Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 6: Ausgabe: 02.05.2019, Abgabe: 09.05.2019

WWU

Aufgabe 21: Stückweise stetiges Potential **[12 Punkte, schriftlich]**

Ein Elektron bewege sich unter dem Einfluss des Potentials

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad -\infty < x < 0 \\ -V_0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für} \quad a < x < \infty \end{cases}$$

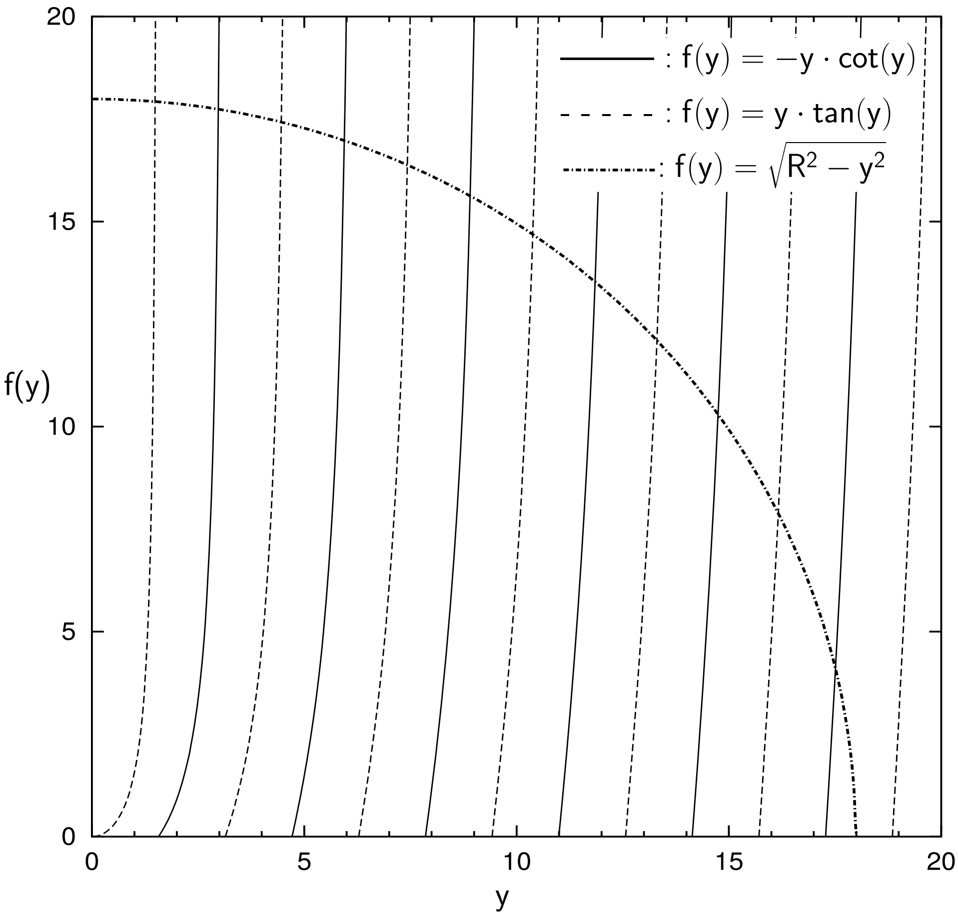
mit $a = 10^{-9}$ m.

a) [7P] Leiten Sie aus der Schrödingergleichung unter Verwendung der Stetigkeitsbedingungen eine Bestimmungsgleichung für die Energiewerte mit $E < 0$ ab.

Wie groß muss V_0 sein, damit mindestens ein gebundener Zustand auftritt?

b) [3P] Bestimmen Sie für $V_0 = 4{,}61$ eV alle möglichen Energiewerte, z. B. durch grafische Lösung der Bestimmungsgleichung.

c) [2P] Vergleichen Sie Ihre Resultate aus a) mit den Ergebnissen des in der Vorlesung behandelten Topfes mit endlich hohen Wänden.



Aufgabe 22: Schrödingergleichung in Fourierdarstellung [5 Punkte, schriftlich]

Die Wellenfunktion $\psi\,(\vec{r},\,t)$ eines Teilchens mit der Masse m wird im Ortsraum durch die Schrödingergleichung

$$i\,\hbar\,\frac{\partial\,\psi\,(\vec{r},\,t)}{\partial\,t} \;=\; \left(-\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\vec{\nabla}^2 \,+\, V\,(\vec{r}\,)\right)\,\psi\,(\vec{r},\,t)$$

bestimmt.

