}_0(\alpha_n)$ und $q' \in \mathsf{T}_1(\alpha_n)$ mit $\vec{t} \leq \vec{u}$, $p \leq p'$ und $q \leq q'$. Nach Konstruktion existiert dann ein $\vec{v} \in \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \alpha_{n+1} \subseteq \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \alpha^*$ mit $p' \in \mathsf{dom}(f(\vec{v}))$, $q' \in \mathsf{ran}(f(\vec{v}))$ und $\vec{v} \geq \vec{u}$. Dann gilt auch $p \in \mathsf{dom}(f(\vec{v}))$ sowie $q \in \mathsf{ran}(f(\vec{v}))$ und $(\mathrm{D}^0_p)_{p \in \mathsf{T}_0 \restriction \alpha^*}$, $(\mathrm{D}^1_q)_{q \in \mathsf{T}_1 \restriction \alpha^*}$ sind dichte Teilmengen von $\mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \alpha^*$. Damit gilt $\alpha_0 < \alpha^* \in \mathrm{B}_f$.

Sei $\lambda \in \mathsf{Lim}(\mathrm{B}_f) \subseteq \mathsf{Lim}$, $\vec{t} \in \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda$, $p \in \mathsf{T}_0 \restriction \lambda$ und $q \in \mathsf{T}_1 \restriction \lambda$. Dann existiert ein $\nu < \lambda$ mit $\vec{t} \in \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \nu$, $p \in \mathsf{T}_0 \restriction \nu$ und $q \in \mathsf{T}_1 \restriction \nu$. Sei $\mu \in \mathrm{B}_f$ mit $\nu < \mu < \lambda$. Für ein $\vec{u} \in \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \mu \subseteq \mathsf{C}_\mathrm{I} \restriction \lambda$ mit $\vec{t} \leq \vec{u}$ gilt dann $p \in \mathsf{dom}(f(\vec{u}))$ sowie $q \in \mathsf{ran}(f(\vec{u}))$. Damit ist $\lambda \in \mathrm{B}_f$. $\square$

5.2.14 Lemma: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl und T, $(\mathsf{C}_\mathrm{i})_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ Teilbäume von ${}^{<\kappa^+}2$ mit $\kappa^{|\mathrm{I}|} = \kappa$, so dass $\mathsf{T} \restriction \alpha$ und $\mathsf{C}_\mathrm{i} \restriction \alpha$ für alle $\alpha < \kappa^+$ und $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ κ^+-normale α-Bäume sind.
Für einen nicht-trivialen $\mathsf{C}_\mathrm{I}^{op}$-potentiellen T-Automorphismus f von $\vec{s} \in \mathsf{C}_\mathrm{I}(\alpha)$ ist

$$\mathrm{B}^*_f := \{\, \lambda \in \mathrm{B}_f \,|\, f \restriction \lambda \text{ ist nicht-trivial}\,\}.$$

eine club-Teilmenge von κ^+.

Beweis. Für $\alpha < \kappa^+$, $p, q \in \mathsf{T}$ und $\vec{t} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\alpha)$ definiere

$$\tilde{\beta}^{\vec{t}}_{p,q} := \min\{\, \gamma < \kappa^+ \mid \gamma \geq \beta^{\vec{t}}_{p,q} \;\wedge\; (\exists \vec{u} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\gamma)) \; \left[\vec{u} \geq \vec{t} \wedge f(\vec{u}) \neq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}(f(\vec{u}))}\right] \,\}$$

und führe für $\alpha_0 < \kappa^+$ die gleiche Konstruktion von α^* wie im Beweis von 5.2.13,(ii) mit $\tilde{\beta}^{\vec{t}}_{p,q}$ anstelle von $\beta^{\vec{t}}_{p,q}$ durch. Dann gilt auch hier $\alpha_0 < \alpha^* \in \mathrm{B}^*_f$.

Sei $\lambda \in \mathsf{Lim}(\mathrm{B}^*_f) \subseteq \mathsf{Lim}(\mathrm{B}_f) \subseteq \mathrm{B}_f$ und $\vec{t} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \lambda$. Dann existiert ein $\nu < \lambda$ mit $\vec{t} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}}(\nu)$ und ein $\mu \in \mathrm{B}^*_f$ mit $\nu < \mu < \lambda$. Für ein $\vec{u} \in \mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \mu \subseteq \mathsf{C}_{\mathrm{I}} \restriction \lambda$ mit $\vec{t} \leq \vec{u}$ gilt dann $f(\vec{u}) \neq \mathsf{id}_{\mathsf{dom}(f(\vec{u}))}$ und $f \restriction \lambda$ ist nicht-trivial. $\square$

Wieder soll die $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$-Sequenz die Anfangsstücke ungewollter potentieller Isomorphismen aufzählen und die Bäume so konstruiert werden, dass jedes solche Anfangsstück bei der Konstruktion versiegelt wurde.

Das folgende Siegel-Lemma stellt sicher, dass in den entsprechenden Schritten der Konstruktion die Überdeckungen Γ_{γ_0} und $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$ so gewählt werden können, dass die daraus resultierenden Überdeckungen die aufgezählten Objekte versiegeln. Wir beweisen das Siegel-Lemma am Ende dieses Abschnittes.

5.2.15 Siegel-Lemma: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl mit $2^{<\kappa} = \kappa$, $\lambda \in \mathsf{Cof}_\kappa$ und $\langle\, (\mathsf{T}^\lambda_\gamma)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}^\lambda_\delta)_{1\leq\delta<\kappa} \rangle$ erfülle die Bedingung $(\times)^\kappa_\lambda$.

(i) Für alle $\gamma_0 < \kappa$ existiert eine Übereckung Γ_{γ_0} von $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$ mit $|\Gamma_{\gamma_0}| \leq \kappa$. Für alle $1 \leq \delta < \kappa$ existiert eine Überdeckung C^*_δ von $\mathsf{C}^\lambda_\delta$ mit $|\mathsf{C}^*_\delta| \leq \kappa$.

(ii) Sind $1 \leq \nu \leq \mu < \kappa$ und A eine maximale Antikette in $(\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]})^{op}$, so können die Überdeckungen $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1\leq\delta<\kappa}$ aus (i) so gewählt werden, dass A durch $(\mathsf{C}^*_\delta)_{\nu\leq\delta\leq\mu}$ versiegelt wird.

(iii) Ist $1 \leq \mu < \kappa$ und f ein nicht-trivialer $(\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]})^{op}$-potentieller $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$-Automorphismus von $\vec{p} \in \mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}$, so können Γ_{γ_0} und $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1\leq\delta<\kappa}$ aus (i) so gewählt werden, dass f für ein $\vec{s} \in \mathsf{C}^*_{[1,\mu]}$ und $\mathsf{T}^*_{\gamma_0}$ wie in Lemma 5.2.7 durch $\mathsf{T}^*_{\gamma_0}$, $\mathsf{T}^*_{\gamma_0}$ und $pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}}(\vec{s})$ versiegelt wird.

(iv) Sind $\gamma_0, \gamma_1 < \kappa$ mit $\gamma_0 \neq \gamma_1$, $1 \leq \nu \leq \mu < \kappa$ mit $\gamma_1 \notin \{0\} \cup [\nu, \mu]$ und f ein $(\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]})^{op}$-potentieller $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$-$\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_1}$-Isomorphismus von $\vec{p} \in \mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}$, so können Γ_{γ_0} und $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1\leq\delta<\kappa}$ aus (i) so gewählt werden, dass f für ein $\vec{s} \in \mathsf{C}^*_{[\nu,\mu]}$ und $\mathsf{T}^*_{\gamma_0}, \mathsf{T}^*_{\gamma_1}$ wie in Lemma 5.2.7 durch $\mathsf{T}^*_{\gamma_0}$, $\mathsf{T}^*_{\gamma_1}$ und $pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}}(\vec{s})$ versiegelt wird.

Bevor wir Satz C mit Hilfe des Siegel-Lemmas beweisen, leiten wir noch zwei Lemmata her.

Um sicherzustellen, dass die verwendeten partiellen Ordnungen keine neuen κ-Folgen von Elementen des Grundmodells hinzufügen, zeigen wir ihre κ-Distributivität, das heißt, jede Familie von κ-vielen dichten, offenen Teilmengen besitzt einen nicht-leeren Schnitt.

5.2.16 Lemma: Sei κ eine Kardinalzahl und C ein κ^+-Suslin-Baum. Dann ist C^{op} κ-distributiv.

Beweis. Sei $(\mathrm{D}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Familie von dichten, offenen Teilmengen von C^{op}. Für $\alpha < \kappa$ setze $\mathrm{A}_\alpha := \{ s \in \mathrm{D}_\alpha \mid s \text{ ist } \leq_{\mathsf{C}} \text{-minimal in } \mathrm{D}_\alpha \}$. Dann ist A_α eine maximale Antikette von C^{op}, denn für kompatible $s, t \in \mathrm{A}_\alpha$ folgt aus der Minimalität beider Elemente $s = t$. Für ein $p \in \mathsf{C}$ existiert ein $s \in \mathrm{D}_\alpha$ mit $p \leq s$ und ein $t \in \mathrm{A}_\alpha$ mit $t \leq s$. Jedes $p \in \mathsf{C}$ ist also zu einem $t \in \mathrm{A}_\alpha$ kompatibel.
Damit gilt $|\mathrm{A}_\alpha| \leq \kappa$ für $\alpha < \kappa$ und es existiert ein $g(\alpha) < \kappa^+$ mit $\mathrm{A}_\alpha \subseteq \mathsf{C} \restriction g(\alpha)$. Für $p \in \mathsf{C}$ mit $|p|_{\mathsf{C}} > g(\alpha)$ existiert dann ein kompatibles $s \in \mathrm{A}_\alpha \subseteq \mathsf{C} \restriction g(\alpha)$. Es folgt $s \leq p \in \mathrm{D}_\alpha$. Für alle $\alpha < \kappa$ gilt dann

$$\bigcup_{g(\alpha)<\mu<\kappa^+} \mathsf{C}(\mu) \subseteq \mathrm{D}_\alpha.$$

Für $\beta^* := \sup\{ g(\alpha) \mid \alpha < \kappa \} < \kappa^+$ ist

$$\bigcap_{\alpha<\kappa} \mathrm{D}_\alpha \supseteq \bigcup_{\beta^*<\mu<\kappa^+} \mathsf{C}(\mu) \neq \emptyset.$$

□

Im Beweis von Satz C wollen wir eine leicht abgewandelte Version der $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$-Hypothese verwenden. Für $\alpha < \kappa^+$ sei dazu

$$H_{\kappa^+}(\alpha) := H_{\kappa^+} \cap V_\alpha.$$

Da *rank(x)* absolut bezüglich transitiver ZF^--Modelle ist und H_{κ^+} wegen der Regularität von κ ein solches transitives ZF^--Modell ist, folgt

$$H_{\kappa^+}(\alpha) = H_{\kappa^+} \cap V_\alpha = (V_\alpha)_{H_{\kappa^+}} \in H_{\kappa^+}$$

und damit $|H_{\kappa^+}(\alpha)| \leq \kappa$ für alle $\alpha < \kappa^+$.

