Übungen zur Physik III: Blatt 3 **WS 17/18** **Prof. Kappes/Prof. Krüger**
Ausgabe: 23.10.2017, Abgabe: 06.11.2017 **Übungen: Dr. Wigger**

Aufgabe 9: Gedämpfte Saite (schriftlich, 4 Punkte)

Die Auslenkungen einer Saite werden durch Energieabgabe an das umgebende Medium und durch dissipative Prozesse beim Biegen der Saite gedämpft. In einfachster Näherung kann man diese Dämpfung durch eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft beschreiben. Dies führt (mit einer Konstante γ) auf eine Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{v^2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \; .$$

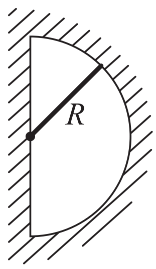
Lösen Sie diese Wellengleichung unter Verwendung eines Separationsansatzes der Form $u(x,t) = f(x)g(t)$ für eine Saite, die bei $x = 0$ und $x = L$ fest eingespannt ist. Zeigen Sie, dass die gedämpften Eigenschwingungen die Form

$$u_n(x,t) = \sin(k_n x)\; [a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)] \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)$$

haben. Wie hängt dabei ω_n von n und γ ab?
Hinweis: Wählen Sie die bei der Separation auftretende Konstante zu $K = -k^2$ mit k reell.

Aufgabe 10: Halbe Kreismembran (schriftlich, 5 Punkte)

Eine halbe Kreismembran mit Radius R (siehe Abbildung) ist am Rand fest eingespannt.



a) [1 Punkte] Geben Sie die Randbedingungen für die Auslenkungen $u\,(r, \varphi, t)$ an.

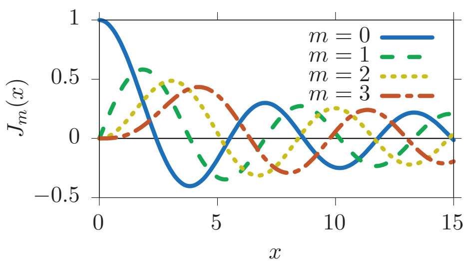
b) [3 Punkte] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Eigenschwingungen einer kreisförmigen Membran die Form

$$u(r,\varphi,t) = J_m(kr)\,[A\sin(m\varphi) + B\cos(m\varphi)]\,[C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)]$$

haben. Wobei J_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ die m-te Besselfunktion ist.
Bestimmen Sie nun für die halbkreisförmige Membran die möglichen Eigenschwingungen $u_{n,m}(r,\varphi,t)$ für gerade und ungerade m. Welches ist die niedrigste Eigenschwingung?

c) [1 Punkte] Bestimmen Sie – ausgehend von den in b) berechneten Schwingungsmoden – die Eigenfrequenzen $\omega_{n,m}$ dieser Membran. Geben Sie die vier niedrigsten Eigenfrequenzen für eine Membran mit $R = 30$ cm und $v = 0.1$ m/s explizit an.

Hinweis: Verlauf und Nullstellen $x_{n,m}$ einiger Besselfunktionen:



$x_{n,m}$	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$J_2(x)$	$J_3(x)$	$J_4(x)$
$n = 1$	*2.405*	*3.832*	*5.136*	*6.380*	*7.588*
$n = 2$	*5.520*	*7.016*	*8.417*	*9.761*	*11.064*
$n = 3$	*8.654*	*10.173*	*11.620*	*13.015*	*14.373*
$n = 4$	*11.792*	*13.323*	*14.796*	*16.224*	*17.616*
…	…	…	…	…	…

Aufgabe 11: Einseitig eingespannte Saite (mündlich, 5 Punkte)

Eine Saite, die durch die Wellengleichung beschrieben wird, sei bei $x = 0$ fest eingespannt. Das andere Ende der Saite sei an einem Ring befestigt, der sich reibungsfrei an einem in y-Richtung liegenden Stab bewegen kann. **Dadurch verlaufe die Saite bei $x = L$ stets horizontal.**

a) [2,5 Punkte] Berechnen Sie die Eigenfrequenzen dieser Saite.

b) [1,5 Punkte] Skizzieren Sie die Eigenschwingungen mit den vier niedrigsten Frequenzen.

c) [1 Punkte] Vergleichen Sie die Eigenfrequenzen bei vorgegebener Saitenlänge L mit denen der beidseitig eingespannten Saite.

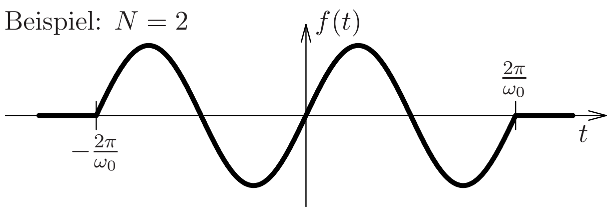
Aufgabe 12: Fouriertransformierte eines Wellenzuges (mündlich, 5 Punkte)

a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

eines endlichen Wellenzuges der Form

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{für} \quad |t| < \frac{N\pi}{\omega_0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



b) [2 Punkte] Skizzieren Sie ihr Ergebnis für $N = 1$, 2, 5 und 10.

c) [1 Punkte] Was ergibt sich im Grenzfall $N \to \infty$?
Hinweis: Erinnern Sie sich an die Betrachtung von $\cos(\omega_0 t)$ *aus der Vorlesung.*