Übungen zu Atom- und Quantenphysik (SS 2019)

Krüger/Weinheimer

Blatt 12: Ausgabe: 19.06.2019, Abgabe: 27.06.2019

WWU

Aufgabe 51: Starrer Rotator **[12 Punkte, schriftlich]**

In einem einfachen Modell lässt sich ein Molekül aus zwei Atomen als starre Hantel auffassen. Die Rotation um den Schwerpunkt wird durch den Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2\,I}$ mit konstantem Trägheitsmoment I beschrieben.

a) [3P] Geben Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Systems an. Benutzen Sie dabei die Resultate der Vorlesung.

b) [2P] Wie stark sind die einzelnen Eigenwerte entartet?

c) [4P] Berechnen Sie für beliebige Eigenzustände die Erwartungswerte

$$\langle \hat{L}_x \rangle \, , \qquad \langle \hat{L}_y \rangle \, , \qquad \langle \hat{L}_z \rangle \, , \qquad \langle \hat{L}_x^2 \rangle \qquad \text{und} \qquad \langle \hat{L}_z^2 \rangle \, .$$

Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaften der Auf- und Absteigeoperatoren aus.

d) [3P] Diskutieren Sie das Produkt der Unschärfen $\Delta\, L_x \cdot \Delta\, L_z$?

Aufgabe 52: Kugelförmiger Hohlraum **[8 Punkte, mündlich]**

Ein Teilchen der Masse m befinde sich in einem kugelförmigen Hohlraum, d. h.

$$V\,(r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq r \leq a \\ \\ \infty & \text{für} \quad r > a \end{cases} \, .$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen dieses Systems für den Fall $l = 0$.

Lösen Sie dazu die radiale Schrödingergleichung mit $u\,(r) = r\,R\,(r)$ unter Beachtung der Randbedingungen bei $r = 0$ und $r = a$. Geben Sie die normierte Wellenfunktion $\chi_{n00}\,(\vec{r})$ an.

Aufgabe 53: Bose-Einstein-Kondensat **[4 Punkte, mündlich]**

Kühlt man Atome immer weiter ab, so werden ihre mittlere Geschwindigkeit und ihr mittlerer Impuls immer kleiner. Dadurch wird die de-Broglie-Wellenlänge immer größer, bis sie schließlich so groß wie die atomaren Abstände wird. Dann sind die Atome nicht mehr unterscheidbar, da wir ihren Ort nicht genauer als die de-Broglie-Wellenlänge bestimmen können. Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Gesamtdrehimpuls) bilden dann ein sogenanntes Bose-Einstein-Kondensat, das durch eine einzige Wellenfunktion beschrieben wird. Auch andere Effekte wie „Superfluidität“ oder „Supraleitung“ sind letztlich solche Quantenphänomene ununterscheidbarer Bosonen. Wir haben Photonen (Spin 1) als Bosonen kennengelernt: Das Schwarzkörperstrahlungsspektrum ist im Wesentlichen das Produkt aus Phasenraumdichte, Photonenenergie und Bose-Einstein-Statistik.

Im Gegensatz dazu stehen Fermionen, d. h. Teilchen mit halbzahligem Spin, wie z. B. das Elektron. Diese folgen der sogenannten Fermi-Dirac-Statistik, was sich beispielsweise durch das Pauliverbot für Elektronen äußert. Diese Spinstatistiken besagen, dass Bosonen gleicher Sorte am liebsten alle in dem selben Grundzustand gehen, während gleiche Fermionen am gleichen Ort sich in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden müssen.

Wir wollen die Temperatur abschätzen, ab der wir bei Natriumatomen Bose-Einstein-Kondensation beobachten sollten. Natrium kommt zu fast 100 % als Isotop der Massenzahl 23 (23-fache Masse des Protons) mit Kernspin $I = 3/2$ vor. Unter Berücksichtigung der 11 Hüllenelektronen besitzt das Gesamtatom einen ganzzahligen Spin und ist deshalb ein Boson. Berechnen Sie die Temperatur T, ab der die de-Broglie-Wellenlänge aufgrund der mittleren thermischen Geschwindigkeit so groß wie die mittleren atomaren Abstände bei einer Dichte von $n = 3 \cdot 10^{11}$ cm^{-3} wird.