5.2.17 Lemma: Es gelte $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$ und $2^{<\kappa} = \kappa$ für eine Kardinalzahl κ. Dann existiert eine Sequenz $(\mathrm{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{Cof}_\kappa}$ mit $\mathrm{E}_\alpha \subseteq H_{\kappa^+}(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathsf{Cof}_\kappa$, so dass für alle $\mathrm{A} \subseteq H_{\kappa^+}$ die Menge

$$\{\, \alpha \in \mathsf{Cof}_\kappa \,|\, \mathrm{A} \cap H_{\kappa^+}(\alpha) = \mathrm{E}_\alpha \,\}$$

stationär in κ^+ ist.

Beweis. Fixiere eine $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$-Sequenz $(\mathrm{D}_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{Cof}_\kappa}$. Für jede Teilmenge X von κ existiert dann ein $\alpha \in \mathsf{Cof}_\kappa \cap (\kappa, \kappa^+)$ mit $\mathrm{X} = \mathrm{D}_\alpha$ und es folgt $2^\kappa = \kappa^+$. Damit gilt $|H_{\kappa^+}| = 2^{<\kappa^+} = 2^\kappa = \kappa^+$ und es existiert eine Bijektion $g : H_{\kappa^+} \longrightarrow \kappa^+$.

Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{G} := \{\, \alpha < \kappa^+ \,|\, g''\, H_{\kappa^+}(\alpha) = \alpha \,\}$ eine club-Teilmenge von κ^+ ist. Für $x \in H_{\kappa^+} \subseteq V_{\kappa^+}$ und $\alpha < \kappa^+$ definiere

$$\beta_x^\alpha := \min\{\, \gamma < \kappa^+ \,|\, \gamma > \alpha,\ g(x) \in \gamma,\ g^{-1\,''}\, \alpha \subseteq H_{\kappa^+}(\gamma) \,\} < \kappa^+.$$

Für $\alpha_0 < \kappa^+$ definiere rekursiv

$$\alpha_{n+1} := \sup\{\, \beta_x^{\alpha_n} \,|\, x \in H_{\kappa^+}(\alpha_n) \,\}$$

und $\alpha^* := \sup\{\, \alpha_n \,|\, n < \omega \,\} \in \mathsf{Lim}$. Wegen $|H_{\kappa^+}(\alpha)| \leq \kappa$ gilt dann $\alpha_n < \kappa^+$ für alle $n < \omega$ und damit auch $\alpha^* < \kappa^+$.
Für $x \in H_{\kappa^+}(\alpha^*)$ existiert ein $n < \omega$ mit $x \in H_{\kappa^+}(\alpha_n)$. Dann gilt $g(x) \in \beta_x^{\alpha_n} \subseteq \alpha_{n+1} \subseteq \alpha^*$ und damit $g''\, H_{\kappa^+}(\alpha^*) \subseteq \alpha^*$. Umgekehrt gilt für alle $n < \omega$ bereits $g^{-1\,''}\, \alpha_n \subseteq H_{\kappa^+}(\beta_\emptyset^{\alpha_n}) \subseteq H_{\kappa^+}(\alpha_{n+1})$ und somit $g^{-1\,''}\, \alpha^* = \bigcup_{n<\omega} g^{-1\,''}\, \alpha_n \subseteq \bigcup_{n<\omega} H_{\kappa^+}(\alpha_{n+1}) = H_{\kappa^+}(\alpha^*)$. Damit gilt $\alpha_0 < \alpha^* \in \mathrm{G}$ und G ist unbeschränkt in κ^+.
Ist $\lambda \in \mathsf{Lim}(\mathrm{G}) \cap \kappa^+ \subseteq \mathsf{Lim}$, so folgt $g''\, H_{\kappa^+}(\lambda) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{G}\cap\lambda} g''\, H_{\kappa^+}(\alpha) = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{G}\cap\lambda} \alpha = \lambda$ und damit ist G abgeschlossen.

Setze $\mathrm{E}_\alpha := g^{-1\,''}\, \mathrm{D}_\alpha$. Sei A eine Teilmenge von H_{κ^+}. Dann ist mit $\{\, \alpha \in \mathsf{Cof}_\kappa \,|\, (g''\, \mathrm{A}) \cap \alpha = \mathrm{E}_\alpha \,\}$ auch $\mathrm{G}^* := \{\, \alpha \in \mathsf{Cof}_\kappa \cap \mathrm{G} \,|\, (g''\, \mathrm{A}) \cap \alpha = \mathrm{E}_\alpha \,\}$ stationär in κ^+ und für jedes $\alpha \in \mathrm{G}^*$ gilt

$$\mathrm{E}_\alpha = g^{-1\,''}\, \mathrm{D}_\alpha = g^{-1\,''}\, ((g''\, \mathrm{A}) \cap \alpha) = \mathrm{A} \cap H_{\kappa^+}(\alpha).$$

□

Beweis von Satz C mit Lemma 5.2.15. Fixiere eine Sequenz $(\mathrm{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{Cof}_\kappa}$ aus Lemma 5.2.17.

Wir definieren zunächst für alle $\gamma < \kappa$ und $1 \leq \delta < \kappa$ rekursiv aufsteigende Folgen $(\mathsf{T}_\gamma^\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ und $(\mathsf{C}_\delta^\alpha)_{\alpha<\kappa^+}$ von Teilbäumen von ${}^{<\kappa^+}2$, so dass durch 5.2.5 und 5.2.7 gewährleistet ist, dass $\langle\, (\mathsf{T}_\gamma^\alpha)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}_\delta^\alpha)_{1\leq\delta<\kappa}\rangle$ für alle $\alpha < \kappa^+$ die Bedingung $(\times)_\alpha^\kappa$ erfüllt.

$(\alpha = 1)$: Setze $\mathsf{T}_\gamma^0 := \langle\rangle$ für alle $\gamma < \kappa$ und $\mathsf{C}_\delta^0 := \langle\rangle$ für alle $1 \leq \delta < \kappa$.

$(\alpha + 1 \to \alpha + 2)$: Seien T_γ^* beziehungsweise C_δ^* die Mengen der unmittelbaren Nachfolger der Elemente von $\mathsf{T}_\gamma^{\alpha+1}(\alpha)$ beziehungsweise $\mathsf{C}_\delta^{\alpha+1}(\alpha)$ in ${}^{\alpha+1}2$. Setze $\mathsf{T}_\gamma^{\alpha+2} := \mathsf{T}_\gamma^{\alpha+1} \cup \mathsf{T}_\gamma^*$ und $\mathsf{C}_\delta^{\alpha+2} := \mathsf{C}_\delta^{\alpha+1} \cup \mathsf{C}_\delta^*$.

$\mathsf{Lim}(\lambda)$: Setze $\mathsf{T}_\gamma^\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathsf{T}_\gamma^\alpha$ und $\mathsf{C}_\delta^\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathsf{C}_\delta^\alpha$.

$\lambda + 1$ mit $\mathsf{cof}(\lambda) < \kappa$: Setze $\mathsf{T}_\gamma^{\lambda+1} := \mathsf{T}_\gamma^\lambda \cup \left[\mathsf{T}_\delta^\lambda\right]_\lambda$ und $\mathsf{C}_\delta^{\lambda+1} := \mathsf{C}_\delta^\lambda \cup \left[\mathsf{C}_\delta^\lambda\right]_\lambda$.

$\lambda + 1$ mit $\mathsf{cof}(\lambda) = \kappa$: In diesem Schritt führen wir die Konstruktion mit Hilfe von Lemma 5.2.7 durch. Dabei unterscheiden wir vier Fälle, abhängig davon, welchen Wert die $\diamondsuit_{\kappa^+}(\mathsf{Cof}_\kappa)$-Sequenz $(\mathrm{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{Cof}_\kappa}$ an der Stelle λ annimmt.

1.Fall: Es existieren $1 \leq \nu \leq \mu < \lambda$ und eine maximale Antikette A von $(\mathsf{C}_{[\nu,\mu]}^\lambda)^{op}$ mit

$$\mathrm{E}_\lambda = \{\, \langle 1, \nu, \mu, \vec{a}\rangle \mid \vec{a} \in \mathrm{A}\,\}.$$

Konstruiere $\mathsf{T}_\gamma^{\lambda+1}$ und $\mathsf{C}_\delta^{\lambda+1}$ wie in der zweiten Aussage des Siegel-Lemmas.

