Aufgabe 40: Spiegel (mündlich, 5 Punkte)

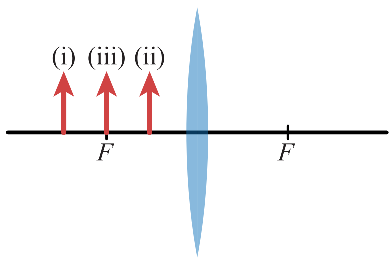
a) [2 Punkte] Eine 1.6 m große Person steht vor einem ebenen Spiegel. Wie groß muss der Spiegel mindestens sein, und wie hoch muss sich seine untere Kante über dem Boden befinden, damit sie ihren ganzen Körper sehen kann? Nehmen Sie an, dass die Augen 10 cm unterhalb des Scheitels liegen.

b) [2 Punkte] Ein sphärischer Rasierspiegel sei so geformt, dass ein Gegenstand mit der Gegenstandsgröße G und der Gegenstandsweite g um den Faktor 1.5 vergrößert wird und ein aufrechtes Bild erzeugt, wenn er 20 cm vom Spiegel entfernt ist. Um welchen Spiegeltyp (konvex oder konkav) handelt es sich?
Fertigen Sie eine Skizze des Strahlengangs an. Handelt es sich um ein reales oder virtuelles Bild?
Hinweis: Zur Berücksichtigung der Orientierung des Bildes relativ zum Gegenstand muss die in der Vorlesung angegebene Formel für den Abbildungsmaßstab beim Hohlspiegel zu $\frac{B}{G} = -\frac{b}{g}$ *erweitert werden.*

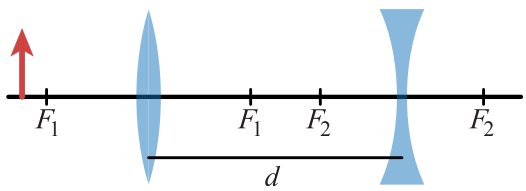
c) [1 Punkte] Berechnen Sie den erforderlichen Krümmungsradius des Rasierspiegels.

Aufgabe 41: Linsen (schriftlich, 5 Punkte)

a) [2,5 Punkte] Ein Objekt soll durch ein Sammellinse mit Fokuslänge f abgebildet werden. Konstruieren Sie für die Fälle (i) $g > f$, (ii) $g < f$ und (iii) $g = f$ das entsprechende Bild. In welchem der drei Fälle handelt es sich um ein reales bzw. virtuelles Bild? Welche der Bilder stehen aufrecht?
Berechnen Sie Bildgröße B und Bildweite b für $f = 10\,\text{cm}$, $G = 5\,\text{cm}$ und (i) $g = 15\,\text{cm}$ und (ii) $g = 5\,\text{cm}$.



b) [2,5 Punkte] Zur Situation in a) (i) wird nun eine Zerstreuungslinse mit der Fokuslänge f_2 hinzugefügt (siehe Abbildung). Konstruieren Sie wieder das Bild für die Fälle (i) $d > b_1 + f_2$, (ii) $d = b_1 + f_2$ und (iii) $d < b_1 + f_2$. Dabei ist b_1 die Bildweite hinter der Sammellinse.

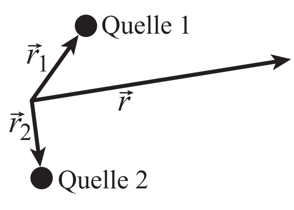


Aufgabe 42: Interferenz von Kugelwellen (schriftlich, 5 Punkte)

Von den Orten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ werden zwei Kugelwellen emittiert, deren Amplituden sich um eine Phase φ unterscheiden. Die Überlagerung der Wellen ist durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\mathrm{e}^{-i\omega t} \qquad \text{mit} \qquad \vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_1\left(\frac{\mathrm{e}^{ikr_a}}{r_a} + \mathrm{e}^{i\varphi}\frac{\mathrm{e}^{ikr_b}}{r_b}\right)$$

gegeben. Dabei sind $r_a = |\vec{r} - \vec{r}_1|$ und $r_b = |\vec{r} - \vec{r}_2|$.



