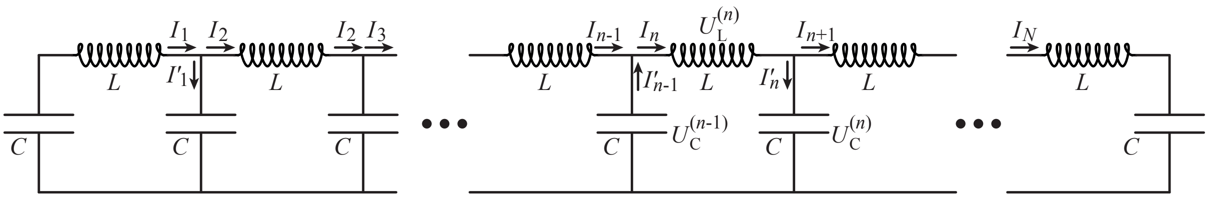
Aufgabe 17: Lineares Netzwerk aus LC-Gliedern (schriftlich, 5 Punkte)

Betrachten Sie ein endliches Netzwerk aus N gekoppelten Stromkreisen aus Induktivitäten L und Kondensatoren C, wie es im Bild gezeigt ist.



a) [0,5 Punkte] Wie lautet die Eigenfrequenz für einen einzelnen Schwingkreis, also den Fall $N = 1$?
Hinweis:
Sie können direkt das Ergebnis für einen einzelnen Schwingkreis aus der Vorlesung verwenden.

b) [1,5 Punkte] Für den Fall zweier gekoppelter Schwingkreise, also für $N = 2$, gibt es bereits zwei Eigenfrequenzen. Berechnen Sie diese.

c) [1 Punkte] Zeigen Sie nun, dass für den Strom bei beliebigem N in der n-ten Spule

$$\ddot{I}_n = \frac{1}{LC}\left(I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}\right)$$

gilt.

d) [2 Punkte] Berechnen Sie mit Hilfe des Ansatzes

$$I_n(k) = \hat{I}\sin\left(\frac{nk\pi}{N+1}\right)\mathrm{e}^{i\omega_k t}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

die N Eigenfrequenzen ω_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ des Systems.
Zeigen Sie, dass Sie hier für den Fall $N = 2$ die selben Eigenfrequenzen erhalten wie in Teil b).
Hinweis: $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$

Aufgabe 18: Lineare Sendeantenne (schriftlich, 4 Punkte)

Beim Vorliegen einer kontinuierlichen Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$ ist das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r},t)$ durch

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\int \vec{j}\left(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c}\right)\mathrm{d}^3 r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\dot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

gegeben.
Im einfachen Modell einer linearen Antenne der Länge L ist die Stromdichte gegeben als

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \begin{cases} I_0\delta(x)\delta(y)\left(1 - 2\frac{|z|}{L}\right)\sin(\omega t)\,\vec{e}_z & \text{für } -\frac{L}{2} \le z \le \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,.$$

a) [1 Punkte] Skizzieren Sie den Verlauf der Stromdichte in der Antenne für die Zeitpunkte $t = 0$, $\frac{\pi}{2\omega}$, $\frac{\pi}{\omega}$ und $\frac{3\pi}{2\omega}$.

a) [1 Punkte] Berechnen Sie die zeitliche Änderung des elektrischen Dipolmoments $\dot{\vec{p}}$.

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die zeitlich gemittelte Strahlungsleistung $\overline{P}_\mathrm{S}$ in der Fernzone.

Aufgabe 19: Klassisches Modell des Wasserstoffatoms (mündlich, 9 Punkte)

Im klassischen Modell eines Wasserstoffatoms bewegt sich ein Elektron mit Masse m und Ladung $-e$ auf einer Kreisbahn mit Radius R um ein im Ursprung ruhendes Proton mit Ladung $+e$. Es wirkt dabei die Coulombkraft $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}$. Da es sich bei der Kreisbewegung um eine beschleunigte Bewegung handelt, wird Energie in Form von elektromagnetischen Wellen abgestrahlt, die der Kreisbewegung verloren geht. Das Elektron wird sich deshalb dem Proton immer mehr annähern und schließlich in dieses hineinstürzen. Dieses Problem der Instabilität der Atome war ein zentrales Problem der klassischen Physik und konnte erst durch die Quantenmechanik gelöst wurden.

a) [2 Punkte] Das Elektron bewege sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einer Kreisbahn in der xy-Ebene um das Proton und beide Teilchen sollen als Punktladungen beschrieben werden.
Damit lautet die Ladungsdichte

$$\varrho(\vec{r},t) = -e\delta\big[x - R\cos(\omega t)\big]\delta\big[y - R\sin(\omega t)\big]\delta\big(z\big) + e\delta\big(\vec{r}\big) \ .$$

Berechnen Sie das Dipolmoment

$$\vec{p}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{r}\,\varrho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3r$$

dieser Ladungsverteilung und zeigen Sie, dass die komplexe Amplitude von $\vec{p}(t) = \mathrm{Re}\left(\vec{p}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\right)$ gegeben ist als $\vec{p}_0 = -eR(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$ (zirkulare Polarisation).

b) [4 Punkte] Berechnen Sie den über eine Periode gemittelten Poyntingvektor $\overline{\vec{S}}$ sowie die zeitgemittelte gesamte Strahlungsleistung $\overline{P}_S$ für diese Kreisbewegung. Verwenden Sie hierzu die in der Vorlesung hergeleitete Formel

$$\overline{\vec{S}} = \frac{\omega^4}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\frac{|\vec{e}_r \times \vec{p}_0\,|^2}{r^2}\vec{e}_r \qquad \text{mit } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und die Definition $\overline{P}_\mathrm{S} = \oint \overline{\vec{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{f}$ $(\mathrm{d}\vec{f} = \vec{e}_r\,\mathrm{d}f)$, wobei über eine geschlossene Kugeloberfläche integriert wird.
Hinweise:
Für eine komplexe Zahl z gilt $|z|^2 = zz^*$.
Es gilt die Formel $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right) - \left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.
In Kugelkoordinaten gilt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix} \ .$$

c) [1 Punkte] Drücken Sie für die Kreisbewegung des Elektrons die mechanische Gesamtenergie E, den Drehimpuls $L = mvR$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/R$ als Funktion des Bahnradius R aus.

d) [2 Punkte] Die abgestrahlte Leistung $\overline{P}_\mathrm{S}$ führt zu einer Abnahme des Bahnradius $R(t)$. Zeigen Sie, dass sich mit Hilfe der Energiebilanz eine Differentialgleichung für $R(t)$ in der Form

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{R^2} \qquad \text{mit } \gamma = \frac{e^4}{12\pi^2\varepsilon_0^2 m^2 c^3}$$

ergibt. Lösen Sie diese, z.B. durch Trennung der Variablen, mit der Anfangsbedingung $R(0) = a_\mathrm{B}$. Dabei ist a_B der Bohrscher Radius, d.h. der Radius, für den der Drehimpuls L den Wert $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \cdot 10^{-34}$ Js annimmt (h: Plancksches Wirkungsquantum). Bestimmen sie die „Spiralzeit“ τ, nach der das Elektron in das Proton fällt, also $R = 0$ erreicht.
Hinweis: Verwenden Sie die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$.