Bemerkung: Bitte erschrecken Sie nicht, wenn Ihnen die Temperatur sehr niedrig vorkommt. Mit raffinierten Kühlverfahren in Atomfallen gelang der experimentelle Nachweis der Bose-Einstein-Kondensation, der im Jahr 2001 mit dem Nobelpreis an Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle und Carl E. Wieman belohnt wurde. Der Münsteraner Professor Sergej Demokritov und Kollegen haben übrigens im Jahr 2006 erstmals ein Bose-Einstein-Kondensat von Magnonen bei Raumtemperatur hergestellt (S. Demokritov et al., Nature **443** (2006) 430).

Aufgabe 54: Isotopieverschiebung [6 Punkte, schriftlich]

Isotope nennt man Atome mit verschiedenen Atomkernen eines gleichen Elements, die sich in der Anzahl der Neutronen N im Kern unterscheiden. Chemisch sind die Isotope praktisch gleich, denn sie besitzen die gleiche elementspezifische Anzahl Z von Elektronen (und Protonen im Kern). Trotzdem sind die Energien der Atomniveaus leicht verschieden. Diese Isotopieverschiebung hat zwei Ursachen: Zum einem ändert die unterschiedliche Anzahl der Neutronen die Masse der Atomkerne und damit die reduzierte Masse μ. Zum zweiten ist das Kernvolumen proportional zur Anzahl der Kernbausteine $A = Z + N$ und es kommt zu einem Kernvolumeneffekt des nicht punktförmigen Kerns, der bei den verschiedenen Isotopen aufgrund des unterschiedlichen Kernvolumens verschieden stark ausfällt.

a) [2P] Berechnen Sie die Energieverschiebung des 1s-Grundzustands (ohne Feinstruktur) unter Berücksichtigung der unterschiedlichen reduzierten Masse μ im Vergleich zur Masse des Elektrons m_e für die beiden Wasserstoffisotope ^{1}H (Massenzahl $A = 1$) und ^{2}H („Deuterium“, Massenzahl $A = 2$) sowie die wasserstofffähnlichen Blei-Ionen $^{204}\mathrm{Pb}^{81+}$ (Massenzahl $A = 204$) und $^{208}\mathrm{Pb}^{81+}$ (Massenzahl $A = 208$). Mit der Massenzahl $A = Z + N$ können Sie vereinfacht die Kernmasse aus der Protonenmasse als $M(A) = A \cdot m_p$ berechnen.

b) [3P] Berechnen Sie die Energieverschiebung des 1s-Grundzustands aufgrund des Volumeneffekts für alle 4 oben genannten Atome bzw. Ionen. Nehmen Sie die Kernladungsverteilung als homogene Kugel mit dem Radius $R_0 = 1{,}2 \cdot A^{1/3}$ fm an. Die Energieverschiebung aufgrund des Kernvolumeneffektes kann näherungsweise berechnet werden zu:

$$\Delta E_{\text{Vol}} = \frac{2\pi}{3} \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0} \, |\Psi(0)|^2 \, \langle R^2 \rangle \quad ,$$

wobei $\langle R^2 \rangle$ der mittlere quadratische Kernradius ist und $|\Psi(0)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons am Kern ist.

Für den 1s-Grundzustand eines wasserstoffähnlichen Atoms/Ions gilt

$$\Psi_{100}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \cdot e^{-Zr/a_0}$$

c) [1P] Berechnen Sie zum Vergleich die Feinstrukturaufspaltung $E(2p_{3/2}) - E(2p_{1/2})$ des Wasserstoffatoms.