Aufgabe: Vertauschungsrelationen

Beweisen Sie die folgenden Vertauschungsrelationen für die Komponenten L_i des Bahndrehimpuls-operators $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

i) $[L_i, r_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} r_k$,

ii) $[L_i, p_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k$,

iii) $[L_i, r^2] = [L_i, p^2] = [L_i, \vec{r} \cdot \vec{p}] = 0$.

Dabei wurde die Einstein'sche Summenkonvention verwendet, d. h. über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Aufgabe: Drehimpuls-Erwartungswerte

Ein System sei in einem Eigenzustand $|j, m\rangle$ zu J^2 und J_z mit

$$J^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j (j + 1) |j, m\rangle , \qquad J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle .$$

Die Leiteroperatoren sind definiert als

$$J_\pm = J_x \pm i J_y \qquad \text{mit} \qquad J_\pm |j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \, |j, m \pm 1\rangle$$

und

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z .$$

Berechnen Sie hierfür $\langle J_x \rangle$ und $\langle J_x^2 \rangle$.

Aufgabe: Spins und Spinoren

Die Spin-Eigenvektoren können in der Basis, in der S_z diagonal ist, als

$$|\uparrow\rangle = \chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad |\downarrow\rangle = \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $+\frac{\hbar}{2}$ und $-\frac{\hbar}{2}$ geschrieben werden.

a) Zeigen Sie (z. B. mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren S_+, S_-), dass die Operatoren S_x, S_y durch die Matrizen

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben sind.

b) Bestimmen Sie in dieser Basis die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren χ_y zu S_y.