Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 4: Ausgabe: Mittwoch, 17.04.2019, Abgabe: 25.04.2019

Aufgabe 14: Teilchen im eindimensionalen Potentialtopf [10 Punkte, mündlich]

Ein Teilchen mit der Masse m befinde sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le L \\ \\ \infty & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

a) [6P] Berechnen Sie für die Eigenzustände $\varphi_n(x)$ die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p}_x \rangle$ und $\langle \hat{H} \rangle$.

Geben Sie für die Zustände

$$\psi_1(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{E_1}{i\hbar}t}\,\varphi_1(x) \qquad \text{und} \qquad \psi_2(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{E_2}{i\hbar}t}\,\varphi_2(x)$$

die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichten an und skizzieren Sie diese.

b) [4P] Betrachten Sie jetzt das Teilchen im Zustand

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{E_1}{i\hbar}t}\,\varphi_1(x) + \mathrm{e}^{\frac{E_2}{i\hbar}t}\,\varphi_2(x)\right) .$$

Berechnen Sie $|\psi(x,t)|^2$ und den Erwartungswert $\langle \hat{x} \rangle$.

(Drücken Sie dazu E_2 durch E_1 aus und geben Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von E_1 an.)

Hinweis:

$$\int_0^L x \sin\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\sin\left(\frac{m\,\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \dfrac{L^2}{4} & \text{für} \qquad n = m \\[2ex] \dfrac{L^2}{\pi^2}\left(\dfrac{1}{(n+m)^2} - \dfrac{1}{(n-m)^2}\right) & \text{für} \qquad (m+n)\ \text{ungerade} \\[2ex] 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 15: Planck'sches Strahlungsgesetz [5 Punkte, mündlich]

Leiten Sie das Planck'sche Strahlungsgesetz ab.

Laut Planck ist die elektromagnetische Strahlung in einem Hohlraum in festen Energiestufen gequantelt mit

$$E_n(\nu) = n\,h\,\nu\ .$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeit der n-ten Energiestufe ist durch den Boltzmannfaktor

$$\exp\left(-\frac{n\,h\,\nu}{k_B T}\right)$$

gegeben.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit der Anregung der n-ten Energiestufe

$$W_n = \frac{\exp\left(-\frac{n\,h\,\nu}{k_B T}\right)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\,h\,\nu}{k_B T}\right)} \ ,$$

wobei der Nenner die Summe aller Wahrscheinlichkeiten W_n auf 1 normiert.

a) [4P] Berechnen Sie jetzt die mittlere Energie

$$\langle E(\nu) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n\,h\,\nu\,W_n \ .$$

Trick: Substituieren Sie $x = \exp\left(-\frac{h\,\nu}{k_B T}\right)$ und benutzen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \ .$$

b) [1P] Ersetzen Sie im Rayleigh-Jeans-Gesetz die mittlere Energie $k_B T$ (klassisch) durch die hier im Aufgabenteil a) berechnete mittlere Energie $\langle E(\nu) \rangle$.

Frohe
Ostern!