2.Fall: Es existiert $\gamma_0 < \lambda$, $1 \leq \mu < \lambda$, $\vec{s} \in \mathsf{C}_{[1,\mu]}^\lambda$ und ein nicht-trivialer $(\mathsf{C}_{[1,\mu]}^\lambda)^{op}$-potentieller $\mathsf{T}_{\gamma_0}^\lambda$-Automorphismus f von $\vec{s}$ mit

$$\mathrm{E}_\lambda = \{\, \langle 2, \gamma_0, \mu, \vec{s}, \vec{t}, p, q\rangle \mid \vec{t} \in \mathsf{C}_{[1,\mu]}^\lambda,\ f(\vec{t})(p) = q\,\}.$$

Konstruiere $\mathsf{T}_\gamma^{\lambda+1}$ und $\mathsf{C}_\delta^{\lambda+1}$ wie in der dritten Aussage des Siegel-Lemmas.

3.Fall: Es existieren $\gamma_0, \gamma_1 < \lambda$ mit $\gamma_0 \neq \gamma_1$, $1 \leq \nu \leq \mu < \lambda$ mit $\gamma_1 \notin \{0\} \cup [\nu, \mu]$, $\vec{s} \in \mathsf{C}_{[\nu,\mu]}^\lambda$ und ein $(\mathsf{C}_{[\nu,\mu]}^\lambda)^{op}$-potentieller $\mathsf{T}_{\gamma_0}^\lambda$-$\mathsf{T}_{\gamma_1}^\lambda$-Isomorphismus f von $\vec{s}$ mit

$$\mathrm{E}_\lambda = \{\, \langle 3, \gamma_0, \gamma_1, \nu, \mu, \vec{s}, \vec{t}, p, q\rangle \mid \vec{t} \in \mathsf{C}_{[\nu,\mu]}^\lambda,\ f(\vec{t})(p) = q\,\}.$$

Konstruiere $\mathsf{T}_\gamma^{\lambda+1}$ und $\mathsf{C}_\delta^{\lambda+1}$ wie in der vierten Aussage des Siegel-Lemmas.

4.Fall: Tritt keiner der ersten drei Fälle ein, so konstruiere $\mathsf{T}_\gamma^{\lambda+1}$ und $\mathsf{C}_\delta^{\lambda+1}$ wie in der ersten Aussage des Siegel-Lemmas.

Abschließend definieren wir $\mathsf{T}_\gamma := \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathsf{T}^\alpha_\gamma$ für $\gamma < \kappa$, $\mathsf{C}_\delta := \bigcup_{\alpha<\kappa^+} \mathsf{C}^\alpha_\delta$ für $1 \le \delta < \kappa$ und $\mathbb{P}^\nu_\mu := (\mathsf{C}_{[\nu,\mu]})^{op}$ für $1 \le \nu \le \mu < \kappa$.
Wir werden nun schrittweise zeigen, dass $(\mathsf{T}_\gamma)_{\gamma<\kappa}$ und $(\mathbb{P}^\nu_\mu)_{1\le\nu\le\mu<\kappa}$ Zeugen für $(\star)^{\mathsf{Tree}}_\kappa$ sind.

***1. Schritt**: Für alle $1 \le \nu \le \mu < \kappa$ fügt $\mathbb{P}^\nu_\mu$ keine neuen κ-Sequenzen von Elementen des Grundmodells hinzu und erhält Kardinalitäten und Kofinalitäten.*
Es genügt, mit Hilfe von Lemma 5.2.9,(i) zu zeigen, dass $\mathsf{C}_{[\nu,\mu]}$ ein κ^+-Suslin-Baum ist, denn dann besitzt $\mathbb{P}^\nu_\mu$ die $< \kappa^+$-C.C. und ist κ-distributiv.

Sei A eine maximale Antikette von $(\mathsf{C}_{[\nu,\mu]})^{op}$. Setze

$$\mathrm{A}' := \{ \langle 1, \nu, \mu, \vec{a} \rangle \mid \vec{a} \in \mathrm{A} \} \subseteq H_{\kappa^+}.$$

Nach Lemma 5.2.9,(ii) ist $\mathrm{B}_\mathrm{A} \cap (\mu, \kappa^+)$ eine club-Teilmenge von κ^+. Es existiert also ein

$$\lambda_\mathrm{A} \in \mathrm{B}_\mathrm{A} \cap (\mu, \kappa^+) \cap \{ \eta \in \mathsf{Cof}_\kappa \mid \mathrm{A}' \cap H_{\kappa^+}(\eta) = \mathrm{E}_\eta \}.$$

Für dieses λ_A gilt dann

$$\mathrm{E}_{\lambda_\mathrm{A}} = \{ \langle 1, \nu, \mu, \vec{a} \rangle \mid \vec{a} \in \mathrm{A} \cap H_{\kappa^+}(\lambda_\mathrm{A}) \} = \{ \langle 1, \nu, \mu, \vec{a} \rangle \mid \vec{a} \in \mathrm{A} \cap \mathsf{C}^{\lambda_\mathrm{A}}_{[\nu,\mu]} \},$$

weil für alle $\eta \in \mathsf{Lim} \cap \kappa^+$ mit $\nu, \mu < \eta$ schon ${}^{<\kappa^+}2 \cap H_{\kappa^+}(\eta) = {}^{<\eta}2$ und damit $\mathsf{C}_{[\nu,\mu]} \cap H_{\kappa^+}(\eta) = \mathsf{C}^\eta_{[\nu,\mu]}$ gilt. Wegen $\lambda_\mathrm{A} \in \mathrm{B}_\mathrm{A}$ ist $\mathrm{A} \cap \mathsf{C}^{\lambda_\mathrm{A}}_{[\nu,\mu]}$ eine maximale Antikette von $\mathsf{C}^{\lambda_\mathrm{A}}_{[\nu,\mu]}$, die nach Konstruktion durch $(\mathsf{C}_\delta(\lambda_\mathrm{A}))_{\nu\le\delta\le\mu}$ versiegelt wird.

$\square$

***2. Schritt**: Für $\gamma_0 < \kappa$ ist T_{γ_0} ein rigider Baum und für alle $1 \le \nu \le \mu < \kappa$ gilt $\mathbb{1}_{\mathbb{P}^\nu_\mu} \Vdash \mathsf{Aut}_{\mathsf{Tree}}(\check{\mathsf{T}}_{\gamma_0}) = \{\mathsf{id}_{\check{\mathsf{T}}_{\gamma_0}}\}$.*
Wir zeigen zunächst die zweite Behauptung für $\nu = 1$.
Angenommen, es existiert ein $\vec{s} \in \mathsf{C}_{[1,\mu]}(\alpha)$ und ein $\mathbb{P}^1_\mu$-Name τ mit

$$\vec{s} \Vdash \tau \in \mathsf{Aut}_{\mathsf{Tree}}(\check{\mathsf{T}}_{\gamma_0}) \wedge \tau \neq \mathsf{id}_{\check{\mathsf{T}}_{\gamma_0}}.$$

Sei f_τ der zugehörige nicht-triviale $\mathbb{P}^1_\mu$-potentielle T_{γ_0}-Automorphismus von $\vec{s}$ aus Lemma 5.2.11,(i). Setze

$$\mathrm{F}' := \{ \langle 2, \gamma_0, \mu, \vec{s}, \vec{t}, p, q \rangle \mid \vec{t} \in \mathsf{C}_{[1,\mu]},\ f_\tau(\vec{t})(p) = q \} \subseteq H_{\kappa^+}.$$

Nach Lemma 5.2.14 ist $\mathrm{B}^*_{f_\tau} \cap (\max\{\gamma_0, \mu\}, \kappa^+)$ eine club-Teilmenge von κ^+. Damit existiert ein

$$\lambda \in \mathrm{B}^*_{f_\tau} \cap (\max\{\gamma_0, \mu\}, \kappa^+) \cap \{\, \eta \in \mathsf{Cof}_\kappa \mid \mathrm{F}' \cap H_{\kappa^+}(\eta) = \mathrm{E}_\eta \,\}.$$

Für dieses λ gilt dann wie oben

$$\mathrm{E}_\lambda = \{\, \langle 2, \gamma_0, \mu, \vec{s}, \vec{t}, p, q\rangle \mid \vec{t} \in \mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]},\ (f_\tau \restriction \lambda)(\vec{t})(p) = q \,\}$$

und wegen $\lambda \in \mathrm{B}^*_{f_\tau}$ ist $f_\tau \restriction \lambda$ ein nicht-trivialer $(\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]})^{op}$-potentieller $(\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0})$-Automorphismus von $\vec{s}$. Nach Konstruktion existiert dann $\vec{u} \in \mathsf{C}_{[1,\mu]}(\lambda)$, so dass $f_\tau \restriction \lambda$ durch $\mathsf{T}_{\gamma_0}(\lambda)$, $\mathsf{T}_{\gamma_0}(\lambda)$ und $pred_{\mathsf{C}_{[1,\mu]}}(\vec{u})$ versiegelt wird. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 5.2.13,(i).

