WS 2018/19

Übungen zur Physik I

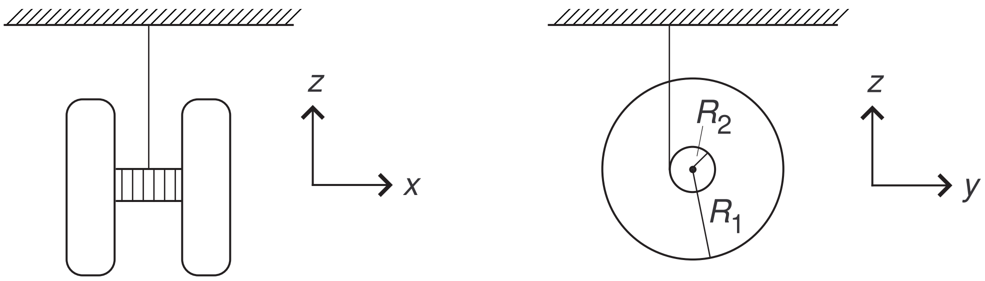
Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn, Prof.Dr. Cornelia Denz
Übungen: Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 14

mündlich: 21. oder 22.01.19
schriftlich: 24. oder 25.01.19

Aufgabe 61: Jo-Jo **(8 Punkte, mündlich)**

Ein Spielzeug-Jo-Jo bestehe aus zwei homogenen zylindrischen Scheiben (Radius $R_1 = 3$ cm, Gesamtmasse beider Scheiben $m_1 = 30$ g), die über einen kleinen Zylinder (Radius $R_2 = 0{,}3$ cm, Masse $m_2 = 0{,}1$ g) miteinander verbunden sind. Um diesen Zylinder ist ein Faden gewickelt, an dem das Jo-Jo hängt. (Die Fadendicke soll in der Aufgabe vernachlässigt werden!) Lässt man das Jo-Jo (bei festgehaltenem Faden) los, so beginnt es unter dem Einfluss der Schwerkraft zu rotieren und sich nach unten zu bewegen ($g = 9,81$ m/s^2).



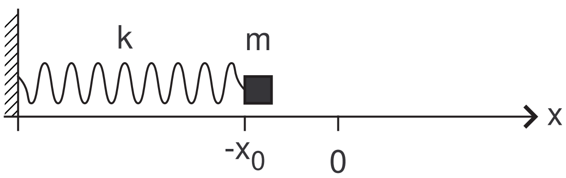
(a) (3 Punkte) Berechnen Sie zunächst das Trägheitsmoment des Jo-Jo's bezüglich einer Drehachse, die mit der Zylinderachse übereinstimmt.

(b) (4 Punkte) Der Faden haben die Länge $l = 1$ m. Wenn der Faden völlig aufgewickelt ist, befindet sich das Jo-Jo in Ruhe. Welche Translationsgeschwindigkeit hat das Jo-Jo unmittelbar vor Erreichen des unteren Umkehrpunktes? Wie groß ist dann die Winkelgeschwindigkeit? *Hinweis*: Verwenden Sie bei Ihren Rechnungen den Energiesatz.

(c) (1 Punkt) Beschreiben Sie qualitativ, wie die Bewegung im unteren Umkehrpunkt verläuft.

Aufgabe 62: Harmonischer Oszillator **(7 Punkte, schriftlich)**

Gegeben sei eine Masse m, die unter dem Einfluss einer Federkraft $F = -k\,x$ reibungsfrei schwingt.



(a) (3 Punkte) Geben Sie die Bewegungsgleichung an. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass diese durch

$$x\,(t) = C_1\, \mathrm{e}^{i\,\omega\, t} + C_2\, \mathrm{e}^{-i\,\omega\, t}$$

gelöst wird. Zeigen Sie, dass folgende drei Funktionen äquivalent zu $x(t)$ sind:

$$x(t) = \tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)$$
$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$
$$x(t) = B \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

