Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 7: Ausgabe: 09.05.2019, Abgabe: 16.05.2019

WWU

Aufgabe 26: Potentialstufe **[10 Punkte, schriftlich]**

Ein Teilchen mit der Masse m trifft auf die Potentialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \\ V_0 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

mit der Energie $E < V_0$ von links her auf (V_0: positive Konstante).

a) [3P] Stellen Sie in beiden Potentialbereichen, d. h. für $x < 0$ und $x \geq 0$, die zeitunabhängige Schrödingergleichung auf und geben Sie die Lösungen an. Die Amplitude der Wellenfunktion des einfallenden Teilchens sei 1.

b) [4P] Bestimmen Sie aus den Stetigkeitsbedingungen bei $x = 0$ die Amplitude der reflektierten und der transmittierten Welle. Berechnen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\varphi(x)|^2$.

(*Hinweis*: Stellen Sie dabei die Amplitude der reflektierten Welle als $\mathrm{e}^{i\phi}$ dar.)

Skizzieren Sie $|\varphi(x)|^2$.

c) [3P] Berechnen Sie für beide Potentialbereiche die quantenmechanische Stromdichte $j(x)$ und daraus den Reflexionskoeffizienten R und den Transmissionskoeffizienten T.

Aufgabe 27: Feldemission **[4 Punkte, schriftlich]**

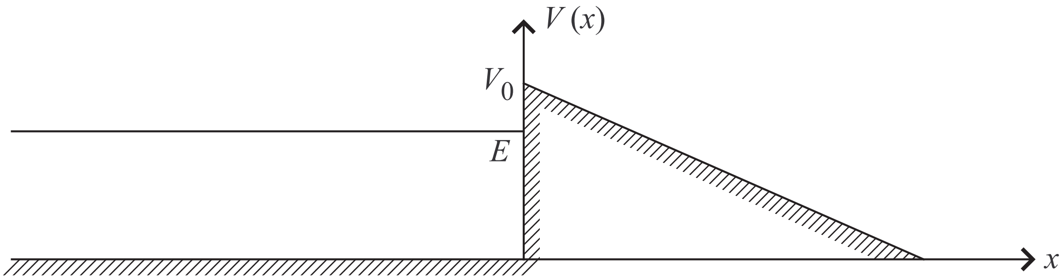
Das Potential in der Nähe einer Metalloberfläche, an der ein elektrisches Feld $\mathcal{E}$ anliegt, lässt sich näherungsweise durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ \\ V_0 - e\,\mathcal{E}\,x & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

beschreiben. Der Transmissionskoeffizient T ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elektron das Metall verlassen kann.

a) [2P] Berechnen Sie T mit Hilfe des Gamow-Faktors.

b) [2P] Ein typischer Wert für die Austrittsarbeit $V_0 - E$ in Metallen ist 4 eV. Wie groß muss die Feldstärke $\mathcal{E}$ sein, damit $T = e^{-1} = \exp(-1)$ beträgt?

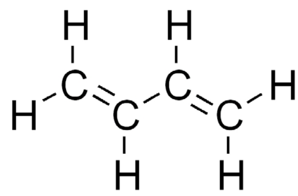


Aufgabe 28: Anwendung des unendlich hohen Potentialtopfs [6 Punkte, mündlich]

In konjugierten Kohlenwasserstoffsystemen treten elektronische Zuständen auf, die über den Raumbereich aller C-Atome ausgedehnt sind (delokalisiertes π-System). Dabei trägt jedes C-Atom ein Elektron zu diesen Zuständen bei. Im Rahmen dieser Aufgabe werden sie näherungsweise im Modell des eindimensionalen, unendlich hohen Potentialkastens beschrieben. (Alle anderen elektronischen Zustände des Systems werden hier nicht betrachtet, so auch die Wasserstoffatome.)

