WWU MÜNSTER

WS 2018/19

Übungen zur Physik I

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn, Prof.Dr. Cornelia Denz
Übungen: Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 11

mündlich: 17. oder 18.12.18
schriftlich: –

Aufgabe 47: Kugelkoordinaten (7 Punkte, mündlich)

In kartesischen Komponenten lautet ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$, ausgedrückt durch die Kugelkoordinaten r, θ, φ,

$$\vec{r}\,(r,\,\theta,\,\varphi) \,=\, r\,(\cos\varphi\,\sin\theta,\,\sin\varphi\,\sin\theta,\,\cos\theta)\ .$$

Hält man jeweils zwei der Kugelkoordinaten fest, so erhält man die Koordinatenlinie der dritten Koordinate als parametrisierte Kurve mit der jeweils dritten Koordinate als Parameter, z. B. für die r-Koordinatenlinien

$$\vec{r}\,(r) \,=\, \vec{r}\,(r,\,\theta\,=\,\text{const},\,\varphi\,=\,\text{const})\ .$$

An jedem Punkt $\vec{r}$ gibt es nun drei Koordinatenrichtungen $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, die durch die Tangentialvektoren der Koordinatenlinien gegeben sind.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\varphi$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ ein Orthonormalsystem bilden.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ ein Rechtssystem bilden.

(d) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass sich in den Kugelkoordinaten, in denen der Ortsvektor als $\vec{r} \,=\, r\,\vec{e}_r$ geschrieben werden kann, die Geschwindigkeit als

$$\vec{v} \,=\, \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \,=\, \dot{r}\,\vec{e}_r \,+\, r\,\dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \,+\, r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

und die Beschleunigung als

$$\begin{aligned}\vec{a} \,=\, \frac{d^2\,\vec{r}}{d\,t^2} \;&=\; \Big[\ddot{r} \,-\, r\,\dot{\theta}^2 \,-\, r\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta\Big]\;\vec{e}_r \\ &+\; \Big[r\,\ddot{\varphi}\,\sin\theta \,+\, 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\theta \,+\, 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\theta\Big]\;\vec{e}_\varphi \\ &+\; \Big[r\,\ddot{\theta} \,-\, r\,\dot{\varphi}^2\,\sin\theta\,\cos\theta \,+\, 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\Big]\;\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

darstellen lassen.

Aufgabe 48: Raumschiff im Minkowski-Diagramm (5 Punkte, mündlich)

Ein Raumschiff der Eigenlänge 100 m fliegt mit $v = 0.6c$ an einer interplanetaren Station vorbei. Als die Spitze des Raumschiffs einen Sendemast der Raumstation passiert, wird ein Radiosignal ausgesandt.

(a) (2 Punkte) Nach welcher Zeit erreicht das Signal das Heck des Raumschiffs?

(b) (3 Punkte) Nach welcher Zeit passiert das Heck des Raumschiffs den Sendemast?

Geben Sie die Zeiten jeweils in Raumschiffzeit und Stationszeit an. Lösen Sie die Aufgabe zeichnerisch mit einem Minkowski-Diagramm und rechnerisch.

Aufgabe 49: Schwerpunkt und Trägheitsmoment eines dünnen Stabs

(8 Punkte, mündlich)

Die Masse eines dünnen Stabs der Länge L ist verteilt als

$$\rho(x) = \frac{M}{2L} + \frac{M}{L^2}\,x \qquad x \in (0, L)$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Masse des Stabs M ist.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Stabs.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Stabs zu einer Achse, die durch die Mitte des Stabes und senkrecht zum Stab verläuft.

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Trägheitsmomente des Stabs zu den Achsen, die durch die Endpunkte des Stabes und senkrecht zum Stab verlaufen.

Hinweis: Die Koordinaten des Schwerpunkts sind generell gegeben als

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

aber in einer Dimension kann man diese Definition als

$$x_S = \frac{1}{M} \int x\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

schreiben, wobei hier ρ nicht die Volumendichte sondern Längendichte ist.
Das Trägheitsmoment zur Achse die durch den Koordinatenursprung verläuft, ist wieder generell gegeben als

$$I = \int \vec{r}_\perp^{\,2}\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

wobei $\vec{r}_\perp$ der zur Rotationsachse senkrechte Anteil von $\vec{r}$ ist. In diesem eindimensionalen Fall, lässt sich diese Relation als

$$I = \int x_\perp^2\,\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

schreiben.