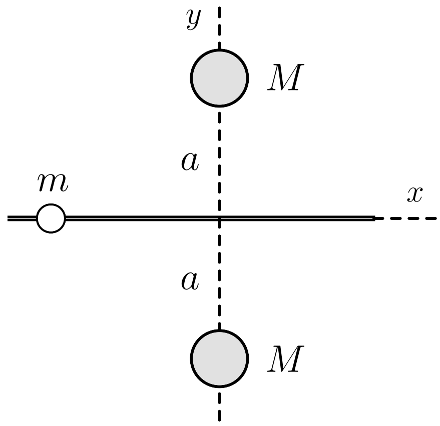
Wie hängen C_1 und C_2 mit den jeweiligen ($\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, bzw. A, ϕ, bzw. B, θ) Konstanten zusammen? Drücken Sie dazu Cosinus und Sinus durch komplexe Exponentialfunktionen aus.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die jeweiligen Konstanten der vier oben genannten Darstellungen für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \omega \cdot x_0$.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die kinetische und die potentielle Energie als Funktion der Zeit für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Benutzen Sie dazu irgendeine der oben angegebenen Lösungsfunktionen. Wählen Sie dabei die Konstante in der potentiellen Energie derart, dass $V(x = 0) = 0$ ist. Wie groß ist die Gesamtenergie E?

Aufgabe 63: Schwingungen im Gravitationspotential **(9 Punkte, mündlich)**

Eine Masse m gleitet reibungslos an einer dünnen Stange entlang der x-Achse. Die Achse verläuft zwischen zwei gleich großen Kugeln der Masse M (siehe Abbildung). Die Kugeln befinden sich stationär bei $x = 0$, $y = \pm a$ und ziehen die Masse m via Gravitation an.



(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Gesamtkraft auf die Masse m die folgende Form hat:

$$\vec{F}(x) = -2 \frac{m M G}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(b) (2 Punkte) Geben Sie die potenzielle Energie der Masse m in Abhängigkeit von x an. Die Masse wird bei $x = 3a$ mit einer Geschwindigkeit v_0 in Richtung des Koordinatenursprungs losgelassen. Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit sich die Masse durch den Koordinatenursprung bewegt.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für $x \ll a$ die Taylorentwicklung

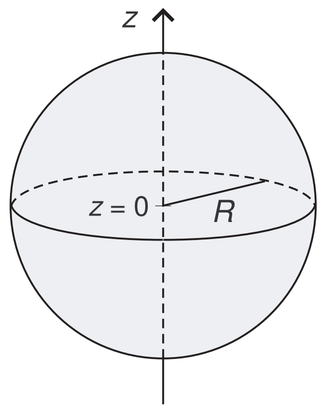
$$\left(a^2 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^3} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + ...\right)$$

gilt.

(d) (2 Punkte) Für kleine Auslenkungen aus dem Koordinatenursprung schwingt die Masse harmonisch um den Koordinatenursprung. Benutzen Sie die Ergebnisse aus (c), um die Bewegungsgleichung der Schwingung in harmonischer Näherung aufzustellen. Berechnen Sie die zugehörige Schwingungsfrequenz.

Aufgabe 64: Schwerpunkt und Trägheitsmoment **(10 Punkte, schriftlich)**

Gegeben sei eine Kugel mit Radius R. In der oberen Hälfte ändert sich die Massendichte ρ in Abhängigkeit vom Abstand r zum Kugelmittelpunkt, während sie in der unteren Hälfte konstant ist. In Kugelkoordinaten



$$x = r \sin\vartheta \, \cos\varphi \,, \qquad y = r \sin\vartheta \, \sin\varphi \,, \qquad z = r \cos\vartheta$$

ist die Massendichte durch

$$\rho\,(\vec{r}\,) = \begin{cases} \dfrac{M}{\pi\, R^4}\, r & \text{für} \quad 0 \leq \vartheta \leq \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{3\,M}{4\,\pi\, R^3} & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi \end{cases}$$

gegeben.

(a) (2 Punkte) Überprüfen Sie, dass die Masse der Kugel M ist.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Kugel.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel bzgl. der z-Achse.

Hinweis: Bei der Berechnung von Integralen ist die Substitution $t = \cos\vartheta$ hilfreich.

Aufgabe 65: Eisenbahn **(5 Punkte, schriftlich)**

Ein Mann der Masse M steht auf einer Eisenbahn-Draisine während sie mit einer Geschwindigkeit v durch eine Kurve mit Radius R fährt. Der Schwerpunkt des Mannes ist in der Höhe L über der Draisine und seine Füsse haben den Abstand d (siehe Abbildung). Wie verteilt sich das Gewicht des Mannes auf seine Füsse?