Das Potential $V\,(\vec{r}\,)$ besitze die Fourierdarstellung

$$V\,(\vec{r}\,) \;=\; \frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}}\int \tilde{V}\,(\vec{k})\,\mathrm{e}^{i\,\vec{k}\,\cdot\,\vec{r}}\,d^3\,k\ .$$

Stellen Sie die Wellenfunktion in der Form

$$\psi\,(\vec{r},\,t) \;=\; \frac{1}{(2\,\pi)^{3/2}}\int \varphi\,(\vec{k},\,t)\,\mathrm{e}^{i\,\vec{k}\,\cdot\,\vec{r}}\,d^3\,k$$

dar und berechnen Sie durch Einsetzen in die Schrödingergleichung eine Bestimmungsgleichung für $\varphi\,(\vec{k},\,t)$.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass gilt:

$$\int \mathrm{e}^{i\,(\vec{k}\,-\,\vec{k}\,')\,\cdot\,\vec{r}}\,d^3\,r \;=\; (2\,\pi)^3\,\delta\,(\vec{k}\,-\,\vec{k}\,')\ .$$

Aufgabe 23: Stromdichteoperator [3 Punkte, mündlich]

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte am Ort $\vec{R}$ lässt sich als Erwartungswert des Stromdichteoperators $\hat{\vec{\jmath}}(\vec{R},\,t)$ darstellen. Der Operator ist durch

$$\hat{\vec{\jmath}}(\vec{R}) \;:=\; \frac{\hbar}{2\,m\,i}\,\left(\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\delta\,(\vec{r}\,-\,\vec{R}) \,+\, \delta\,(\vec{r}\,-\,\vec{R})\,\vec{\nabla}_{\vec{r}}\right)$$

gegeben. Dabei geht der Ort $\vec{R}$, an dem die Wahrscheinlichkeitsstromdichte bestimmt werden soll, als „Parameter“ ein.

Zeigen Sie, dass der Erwartungswert

$$\langle\hat{\vec{\jmath}}(\vec{R})\rangle_t = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi^*\,(\vec{r},\,t)\,\hat{\vec{\jmath}}(\vec{R})\,\psi\,(\vec{r},\,t)\,d^3\,r$$

der in Aufgabe 7 behandelten Wahrscheinlichkeitsstromdichte (mit $\vec{R}$ statt $\vec{r}$) entspricht.

Hinweis: Verwenden Sie die Kettenregel, sowie das Integral (folgt aus partieller Integration):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f\,(\vec{r}\,)\left(\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\delta\,(\vec{r}\,-\,\vec{R})\right)d^3\,r \;=\; -\vec{\nabla}_{\vec{R}}\,f\,(\vec{R})\ .$$

Aufgabe 24: Wasserstoffatom **[7 Punkte, schriftlich]**

Untersuchen Sie die Konsequenzen, wenn es das Bohrsche Postulat der Quantelung des Drehimpulses $l = n\hbar$ nicht geben würde. Betrachten Sie dazu ein elektrostatisch gebundenes Elektron, das um den Wasserstoffkern kreist, aber ohne die Quantisierungsbedingung.

a) [4P] *Maximale Bindungsenergie des Wasserstoffatoms*

Benutzen Sie die Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

um die maximale Bindungsenergie $E_{\mathrm{B,max}}$ des Grundzustands abzuschätzen.

Hinweis: Jeder klassischen Bahn können Sie einen Radius r und einen Impuls $p(r)$ zuordnen (die Benutzung der reduzierten Masse μ erlaubt eine Betrachtung einer Einteilchenbewegung). Gehen Sie vereinfacht davon aus, dass die Ortsunschärfe Δx durch den Bahnradius des Elektrons r gegeben ist. Wenn die daraus resultierende Impulsunschärfe Δp größer ist als $p(r)$, dann ist diese Bahn aufgrund der Unschärferelation nicht möglich.

b) [3P] *Synchrotronabstrahlung*

Ein Elektron der Masse m und Ladung e auf einer Kreisbahn mit Kreisfrequenz ω strahlt klassisch Energie über Synchrotronstrahlung ab. Dabei ist die abgestrahlte Leistung

$$\frac{dW}{dt} = P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2e^2}{3m^2c^3}\,\gamma^2\omega^2 p^2$$

wobei γ der relatistische Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

und $p = \gamma m v$ der relativistische Impuls des Elektrons ist.

Schätzen Sie grob die klassische Lebensdauer τ des Wasserstoffatoms ab, indem Sie die Strahlungsleistung P für die niedrigste Bohrsche Bahn $r = a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(\mu\, e^2)$ berechnen und in Beziehung zur kinetischen Energie des Elektrons setzen. Zeigen Sie, dass Sie die relativistische Korrektur ($\gamma > 1$) dabei vernachlässigen können.

Aufgabe 25: Ortsunschärfe und Beugung am Spalt **[3 Punkte, mündlich]**

Eine Materiewelle fliege in x-Richtung durch einen Spalt, der sich in y-Richtung mit der Breite b erstreckt. Nach klassischer Wellenlehre entsteht aufgrund der Beugung ein Interferenzbild. Wir können das auch so interpretieren, dass die Teilchen durch die Beugung am Spalt Impulskomponenten p_y in y-Richtung erhalten.

Berechnen Sie Δp_y aus der Richtung des 1. Interferenzminimums. Berechnen Sie $\Delta y \cdot \Delta p_y$, wobei Sie für die Ortsunschärfe $\Delta y = b$ ansetzen.