Aufgabe 5: Schwingung einer eingespannten Saite (schriftlich, 6 Punkte)

Eine Klaviersaite, deren Bewegung durch die Wellengleichung beschrieben wird, sei bei $x = 0$ und $x = L$ fest eingespannt.

a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Auslenkung $u(x,t)$ der Saite, wenn sie zur Zeit $t = 0$ gemäß

$$u(x,0) = u_0 \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \quad \dot{u}(x,0) = 0$$

ausgelenkt wird.

b) [4 Punkte] Berechnen Sie die Auslenkung $u(x,t)$ der Saite, die sich nach „Anschlagen" der Saite mit einem Klavierhammer der Breite a bei $t = 0$ gemäß

$$u(x,0) = 0\,, \quad \dot{u}(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le \frac{L-a}{2} \\ v_0 & \text{für} \quad \frac{L-a}{2} \le x \le \frac{L+a}{2} \\ 0 & \text{für} \quad \frac{L+a}{2} \le x \le L \end{cases}$$

ergibt. Mit welcher Amplitude tragen die ersten 5 Eigenschwingungen der Saite zur Schwingung bei, wenn (i) $a/L = 0.5$ und (ii) $a/L = 0.1$ ist?
Hinweis: Das Additionstheorem

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$$

sollte hilfreich sein.

Aufgabe 6: Violinsaiten (mündlich, 3 Punkte)

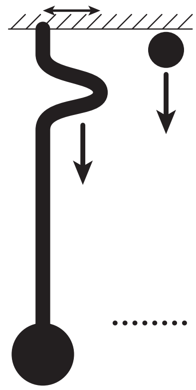
Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v einer transversalen Welle entlang einer gespannten Saite mit konstantem Durchmesser und konstanter Dichte gilt $v = \sqrt{\frac{F\,L}{M}}$, wobei F die Spannkraft, M die Masse und L die Länge der Saite sind. Eine Geige besitzt vier Stahlsaiten (Dichte $\rho_{\text{stahl}} = 7.86 \cdot 10^3$ kg/m^3), die zwischen dem Sattel und dem Steg über eine Länge von $L = 33$ cm frei schwingen können. Ihre Durchmesser und die Frequenz, auf die sie gestimmt sind, sind wie folgt gegeben:

E-Saite: 0.25 mm, 664.50 Hz
A-Saite: 0.45 mm, 443.00 Hz
D-Saite: 0.70 mm, 295.33 Hz
G-Saite: 0.75 mm, 196.89 Hz

Wie groß ist die Gesamtkraft, mit der die vier Saiten der Geige gespannt werden?

Aufgabe 7: Wellenimpuls (mündlich, 7 Punkte)

Ein homogener Stahldraht der Länge L und der Masse m wird senkrecht aufgehängt. An seinem unteren Ende ist eine Masse M befestigt. Jetzt wird die obere Aufhängung kurzzeitig horizontal ausgelenkt, sodass ein Transversalwellenimpuls nach unten läuft. Gleichzeitig wird vom Aufhängepunkt eine Kugel fallen gelassen (Luftreibung wird vernachlässigt).



a) [4 Punkte] Wo holt die Kugel die Welle ein?
Hinweis: Die Geschwindigkeit der Welle am Punkt z unterhalb der Aufhängung ist gegeben durch $v(z) = \sqrt{\frac{F(z)\,L}{m}}$, wobei die Spannkraft $F(z)$ durch die gesamte Gewichtskraft, die am Punkt z angreift, gegeben ist.

b) [3 Punkte] Betrachten Sie nun den Grenzfall einer sehr großen Masse $M \gg m$, indem Sie annehmen, dass die Spannkraft F lediglich durch die Gewichtskraft der angehängten Masse bestimmt wird, damit also über den gesamten Draht konstant ist. Ist ein Überholen durch die Kugel möglich? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8: Eigenschaften der Fouriertranformation (schriftlich, 4 Punkte)

Zeigen Sie durch direktes Ausrechnen, dass folgende Aussagen für die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

der Funktion $f(t)$ gelten:

a) [1 Punkte] $f(t)$ gerade $\Rightarrow \tilde{f}(\omega)$ gerade

b) [0,5 Punkte] $f(t)$ gerade, reell $\Rightarrow \tilde{f}(\omega)$ gerade, reell

c) [1 Punkte] $f(t)$ ungerade $\Rightarrow \tilde{f}(\omega)$ ungerade

d) [0,5 Punkte] $f(t)$ ungerade, reell $\Rightarrow \tilde{f}(\omega)$ ungerade, imaginär

e) [1 Punkte] $f(t)$ allgemein, reell $\Rightarrow \tilde{f}(\omega) = \tilde{f}_1(\omega) + i\tilde{f}_2(\omega)$
mit $\tilde{f}_1(\omega)$ gerade, reell, $\tilde{f}_2(\omega)$ ungerade, reell und $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}(\omega)^*$

Theoretische Ergänzungen

Aufgabe TE1: Relativistische Uhren (schriftlich, 5 Punkte)

Zwei synchronisierte Uhren A und B haben auf der Erde einen Abstand von 600 km. Eine Rakete fliegt mit der Geschwindigkeit $v = \frac{12}{13}c$ über die Erde hinweg und kommt erst an Uhr A, dann an Uhr B vorbei. Bei A zeigt eine Uhr in der Rakete die gleiche Zeit wie Uhr A. Welche Zeit zeigt die Raketenuhr im Vergleich zur Uhr B an, wenn sie über diese hinwegfliegt?

Aufgabe TE2: Lorentz-Invarianten (mündlich, 10 Punkte)

Für ein Inertialsystem Σ', das sich mit der Geschwindigkeit v in Richtung der x-Achse vom Inertialsystem Σ entfernt, lautet die zugehörige Lorentz-Transformation:

$$x' = \gamma(x - vt)\,,\ y' = y\,,\ z' = z\,,\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \text{ mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Eine Lorentz-Invariante ist eine Größe, die unter einer Lorentz-Transformation unverändert bleibt.

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass der Abstand zweier Punkte in der Raum-Zeit

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]$$

eine Lorentz-Invariante ist.

b) [6 Punkte] Zeigen Sie, dass die Wellengleichung für eine skalare Funktion $f(\vec{r}, t)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\vec{r}, t) = 0$$

eine Lorentz-Invariante ist.

Aufgabe TE3: Addition von Geschwindigkeiten (schriftlich, 5 Punkte)

a) [3 Punkte] Ein Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 2500 km/h schießt ein Geschoss mit einer Geschwindigkeit von 3500 km/h ab. Welche Geschwindigkeit des Geschosses misst ein Beobachter auf der Erde? Kann er relativistische Effekte messen? Berechnen Sie dazu die Laufzeit des Geschosses auf 1 km nicht-relativistisch und relativistisch.

b) [2 Punkte] Ein radioaktiver Kern fliegt mit einer Geschwindigkeit von $v = 0.5c$ in x-Richtung. In seinem Ruhesystem sendet er Elektronen mit einer Geschwindigkeit von $0.6c$ aus. Welche Geschwindigkeit haben die Elektronen im Laborsystem, wenn sie im Ruhesystem (i) in positiver x-Richtung, oder (ii) in negativer x-Richtung emittiert werden?