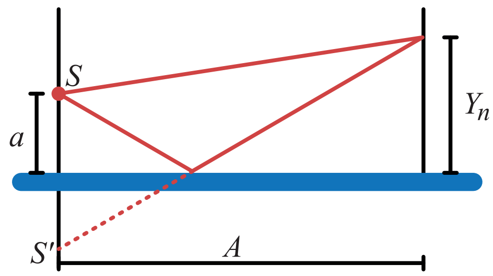
a) [2,5 Punkte] Berechnen Sie die zeitlich gemittelte Intensität

$$I(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0 c}{2}\vec{E}_0(\vec{r}) \cdot \vec{E}_0^*(\vec{r}) \ .$$

b) [2,5 Punkte] Für $r \gg r_1$ und $r \gg r_2$ lassen sich r_a und r_b im Nenner der Kugelwellen näherungsweise durch r ersetzen. Wie groß ist im Rahmen dieser Näherung die Intensität $I(\vec{r})$?
Für welche Gangunterschiede $r_b - r_a$ treten Minima oder Maxima auf?
Für welche Gangunterschiede tritt bei $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$ eine Auslöschung auf? Geben Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ an.

Aufgabe 43: Interferenz am Lloyd'schen Spiegel (mündlich, 6 Punkte)

Eine punktförmige monochromatische Lichtquelle S befindet sich im Abstand a über einem Planspiegel. Im Abstand A von der Punktquelle ($A \gg a$) befindet sich ein Schirm. Durch Überlagerung des direkten und des am Spiegel reflektierten Lichts bildet sich auf dem Schirm ein Interferenzmuster. Berechnen Sie die Lage Y_n der Minima.
Wie groß ist der Abstand zweier Minima für $a = 1\,\mathrm{mm}$, $A = 30\,\mathrm{cm}$ und $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$?
Hinweis: Beachten Sie die relative Phasenlage der beiden Strahlen.



Theoretische Ergänzungen:

Aufgabe TE18: Bewegtes Elektron (schriftlich, 5 Punkte)

Ein Elektron bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung. Das Elektron ist von einem kreisförmigen (unendlich dünnen) Detektor-Ring mit Radius R umgeben. Dieser kann elektrische und magnetische Felder messen. Der Detektor-Ring liegt in der xy-Ebene und bewegt sich auch mit der Geschwindigkeit v in z-Richtung.

a) [2 Punkte] Stellen Sie zunächst die Formeln für die Lorentz-Transformation der Komponenten der elektrischen Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ auf, für den Spezialfall, dass die Bewegung in z-Richtung stattfindet. Dabei lautet die Lorentz-Transformation für den elektrischen Feldstärketensor

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} = \overline{\overline{L}}\,\overline{\overline{F}}\,\overline{\overline{L}}\ .$$

In Matrixschreibweise sind

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overline{\overline{L}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

mit $\beta = v/c$ und $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$

b) [1 Punkte] Geben Sie elektrisches und magnetisches Feld [$\vec{E}'(r',\varphi')$ und $\vec{B}'(r',\varphi')$] am Ort des Detektor-Rings im Ruhesystem des Elektrons, mit den Zylinderkoordinaten im Elektron-System:

$$\vec{e}_{r'} = \big(\cos(\varphi'), \sin(\varphi'), 0\big)\,, \quad \vec{e}_{\varphi'} = \big(-\sin(\varphi'), \cos(\varphi'), 0\big)\,, \quad \vec{e}_{z'} = \big(0,0,1\big)$$

c) [2 Punkte] Berechnen Sie elektrisches und magnetisches Feld am Ort des Detektor-Rings im Laborsystem, also $\vec{E}(r,\varphi)$ und $\vec{B}(r,\varphi)$. Begründen Sie, dass hier $r' = r$ und $\varphi' = \varphi$ ist, wobei r und φ Koordinaten im Laborsystem sind.

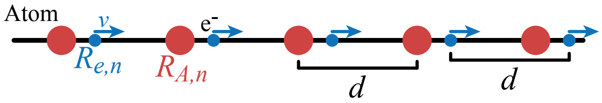
Aufgabe TE19: Kraft zwischen geladenen Teilchen (schriftlich, 5 Punkte)

Zwei Teilchen mit Ladung q bewegen sich parallel im Abstand r zueinander mit der Geschwindigkeit v im Laborsystem. Legen Sie Ihr Koordinatensystem so, dass die Bewegung in x-Richtung ist und der Abstand r in y-Richtung gilt. Berechnen Sie die Kraft des einen Teilchens auf das andere im Ruhesystem der Teilchen und im Laborsystem. Transformieren Sie hierzu das auftretende E- und B-Feld.
Hinweis: Beachten Sie, dass bei bewegten Ladungen B-Felder auftraten, also die gesamte Lorentz-Kraft wirkt.