Sei nun $1 \leq \nu \leq \mu$ beliebig und $V\,[\mathrm{G}_0]$ eine $\mathbb{P}^\nu_\mu$-generische Erweiterung von V. Dann existiert eine $\mathbb{P}^1_\mu$-generische Erweiterung $V\,[\mathrm{G}]$ von V mit $V\,[\mathrm{G}_0] \subseteq V\,[\mathrm{G}]$. In $V\,[\mathrm{G}]$ sind dann alle T_γ rigide Bäume und diese Eigenschaft ist abwärts-absolut bezüglich transitiver ZFC-Modelle. $\square$

3. ***Schritt****: Für alle* $1 \leq \nu \leq \mu < \kappa$ *gilt*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}^\nu_\mu} \Vdash (\forall \gamma_0, \gamma_1 < \kappa)\ \left[\gamma_0\, R^\nu_\mu\, \gamma_1 \rightarrow \check{\mathsf{T}}_{\gamma_0} \cong \check{\mathsf{T}}_{\gamma_1}\right].$$

Sei $V\,[\mathrm{G}]$ eine $\mathbb{P}^\nu_\mu$-generische Erweiterung von V. In $V\,[\mathrm{G}]$ existiert dann für jedes $\gamma \in [\nu, \mu]$ ein kofinaler Zweig durch C_γ und somit auch ein $s \in [\mathsf{C}_\gamma]_{\kappa^+}$. Mit Lemma 5.2.4 gilt dann $\pi_s \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\mathsf{T}_0, \mathsf{T}_\gamma)$ und damit die Behauptung. $\square$

4. ***Schritt****: Für alle* $1 \leq \nu \leq \mu < \kappa$ *gilt*

$$\mathbb{1}_{\mathbb{P}^\nu_\mu} \Vdash (\forall \gamma_0, \gamma_1 < \kappa)\ \left[\check{\mathsf{T}}_{\gamma_0} \cong \check{\mathsf{T}}_{\gamma_1} \rightarrow \gamma_0\, R^\nu_\mu\, \gamma_1\right].$$

Angenommen, es existiert ein $\vec{s} \in \mathsf{C}_{[\nu,\mu]}(\alpha)$, ein $\mathbb{P}^\nu_\mu$-Name τ und $\gamma_0, \gamma_1 < \kappa$, die nicht in der gleichen R^ν_μ-Äquivalenzklasse liegen, so dass gilt

$$\vec{s} \Vdash \tau \in \mathsf{Iso}_{\mathsf{Tree}}(\check{\mathsf{T}}_{\gamma_0}, \check{\mathsf{T}}_{\gamma_1}).$$

Dann gilt $\gamma_0 \neq \gamma_1$ und ohne Einschränkung kann $\gamma_1 \notin \{0\} \cup [\nu, \mu]$ angenommen werden. Sei f_τ der induzierte $\mathbb{P}^\nu_\mu$-potentielle T_{γ_0}-T_{γ_1}-Isomorphismus von $\vec{s}$ aus Lemma 5.2.11,(i). Setze

$$\mathrm{F}' := \{\, \langle 3, \gamma_0, \gamma_1, \nu, \mu, \vec{s}, \vec{t}, p, q\rangle \mid \vec{t} \in \mathsf{C}_{[\nu,\mu]},\ f_\tau(\vec{t})(p) = q \,\} \subseteq H_{\kappa^+}.$$

Nach Lemma 5.2.13 ist $\mathrm{B}_{f_\tau} \cap (\max\{\gamma_0, \gamma_1, \mu\}, \kappa^+)$ ein club-Teilmenge von κ^+. Damit existiert ein

$$\lambda \in \mathrm{B}_{f_\tau} \cap (\max\{\gamma_0, \gamma_1, \mu\}, \kappa^+) \cap \{\, \eta \in \mathsf{Cof}_\kappa \,|\, \mathrm{F}' \cap H_{\kappa^+}(\eta) = \mathrm{E}_\eta \,\}$$

und wegen $\lambda \in \mathrm{B}_{f_\tau}$ ist $f_\tau \restriction \lambda$ ein $(\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]})^{op}$-potentieller $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$-$\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_1}$-Isomorphismus von $\vec{s}$. Außerdem gilt wie oben

$$\mathrm{E}_\lambda = \{\, \langle 3, \gamma_0, \gamma_1, \nu, \mu, \vec{s}, \vec{t}, p, q \rangle \,|\, \vec{t} \in \mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]},\ (f_\tau \restriction \lambda)(\vec{t})(p) = q \,\}.$$

Nach Konstruktion existiert dann ein $\vec{u} \in \mathsf{C}_{[\nu,\mu]}(\lambda)$, so dass $f_\tau \restriction \lambda$ durch $\mathsf{T}_{\gamma_0}(\lambda)$, $\mathsf{T}_{\gamma_1}(\lambda)$ und $pred_{\mathsf{C}_{[\nu,\mu]}}(\vec{u})$ versiegelt wird. Wieder ergibt dies einen Widerspruch zu Lemma 5.2.13,(i). $\square$

Damit wurde Satz C vollständig aus dem Siegel-Lemma hergeleitet. $\square$

Gegeben sei nun die Situation des Siegel-Lemmas, das heißt für ein $\lambda \in \mathsf{Cof}_\kappa$ haben wir Bäume $\langle\, (\mathsf{T}^\lambda_\gamma)_{\gamma<\kappa}, (\mathsf{C}^\lambda_\delta)_{1\le\delta<\kappa} \rangle$ konstruiert, die die Bedingung $(\times)^\kappa_\lambda$ erfüllen. Wir beschreiben zunächst, von welcher Gestalt die Überdeckungen Γ_{γ_0} und $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1\le\delta<\kappa}$ sein sollen. Fixiere eine kofinale Folge $(k_\beta)_{\beta<\kappa}$ in λ. Definiere eine partielle Ordnung

$$\mathbb{Q} := \prod_{\gamma<\kappa} (\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0})^{op} \ \times \prod_{1\le\delta<\kappa} (\prod_{\gamma<\kappa} (\mathsf{C}^\lambda_\delta)^{op}),$$

wobei die Produkte im ersten und zweiten Faktor $<\kappa$-Support besitzen sollen. Elemente von $\mathbb{Q}$ können als Paare $\langle\, v, \vec{w} \rangle$ aufgefasst werden, wobei $v : \kappa \longrightarrow \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$ eine Abbildung und $\vec{w} = (w_\delta)_{1\le\delta<\kappa}$ mit $w_\delta : \kappa \longrightarrow \mathsf{C}^\lambda_\delta$ eine Sequenz von Abbildung ist, so dass die Menge

$$\mathrm{K}_{\langle\, v,\vec{w} \rangle} := \{\, \langle\, \alpha, \delta \rangle \in \kappa^2 \,|\, [\delta = 0 \wedge v(\alpha) \neq 0] \vee [1 \le \delta < \kappa \wedge w_\delta(\alpha) \neq 0] \,\}$$

Mächtigkeit kleiner κ besitzt.
Für $\langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathbb{Q}$ und $\alpha < \kappa$ soll $v(\alpha)$ ein mögliches Anfangsstück des α-ten Elements der Überdeckung Γ_{γ_0} von $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$ sein und $w_\delta(\alpha)$ ein mögliches Anfangsstück des α-ten Elements der Überdeckung C^*_δ von $\mathsf{C}^\lambda_\delta$. Ein ausreichend generischer Filter in $\mathbb{Q}$ soll festlegen, aus welchen Bedingungen die Überdeckungen konstruiert werden.

Sei H ein Filter in $\mathbb{Q}$. Definiere Zweige von $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$ durch

$$b^{\mathrm{H}}_\alpha := \{\, v(\alpha) \,|\, (\exists \vec{w})\, \langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathrm{H} \,\}$$

für $\alpha < \kappa$, sowie Zweige von $\mathsf{C}_\delta^\lambda$ durch

$$c_{\alpha,\delta}^{\mathrm{H}} := \{\, w_\delta(\alpha) \,|\, (\exists v)\, \langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathrm{H}\,\}$$

für $1 \leq \delta < \kappa$ und $\alpha < \kappa$.

Um aus diesen Zweigen Überdeckungen zu erhalten, muss der Filter H gewisse dichte Mengen schneiden.
Für $\beta < \kappa$ und $p \in \mathsf{T}_{\gamma_0}^\lambda(k_\beta)$ setze

$$\mathrm{D}_{\beta,p}^{\mathrm{I}} := \{\, \langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathbb{Q} \,|\, (\exists \alpha < \kappa)\, p \leq v(\alpha)\,\}$$

und für $1 \leq \delta < \kappa$, $\beta < \kappa$ und $q \in \mathsf{C}_\delta^\lambda(k_\beta)$

$$\mathrm{D}_{\beta,\delta,q}^{\mathrm{II}} := \{\, \langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathbb{Q} \,|\, (\exists \alpha < \kappa)\, q \leq w_\delta(\alpha)\,\}.$$

Für $\alpha, \beta < \kappa$ setze

$$\mathrm{D}_{\alpha,\beta}^{\mathrm{III}} := \{\, \langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathbb{Q} \,|\, |v(\alpha)|_{\mathsf{T}_{\gamma_0}^\lambda} > k_\beta\,\}$$

und für $1 \leq \delta < \kappa$

$$\mathrm{D}_{\alpha,\beta,\delta}^{\mathrm{IV}} := \{\, \langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathbb{Q} \,|\, |w_\delta(\alpha)|_{\mathsf{C}_\delta^\lambda} > k_\beta\,\}.$$

Diese Mengen sind dichte Teilmengen von $\mathbb{Q}$, weil alle auftretenden Bäume κ^+-normale λ-Bäume sind und die Produkte in $\mathbb{Q}$ mit $< \kappa$-Support gebildet wurden.

Das folgende Lemma stellt sicher, dass ein ausreichend generischer Filter H in $\mathbb{Q}$ existiert.

5.2.18 Lemma: Sei κ eine reguläre Kardinalzahl, $\mathbb{P}$ eine $< \kappa$-abgeschlossene partielle Ordnung und $\mathcal{D}$ eine Menge von dichten Teilmengen von $\mathbb{P}$ mit $|\mathcal{D}| = \kappa$. Dann existiert für alle $p \in \mathbb{P}$ ein $\mathcal{D}$-generischer Filter H in $\mathbb{P}$ mit $p \in \mathrm{H}$.

