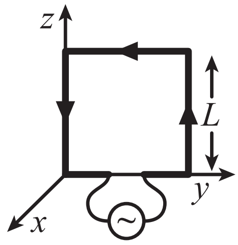
Übungen zur Physik III: Blatt 6 **WS 17/18** **Prof. Kappes/Prof. Krüger**
Ausgabe: 20.11.2017, Abgabe: 27.11.2017 **Übungen: Dr. Wigger**

Aufgabe 20: Magnetische Dipolantenne (schriftlich, 7 Punkte)

Eine quadratische Leiterschleife mit der Kantenlänge L, die in der yz-Ebene liegt, werde von einem Wechselstrom

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

durchflossen. Der Strom in den Zuleitungen soll bei den folgenden Betrachtungen vernachlässigt werden.



Damit lautet die Stromdichte in der Leiterschleife

$$\vec{j}(\vec{r},t) = I_0 \cos(\omega t)\, \delta(x) \Big\{ \big[-\delta(y) + \delta(y-L) \big] \Theta(z)\Theta(L-z)\vec{e}_z + \big[\delta(z) - \delta(z-L)\big]\Theta(y)\Theta(L-y)\vec{e}_y \Big\},$$

wobei $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ die Stufenfunktion ist.

a) [3 Punkte] Berechnen Sie die zeitliche Änderung des elektrischen Dipolmoments $\dot{\vec{p}}$ und die zeitliche Änderung des magnetischen Dipolmoments $\dot{\vec{m}}$ über

$$\dot{\vec{p}}\,(\tilde{t}\,) = \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}\,(\vec{r}\,',\tilde{t}\,)\ \mathrm{d}^3 r' \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{m}}\,(\tilde{t}\,) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \vec{r}\,' \times \dot{\vec{j}}\,(\vec{r}\,',\tilde{t}\,)\ \mathrm{d}^3 r' \qquad \left(\tilde{t} = t - \frac{r}{c}\right) .$$

b) [1,5 Punkte] Geben Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ der beiden Dipolstrahlungen in der Fernzone an.

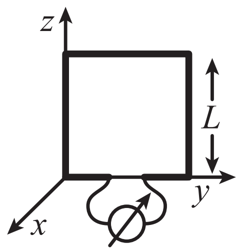
c) [2,5 Punkte] Wie groß ist die zeitlich gemittelte abgestrahlte Leistung $\overline{P}_\mathrm{S}$ dieser Rahmenantenne?

Aufgabe 21: Empfangsantenne (mündlich, 7 Punkte)

Die quadratische Leiterschleife aus Aufgabe 20 dient nun als Empfangsantenne. Sie wird vom elektrischen Feld

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \cos(ky - \omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 \end{pmatrix}$$

einer ebenen Welle durchsetzt.



a) [3 Punkte] Berechnen Sie die durch $\vec{E}$ induzierte Ringspannung

$$U_\mathrm{ind} = \oint \vec{E}\,(\vec{r},t) \cdot \mathrm{d}\vec{s}\ .$$

b) [3 Punkte] Welche Ringspannung ergibt sich für

i) [1 Punkte] $L = n\lambda$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$

ii) [1 Punkte] $L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ mit $n = 0, 1, 2, \ldots$

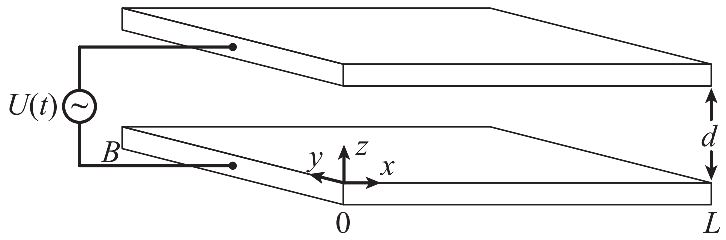
iii) [1 Punkte] $L \ll \lambda$

Welche Kantenlänge würden Sie für eine Antenne wählen, damit Sie sowohl UKW- als auch MW-Sender empfangen können?

c) [1 Punkte] Wie groß ist U_ind, wenn die Leiterschleife in der xz-Ebene liegt?

Aufgabe 22: Doppelleiter (mündlich, 3 Punkte)

Ein Doppelleitersystem besteht aus zwei, im Abstand d angebrachten rechteckigen Metallplatten der Größe $B \cdot L$. Es sei $d \ll B \ll L$.



Betrachten Sie zunächst den Fall unendlich langer Platten $L \to \infty$. Durch Anlegen einer Wechselspannung der Frequenz ω wird zwischen den Platten ein elektrisches Feld $\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\vec{e_z}$ erzeugt. (Randeffekte bei $y = 0$ und $y = B$ bleiben unberücksichtigt.)

a) [1 Punkte] Berechnen Sie das zugehörige Magnetfeld $\vec{B}$.

b) [1 Punkte] Berechnen Sie die Spannung $U(x, t)$ zwischen den Platten.

c) [1 Punkte] Wie muss bei vorgegebener Frequenz ω die Länge L gewählt werden, damit sich stehende Wellen ausbilden?