Aufgabe TE20: Stromdurchflossener Draht (mündlich, 10 Punkte)

Ein stromdurchflossener Draht kann in einem einfachen Modell durch eine regelmäßige Anordnung von Atomrümpfen und Elektronen beschrieben werden. Die Atomrümpfe sind dabei im Abstand d angeordnet und ruhen. Die Elektronen haben ebenfalls den Abstand d (im Ruhesystem der Atome) und bewegen sich alle mit derselben Geschwindigkeit v in x-Richtung. Der (kontravariante) Vierer-Ortsvektor für den n-ten Atomrumpf bzw. das n-te Elektron lautet:

$$R_{A,n} = (ct, nd, 0, 0) \qquad \text{bzw.} \qquad R_{e,n} = (ct, nd + vt, 0, 0)$$



a) [4 Punkte] Wie lauten die Vierer-Ortsvektoren $R'_{A,n}$ und $R'_{e,n}$ im Ruhesystem der Elektronen? Berechnen Sie die Abstände d'_e und d'_A für Atomrümpfe und Elektronen im Ruhesystem der Elektronen.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass das elektrische Feld $\vec{E}'(\vec{r}\,')$ der gesamten Elektronen im Ruhesystem der Elektronen

$$\begin{aligned} E'_x(\vec{r}\,') &= 0 \\ E'_y(\vec{r}\,') &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r' \cos(\varphi')}{\left[(x' - n\gamma d)^2 + r'^2\right]^{3/2}} \\ E'_z(\vec{r}\,') &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r' \sin(\varphi')}{\left[(x' - n\gamma d)^2 + r'^2\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

lautet. Das magnetische Feld ist im Ruhesystem der Elektronen natürlich $\vec{B}'(\vec{r}\,') = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie angepasste Zylinderkoordinaten mit

$$x' = x', \qquad y' = r' \cos(\varphi'), \qquad z' = r' \sin(\varphi'),$$

also

$$\vec{e}_{r'} = \big(0, \cos(\varphi'), \sin(\varphi')\big), \quad \vec{e}_{\varphi'} = \big(0, -\sin(\varphi'), \cos(\varphi')\big), \quad \vec{e}_{x'} = \big(1, 0, 0\big),$$

wobei $\vec{r}\,' = (x', y', z')$ der Ortsvektor im Ruhesystem der Elektronen ist.

c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Felder $\vec{E}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ im Laborsystem, indem Sie die Felder $\vec{E}'(\vec{r}\,')$ und $\vec{B}'(\vec{r}\,')$ in das Ruhesystem der Atomrümpfe transformieren. Beachten Sie, dass Sie nach der Transformation der Felder auch die Koordinaten $\vec{r}\,' \to \vec{r}$ transformieren müssen.

Ab hier Bonus:

d) [2 Bonuspunkte] Berechnen Sie nun die Felder $\vec{E}'(\vec{r}\,')$ und $\vec{B}'(\vec{r}\,')$ für den Grenzfall eines unendlich dünnen, unendlich langen Leiters mit dem Elektronenstrom I und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den bekannten Formeln. Zur Berechnung ist es sinnvoll die Summe über alle Elektronenpositionen in ein Integral überzugehen zu lassen $\left(nd \to \tilde{x}, \sum_n \cdots \to \frac{N}{L}\int \ldots \, \mathrm{d}\tilde{x}\right)$. Die Gesamtladung der Elektronen Ne geteilt durch die Länge des Drahts L entspricht der linearen Ladungsdichte λ. Die Ladungsstromdichte ist gegeben durch $\vec{j} = \lambda \vec{v}$ und damit der Gesamtstrom durch $I = \mu_0 j$.
Hinweis: Folgendes Integral könnte nützlich sein: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left[(x' - u)^2 + r'^2\right]^{-3/2} \mathrm{d}u = \frac{2}{r'^2}$.

e) [2 Bonuspunkte] Transformieren Sie die Felder, analog zu c), ins Ruhesystem der Atomrümpfe.