Übungen zur Physik I

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn, Prof.Dr. Cornelia Denz
Übungen: Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 5

mündlich: 05. oder 06.11.18
schriftlich: 08. oder 09.11.18

Aufgabe 15: Bahnkurve: Zykloide **(10 Punkte, schriftlich)**

Ein Rad vom Radius R rollt auf einer Geraden in der x-Richtung. Wir betrachten einen Ventil am Rand des Rades, der sich bei $\varphi = 0$ genau unterhalb des Mittelpunktes des Rades befindet.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass sich die Bahnkurve des Ventil als

$$\vec{r}(t) = R\Big(\varphi(t) - \sin\varphi(t), 1 - \cos\varphi(t))\Big)$$

schreiben lässt. Dabei ist R konstant.

Hinweis: Die Bewegung des Ventils kann man sich als eine Bewegung zusammengesetzt aus einer Bewegung des Mittelpunktes und einer relativen Drehung des Ventils vorstellen.

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_M(t) + \vec{r}_{\text{rel}}(t)$$

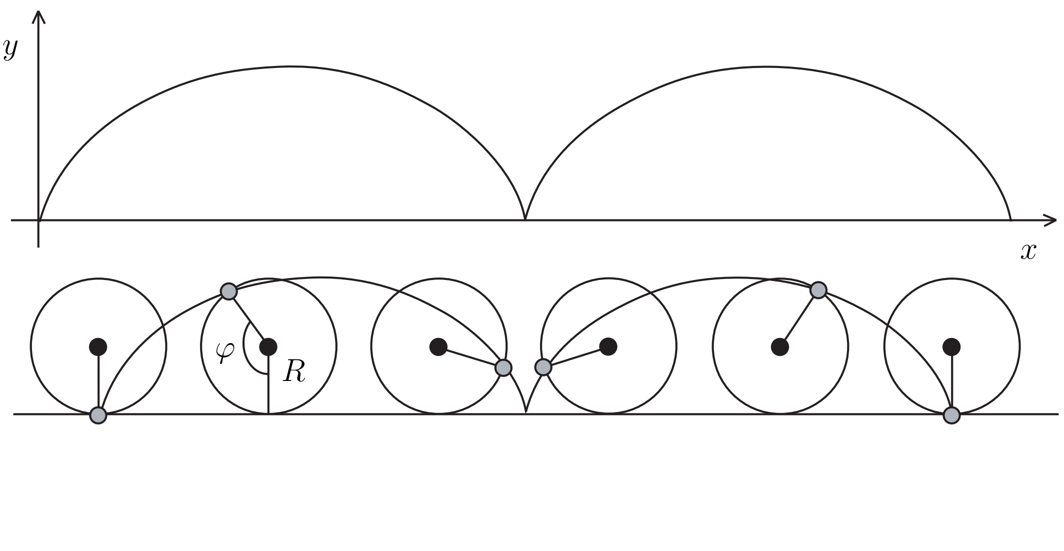
Wie hängt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Rades mit der Geschindigkeit des Mittelpunktes in der x-Richtung wenn das Rad nicht gleitet sondern rollt?

(b) (2 Punkte) Betrachten Sie jetzt eine Bewegung wo das Rad mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit rollt d.h. $\varphi(t) = \omega t$ wobei ω konstant ist. Berechnen Sie für diese Bewegung $\vec{v}\,(t)$, $|\vec{v}\,(t)|$, $\vec{a}\,(t)$ und $|\vec{a}\,(t)|$.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Länge der Kurve $s(t)$ vom Punkt $t_1 = 0$ bis Punkt $t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega}$,

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\vec{e}_T$ und den Normalenvektor $\vec{e}_N$ und drücken Sie $\vec{a}\,(t)$ über $\vec{e}_N$ und $\vec{e}_T$ aus.

(e) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Krümmung κ und den Krümmungsradius ρ.