Hinweis: In dem in der Vorlesung behandelten eindimensionalen, unendlich hohen Potentialtopf werden durch N Elektronen die N energetisch tiefsten Zustände besetzt. Beachten Sie, dass in dieser Aufgabe jeder Zustand (aufgrund des Spinfreiheitsgrades) zweifach entartet ist. Dementsprechend wird mit jedem zweiten Elektron ein energetisch höherer Zustand besetzt. Nehmen Sie außerdem an, dass „Übergänge“ zwischen besetzten und unbesetzten Zuständen zur Absorption von Photonen mit der Energie des Abstandes der jeweiligen Zustände führen.

a) [2P] Betrachten Sie zunächst ein Butadienmolekül (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Absorptionswellenlänge (in nm) des energetisch tiefsten Übergangs. Gehen Sie dabei von einem Potentialtopf aus, dessen Breite sich aus der C-C Bindungslänge von 1.39 Å und genährten Bindungswinkeln von 180° bestimmen lässt.



b) [1P] Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der experimentell gemessenen Absorptionswellenlänge von 217 nm. Wiederholen Sie die Rechnung aus a), aber nehmen Sie nun an, dass die Wellenfunktion an beiden Enden des Moleküls um eine halbe C-C Bindungslänge hinausragt.

c) [2P] Leiten Sie anlog zum Vorgehen in b) eine Formel für die entsprechende Absorptionswellenlänge für beliebig lange Ketten mit $2n$ Kohlenstoffatomen (von der Form CH_2=(CH–CH=)$_{n-1}$$CH_2$) her. Berechnen Sie damit die entsprechenden Wellenlängen von Hexatrien ($n = 3$, Literatur 252 nm) und Oktatetraen ($n = 4$, Literatur 304 nm). Diskutieren Sie die Resultate.

d) [1P] Wie ändert sich die Farbe der Moleküle mit der Kettenlänge von $n = 2$ bis $n = 5$ in dieser Näherung?

Aufgabe 29: Energieunschärfe und Resonanzfluoreszenz [5 Punkte, mündlich]

Eine angeregtes Atomniveau habe eine mittlere Lebensdauer $\tau = 10^{-8}$ s nach der es unter Aussendung von Photonen der Wellenlänge 500 nm in den Grundzustand übergeht. Das Atom habe die Massenzahl 57.

a) [1P] Berechnen Sie die Linienbreite $\Delta\lambda$ mit Hilfe der Energie-Zeit-Unschärferelation

$$\Delta E \cdot \Delta t = \Delta E \cdot \tau \geq \hbar \; .$$

Hier darf die mittlere Lebensdauer τ für die allgemeine Zeitunschärfe Δt eingesetzt werden.

b) [2P] Wie groß ist die Linienverstimmung $\delta\lambda$ aufgrund des Rückstoßes des Atoms bei der Emission des Photons? Kann hier Resonanzfluoreszenz auftreten, d. h. die Absorption eines emittierten Photons an einem anderen Atom?

c) [2P] Ist Resonanzabsorption möglich, wenn die Übergangsenergie 14,4 keV und die Lebensdauer $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ s betragen? Wiederholen Sie dazu die Rechnungen der Aufgabenteile a) und b) für diese Zahlen.

Bemerkung: Die Aussendung solcher γ-Quanten findet beim „Mößbauer-Isotop“ ^{57}Fe durch einen Kernübergang und nicht aus der Atomhülle statt.

Aufgabe 30: Materiewellenpaket [5 Punkte, schriftlich]

In der Vorlesung wurde ein Materiewellenpaket definiert:

$$\Psi(x,t) = a_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} \cdot e^{-i(kx-\omega t)} dk \; .$$

a) [2P] Berechnen Sie das Materiewellenpaket $\Psi(x,0)$ für $t=0$.

Hinweis: $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2bx) dx = \sqrt{\pi}\; e^{-b^2} \quad .$$

b) [1P] Berechnen Sie die Normierungskonstante a_0 so, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 dx = 1$$

erfüllt ist.

c) [2P] Die Lösung von Aufgabenteil a) enthält den Term $e^{-(\sigma_k^2 x^2)/2}$ der per Definition gleich dem Term $e^{-x^2/(2\sigma_x^2)}$ ist. Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen σ_x und σ_k.