Beweis. Sei $\mathcal{D} = \{\, \mathrm{D}_\alpha \,|\, \alpha < \kappa\,\}$. Definiere rekursiv eine absteigende Sequenz $(p_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von Bedingungen aus $\mathbb{P}$ mit $p_0 := p$. Für $\alpha < \kappa$ sei $p_{\alpha+1} \in \mathrm{D}_\alpha$ mit $p_{\alpha+1} \leq p_\alpha$. Für $\eta \in \mathsf{Lim}$ existiert nach Voraussetzung ein $p_\eta \in \mathbb{P}$ mit $p_\eta \leq p_\alpha$ für alle $\alpha < \eta$.
Dann ist $\mathrm{H} := \{\, q \in \mathbb{P} \,|\, (\exists \alpha < \kappa)\, p_\alpha \leq q\,\}$ ein $\mathcal{D}$-generischer Filter in $\mathbb{P}$ mit $p \in \mathrm{H}$. $\square$

Sei $\eta < \kappa$ und $(\langle v_\gamma, \vec{w}_\gamma \rangle)_{\gamma<\eta}$ eine absteigende Sequenz von Bedingungen aus $\mathbb{Q}$. Da alle auftretenden Bäume nach Voraussetzung $< \kappa$-abgeschlossen sind, existiert für jedes $\alpha < \kappa$ ein $\leq_{\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}}$-minimales $v^*(\alpha) \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$ mit $v_\gamma(\alpha) \leq v^*(\alpha)$ für alle $\gamma < \eta$. Ebenso existiert für $1 \leq \delta < \kappa$ und $\alpha < \kappa$ ein $\leq_{\mathsf{C}^\lambda_\delta}$-minimales $w^*_\delta(\alpha) \in \mathsf{C}^\lambda_\delta$ mit $(w_\gamma)_\delta(\alpha) \leq w^*_\delta(\alpha)$ für alle $\gamma < \eta$. Dann gilt

$$\mathrm{K}_{\langle v^*, \vec{w}^* \rangle} = \bigcup_{\gamma<\eta} \mathrm{K}_{\langle v_\gamma, \vec{w}_\gamma \rangle}$$

und damit $\left|\mathrm{K}_{\langle v^*, \vec{w}^* \rangle}\right| < \kappa$, weil κ eine reguläre Kardinalzahl ist. Es gilt also $\langle v^*, \vec{w}^* \rangle \in \mathbb{Q}$ und $\langle v^*, \vec{w}^* \rangle \leq \langle v_\gamma, \vec{w}_\gamma \rangle$ für alle $\gamma < \eta$. Damit ist $\mathbb{Q}$ eine $< \kappa$-abgeschlossene partielle Ordnung.

Beweis von (i) in 5.2.15. Definiere

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 := \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{I}}_{\beta,p} \mid \beta < \kappa, p \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(k_\beta) \,\} \cup \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{II}}_{\beta,\delta,q} \mid \beta < \kappa, 1 \leq \delta < \kappa, q \in \mathsf{C}^\lambda_\delta(k_\beta) \,\} \\ \cup \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{III}}_{\alpha,\beta} \mid \alpha, \beta < \kappa \,\} \cup \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{IV}}_{\alpha,\beta,\delta} \mid \alpha, \beta < \kappa, 1 \leq \delta < \kappa \,\}.\end{aligned}$$

Da alle vorkommenden Bäume κ^+-normale λ-Bäume sind, haben alle Level eine Kardinalität von höchstens κ und es folgt $|\mathcal{D}_0| \leq \kappa$. Sei H ein $\mathcal{D}_0$-generischer Filter in $\mathbb{Q}$.

Für alle $\alpha < \kappa$ ist dann b^{H}_α ein kofinaler Zweig durch $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$. Für $\mu < \lambda$ existiert ein $\beta < \kappa$ mit $\mu < k_\beta$ und ein $\langle v, \vec{w} \rangle \in \mathrm{H} \cap \mathrm{D}^{\mathrm{III}}_{\alpha,\beta}$. Dann ist $v(\alpha) \in b^{\mathrm{H}}_\alpha$ und $|v(\alpha)|_{\mathsf{T}_{\gamma_0}} > \mu$. Genauso sieht man, dass $c^{\mathrm{H}}_{\alpha,\delta}$ für jedes $1 \leq \delta < \kappa$ und $\alpha < \kappa$ ein kofinaler Zweig durch $\mathsf{C}^\lambda_\delta$ ist.

Definiere

$$\Gamma_{\gamma_0} := \{ \bigcup b^{\mathrm{H}}_\alpha \mid \alpha < \kappa \} \subseteq \left[\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}\right]_\lambda$$

und für $1 \leq \delta < \kappa$

$$\mathsf{C}^*_\delta := \{ \bigcup c^{\mathrm{H}}_{\alpha,\delta} \mid \alpha < \kappa \} \subseteq \left[\mathsf{C}^\lambda_\delta\right]_\lambda .$$

Für $p \in \mathsf{T}_{\gamma_0}$ existiert ein $\beta < \kappa$ und $q \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(k_\beta)$ mit $p \leq q$. Dann existiert ein $\langle v, \vec{w} \rangle \in \mathrm{H} \cap \mathrm{D}^{\mathrm{I}}_{\beta,q}$ bezeugt durch $\alpha < \kappa$. Es folgt

$$p \leq q \leq v(\alpha) \leq \bigcup b^{\mathrm{H}}_\alpha \in \Gamma_{\gamma_0}$$

und Γ_{γ_0} ist eine Überdeckung von $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$ mit $|\Gamma_{\gamma_0}| \leq \kappa$. Genauso sieht man, dass C^*_δ für $1 \leq \delta < \kappa$ eine Überdeckung von $\mathsf{C}^\lambda_\delta$ mit $|\mathsf{C}^*_\delta| \leq \kappa$ bildet. $\square$

Beweis von (ii) in 5.2.15. Sei A eine maximale Antikette in $\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}$. Für eine Abbildung $f : [\nu, \mu] \longrightarrow \kappa$ definiere

$$\mathrm{D}^{\mathrm{V}}_f := \{\, \langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathbb{Q} \mid (\exists \vec{a} \in \mathrm{A})\, \vec{a} \leq (w_\delta(f(\delta)))_{1 \leq \delta < \kappa} \,\}.$$

Sei $\langle\, v, \vec{w} \rangle$ eine Bedingung von $\mathbb{Q}$. Dann existiert wegen $\mathsf{cof}(\lambda) = \kappa$ ein $\eta < \lambda$ mit $|w_\delta(f(\delta))|_{\mathsf{C}^\lambda_\delta} < \eta$ für alle $\nu \leq \delta \leq \mu$. Sei $\vec{p} = (w'_\delta)_{\nu \leq \delta \leq \mu} \in \mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}(\eta)$ mit $w_\delta(f(\delta)) \leq w'_\delta$ für alle $\nu \leq \delta \leq \mu$. Zu $\vec{p}$ existiert ein $\vec{a} \in \mathrm{A}$ und $\vec{q} = (w''_\delta)_{\nu \leq \delta \leq \mu} \in \mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}$ mit $\vec{a}, \vec{p} \leq \vec{q}$. Durch Ersetzen der Komponente $w_\delta(f(\delta))$ durch w''_δ erhält man eine Bedingung aus $\mathrm{D}^{\mathrm{V}}_f$, die $\langle\, v, \vec{w} \rangle$ verstärkt. Damit ist $\mathrm{D}^{\mathrm{V}}_f$ dicht in $\mathbb{Q}$.

Setze $\mathcal{D}_1 := \mathcal{D}_0 \cup \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{V}}_f \mid f \in {}^{[\nu,\mu]}\kappa \,\}$. Wegen $2^{<\kappa} = \kappa$ gilt dann $|\mathcal{D}_1| \leq \kappa$ und es existiert ein $\mathcal{D}_1$-generischer Filter H in $\mathbb{Q}$. Definiere Γ_{γ_0} und $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$ wie oben.

Für $\vec{s} = (s_\delta)_{\nu \leq \delta \leq \mu} \in \mathsf{C}^*_{[\nu,\mu]}$ existiert ein $f \in {}^{[\nu,\mu]}2$ mit $s_\delta = \bigcup c^{\mathrm{H}}_{f(\delta),\delta}$.
Sei $\langle\, v, \vec{w} \rangle \in \mathrm{H} \cap \mathrm{D}^{\mathrm{V}}_f$ bezeugt durch $\vec{a} \in \mathrm{A}$. Dann gilt

$$\vec{a} \leq (w_\delta(f(\delta)))_{\nu \leq \delta \leq \mu} \leq (\bigcup c^{\mathrm{H}}_{f(\delta),\delta})_{\nu \leq \delta \leq \mu} = \vec{s}$$

und A wird durch $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$ versiegelt. □

Vor dem Beweis der letzten beiden Punkte des Siegel-Lemmas müssen wir noch Vokabular entwickeln, um gewisse Eigenschaften von Fährten durch $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$ vor ihrer vollständigen Festlegung durch den Filter H zu approximieren.

Wir nennen ein Paar $\mathsf{t} = \langle\, \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle, \langle \zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1} \rangle \rangle$ endlicher Sequenzen von Ordinalzahlen kleiner als κ eine Anleitung für eine Fährte von γ_0 nach γ_1, falls gilt
· $\zeta_0 = \gamma_0$, $\zeta_{n+1} = \gamma_1$.
· $\zeta_k = 0 \;\Leftrightarrow\; \zeta_{k+1} \neq 0$ für alle $k \leq n$.