Hinweis: Beim Lösen dieser Aufgabe ist folgende Relation (und vielleicht andere Relationen) zwischen Sinus und Kosinus hilfreich

$$\frac{1}{2}(1-\cos\alpha) = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Aufgabe 16: Vektor-Differentialoperatoren **(6 Punkte, mündlich)**

$\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ seien beliebige Vektorfelder, $\varphi(r)$ sei ein beliebiges skalares Feld. Zeigen Sie mit Hilfe des ε-Tensors folgende Identitäten der Vektoranalysis:

(a) $\mathrm{rot}\big(\mathrm{grad}\,\varphi\big) = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) = 0$

(b) $\mathrm{div}\big(\mathrm{rot}\,\vec{A}\big) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

(c) $\mathrm{rot}\big(\mathrm{rot}\,\vec{A}\big) = \mathrm{grad}\big(\mathrm{div}\,\vec{A}\big) - \triangle\vec{A}$

(d) $\mathrm{div}\big(\vec{A}\times\vec{B}\big) = \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$

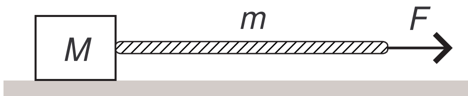
(e) $\mathrm{rot}\big(\varphi\vec{A}\big) = \mathrm{grad}\,\varphi\times\vec{A} + \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$

(f) $\mathrm{div}\big(\varphi\vec{A}\big) = \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\vec{A} + \varphi\,\mathrm{div}\,\vec{A}$

Aufgabe 17: Seilkraft **(5 Punkte, mündlich)**

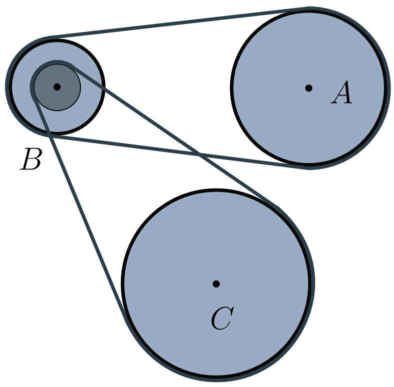
(a) (3 Punkte) Ein Seil mit Masse m ist an einem Block mit Masse M, der sich auf einer Eisfläche befindet, befestigt. An dem freien Ende des Seils wird mit einer Kraft F gezogen. Welche Kraft übt das Seil auf den Block aus. Reibungskräfte seien zu vernachlässigen.

(b) (2 Punkte) Wie groß wäre die Kraft, wenn das Seil masselos wäre?



Aufgabe 18: Riemenantrieb **(4 Punkte, mündlich)**

Drei Riemenscheiben sind durch zwei Riemen verbunden. Die Scheibe A (Radius $r_A = 15\,\mathrm{cm}$) wird von einem Motor angetrieben und dreht sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_A = 10\,\mathrm{rad/s}$. Die Riemenscheibe B (Radius $r_B = \frac{2}{3}r_A = 10\,\mathrm{cm}$) ist durch einen Riemen mit der Riemenscheibe A und über eine Führung mit kleinerem Radius $r'_B = \frac{1}{3}r_A = 5\,\mathrm{cm}$ auch mit der Riemenscheibe C (Radius $r_C = \frac{5}{3}r_A = 25\,\mathrm{cm}$) verbunden.



(a) (1 Punkt) Wie hoch ist die Geschwindigkeit mit der sich der Riemen zwischen den Riemenscheiben A und B bewegt?

(b) (2 Punkte) Wie schnell dreht sich die Riemenscheibe B und wie schnell bewegt sich der Riemen zwischen den Scheiben B und C?

(c) (1 Punkt) Was ist die Winkelgeschwindigkeit der Riemenscheibe C?

Aufgabe 19: Wegintegrale und Gradientenfelder **(6 Punkte, schriftlich)**

(a) (4 Punkte) Gegeben seien die beiden Vektorfelder

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \big(3x^2+2y, -9yz, 8xz^2\big)\,,\\ \vec{B}(\vec{r}) &= \big(2xy+z^3, x^2, 3xz^2\big)\,.\end{aligned}$$

Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r}$ und $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{B} \cdot d\vec{r}$ zwischen den Punkten $\vec{r}_1 = (0,0,0)$ und $\vec{r}_2 = (1,1,1)$ jeweils entlang der beiden Wege C_1 und C_2 gegeben durch die Parameterdarstellungen

$$C_1 : \vec{r}(t) = (t, t, t)\,, \qquad\qquad C_2 : \vec{r}(t) = (t, t^2, t^4)\,.$$

(b) (2 Punkte) Handelt es sich bei den beiden Feldern in Teilaufgabe (a) um Gradientenfelder? Berechnen Sie die Rotation der beiden Felder.