Aufgabe 13: Orgelpfeife (mündlich, 8 Punkte)

Ein Gas sei in einem zylindrischen Hohlraum mit Radius R und Höhe h vollständig eingeschlossen (Deckel und Boden sind verschlossen). Die relative Druckänderung des Gases $\tilde{u}(\vec{r},t)$ wird durch die dreidimensionale Wellengleichung

$$\left(\Delta_{\vec{r}} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tilde{u}(\vec{r},t) = 0$$

beschrieben. Am inneren Rand der Orgelpfeife verschwindet die senkrechte Änderung von $\tilde{u}$, also $\partial\tilde{u}/\partial r = 0$ am Mantel und $\partial\tilde{u}/\partial z = 0$ an Deckel und Boden.

a) [6 Punkte] Verwenden Sie einen Produktansatz der Form

$$\tilde{u}(\vec{r},t) = \mathcal{F}(\vec{r})g(t) = F(r,\varphi)f(z)g(t) \ ,$$

um die Eigenfrequenzen des schwingenden Gases zu berechnen.
Hinweis: Sie können für F das Ergebnis aus der Vorlesung (Membran) verwenden.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die zehn niedrigsten Eigenfrequenzen für $h = 2R$.

Hinweise:
Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta_{\vec{r}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Nullstellen $x_{n,m}$ der Ableitung der Besselfunktion $J'_m(x)$:

$x_{n,m}$	$J'_0(x)$	$J'_1(x)$	$J'_2(x)$	$J'_3(x)$
$n=1$	*0*	*1.84*	*3.05*	*4.2*
$n=2$	*3.83*	*5.33*	*6.71*	*8.02*
$n=3$	*7.02*	*8.54*	*9.97*	*11.35*
$n=4$	*10.18*	*11.71*	*13.17*	*14.59*
...	...	...	...	...

Aufgabe 14: Doppler-Effekt (mündlich, 4 Punkte)

a) [1 Punkte] Ein mit einer Frequenz von $\nu_0 = 600$ Hz hupendes Auto bewege sich mit einer Geschwindigkeit von $\vec{v} = (40\,\mathrm{km/h}, 0, 0)$ bei Windstille auf den Beobachter bei $\vec{r} = 0$ zu.
Welchen Frequenzsprung $\Delta\nu$ bemerkt der Beobachter beim Passieren des Autos?
Hinweis: Rechnen Sie mit einer Schallgeschwindigkeit von $v = 330$ m/s.

b) [3 Punkte] Der gleiche Vorgang finde bei einem Sturm statt, der die Luft mit einer Geschwindigkeit von

(i) $\vec{v}_{\mathrm{Wind}} = (100\,\mathrm{km/h}, 0, 0)$

(ii) $\vec{v}_{\mathrm{Wind}} = (-100\,\mathrm{km/h}, 0, 0)$

(iii) $\vec{v}_{\mathrm{Wind}} = (0, 100\,\mathrm{km/h}, 0)$

bewegt. Bestimmen Sie jeweils $\Delta\nu$.

Aufgabe 15: Ausbreitung einer Kugelwelle (schriftlich, 7 Punkte)

Von einer Punktquelle bei $\vec{r} = 0$ gehe eine dreidimensionale Kugelwelle der Form

$$u(\vec{r}, t) = A(r)\,\cos(kr - \omega t)$$

aus.

a) [5 Punkte] Die Energiestromdichte der Welle ist gegeben als

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = -\alpha \frac{\partial u(\vec{r}, t)}{\partial t} \vec{\nabla} u(\vec{r}, t)\ ,$$

wobei der unbestimmte Faktor α dafür sorgt, dass S die Einheit $\mathrm{J/(m^2 s)}$ besitzt. Die Energieerhaltung besagt, dass durch jede Kugeloberfläche um die Quelle dieselbe Energiemenge fließen muss. Berechnen Sie, wie die Amplitude $A(r)$ gewählt werden muss, damit die Energieerhaltung erfüllt ist.
Hinweis: Integrieren Sie dazu $\vec{S}$ über eine Kugelschale mit beliebigem Radius r und über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ von $u(\vec{r}, t)$.
Der Nabla-Operator lautet in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

b) [2 Punkte] Überprüfen Sie, dass Ihr Ergebnis aus a) die dreidimensionale Wellengleichung

$$\left(\Delta_{\vec{r}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{r}, t) = 0$$

erfüllt. Welche Beziehung muss dafür zwischen k, ω und v bestehen?
Hinweis: Der Laplace-Operator lautet in Kugelkoordinaten:

$$\Delta_{\vec{r}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{\tan(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

Aufgabe 16: Überlagerung von ebenen Wellen (schriftlich, 3 Punkte)