Konstruiert man wie oben die Überdeckungen $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$, so soll t ein Repräsentant für die Fährte

$$\mathsf{t}^{\mathrm{H}} := \langle \bigcup c^{\mathrm{H}}_{\alpha_0, \max\{\zeta_0, \zeta_1\}}, \ldots, \bigcup c^{\mathrm{H}}_{\alpha_n, \max\{\zeta_n, \zeta_{n+1}\}} \rangle$$

von γ_0 nach γ_1 durch $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$ sein.
Jede Bedingung $\langle\, v, \vec{w} \rangle$ von $\mathbb{Q}$ liefert partielle Informationen über die spätere

Gestalt von t^{H}. Definiere

$$\vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}} := \min\{\left|w_{\max\{\zeta_0,\zeta_1\}}(\alpha_0)\right|_{\mathsf{C}^\lambda_{\max\{\zeta_0,\zeta_1\}}}, \dots, \left|w_{\max\{\zeta_n,\zeta_{n+1}\}}(\alpha_n)\right|_{\mathsf{C}^\lambda_{\max\{\zeta_n,\zeta_{n+1}\}}}\}$$

und

$$\mathsf{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle} := \langle w_{\max\{\zeta_0,\zeta_1\}}(\alpha_0) \restriction \vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}}, \dots, w_{\max\{\zeta_n,\zeta_{n+1}\}}(\alpha_n) \restriction \vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}}\rangle.$$

Ist $\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathrm{H}$, so gilt für alle $\alpha < \kappa$ mit $|v(\alpha)|_{\mathsf{T}_{\gamma_0}} \leq \vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}}$ bereits

$$\pi_{\mathsf{t}^{\mathrm{H}}}(v(\alpha)) = \pi_{\mathsf{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle}}(v(\alpha)). \tag{5.4}$$

Wir nennen $\langle \zeta_k, \zeta_{k+1}\rangle$ den k-ten Schritt von ζ_k nach ζ_{k+1} in t, $\langle \max\{\zeta_k, \zeta_{k+1}\}, \alpha_k\rangle$ das Koordinatenpaar des k-ten Schrittes in t und $\max\{\zeta_k, \zeta_{k+1}\}$ den Wegpunkt des k-ten Schrittes in t.
Für ein Paar $\langle \rho, \alpha\rangle$ von Ordinalzahlen definieren wir

$$y_{\mathsf{t}}(\rho,\alpha) := |\{\, k \leq n \,|\, \langle \rho, \alpha\rangle = \langle \max\{\zeta_k, \zeta_{k+1}\}, \alpha_k\rangle \,\}| < \omega$$

als die Anzahl der Schritte in t mit Koordinatenpaar $\langle \rho, \alpha\rangle$ und

$$y^*_{\mathsf{t}}(\rho) := \sum_{\alpha<\kappa} y(\rho,\alpha) < \omega \tag{5.5}$$

als die Anzahl der Schritte mit Wegpunkt ρ. Mit Lemma 5.2.2,(ii)+(iv) lässt sich $\pi_{\mathsf{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle}}$ dann als das folgende formale Produkt schreiben

$$\pi_{\mathsf{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle}} = \prod_{\langle \rho,\alpha\rangle\in\kappa^2} (\pi_{w_\rho(\alpha)\restriction\vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}}})^{y_{\mathsf{t}}(\rho,\alpha)\, mod\, 2}. \tag{5.6}$$

Beweis von (iii) in 5.2.15. Sei $1 \leq \mu < \kappa$ und f ein nicht-trivialer $(\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]})^{op}$-potentieller T_{γ_0}-Automorphismus von $\vec{p} = (p_\delta)_{1\leq\delta\leq\mu} \in \mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu,]}$.
Wir wollen zunächst sicherstellen, dass sich f wie in Lemma 5.2.11,(iii) zu einem nicht-trivialen Automorphismus von T_{γ_0} fortsetzen lässt.
Sei $g : [1,\mu] \longrightarrow \kappa$ eine Abbildung. Für $\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathbb{Q}$ mit $|w_\delta(g(\delta))| = |w_{\delta'}(g(\delta'))|$ für alle $1 \leq \delta, \delta' \leq \mu$ definiere $f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle} := f((w_\delta(g(\delta)))_{1\leq\delta\leq\mu})$. Setze

$$\mathrm{D}^{\mathrm{VI}}_{\beta,p,q,g} := \{\, \langle v, \vec{w}\rangle \in \mathbb{Q} \,|\, p \in \mathsf{dom}(f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle}), q \in \mathsf{ran}(f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle}) \,\}$$

für $\beta < \kappa$ und $p, q \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(k_\beta)$ sowie

$$\mathrm{D}^{\mathrm{VII}}_g := \{\, \langle v, \vec{w}\rangle \in \mathbb{Q} \,|\, (\exists \alpha < \kappa)\, f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle}(v(\alpha)) \neq v(\alpha) \,\}.$$

Diese Mengen sind dicht in $\mathbb{Q}$, weil f ein nicht-trivialer potentieller Automorphismus ist und $\mathbb{Q}$ mit $< \kappa$-Support konstruiert wurde.

Um f zu versiegeln, definiere für jede Anleitung t für eine Fährte von γ_0 nach γ_0 und $\alpha, \alpha' < \kappa$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha',g,\mathsf{t}} := \{\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathbb{Q} \mid [\,|v(\alpha)|_{\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}} = |v(\alpha')|_{\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}} \leq \vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}} \wedge f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle}(v(\alpha)) \perp \pi_{\mathsf{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle}}(v(\alpha'))] \\ \vee (\forall \langle v', \vec{w}'\rangle \leq \langle v, \vec{w}\rangle)\,[v'(\alpha) \in \mathsf{dom}(f^g_{\langle v',\vec{q}'\rangle}) \to f^g_{\langle v',\vec{q}'\rangle}(v'(\alpha)) = v'(\alpha)]\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass diese Menge dicht in $\mathbb{Q}$ ist.

Sei zunächst $\alpha \neq \alpha'$. Für $\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathbb{Q}$ sei $\eta < \lambda$ mit $|v(\alpha)|_{\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}}$, $|v(\alpha')|_{\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}}$, $|w_\delta(g(\delta))|_{\mathsf{C}^\lambda_\delta} < \eta$ für alle $1 \leq \delta \leq \mu$. Wähle $v' \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(\eta)$ mit $v(\alpha) \leq v'$ und $\vec{q} = (w'_\delta)_{1\leq\delta\leq\mu} \in \mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}$ mit $|\vec{q}|_{\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}} \geq \eta$, $w_\delta(g(\delta)) \leq w'_\delta$ für $1 \leq \delta \leq \mu$ und $v' \in \mathsf{dom}(f((w'_\delta)_{1\leq\delta\leq\mu}))$. Für $s \in \mathsf{T}_{\gamma_0}(\eta)$ mit $v(\alpha') \leq s$ definiere Verstärkung $u(s)$ von $\langle v, \vec{w}\rangle$ durch Ersetzen von $v(\alpha)$ durch v', $v(\alpha')$ durch s und $w_\delta(g(\delta))$ durch w'_δ .
Dann ist $f^g_{u(s)}(v')$ für alle passenden $s \in \mathsf{T}_{\gamma_0}(\eta)$ das gleiche Element von $\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(\eta)$. Für verschiedene $s \in \mathsf{T}_{\gamma_0}(\eta)$ sind die Werte $\pi_{\mathsf{t}_{u(s)}}(s)$ jedoch paarweise inkompatibel. Damit existiert ein passendes $s \in \mathsf{T}_{\gamma_0}(\eta)$ mit $f^g_{u(s)}(v') \perp \pi_{\mathsf{t}_{u(s)}}(s)$. Dann gilt $u(s) \in \mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha'}$ und $u(s) \leq \langle v, \vec{w}\rangle$.

Sei ab jetzt $\alpha = \alpha'$. Ist $\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathbb{Q} \setminus \mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha}$ eine Bedingung mit $\pi_{\mathsf{t}_{\langle v',\vec{w}'\rangle}} = \mathsf{id}_{\leq \vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}'}2}$ für alle Bedingungen $\langle v', \vec{w}'\rangle$ unterhalb von $\langle v, \vec{w}\rangle$, so existiert ein solches $\langle v', \vec{w}'\rangle$ mit $|v'(\alpha)|_{\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}} \leq \vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}'}$, $v'(\alpha) \in \mathsf{dom}(f^g_{\langle v',\vec{w}'\rangle})$ und

$$f^g_{\langle v',\vec{w}'\rangle}(v'(\alpha)) \neq v'(\alpha) = \pi_{\mathsf{t}_{\langle v',\vec{w}'\rangle}}(v'(\alpha)),$$

weil f nicht-trivial ist. Damit gilt $\langle v', \vec{w}'\rangle \in \mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha}$.

Wir können somit zusätzlich noch annehmen, dass $\pi_{\mathsf{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle}}$ nicht der triviale Automorphismus ist. Wegen (5.6) muss dann ein Koordinatenpaar $\langle \rho_0, \beta_0\rangle$ existieren, für das $y_{\mathsf{t}}(\rho_0, \beta_0)$ nicht durch 2 teilbar ist, das heißt $\langle \rho_0, \beta_0\rangle$ ist das Koordinatenpaar einer ungeraden Anzahl von Schritten in t. Weil t eine Anleitung für eine Fährte von γ_0 nach γ_0 ist, gehört nach Definition für $\rho \in \mathsf{Ord}$ zu jedem Schritt von ρ nach 0 ein Schritt von 0 nach ρ und somit ist $y^*_{\mathsf{t}}(\rho)$ eine gerade Zahl. Wegen (5.5) existiert dann ein weiteres $\beta_1 \in \mathsf{Ord}$ für das $y_{\mathsf{t}}(\rho_0, \beta_1)$ ungerade ist. Ohne Einschränkung sei $\beta_0 \neq g(\rho_0)$.
Sei $\eta < \lambda$, so dass alle Koordinaten von $\langle u, \vec{w}\rangle$ eine Höhe kleiner η haben. Wähle $v' \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(\eta)$ mit $v(\alpha) \leq v'$, $\vec{q} = (w'_\delta)_{1\leq\mu} \in \mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}$ mit $|\vec{q}| \geq \eta$, $w_\delta(g(\delta)) \leq w'_\delta$ für $1 \leq \delta \leq \mu$ und $v' \in \mathsf{dom}(f(\vec{q}))$ sowie $w'_\delta(\beta) \in \mathsf{C}^\lambda_\delta(\eta)$ mit $w_\delta(\beta) \leq w'_\delta(\beta)$

