Aufgabe 30: Homogen polarisierte Kugel (mündlich, 5 Punkte)

Das elektrische Potential eines Materials mit der Polarisation $\vec{P}(\vec{r}\,)$ ist durch

$$\Phi_{\mathrm{pol}}(\vec{r}\,) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \vec{P}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' \qquad \text{gegeben.}$$

a) [3 Punkte] Berechnen Sie $\Phi_{\mathrm{pol}}(\vec{r}\,)$ und das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}_{\mathrm{pol}}(\vec{r}\,)$ für eine homogen polarisierte Kugel mit Radius R. Dabei ist:

$$\vec{P}(\vec{r}\,) = \begin{cases} \vec{P} & \text{für} \;\; r \le R \\ 0 & \text{für} \;\; r \ge R \end{cases} \quad .$$

Betrachten Sie dabei den Bereich innerhalb und außerhalb der Kugel.
Hinweis: Zeigen Sie, dass sich das Potential in der Form $\Phi_{\mathrm{pol}}(\vec{r}\,) = \vec{E}_{\mathrm{Kugel}}(\vec{r}\,)\cdot\vec{P}$ schreiben lässt, wobei $\vec{E}_{\mathrm{Kugel}}(\vec{r}\,)$ des Feld einer homogen geladenen Kugel ist. Nutzen Sie das aus Physik II bekannte Ergebnis für die homogen geladene Kugel

$$\vec{E}_{\mathrm{Kugel}}(\vec{r}\,) = \begin{cases} \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{r} & \text{für} \;\; r \le R \\ \frac{R^3}{3\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} & \text{für} \;\; r \ge R \end{cases} \quad .$$

b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass das oben angegebene elektrostatische Potential aus

$$\Phi_{\mathrm{pol}}(\vec{r}\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\varrho_{\mathrm{pol}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'$$

mit $\varrho_{\mathrm{pol}}(\vec{r}\,) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\cdot\vec{P}(\vec{r}\,) = -\mathrm{div}\left[\vec{P}(\vec{r}\,)\right]$ folgt, falls $\lim\limits_{|\vec{r}\,|\to\infty}\vec{P}(\vec{r}\,) = 0$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie $\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\cdot\left(\vec{P}(\vec{r}\,')\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)$, wenden Sie den Gaußschen Satz an und nutzen Sie aus, dass $\vec{\nabla}_{\vec{r}\,'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$ ist.

Aufgabe 31: Polaritonlösung der Maxwellgleichungen (mündlich, 5 Punkte)

Im phänomenologischen Isolatormodell werden die gebundenen Ladungen durch harmonische Oszillatoren mit Resonanzfrequenz ω_0 und Dämpfung γ beschrieben. Breitet sich in diesem Medium eine elektromagnetische Welle aus, so kommt es zu einer Kopplung der elektromagnetischen und der mechanischen Schwingungen und zur Ausbildung neuer Eigenschwingungen. Diese werden in der Festkörperphysik Polaritonen genannt; sie spielen eine wichtige Rolle für die optischen Eigenschaften von Halbleitern und Isolatoren.
Das Verhalten des Materials sei charakterisiert durch die frequenzabhängige Suszeptibilität

$$\chi_{\mathrm{el}}(\omega) = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\,\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-i\gamma\omega} \qquad \text{mit} \qquad \omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$$

eines Systems harmonischer Oszillatoren. Es kann ferner angenommen werden, dass es in dem Material keine freien Ladungsträger und keine Volumenströme gibt. Außerdem sei das Material unmagnetisch ($\mu = 1$).

a) [1 Punkte] Machen Sie für das elektrische Feld $\vec{E}$ einen Ansatz einer ebenen monochromatischen Welle mit Wellenvektor $\vec{k} = k\vec{e}_z$ und Kreisfrequenz ω. Ferner sei $\vec{E}$ linear in x-Richtung polarisiert. Finden Sie aus der durch die oben genannte Suszeptibilität gegebenen Materialgleichung und der Maxwellgleichung $\mathrm{rot}(\vec{E}) = -\dot{\vec{B}}$ die zu dem angesetzten elektrischen Feld gehörenden Felder $\vec{D}$ (dielektrische Verschiebung) und $\vec{B}$ (magnetisches Feld).

b) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass alle Maxwellgleichungen durch die Ansätze aus Teil a) gelöst werden. Welche Beziehung besteht zwischen dem Betrag des Wellenvektors k und der Kreisfrequenz ω?
Hinweis: Verwenden Sie die Maxwellgleichungen in Fourierdarstellung.

c) [2 Punkte] Betrachten Sie nun den dämpfungsfreien Fall $\gamma = 0$. Für welche Werte von ω existieren Lösungen vom obigen Typ mit reellem k-Vektor?
Skizzieren Sie für diesen Fall die Dispersionsrelation $\omega(k)$.

Aufgabe 32: Welle in einem anisotropen Medium (schriflich, 10 Punkte)

In anisotropen Materialien, z.B. in Kristallen mit niedriger Symmetrie zeigen im Allgemeinen die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die Polarisation $\vec{P}$ bzw. die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ nicht in dieselbe Richtung. Der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{D}$ wird dann durch den dielektrischen Tensor $\underline{\varepsilon}$ beschrieben. In einem optisch einachsigen Kristall ist eine Achse ausgezeichnet, während in der Ebene senkrecht dazu alle Richtungen gleichberechtigt sind. Betrachten Sie einen unendlich ausgedehnten optisch einachsigen Kristall. Die optische Achse liege in der x-Richtung. Ein einfaches Modell zur Beschreibung der dielektrischen Eigenschaften eines solchen Materials ist gegeben durch die Materialgleichung:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \bar{\bar{\varepsilon}} \vec{E} \ ,$$

wobei $\bar{\bar{\varepsilon}}$ folgende Matrix (dielektrischer Tensor) ist

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \ .$$

Ferner kann angenommen werden, dass es in dem Material keine Volumenströme oder freien Ladungsträger gibt und dass das Material unmagnetisch ist ($\mu = 1$).

a) [3 Punkte] Machen Sie für die dielektrische Verschiebung den Ansatz

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} D_0 \mathrm{e}^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \quad \text{mit} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finden Sie aus obiger Materialgleichung und der Maxwellgleichung $\mathrm{rot}\left(\vec{E}\right) = -\dot{\vec{B}}$ die zu dem angesetzten Feld $\vec{D}$ gehörenden Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass alle makroskopischen Maxwellgleichungen durch die Ansätze aus Teil a) erfüllt werden können. Welche Beziehungen müssen dazu zwischen den Komponenten k_x und k_y des Wellenvektors sowie zwischen der Kreisfrequenz ω und dem Betrag des Wellenvektors k bestehen?

c) [3 Punkte] Berechnen Sie den Poyntingvektor $\vec{S}$. Beachten Sie, dass bei dieser Rechnung die reellen Felder $\mathrm{Re}\left(\vec{E}\right)$ und $\mathrm{Re}\left(\vec{H}\right)$ zu benutzen sind. Was ergibt sich für den über eine Periode zeitlich gemittelten Poynting-Vektor $\overline{\vec{S}}$? Vergleichen Sie die Richtungen von $\vec{k}$ und $\vec{S}$.

d) [1 Punkte] Welcher Bedingung müssen ε_1 und ε_2 genügen, damit das elektrische Feld $\vec{E}$ transversal ist?