Eine ebene Welle wird an einer ideal spiegelnden Oberfläche in der x-y-Ebene (also $z = 0$) reflektiert. Die einfallende Welle wird beschrieben durch

$$u_{\mathrm{ein}}(\vec{r}, t) = A \sin\left(\vec{k}_{\mathrm{ein}} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \quad \text{mit} \quad \vec{k}_{\mathrm{ein}} = k_x \vec{e}_x + k_z \vec{e}_z$$

Der Einfallswinkel α_1 ist also gegeben durch $\tan(\alpha_1) = k_x/k_z$. Bei der Reflexion bleiben die Amplitude A und die Kreisfrequenz $\omega = ck$ unverändert.

a) [0,5 Punkte] Überlegen Sie sich, wie der $\vec{k}$-Vektor $\vec{k}_{\mathrm{aus}}$ der auslaufenden Welle auf Grund des Reflexionsgesetzes aussehen muss.

b) [1 Punkte] Geben Sie $u_{\mathrm{aus}}(\vec{r}, t)$ an. Dabei ist zu beachten, dass $u(\vec{r}, t) = u_{\mathrm{ein}}(\vec{r}, t) + u_{\mathrm{aus}}(\vec{r}, t)$ an der spiegelnden Oberfläche für alle Zeiten t verschwinden muss.

c) [1 Punkte] Zeigen Sie, dass sich $u(\vec{r}, t)$ als Produkt einer stehenden Welle in z-Richtung und einer laufenden Welle in x-Richtung schreiben lässt.

d) [0,5 Punkte] Gibt es außer $z = 0$ noch andere Ebenen, auf denen $u(\vec{r}, t)$ stets Null ist? Falls ja, wo liegen sie?

Theoretische Ergänzungen:

Aufgabe TE4: Addition von Geschwindigkeiten II (mündlich, 4 Punkte)

In einem System Σ wird zur Zeit $t = 0$ vom Punkt $\vec{r} = 0$ aus ein Lichtstrahl unter einem Winkel von $30°$ zur x-Achse emittiert.
Welchen Winkel misst ein Beobachter, der sich relativ zu Σ mit $v = (0.6\,c, 0, 0)$ bewegt und sich bei $t' = 0$ am Ort $\vec{r}\,' = 0$ befindet, in seinem Ruhesystem Σ'?

Aufgabe TE5: Gleichzeitigkeit im Minkowski-Diagramm (schriftlich, 4 Punkte)

Zwei Ereignisse sollen im System Σ im Abstand Δx gleichzeitig erfolgen. Wie groß ist der Zeitunterschied dieser Ereignisse gesehen von einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Inertialsystem Σ'. Zeichnen Sie dazu ein Minkowski-Diagramm.

Aufgabe TE6: Raumschiff im Minkowski-Diagramm (mündlich, 6 Punkte)

Ein Raumschiff der Eigenlänge 100 m fliegt mit $v = 0.6\,c$ an einer interplanetaren Station vorbei. Als die Spitze des Raumschiffs einen Sendemast der Raumstation passiert, wird ein Radiosignal ausgesandt.

a) [3 Punkte] Nach welcher Zeit erreicht das Signal das Heck des Raumschiffs?

b) [3 Punkte] Nach welcher Zeit passiert das Heck des Raumschiffs den Sendemast?

Geben Sie die Zeiten jeweils in Raumschiffzeit und Stationszeit an. Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch mit einem Minkowski-Diagramm und rechnerisch.

Aufgabe TE7: Batterie-Zug (schriftlich, 6 Punkte)

Am Plus- und Minuspol einer Batterie ist je ein leitender Draht angebracht, mit dem die Batterie an einer Schiene aufgehängt wird. Die Batterie bewegt sich entlang der Schiene mit einer großen Geschwindigkeit v und hat in ihrem Ruhesystem die Länge d. Die Schiene ist nicht-leitend bis auf eine Strecke d (im Ruhesystem der Schiene), wo ein Stück Kupfer eingefügt ist. Der Konstrukteur, der an der Schiene steht, sieht, dass die bewegte Batterie wegen der Längenkontraktion kürzer ist als das ruhende Kupferstück und befürchtet daher einen Kurzschluss. Der Chefingenieur argumentiert aus Sicht der bewegten Batterie und behauptet, es sei völlig sicher eine solcher Kupferstrecke einzubauen (d.h. dass es keinen Kurzschluss gibt), da aus Sicht der Batterie Kupferstück kontrahiert, also kürzer als die Batterie ist. Wer hat Recht?
Hinweis: Überlegen Sie sich, was ein Kurzschluss in diesem System bedeutet (Geschwindigkeit der Informationsausbreitung).