Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 11: Ausgabe: 06.06.2019, Abgabe: 19.06.2019

WWU

Aufgabe 46: Auf- und Absteigeoperatoren **[9 Punkte, schriftlich]**

Berechnen Sie die Erwartungswerte

$$\langle\varphi_n|\hat{x}|\varphi_n\rangle\ , \qquad \langle\varphi_n|\hat{x}^{\,2}|\varphi_n\rangle\ , \qquad \langle\varphi_n|\hat{p}|\varphi_n\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle\varphi_n|\hat{p}^{\,2}|\varphi_n\rangle$$

für den n-ten Eigenzustand $|\varphi_n\rangle$ des harmonischen Oszillators. Was ergibt sich für $\Delta\,x\,\cdot\,\Delta\,p$ in Abhängigkeit von der Quantenzahl n?

Hinweis: Drücken Sie $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch die in der Vorlesung eingeführten Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\,\hat{x} - \frac{i}{\hbar\,\alpha}\,\hat{p}\right) \qquad \text{und} \qquad \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\,\hat{x} + \frac{i}{\hbar\,\alpha}\,\hat{p}\right) \qquad \text{mit} \qquad \alpha = \sqrt{\frac{m\,\omega}{\hbar}}$$

aus und benutzen Sie deren Eigenschaften

$$\hat{a}^{+}\,|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\varphi_{n+1}\rangle \qquad \text{und} \qquad \hat{a}\,|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}\,|\varphi_{n-1}\rangle$$

sowie die Orthogonalität $\langle\varphi_n|\varphi_{n'}\rangle = \delta_{n,\,n'}$ der Eigenzustände, um die Erwartungswerte zu berechnen.

Aufgabe 47: Drehimpuls **[6 Punkte, schriftlich]**

a) [2P] Zeigen Sie, dass für die Komponenten $\hat{L}_j$ des Drehimpulsoperators $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ Folgendes gilt:

$$\hat{L}_j^{+} = \hat{L}_j\ , \qquad j = 1,\,2,\,3\ .$$

b) [4P] Berechnen Sie folgende Vertauschungsrelationen:

$$[\hat{L}_z,\,\hat{r}^{\,2}]\ , \qquad [\hat{L}_z,\,\hat{L}_-]\ , \qquad [\hat{L}_-,\,\hat{L}_+]\ ,$$

wobei

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\,\hat{L}_y \qquad \text{und} \qquad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\,\hat{L}_y$$

ist.

Aufgabe 48: Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten **[5 Punkte, mündlich]**

In Kugelkoordinaten hat der Drehimpulsoperator die Form

$$\hat{\vec{L}} = i\,\hbar\left(\vec{e}_\theta\,\frac{1}{\sin\,\theta}\,\frac{\partial}{\partial\,\varphi} - \vec{e}_\varphi\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\right)\ .$$

Zeigen Sie, dass sich $\hat{\vec{L}}^{\,2}$ als

$$\hat{\vec{L}}^{\,2} = -\frac{\hbar^2}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\,\varphi^2} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\right)\right)$$

schreiben lässt.

Aufgabe 49: Feinstruktur des Wasserstoffatoms [7 Punkte, schriftlich]

In einem Magnetfeld von $B = 4$ T soll die Zeeman-Aufspaltung der blau-grünen Wasserstoff-Balmer-Linie H_β ($4\,P_{1/2} \to 2\,S_{1/2}$) gemessen werden.

a) [2P] Bestimmen Sie zunächst die Energien der beiden beteiligten Wasserstoff-Niveaus $4\,P_{1/2}$ und $2\,S_{1/2}$ für $B = 0$ unter Berücksichtigung der Feinstruktur.

b) [2P] Fertigen Sie eine Skizze der Anordnung der 4 Energieniveaus für $B = 4$ T an.

c) [2P] Mit der Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ sind 4 Übergänge zwischen den 4 Energieniveaus „erlaubt“. Bestimmen Sie deren Wellenlängen.

d) [1P] Wie groß muss das relative Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda$ eines Spektrographen sein, um alle 4 Linien zu trennen?

Aufgabe 50: Hyperfeinstruktur des Wasserstoffatoms [3 Punkte, mündlich]

Die Hyperfeinaufspaltung des Wasserstoffatoms beträgt $\lambda = 21$ cm. Sie spielt in der astronomischen Beobachtung ferner Wasserstoffwolken mit Radioteleskopen eine besondere Rolle.

Die Hyperfeinaufspaltung beruht auf der Wechselwirkung des magnetischen Moments des Atomkerns μ mit dem vom Elektron verursachten Magnetfeld am Kernort. Berechnen Sie dieses Magnetfeld B am Kernort, das eine Linienaufspaltung $\lambda = 21$ cm bewirken würde. Verwenden Sie für das magnetische Moment des Wasserstoffkerns (Proton) $\mu_p = 2{,}79\,\mu_K = 2{,}79\,\mu_B \cdot m_e/m_p$.

Bemerkung: Für diesen Übergang gilt offensichtlich nicht die „Auswahlregel“ $\Delta l = \pm 1$. Es handelt sich hierbei nicht um einen elektrischen Dipolübergang sondern um einen magnetischen Übergang.