Aufgabe 6: Gauß'sches Wellenpaket [10 Punkte, schriftlich]

Als Mittelwert $\langle f(x)\rangle$ einer Funktion $f(x)$ bezüglich einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $\rho(x,\,t)$ definiert man

$$\langle f(x)\rangle \,=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\rho(x,\,t)\,d\,x\ .$$

Die mittlere quadratische Schwankung (Unschärfe) $\Delta\,x$ ist durch $\Delta\,x \,:=\, \sqrt{\langle x^2\rangle \,-\, \langle x\rangle^2}$ definiert. In der Vorlesung haben Sie die Wellenfunktion eines eindimensionalen Wellenpaketes in der Form

$$\psi(x,\,t) \,=\, \frac{\sqrt{\gamma}}{\pi^{1/4}\,\sqrt{2\,|\alpha|}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\left(x\,-\,\frac{\hbar\,k_0}{m}\,t\right)^2}{4\,\alpha}}\,\mathrm{e}^{-i\,k_0\left(x\,-\,\frac{\hbar\,k_0}{2\,m}\,t\right)} \qquad \text{mit} \qquad \alpha \,=\, \frac{\gamma^2}{2} \,+\, i\,\frac{\hbar\,t}{2\,m}$$

kennengelernt. Berechnen Sie für $\rho(x,\,t) \,=\, |\psi(x,\,t)|^2$ die Mittelwerte $\langle x\rangle$ und $\langle x^2\rangle$ sowie die Unschärfe $\Delta\,x$.

Hinweis: Verwenden Sie bei Ihren Rechnungen zweckmäßigerweise die Abkürzungen

$$A \,=\, \frac{\hbar\,k_0}{m}\cdot t \qquad \text{und} \qquad a \,=\, \frac{\mathrm{Re}\,\alpha}{2\,|\alpha|^2}\ .$$

Aufgabe 7: Wahrscheinlichkeitsstromdichte [6 Punkte, schriftlich]

Die quantenmechanische Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens ist durch

$$\rho(\vec{r},\,t) \,=\, |\psi(\vec{r},\,t)|^2$$

gegeben. Berechnen Sie unter Verwendung der Schrödinger-Gleichung und der konjugiert komplexen Schrödinger-Gleichung die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,\rho \,=\, \frac{\partial}{\partial\,t}\,(\psi^*\,\cdot\,\psi)\ .$$

Zeigen Sie auf diese Weise, dass $\rho(\vec{r},\,t)$ der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial\,t}\,\rho(\vec{r},\,t) \,+\, \mathrm{div}\,\vec{\jmath}(\vec{r},\,t) \,=\, 0$$

mit der Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{\jmath}(\vec{r},\,t) \,=\, \frac{\hbar}{2\,m\,i}\,\Big(\psi^*(\vec{r},\,t)\,\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r},\,t) \,-\, \psi(\vec{r},\,t)\,\vec{\nabla}\,\psi^*(\vec{r},\,t)\Big)$$

genügt.

Hinweis: Für zwei differenzierbare Funktionen $f(\vec{r})$ und $g(\vec{r})$ gilt

$$\mathrm{div}\,(f\,\vec{\nabla}\,g) \,=\, \vec{\nabla}\,f\,\cdot\,\vec{\nabla}\,g \,+\, f\,\nabla^2\,g\ .$$

Aufgabe 8: **Wahrscheinlichkeitsstromdichte für ein freies Teilchen** **[4 Punkte, mündlich]**

Berechnen Sie $\vec{j}(\vec{r}, t)$ für ein freies Teilchen (Normierungsvolumen V) mit

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \mathrm{e}^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} .$$

Diskutieren Sie den Unterschied zum klassischen Ergebnis.

Aufgabe 9: **Bestimmung der Diffusionskonstanten der Brown'schen Molekularbewegung** **[10 Punkte, schriftlich]**

Die Brown'sche Molekularbewegung wird als Diffusion von Kügelchen in einer zähen Flüssigkeit aufgrund der Stöße mit Atomen/Molekülen der Flüssigkeit beschrieben. A. Einstein zeigte, dass bei einer statistischen Bewegung, wie der Brown'sche Molekularbewegung, der zurückgelegte mittlere quadratische Weg $\langle x^2 \rangle$ wie folgt mit der Diffusionskonstante D und der Zeit Δt zusammenhängt:

$$\langle x^2 \rangle = 2D\Delta t \tag{1}$$

Berechnen Sie in dieser Aufgabe die Diffusionskonstante D der Brown'schen Molekularbewegung für ein Kügelchen in einer Lösung der Temperatur T und der Viskosität η. Wir nehmen es dabei vereinfacht als eine homogene Kugel mit Radius R an.

Bemerkung: Durch Messung des zurückgelegten mittleren quadratischen Weges $\langle x^2 \rangle$ aufgrund der Brown'schen Molekularbewegung kann die Boltzmann-Konstante k_B bestimmt werden.

Anleitung: Zur Vereinfachung machen wir die Rechnung in einer Dimension. Die Diffusionsgleichung beschreibt die Proportionalität eines Diffusionsstroms j_D zu einem Dichtegradienten $\partial n/\partial x$ mit der Proportionalitätskonstanten D (Diffusionskonstante):

$$j_D = -D\frac{\partial n}{\partial x} \tag{2}$$

Zur Berechung der Diffusionskonstanten D hier Kügelchen mit Radius R und Masse m betrachten wir deren vertikale Bewegung in einem senkrecht stehenden Gefäß, das mit der Flüssigkeit der Temperatur T und Viskosität η gefüllt ist. Wir nehmen dabei an, dass die Dichteverteilung in vertikaler Richtung z durch eine Boltzmann-Verteilung beschrieben werden kann (vgl. barometrische Höhenformel):

$$n(z) = n(0)\exp^{-\tilde{m}gz/k_BT} \tag{3}$$

Die Größe $\tilde{m}$ berücksichtigt dabei, dass die Gewichtskraft durch den Auftrieb in der Flüssigkeit der Dichte ρ vermindert ist.

a) [5P] Bestimmen Sie die Sinkgeschwindigkeit v der Kügelchen aufgrund der durch den Auftrieb verminderten Gravitationskraft. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Sinkgeschwindigkeit der Kügelchen in der Flüssigkeit aufgrund der der Gravitationskraft entgegengerichteten Stokes'schen Reibungskraft F_R konstant ist:

$$F_R = -6\pi\eta R v \tag{4}$$

b) [5P] Die konstante Sinkgeschwindigkeit v erzeugt eine Sinkstromdichte $j_g(z) = vn(z)$, die im Gleichgeschwicht durch einen Diffusionsstrom j_D (s. Gl. (2)) kompensiert wird. Bestimmen Sie durch Gleichsetzen beider Ströme die gesuchte Diffuionskonstante D.