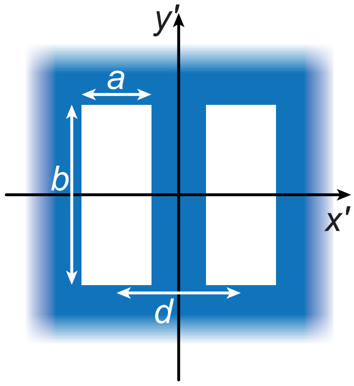
Aufgabe 44: Beugung am Doppelspalt (schriftlich, 8 Punkte)

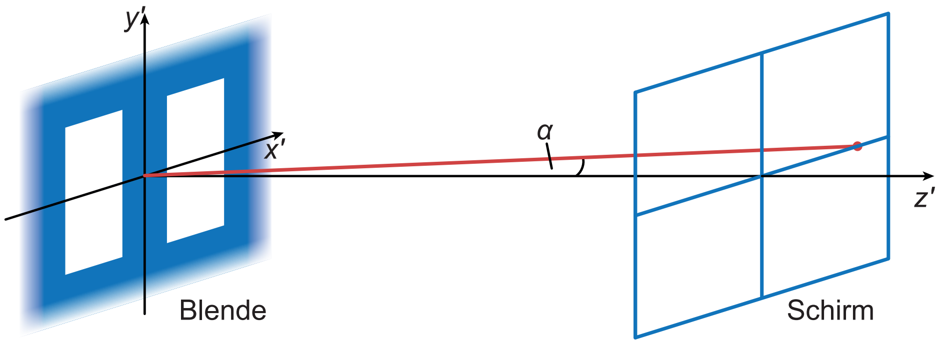
In der $x'y'$-Ebene befinde sich eine Blende mit zwei rechteckigen Öffnungen der Breite a und der Höhe b. Die beiden Rechtecke haben den Abstand d in x-Richtung.



a) [4 Punkte] Berechnen Sie im Rahmen der Fraunhofer-Näherung durch Fouriertransformation die Intensitätsverteilung $I(x, y)$ des Beugungsbildes auf einem Schirm im Abstand r von diesem Doppelspalt. Gehen Sie dazu von der in der Vorlesung gegebenen Formel

$$I(\vec{r}) = I_0 \left| \int\limits_{\text{Öffnung}} \exp\left(-ik\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}\,'\right) \mathrm{d}f' \right|^2$$

für die Intensitätsverteilung auf dem Schirm aus.



b) [2 Punkte] Betrachten Sie Ihr Resultat für $y = 0$. Unter welchen Winkeln α treten Maxima oder Minima in der Intensität auf? Skizzieren Sie $I(x, 0)$ für $d = 3a$ als Funktion von $\sin(\alpha)$.

c) [1 Punkte] Was erhält man für $I(x, y)$ im Fall $d = a$?

d) [1 Punkte] Zeigen Sie, dass die Intensitätsverteilung für $y = 0$ aus b) mit der in der Vorlesung (Kapitel 17.2) hergeleiteten Verteilung für $I(\alpha)$ für ein Beugungsgitter im Spezialfall $N = 2$ übereinstimmt.

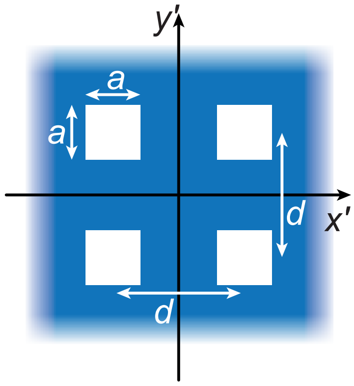
Aufgabe 45: Beugung am Gitter (schriftlich, 2 Punkte)

Auf ein 5 cm langes Glasgitter, das 200 parallele Spalte pro cm besitzt, fällt einfarbiges Licht der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm. Die geritzten, undurchsichtigen Partien sind dabei doppelt so breit wie die dazwischenliegenden, durchsichtigen Glaspartien. Geben Sie die relative Intensität $I(\alpha)/I(\alpha = 0)$ an. Verwenden Sie das Ergebnis aus der Vorlesung (Kapitel 17.2).