für jedes Koordinatenpaar $\langle \rho, \beta\rangle \neq \langle \rho_0, \beta_0\rangle$ mit $y_{\mathsf{t}}(\rho,\beta) > 0$ und $\beta \neq g(\rho)$.
Für $t \in \mathsf{C}^\lambda_{\rho_0}(\eta)$ mit $t \leq w_{\rho_0}(\beta_0)$ definiere eine Verstärkung $u(t)$ von $\langle v, \vec{w}\rangle$ durch Ersetzen von $v(\alpha)$ durch v', $w_\delta(g(\delta))$ durch w'_δ, $w_\rho(\beta)$ durch $w_\rho(\beta)$ durch $w'_\rho(\alpha)$ und $w_{\rho_0}(\beta_0)$ durch t.
Wegen $\beta_0 \neq g(\rho_0)$ ist $f^g_{u(t)}$ für alle passenden $t \in \mathsf{C}^\lambda_{\rho_0}$ die gleiche Abbildung. Aus der Wahl von $\langle \rho_0, \beta_0\rangle$ und der Formel (5.6) folgt die Existenz einer endlichen Sequenz $\vec{r}$ von Elementen aus ${}^\eta 2$ mit

$$\pi_{\mathsf{t}_{u(t)}} = \pi_t \circ \pi_{\vec{r}}$$

für alle $t \in \mathsf{C}^\lambda_{\rho_0}(\eta)$ mit $t \geq w_{\rho_0}(\beta_0)$. Damit liefern verschiedene Wahlen von t inkompatible Werte von $\pi_{\mathsf{t}_{u(t)}}(v')$. Es existiert ein solches t mit $f^g_{u(t)}(v') \perp \pi_{\mathsf{t}_{u(t)}}(v')$ und $\langle v, \vec{w}\rangle \geq u(t) \in \mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha}$.

Setze

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2 := \mathcal{D}_0 &\cup \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{VI}}_{\beta,p,q,g} \mid \beta < \kappa,\ p, q \in \mathsf{T}_{\gamma_0}(k_\beta),\ g \in {}^{[1,\mu]}\kappa \,\} \cup \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{VII}}_g \mid g \in {}^{[1,\mu]}\kappa \,\} \\ &\cup \{\, \mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha'} \mid \alpha, \alpha' < \kappa,\ g \in {}^{[1,\mu]}\kappa,\ \mathsf{t} \text{ ist Anleitung für eine Fährte von } \gamma_0 \text{ nach } \gamma_0 \,\}\end{aligned}$$

Da κ regulär ist und $2^{<\kappa} = \kappa$ gilt, ist $\kappa^\mu = \kappa$ und es existieren höchstens κ-viele Anleitungen für Fährten von γ_0 nach γ_0. Damit gilt $|\mathcal{D}_2| \leq \kappa$ und es existiert ein $\mathcal{D}_2$-generischer Filter H in $\mathbb{Q}$. Definiere Γ_{γ_0} und $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1\leq\delta<\kappa}$ wie oben.

Wie im Beweis von 5.2.15,(i) existiert für jedes $1 \leq \delta \leq \mu$ ein $g(\delta)$ mit $p_\delta \leq \bigcup b^{\mathrm{H}}_{g(\delta),\delta}$. Setze $\vec{s} := (\bigcup c^{\mathrm{H}}_{g(\delta),\delta})_{1\leq\delta\leq\mu} \geq \vec{p}$. Wir zeigen, dass f durch T_{γ_0}, T_{γ_0} und $pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}}(\vec{s})$ versiegelt wird.

Für $p, q \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}$ existieren $\beta < \kappa$ und $p', q' \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(k_\beta)$ mit $p \leq p'$ und $q \leq q'$. Sei $\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathrm{H} \cap \mathrm{D}^{\mathrm{VI}}_{\beta,p',q',g}$. Dann gilt $\vec{t} := (w_\delta(g(\delta)))_{1\leq\delta\leq\mu} \leq \vec{s}$, $p \in \mathsf{dom}(f(\vec{t}))$ und $q \in \mathsf{ran}(f(\vec{t}))$. $pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}}(\vec{s})$ ist also $(\mathrm{D}^0_p)_{p\in\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}}, (\mathrm{D}^1_q)_{q\in\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}}$-generisch.

Sei $\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathrm{H} \cap \mathrm{D}^{\mathrm{VII}}_g$ bezeugt durch $\alpha < \kappa$. Dann ist b^{H}_α ein Zeuge dafür, dass f durch T_{γ_0}, T_{γ_0} und $pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}}(\vec{s})$ versiegelt wird.
Angenommen, es gilt $\bigcup(f_{pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}}(\vec{s})}{}'' \, b^{\mathrm{H}}_\alpha) \in \mathsf{T}^*_{\gamma_0}$. Dann existiert nach Konstruktion von $\mathsf{T}^*_{\gamma_0}$ eine Fährte $\vec{c} = \langle \bigcup c^{\mathrm{H}}_{\alpha_0,\delta_0}, \ldots, \bigcup c^{\mathrm{H}}_{\alpha_n,\delta_n}\rangle$ von γ_0 nach γ_0 durch $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1\leq\delta<\kappa}$ und $\alpha' < \kappa$ mit

$$\bigcup (f_{pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[1,\mu]}}(\vec{s})}{}'' \, b^{\mathrm{H}}_\alpha) = \bigcup (\pi_{\vec{c}}{}'' \, b^{\mathrm{H}}_{\alpha'}).$$

Ist $\langle\zeta_0,\ldots,\zeta_{n+1}\rangle$ die zu $\vec{c}$ gehörige Sequenz von Ordinalzahlen, so erhält man durch $\mathtt{t} := \langle\,\langle\alpha_0,\ldots,\alpha_n\rangle,\langle\zeta_0,\ldots,\zeta_{n+1}\rangle\rangle$ eine Anleitung für eine Fährte von γ_0 nach γ_0 mit $\mathtt{t}^{\mathrm{H}} = \vec{c}$.
Sei $\langle\, v',\vec{w}'\rangle \in \mathrm{H}\cap \mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha',g,\mathtt{t}}$. Dann existiert ein $\langle\, v'',\vec{w}''\rangle \leq \langle\, v,\vec{w}\rangle,\langle\, v',\vec{w}'\rangle$ mit $v''(\alpha)\in \mathsf{dom}(f^g_{\langle\, v'',\vec{w}''\rangle})$. Wegen $v''(\alpha)\geq v(\alpha)$ gilt

$$f^g_{\langle\, v'',\vec{w}''\rangle}(v''(\alpha)) \geq f^g_{\langle\, v'',\vec{w}''\rangle}(v(\alpha)) = f^g_{\langle\, v,\vec{w}\rangle}(v(\alpha)) \neq v(\alpha)$$

und damit auch $f^g_{\langle\, v'',\vec{w}''\rangle}(v''(\alpha)) \neq v''(\alpha)$.
Nach Definition von $\mathrm{D}^{\mathrm{VIII}}_{\alpha,\alpha',g,\mathtt{t}}$ gilt dann

$$|v'(\alpha)|_{\mathsf{T}^{\lambda}_{\gamma_0}} = |v'(\alpha')|_{\mathsf{T}^{\lambda}_{\gamma_0}} \leq \vartheta^{\mathtt{t}}_{\vec{w}'} \wedge f^g_{\langle\, v',\vec{w}'\rangle}(v'(\alpha))_{\perp}\pi_{\mathtt{t}_{\langle\, v',\vec{w}'\rangle}}(v'(\alpha')).$$

Aus (5.4) folgt

$$\pi_{\mathtt{t}_{\langle\, v',\vec{w}'\rangle}}(v'(\alpha')) = \pi_{\mathtt{t}^{\mathrm{H}}}(v'(\alpha')) = \pi_{\vec{c}}(v'(\alpha')) \leq \bigcup(\pi_{\vec{c}}{}''\, b^{\mathrm{H}}_{\alpha'})$$

und nach Konstruktion des Automorphismus $f_{pred_{\mathsf{C}^{\lambda}_{[1,\mu]}}(\vec{s})}$ gilt

$$f^g_{\langle\, v',\vec{w}'\rangle}(v'(\alpha)) = f_{pred_{\mathsf{C}^{\lambda}_{[1,\mu]}}(\vec{s})}(v'(\alpha)) \leq \bigcup(f_{pred_{\mathsf{C}^{\lambda}_{[1,\mu]}}(\vec{s})}{}''\, b^{\mathrm{H}}_{\alpha}) = \bigcup(\pi_{\vec{c}}{}''\, b^{\mathrm{H}}_{\alpha'}).$$

Damit liegen unter einem Element von $\mathsf{T}^{*}_{\gamma_0}$ zwei inkompatible Elemente von $\mathsf{T}^{\lambda}_{\gamma_0}$ und man erhält einen Widerspruch. Es gilt also

$$\bigcup(f_{pred_{\mathsf{C}^{\lambda}_{[1,\mu]}}(\vec{s})}{}''\, b^{\mathrm{H}}_{\alpha}) \notin \mathsf{T}^{*}_{\gamma_0}$$

und f wird wie gewünscht versiegelt. □

Mit den gleichen Mitteln können wir auch den letzten Punkt des Siegel-Lemmas beweisen.

Beweis von (iv) in 5.2.15. Seien $\gamma_0,\gamma_1<\kappa$ mit $\gamma_0\neq\gamma_1$, $1\leq\nu\leq\mu<\kappa$ mit $\gamma_1\notin\{0\}\cup[\nu,\mu]$ und f ein $(\mathsf{C}^{\lambda}_{[\nu,\mu]})^{op}$-potentieller $\mathsf{T}^{\lambda}_{\gamma_0}$-$\mathsf{T}^{\lambda}_{\gamma_1}$-Isomorphismus von $\vec{p}\in\mathsf{C}^{\lambda}_{[\nu,\mu]}$.