Aufgabe 23: Nützliche Relationen (schriftlich, 3 Punkte)

Bei der theoretischen Beschreibung der elektrischen und magnetischen Dipolstrahlung treten skalare und vektorwertige Funktionen auf, die von dem Argument $t - \frac{r}{c}$ abhängen. Dabei ist $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Bei den Rechnungen ist es zweckmäßig, die Ortsableitungen der Funktionen durch Zeitableitungen darzustellen.
Zeigen Sie, dass für $\tilde{t} = t - \frac{r}{c}$ folgende Relationen gelten:

a) [1 Punkte] $\quad \mathrm{rot}\left[\vec{a}\left(\tilde{t}\right)\right] = \frac{1}{cr}\dot{\vec{a}}\left(\tilde{t}\right) \times \vec{r}$

b) [1,5 Punkte] $\quad \mathrm{rot}\left[\vec{a}\left(\tilde{t}\right) \times \vec{r}\right] = 2\vec{a}\left(\tilde{t}\right) + \frac{1}{cr}\left[\dot{\vec{a}}\left(\tilde{t}\right) \times \vec{r}\right] \times \vec{r}$

c) [0,5 Punkte] $\quad \mathrm{div}\left[\vec{a}\left(\tilde{t}\right) \times \vec{r}\right] = 0$

Hinweise: Sie können die in der Vorlesung gezeigte Relation $\mathrm{grad}[f(\tilde{t})] = -\frac{\vec{r}}{cr}\dot{f}(\tilde{t})$ *verwenden.*
Es gilt $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{c}\right) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

Theoretische Ergänzungen:

Aufgabe TE8: Levi-Civita-Tensor 4. Stufe (mündlich, 5 Punkte)

Der Levi-Civita Tensor 4. Stufe ist wie folgt definiert:

$$\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = \begin{cases} +1 & \text{für } \mu\nu\kappa\lambda \text{ gerade Permutationen von } \{0,1,2,3\} \\ -1 & \text{für } \mu\nu\kappa\lambda \text{ ungerade Permutationen von } \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wie viele Elemente sind ungleich Null? Bestimmen Sie alle Elemente, für die $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = 1$ bzw. $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = -1$ ist.

Aufgabe TE9: Gruppen-Eigenschaften (mündlich, 5 Punkte)

Betrachten Sie Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zueinander bewegen. Diese dazugehörigen Lorentz-Transformationen bilden eine Untergruppe der Lorentz-Gruppe. Zeigen Sie, dass diese Untergruppe alle Eigenschaften einer abelschen Gruppe erfüllt.

a) [1 Punkte] Abgeschlossenheit (Sie können hier das Ergebnis von Aufgabe TE10 übernehmen).

b) [1 Punkte] Es gilt das Assoziativ-Gesetz.

c) [1 Punkte] Es existiert ein Eins-Element.

d) [1 Punkte] Es gibt ein inverses Element.

e) [1 Punkte] Es gilt das Kommutativ-Gesetz.

Geben Sie das Eins-Element und das inverse Element explizit an.
Gilt auch für die vollständige Lorentz-Gruppe, dass sie abelsch, d.h. kommutativ ist?
[1 Bonuspunkt] Nennen Sie ein Beispiel für eine Kombination von nicht kommutativen Transformationen.

Aufgabe TE10: Verknüpfung von Lorentz-Trafos (schriftlich, 5 Punkte)

Betrachten Sie zwei Lorentz-Transformationen für Inertialsysteme, die sich in x-Richtung relativ zueinander bewegen. Dabei habe $(L_1)^\mu{}_\nu$ die Geschwindigkeit v_1 und $(L_2)^\mu{}_\nu$ die Geschwindigkeit v_2. Zeigen Sie, dass $(L_3)^\mu{}_\nu = (L_1)^\mu{}_\lambda (L_2)^\lambda{}_\nu$ auch eine Lorentz-Transformation ist und die Geschwindigkeit v_3 hat. Wie lautet v_3?

Aufgabe TE11: Lorentz-Transformationen (schriftlich, 5 Punkte)

Eine Lorentz-Transformation $L^\mu{}_\nu$ zeichnet sich dadurch aus, dass

$$L^\mu{}_\alpha \, \eta_{\mu\nu} \, L^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\overline{\overline{L}}^T \cdot \overline{\overline{\eta}} \cdot \overline{\overline{L}} = \overline{\overline{\eta}}$$

gilt (Dies folgt aus der Lorentz-Invarianz des Skalarprodukts). Dabei ist $\eta_{\mu\nu}$ der metrische Tensor

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass

a) [3 Punkte]

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{c}\gamma \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & \\ -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

b) [2 Punkte]

$$L^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

jeweils Lorentz-Transformationen sind.
Welche Koordinatentransformationen werden durch die $L^\mu{}_\nu$ beschrieben?