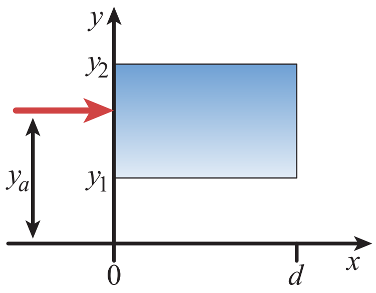
Aufgabe 37: Fermat'sches Prinzip (schriftlich, 5 Punkte)

Ein Lichtstrahl breite sich in der xy-Ebene aus. Im Bereich $0 \leq x \leq d$ und $y_1 \leq y \leq y_2$ mit $y_1 > 0$ befinde sich ein Medium mit dem Brechungsindex $n(y) = n_0 y$.



a) [3 Punkte] Berechnen Sie ausgehend vom Fermat'schen Prinzip die allgemeine Form des Lichtweges $x(y)$. Stellen Sie dann den Lichtweg in der Form $y(x)$ dar.

b) [2 Punkte] Ein Lichtstrahl falle aus $-x$-Richtung **senkrecht** bei $\vec{r}_1 = (0, y_a, 0)$ auf das Medium. An welcher Stelle y_b tritt der Lichtstrahl bei $x = d$ wieder aus? Skizzieren Sie den Lichtweg im Medium.

Aufgabe 38: Brechung durch Kugelfläche (schriftlich, 5 Punkte)

Ermitteln Sie die Linsengleichung für die Abbildung durch eine sphärische Fläche (Krümmungsradius R) für achsennahe Strahlen, d.h. kleine Winkel φ_1, φ_2, β, α_1 und α_2.
Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

a) [3,5 Punkte] Zeigen Sie zunächst auf zwei verschiedene Arten, dass folgende Gleichung gilt:

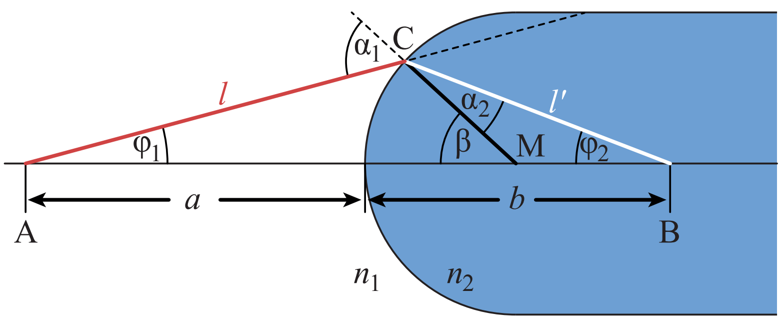
$$\frac{n_1}{a} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{R} \ .$$

i) Leiten Sie mit Hilfe geometrischer Überlegungen im Dreieck AMC bzw. BMC und dem Brechungsgesetz obige Relation her. Verwenden Sie dazu am Schluss Ihrer Berechungen die Näherungen $l \approx a$ und $l' \approx b$.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Kosinussatzes im Dreieck AMC bzw. BMC die Längen l bzw. l' als Funktion des Winkels β. Minimalisieren Sie dann die optische Weglänge $n_1 l + n_2 l'$ (Fermat'sches Prinzip) bezüglich β. Was ergibt sich für l und l' bei kleinen Winkeln β? Setzen Sie diese Resultate ein, um obige Relation zu erhalten.

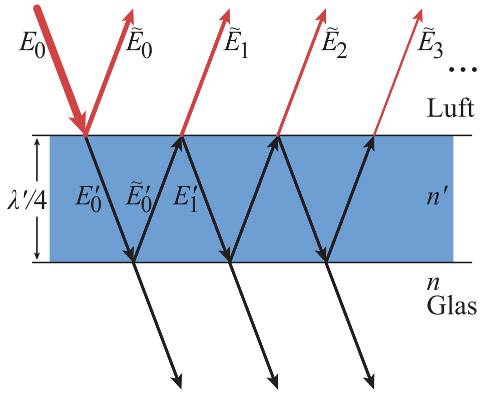
b) [1,5 Punkte] Berechnen Sie dann die Brennweiten f_1 und f_2, indem Sie parallel einfallendes Licht, d.h. $b \to \infty$ bzw. $a \to \infty$, betrachten. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{f_1}{a} + \frac{f_2}{b} = 1 \ .$$