Wie im vorigen Schritt definiere für $g\in{}^{[\nu,\mu]}2$, $\beta<\kappa$, $p\in\mathsf{T}^{\lambda}_{\gamma_0}(k_\beta)$ und $q\in\mathsf{T}^{\lambda}_{\gamma_1}(k_\beta)$

$$\mathrm{D}^{\mathrm{VI}}_{\beta,p,q,g} := \{\,\langle\, v,\vec{w}\rangle\in\mathbb{Q}\,|\, p\in\mathsf{dom}(f^g_{\langle\, v,\vec{w}\rangle}), q\in\mathsf{ran}(f^g_{\langle\, v,\vec{w}\rangle})\,\}.$$

Wieder ist $\mathrm{D}^{\mathrm{VI}}_{\beta,p,q,g}$ dicht in $\mathbb{Q}$.

Um f zu versiegeln definieren wir

$$\mathrm{D}^{\mathrm{IX}}_{\alpha,g,\mathsf{t}} := \{ \langle v, \vec{w} \in \mathbb{Q}\rangle \mid |v(0)|_{\mathsf{T}_{\gamma_0}^\lambda} = |v(\alpha)|_{\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}} \leq \vartheta^{\mathsf{t}}_{\vec{w}} \wedge f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle}(v(0))\bot\pi_{\mathsf{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle}}(v(\alpha)) \}$$

für $\alpha < \kappa$, $g \in {}^{[\nu,\mu]}2$ und eine Anleitung t für eine Fährte von γ_0 nach γ_1. Wir zeigen nun, dass auch $\mathrm{D}^{\mathrm{IX}}_{\alpha,g,\mathsf{t}}$ dicht in $\mathbb{Q}$ ist. Für $\alpha \neq 0$ zeigt man dies wie im letzten Beweis durch Erweiterung aller Komponenten einer Bedingung bis auf die Komponente $v(\alpha)$. Verschiedene Wahlen von Erweiterungen von $v(\alpha)$ führen dann wieder zu inkompatiblen Werten von $\pi_{\mathsf{t}_{\langle v',\vec{w}'\rangle}}(v'(\alpha))$.

Sei im Weiteren $\alpha = 0$. Weil $\mathsf{t} = \langle \langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n\rangle, \langle \zeta_0, \ldots, \zeta_{n+1}\rangle\rangle$ eine Anleitung für eine Fährte von γ_0 nach γ_1 mit $\gamma_1 \notin \{0\}\cup[\nu,\mu]$ ist, gilt $\zeta_0 = \gamma_0$, $\zeta_n = 0$ und $\zeta_{n+1} = \gamma_1$. Vor dem n-ten Schritt von 0 nach γ_1 muss der Wegpunkt γ_1 dann wegen $\zeta_0 \neq \gamma_1$ in einer geraden Anzahl von Schritten auftreten, da zu jedem Schritt von γ_1 nach 0 ein Schritt von 0 nach γ_1 gehört. Damit tritt γ_1 insgesamt als der Wegpunkt von einer ungeraden Anzahl von Schritten auf, das heißt $y^*_{\mathsf{t}}(\gamma_1)$ ist ungerade. Wegen (5.5) existiert dann auch ein $\beta < \kappa$ für das $y_{\mathsf{t}}(\gamma_1, \beta)$ ungerade ist.
Für $\langle v, \vec{w}\rangle \in \mathbb{Q}$ kann dann ein $\eta < \lambda$ wie im vorigen Beweis gefunden werden, so dass für alle $t \in \mathsf{C}^\lambda_{\gamma_1}(\eta)$ oberhalb von $w_{\gamma_1}(\beta)$ Verstärkungen $u(t) = \langle v^t, \vec{w}^t\rangle$ von $\langle v, \vec{w}\rangle$ existieren, die $w^t_{\gamma_1}(\beta) = t$, $v^t(0) \in \mathsf{dom}(f^g_{u(t)})$ und $w^t_\delta(\alpha) = w^{t'}_\delta(\alpha)$ für alle $t, t' \in \mathsf{C}^\lambda_{\gamma_1}(\eta)$ und $\langle \delta, \alpha\rangle \neq \langle \gamma_0, \beta\rangle$ erfüllen.
Wegen $\gamma_1 \notin [\nu,\mu]$ ist $f^g_{u(t)}$ für alle passenden t die gleiche Abbildung.
Außerdem existiert mit Lemma 5.2.2 und (5.6) wieder eine endliche Sequenz $\vec{r}$ von Elementen aus ${}^\eta 2$ mit $\pi_{\mathsf{t}_{u(t)}} = \pi_t \circ \pi_{\vec{r}}$ für alle passenden $t \in \mathsf{C}^\lambda_{\gamma_1}(\eta)$. Wie oben findet man dann ein $u(t) \in \mathrm{D}^{\mathrm{IX}}_{0,g,\mathsf{t}}$ und die Menge ist dicht in $\mathbb{Q}$.

Setze

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3 := \mathcal{D}_0 \cup \{ \mathrm{D}^{\mathrm{VI}}_{\beta,p,q,g} \mid \beta < \kappa,\ p \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}(k_\beta),\ q \in \mathsf{T}^\lambda_{\gamma_1}(k_\beta),\ g \in {}^{[\nu,\mu]}\kappa \} \\ \cup \{ \mathrm{D}^{\mathrm{IX}}_{\alpha,g,\mathsf{t}} \mid \alpha < \kappa,\ g \in {}^{[\nu,\mu]}\kappa,\ \mathsf{t} \text{ ist Anleitung für eine Fährte von } \gamma_0 \text{ nach } \gamma_1 \}.\end{aligned}$$

Wieder gilt $|\mathcal{D}_3| \leq \kappa$ und es existiert ein $\mathcal{D}_3$-generischer Filter H in $\mathbb{Q}$.

Sei $g \in {}^{[\nu,\mu]}\kappa$ mit $\vec{s} := (\bigcup c^{\mathrm{H}}_{g(\delta),\delta})_{\nu\leq\delta\leq\mu} \geq \vec{p}$. Wie im letzten Beweis ist $pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}}(\vec{s})$ dann $(\mathrm{D}^0_p)_{p\in\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}}, (\mathrm{D}^1_q)_{q\in\mathsf{T}^\lambda_{\gamma_0}}$-generisch. Wir zeigen nun abschließend, dass b^{H}_0 ein Zeuge für die Versiegelung von f durch $\mathsf{T}^*_{\gamma_0}$, $\mathsf{T}^*_{\gamma_1}$ und $pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}}(\vec{s})$ ist.

Angenommen $\bigcup(f_{pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}}(\vec{s})}{}'' \ b_0^{\mathrm{H}}) \in \mathsf{T}^*_{\gamma_1}$. Dann existiert eine Fährte $\vec{c} = \langle \bigcup c^{\mathrm{H}}_{\alpha_0,\delta_0}, \dots, \bigcup c^{\mathrm{H}}_{\alpha_n,\delta_n} \rangle$ von γ_0 nach γ_1 durch $(\mathsf{C}^*_\delta)_{1 \leq \delta < \kappa}$ und $\alpha < \kappa$ mit

$$\bigcup(f_{pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}}(\vec{s})}{}'' \ b_0^{\mathrm{H}}) = \bigcup(\pi_{\vec{c}}{}'' \ b_\alpha^{\mathrm{H}}).$$

Ist $\langle \zeta_0, \dots, \zeta_{n+1} \rangle$ die zu $\vec{c}$ gehörige Sequenz von Ordinalzahlen, so erhält man durch $\mathtt{t} := \langle \langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle, \langle \zeta_0, \dots, \zeta_{n+1} \rangle \rangle$ eine Anleitung für eine Fährte von γ_0 nach γ_1 mit $\mathtt{t}^{\mathrm{H}} = \vec{c}$.
Sei $\langle v, \vec{w} \rangle \in \mathrm{H} \cap \mathrm{D}^{\mathrm{IX}}_{\alpha,g,\mathtt{t}}$. Dann gilt wie oben

$$f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle}(v(0)) \perp \pi_{\mathtt{t}_{\langle v,\vec{w}\rangle}}(v(\alpha)) = \pi_{\mathtt{t}^{\mathrm{H}}}(v(\alpha)) = \pi_{\vec{c}}(v(\alpha)) \leq \bigcup(\pi_{\vec{c}}{}'' \ b_\alpha^{\mathrm{H}})$$

sowie

$$f^g_{\langle v,\vec{w}\rangle}(v(0)) = f_{pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}}(\vec{s})}(v(0)) \leq \bigcup(f_{pred_{\mathsf{C}^\lambda_{[\nu,\mu]}}(\vec{s})}{}'' \ b_0^{\mathrm{H}}) = \bigcup(\pi_{\vec{c}}{}'' \ b_\alpha^{\mathrm{H}}).$$

und wir erhalten wieder einen Widerspruch. □

Damit ist das Siegel-Lemma vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[Dev84] Keith J. Devlin. *Constructibility*. Springer-Verlag, New York, 1984.

[FH07] Gunter Fuchs and Joel David Hamkins. Changing the heights of automorphism towers by forcing with Souslin trees over L. 2007.

[FK81] E. Fried and J. Kollár. Automorphism groups of fields. *Universal Algebra (E.T. Schmidt et al.,eds.)*, 24:293–304, 1981.

[Ham98] Joel David Hamkins. Every group has a terminating transfinite automorphism tower. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 126:3223–3226, 1998.

[Hod93] Wilfrid Hodges. *Model Theory*. Cambridge University Press, 1993.

[HT00] Joel David Hamkins and Simon Thomas. Changing the heights of automorphism towers. *Ann. Pure Appl. Logic*, 102(1-2):139–157, 2000.

[Mac98] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[Rob96] Derek J.S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[Tho] Simon Thomas. The Automorphism Tower Problem. unveröffentlicht.

[Tho85] Simon Thomas. The automorphism tower problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 95:166–168, 1985.

[Tho98] Simon Thomas. The automorphism tower problem II. *Israel J. Math.*, 103:93–109, 1998.

[Wae28] Otto Schreier und Bartel Leendert van der Waerden. Die automorphismen der projektiven gruppe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 6, 1928.

Versicherung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Quellen benutzt habe.

Münster, den 15. Januar 2008