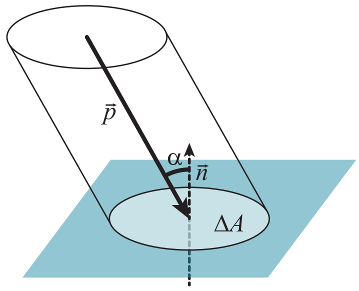
Aufgabe 27: Strahlungsdruck (mündlich, 6 Punkte)

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum breite sich in z-Richtung aus. Berechnen Sie für die folgenden durch ihr Magnetfeld gegebenen Wellentypen

(i) linear polarisiert: $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x \cos(kz - \omega t)$

(ii) zirkular polarisiert: $\vec{B} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} [\vec{e}_x \cos(kz - \omega t) - \vec{e}_y \sin(kz - \omega t)]$



a) [2 Punkte] das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$,

b) [2 Punkte] den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$ und den über eine Periode gemittelten Poynting-Vektor $\overline{\vec{S}}(\vec{r}, t)$,

c) [2 Punkte] den Strahlungsdruck auf eine Ebene, deren Normalenvektor um den Winkel α gegen die Ausbreitungsrichtung $\left(\vec{k} = k\vec{e}_z\right)$ geneigt ist, sowohl für eine total absorbierende als auch für eine total reflektierende Ebene.
Hinweis: Der Strahlungsdruck entspricht dem Impulsübertrag pro Zeiteinheit und pro Fläche. Verwenden Sie die Impulsdichte $\vec{p} = \frac{1}{c^2} \overline{\vec{S}}$ (Impuls pro Volumen).

Aufgabe 28: Wellenpaket im Hohlleiter (schriftlich, 10 Punkte)

Betrachten Sie einen rechteckigen Hohlleiter mit den Kantenlängen a und b, in dem ein Wellenpaket in z-Richtung läuft. Das elektrische Feld habe die Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) f(z,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \qquad f(z,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \mathrm{e}^{i[kz - \omega(k)t]} \, \mathrm{d}k \qquad \text{und} \qquad A(k) = \mathrm{e}^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}} .$$

a) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\vec{E}(\vec{r}, t)$ der Wellengleichung genügt und berechnen Sie die Dispersionsrelation $\omega(k)$. Geben Sie die Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit an.

b) [3 Punkte] Entwickeln Sie $\omega(k)$ bis zur zweiten Ordnung in k und berechnen Sie $f(z, t)$ in dieser Näherung.
Hinweis: Bestimmen Sie für die Taylorentwicklung ω_0' und ω_0'' in

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \omega_0'(k - k_0) + \frac{\omega_0''}{2}(k - k_0)^2 \qquad \text{mit} \qquad \omega_0 = \omega(k_0).$$

Es ist nützlich die Abkürzung $\gamma^2 = \frac{1}{\sigma^2} + i\omega_0'' t$ zu verwenden.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie $|f(z,t)|$. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Maximum von $|f(z,t)|$?

Nützliches Integral: $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\beta k} \mathrm{e}^{-\alpha k^2} \, \mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) \quad \textit{für} \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0$$

d) [2 Punkte] Die Breite des Wellenpakets sei durch den Abfall der Amplitude von $|f(z,t)|$ auf $\frac{1}{e}$ des maximalen Wertes definiert. Berechnen Sie die Breite als Funktion der Zeit.

e) [1 Punkte] Wie verhält sich das Wellenpaket für große a und b?

Aufgabe 29: Maxwell-Gleichungen in Materie (mündlich, 4 Punkte)

a) [1 Punkte] Geben Sie die „makroskopischen“ Maxwell-Gleichungen an und diskutieren Sie die physikalische Bedeutung der auftretenden Ladungs- und Stromdichten.

b) [3 Punkte] Berechnen Sie analog zum Vorgehen in Kapitel 15.1.5 der Vorlesung aus

$$p_{\text{mech}} = \frac{\partial w_{\text{mech}}}{\partial t} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

die Feldenergiedichte w_{el} und die Energiestromdichte (Poynting-Vektor) $\vec{S}$ speziell für

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E} \qquad \text{und} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H} \,,$$

wobei ε und μ zeitunabhängig seien.

Theoretische Ergänzungen:

Aufgabe TE12: Areasinus hyperbolicus (mündlich, 6 Punkte)

Bei einigen Rechnungen in der relativistischen Mechanik tritt die Funktion $y = \operatorname{arsinh}(x)$ auf. Sie ist die Umkehrfunktion von $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Diese Aufgabe soll Sie an die wesentlichen Eigenschaften von $\operatorname{arsinh}(x)$ erinnern.

a) [1 Punkte] Skizzieren Sie $y = \sinh(x)$ und $y = \operatorname{arsinh}(x)$.

b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \operatorname{arsinh}(x)$ gilt. Nutzen Sie dabei die Eigenschaften von $x = \sinh(y)$ aus.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh}(x)$ unter Verwendung der Rechenregel für Umkehrfunktionen: $\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \left[\left. \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} \right|_{y=f^{-1}(x)} \right]^{-1}$.

d) [1 Punkte] Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) \,.$$

Aufgabe TE13: Massenträgheit (mündlich, 4 Punkte)

Ein elektrisch geladenes Teilchen der Ruhemasse m_0 und Ladung q bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung. An der Stelle $x = 0$ kommt es in einen Bereich mit homogenem elektrischem Feld (i) $\vec{E} = E\vec{e}_x$ bzw. (ii) $\vec{E} = E\vec{e}_y$ und erfährt eine Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ in Richtung des Feldes.
Diskutieren Sie die effektive träge Masse (Kraft pro Beschleunigung) bei $x = 0$ für die beiden Fälle.
Hinweis: Gehen Sie dafür direkt von $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[m_0\gamma(v)\vec{v}]$ *aus.*

Aufgabe TE14: Relativ. Bewegung bei konst. Kraft (schriftlich, 10 Punkte)

Ein Teilchen der Ruhemasse m_0 bewege sich in einem konstanten Kraftfeld $\vec{F} = (F, 0, 0)$. Berechnen Sie für die Anfangsbedingungen $\vec{p}(0) = (0, 0, p_0)$ und $\vec{r}(0) = (x_0, 0, 0)$ die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Bahnkurve $\vec{r}(t)$.
Skizzieren Sie Ihr Resultat für $\vec{r}(t)$.
Hinweise:
Gehen Sie von der Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}(t) = \vec{F}(t)$ *mit dem relativistischen Impuls* $\vec{p}(t) = m_0\gamma(v)\vec{v}(t)$ *aus und nutzen Sie die relativistische Energie-Impuls-Beziehung* $E_{\text{rel}} = m_0\gamma(v)c^2 = \sqrt{c^2p^2 + m_0^2c^4}$.
Nützliche Integrale:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a^2+x^2} \,, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$$