Aufgabe 39: Antireflexschicht (mündlich, 9 Punkte)

Zur Verhinderung störender Reflexionen beschichtet man die Oberflächen optischer Komponenten mit einer dünnen Schicht aus einem Material, das einen kleineren Brechungsindex als das verwendete Glas aufweist (Optische Vergütung). Die Dicke der Schicht wird gerade so gewählt, dass ihre optische Weglänge $\lambda'/4$ beträgt. Dabei ist λ' die Wellenlänge in der Schicht. Führen Sie um die Funktionsweise einer solchen Schicht zu verstehen die folgenden Überlegungen durch:



a) [2 Punkte] Gehen Sie von einem **senkrechten** Einfall der Lichtwelle aus. Berechnen Sie mit Hilfe der Fresnel'schen Formeln

$$\tilde{E}_0 = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_0 \qquad E'_0 = \left(1 + \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right) E_0 \quad \text{(Übergang von } n_1 \text{ zu } n_2\text{)}$$

Amplitude und Phase der reflektierten Welle $\tilde{E}_0$, der transmittierten Welle E'_0, der reflektierten Welle $\tilde{E}'_0$ und der transmittierten Welle $\tilde{E}_1$ relativ zur eingestrahlten Welle. Im Glas gelte $\mu_r = 1$.
Hinweis: Verwenden Sie die Abkürzungen $\gamma = \frac{1 - n'}{1 + n'}$ *und* $\gamma' = \frac{n' - n}{n' + n}$. *Beachten Sie, dass hier bei der Reflexion an einem Material mit größerem Brechungsindex ein Phasensprung von* π *unabhängig von der Polarisation auftritt.*

b) [2 Punkte] Geben Sie eine Iterationsformel für die Amplitude der weiteren Wellen $\tilde{E}_i$, $i = 2, 3, \ldots$ an, indem Sie $\tilde{E}_i$ in Abhängigkeit von $\tilde{E}_{i-1}$ ausdrücken.

c) [2 Punkte] Die insgesamt reflektierte Welle $\tilde{E}_{\text{ges}}$ ergibt sich durch **phasenrichtige** Summation der Amplituden $\tilde{E}_0$, $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$, $\tilde{E}_3$, ... Berechnen Sie diese.

d) [2 Punkte] Für welches Verhältnis der Brechzahlen n und n' verschwindet die in c) berechnete Welle vollständig?

e) [1 Punkte] Warum erscheinen vergütete Optiken je nach Betrachtungsrichtung gefärbt?

Bonusaufgabe 1: TM Wellen im Hohlleiter (schriftlich, 6 Bonuspunkte)

Gegeben sei ein in z-Richtung unendlich ausgedehnter Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt der Kantenlängen a (in x) und b (in y), in dem sich elektromagnetische Wellen in z-Richtung ausbreiten können.

a) [2 Punkte] Wellen mit $\vec{B} \perp \vec{k}$ (hier also $\vec{B} \perp \vec{e}_z$) bezeichnet man als transversal magnetische (TM) Wellen. Das B-Feld hat hier die Form

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_{0x} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z - \omega t) \\ B_{0y} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass diese Form des B-Feldes die Randbedingungen und die Maxwell-Gleichungen erfüllt. Welche Werte können k_x und k_y annehmen? Wie müssen B_{0x} und B_{0y} zusammenhängen?

b) [2 Punkte] Berechnen Sie das elektrische Feld der TM-Wellen.
Hinweis: Auftauchende Integrationskonstanten können zu Null gewählt werden.

c) [2 Punkte] Bestimmen Sie für den Fall $a = b$ die Dispersionsrelation $\omega_{n_x,n_y}(k_z)$ des Hohlleiters aus der Wellengleichung.
Wie groß ist die kleinstmögliche Frequenz für die TM-Wellen in Abhängigkeit von k_z?
Skizzieren Sie diese Dispersionsrelation.