Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 8: Ausgabe: 16.05.2019, Abgabe: 23.05.2019

Aufgabe 31: Potenzreihenansatz **[13 Punkte, schriftlich]**

Berechnen Sie die Eigenwerte mit $E < 0$ des Hamiltonoperators mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad -\infty < x \leq 0 \\ -\dfrac{D}{x} & \text{für} \quad 0 < x < \infty \end{cases} .$$

Dieses Potential mit $D = \dfrac{e^2}{16\,\pi\,\varepsilon_0}$ haben Sie bereits in Aufgabe 10 kennengelernt. Gehen Sie bei der Lösung der Aufgabe folgendermaßen vor:

a) [3P] Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung für $x > 0$ durch eine Substitution $y = \alpha \cdot x$ mit einer geeignet gewählten Konstanten α in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\,\phi(y)}{d\,y^2} + \left(\frac{\beta}{y} - 1\right)\phi(y) = 0$$

überführt werden kann. Wie hängt die neue Konstante β mit der Energie $|E|$ zusammen? Beachten Sie, dass $E < 0$ ist!

b) [4P] Welchen Randbedingungen muss die Wellenfunktion $\phi(y)$ genügen? Stellen Sie $\phi(y)$ durch

$$\phi(y) = f(y) \cdot y \cdot e^{-y}$$

dar. Warum ist dies ein sinnvoller Ansatz? Zeigen Sie, dass $f(y)$ der Differentialgleichung

$$y \cdot f''(y) + (2 - 2\,y) \cdot f'(y) + (\beta - 2) \cdot f(y) = 0$$

genügt.

c) [4P] Lösen Sie die obige Differentialgleichung für $f(y)$ durch einen Potenzreihenansatz

$$f(y) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \cdot y^j .$$

Warum muss die Reihe nach endlich vielen Gliedern abbrechen? Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte.

d) [2P] Bestimmen Sie die Bindungsenergie für den energetisch tiefsten Zustand und diskutieren Sie den Unterschied zur Messung von Giesen et al. an einer Silberoberfläche, die einen Wert von 0.77 eV ergeben hat.

Aufgabe 32: Morse Potential **[7 Punkte, schriftlich]**

Die Relativbewegung der Atomkerne in einem zweiatomigen Molekül wird durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H}\,(x) \;=\; -\frac{\hbar^2}{2\,m}\,\frac{d^2}{d\,x^2} \;+\; U\,(x)$$

mit dem von F. Morse vorgeschlagenen Potential

$$U\,(x) \;=\; D\,\left(e^{-2\,\gamma\,(x\,-\,x_0)} \;-\; 2\,e^{-\gamma\,(x\,-\,x_0)}\right)$$

beschrieben. D, γ und x_0 sind reelle Konstanten, wobei $\gamma \;>\; 0$ ist. Nähern Sie $U\,(x)$ durch das Potential $V\,(x)$ eines verschobenen harmonischen Oszillators an. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte E_n. Vergleichen Sie diese mit den exakten Eigenenergien

$$\mathcal{E}_n \;=\; -D\left(1 \;-\; \frac{\gamma\,\hbar}{\sqrt{2\,m\,D}}\left(n \;+\; \frac{1}{2}\right)\right)^2 \qquad \text{für} \qquad 0 \;\leq\; n \;<\; \frac{\sqrt{2\,m\,D}}{\gamma\,\hbar} \;-\; \frac{1}{2}$$

für dieses Potential. Skizzieren Sie $V\,(x)$ und $U\,(x)$.

Berechnen Sie für ein H_2-Molekül ($m \;=\; 0{,}8363 \,\cdot\, 10^{-27}$ kg, $\gamma \;=\; 0{,}1940 \,\cdot\, 10^{11}\,\frac{1}{\mathrm{m}}$, $D \;=\; 4{,}7477$ eV, $x_0 \;=\; 0{,}742 \,\cdot\, 10^{-10}$ m) die beiden niedrigsten Energiewerte von E_n und $\mathcal{E}_n$.

Hinweis: Wenn sich ein Teilchen mit der Masse m in einem Potential

$$V\,(x) \;=\; \frac{1}{2}\,k\,x^2 \;+\; a\,x \;+\; b$$

befindet, wobei a, b und k reelle Konstanten sind und $k \;>\; 0$ ist, dann ergeben sich für den zugehörigen Hamiltonoperator die Eigenwerte

$$E_n \;=\; \hbar\omega\left(n \;+\; \frac{1}{2}\right) \;+\; b \;-\; \frac{a^2}{2k}\;.$$

Aufgabe 33: Astrophysikalische Anwendung **[mündlich, 3 Punkte]**

Die Lyman-α-Linie ($n = 2 \rightarrow n = 1$) einer weit entfernten Wolke atomaren Wasserstoffs wird bei einer Wellenlänge von 122.6 nm beobachtet. Berechnen Sie die Entfernung der Wasserstoffwolke. Verwenden Sie dabei das Hubble-Gesetz, das besagt, dass die sich das Weltall so ausdehnt, dass sich alle Objekte mit der von der Entfernung r abhängigen Geschwindigkeit $v(r)$ von uns weg bewegen:

$$v(r) = H \cdot r \qquad \text{mit} \qquad H = 71\,\frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} = \frac{1}{1.40 \cdot 10^{10}\text{y}}\;.$$

Aufgabe 34: Bindungsenergien im Bohr'schen Atommodell [mündlich, 4 Punkte]

Machen Sie sich mit der Massenabhängigkeit (über die reduzierte Masse μ) und die Ladungsabhängigkeit vertraut, indem Sie die Bindungsenergie für folgene Systeme angeben:

- Positronium (e^+-e^- – Bindungszustand),
- Tritium (schwerstes Wasserstoffisotop, $m(\text{Tritium}) \approx 3 \cdot m(\text{H})$),
- Wasserstoffähnliches Bismut, der Bismutkern des Isotops ^{209}Bi wiegt etwa 209-mal mehr als ein Proton (dabei vernachlässigen wir hier den Massendefekt aufgrund der Kernbindung). Bismut ist das Element 83 im Periodensystem.

Leiten Sie die Bindungsenergie des Bohr'schen Atommodells für Kerne der Ladung Z analog zur Vorlesung (wo $Z = 1$ gesetzt wurde) her. Geben Sie dabei die Z-Abhängigkeit des Bahnradius $R(n)$ und der Bahngeschwindigkeit $v(n)$ an.

Bemerkung: Eigentlich hätte man diese Aufgabe relativistisch rechnen müssen, aber wir bleiben bei einer nicht-relativistischen Rechnung, weil wir das Bohr'sche Atommodell demnächst durch die genauere quantenmechanische Beschreibung ersetzen werden.

Aufgabe 35: Balmserie des Wasserstoffspektrums [schriftlich, 3 Punkte]

Die Balmerserie des Wasserstoffspektrums soll mit einem Gitterspektrographen mit dem spektralen Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda = 3 \cdot 10^5$ gemessen werden. Die Serie enthält Übergänge, die aus höherenergetischen Zuständen mit $n > 2$ in die $n = 2$ Schale erfolgen. Bis zu welchem Zustand E_n können zwei benachbarte Linien noch aufgelöst werden?