Unter welchen Winkeln erscheinen die ersten sieben Hauptmaxima und welches sind ihre relativen Intensitäten?

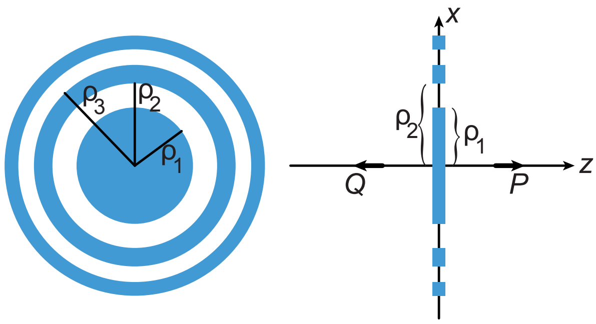
Aufgabe 46: Beugung am quadratischen Vierfachspalt (mündlich, 4 Punkte)

Licht der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ wird nun an einer Blende mit vier quadratischen Öffnungen (Kantenlänge a), die im Abstand d quadratisch angeordnet sind, gebeugt. Berechnen Sie analog zu Aufgabe 44 a) die Intensitätsverteilung $I(x,y)$ auf einem Schirm im Abstand r vom Vierfachspalt.



Aufgabe 47: Fresnel'sche Zonenplatte (mündlich, 6 Punkte)

Gegeben sei eine Fresnel'sche Zonenplatte, die aus N Kreisringen mit äußeren bzw. inneren Radien $\rho_j = \sqrt{j\,\lambda\, f}$, $j = 1, 2, \ldots$ besteht. Wie die Skizze zeigt, bezeichnen ungerade j den inneren und gerade j den äußeren Radius der Öffnungen. Die dunkel gezeichneten Zonenringe seien also lichtundurchlässig. Im Abstand r_0 vor der Platte befinde sich eine Lichtquelle Q, die Licht der Wellenlänge λ abstrahlt. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dieses optische Bauelement als Linse mit der Fokuslänge f funktioniert.



a) [4 Punkte] Berechnen Sie mit Hilfe des Kirchhoff'schen Beugungsintegrals in Fresnel-Näherung

$$E(\vec{r}) = -i\frac{E_0 k}{4\pi}\left(\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{n}}{r_0} - \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r}\right)\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\frac{\mathrm{e}^{ikr_0}}{r_0}\int\limits_{\text{Öffnung}} \mathrm{e}^{-ik\phi(x',y')}\,\mathrm{d}f'$$

die Amplitude $E(\vec{r})$ der gebeugten Welle im Punkt P. Da sowohl Q als auch P auf der z-Achse liegen, gilt

$$\frac{\vec{r}_0\cdot\vec{n}}{r_0} = -\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r} = 1 \qquad \text{und} \qquad \phi(x',y') = -\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right)\frac{x'^2+y'^2}{2}$$

Hinweise: Führen Sie die Integralauswertung mit Polarkoordinaten (ρ', φ') durch und verwenden Sie bei den Rechnungen die Abkürzungen

$$a = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right) \qquad \textit{und} \qquad b = a\,\lambda\, f\ .$$

Es ist $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{1-x^N}{1-x}$ *und* $1-\cos(\alpha) = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

b) [2 Punkte] Für welche Abstände r ergeben sich Maxima von $|E(\vec{r})|^2$?
Zeigen Sie, dass diese Abstände r und der Abstand r_0 eine Linsengleichung mit Brennweite f erfüllen.

c) [1 Bonuspunkt] Plotten Sie den Verlauf der Intensitätsverteilung $|E(r)|^2$ als Funktion von b/π.