Übungen zur Physik II

Vorlesung: Prof.Dr. Tilmann Kuhn, Prof.Dr. Cornelia Denz
Übungen: Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 3

Abgabe: 24.04.19
Besprechung: 29. oder 30.04.19

Aufgabe 7: Vorbereitendes zur Maxwell-Verteilung **(8 Punkte, schriftlich)**

(a) (2 Punkte) Die Stammfunktion des Integranden im Gauß-Integral,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx,$$

ist nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Um den Wert des vorstehenden Integrals dennoch zu berechnen, benutzen wir einen Trick. Wir betrachten

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Benutzen Sie die Polarkoordinaten um zu zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,.$$

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2}\, dx = 0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) (2 Punkte) Betrachten Sie das Integral

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\, dx$$

und benutzen Sie, dass

$$\frac{d}{d\alpha}\, I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} e^{-\alpha x^2}\right) dx$$

um zu zeigen

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}\,,$$

mit $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

(d) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für jede nicht-negative ganze Zahl n gilt:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = n!$$

Hinweis: vollständige Induktion.

(e) (1 Punkt) Lösen Sie für $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ das folgende Anfangswertproblem:

$$y'(x) = \lambda x y(x) \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

Hinweis: Trennung der Variablen.

Aufgabe 8: Maxwell-Boltzmann-Verteilung **(7 Punkte, schriftlich)**

Gegeben ist die Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$F_{\text{maxwell}}(v_x, v_y, v_z) = N \left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\right)^3 e^{-\frac{(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{\alpha^2}},$$

normiert als

$$N = \int F_{\text{maxwell}}(v_x, v_y, v_z)\, d^3v\,.$$

Dabei ist $\alpha = \sqrt{2k_BT/m}$ wobei m die Masse eines Moleküls des Gases, k_B die Boltzmann Konstante und T die Temperatur des Gases ist. Berechnen Sie

(a) (1 Punkt) die wahrscheinlichste Geschwindigkeit $\vec{v}_w$,

(b) (1 Punkt) die mittlere Geschwindigkeit $\langle \vec{v}\,\rangle = \frac{1}{N}\int \vec{v}\, F_{\text{maxwell}}(\vec{v})\, d^3v$,

(c) (2 Punkte) den mittleren Geschwindigkeitsbetrag $\langle v\,\rangle = \langle |\vec{v}\,|\,\rangle$,

(d) (1 Punkt) den wahrscheinlichsten Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}\,|_w$,

(e) (1 Punkt) das mittlere Quadrat der Geschwindigkeit $\langle v^2\,\rangle = \langle \vec{v}^{\,2}\rangle$.

(f) (1 Punkt) Welche Werte ergeben sich für Sauerstoff- und Wasserstoffmoleküle bei $T = 300$ K? Was folgt aus dem Vergleich mit der Fluchtgeschwindigkeit der Erde von $11,2$ km/s? (molare Massen: $M_{O_2} = 32{,}00$ g/mol, $M_{H_2} = 2{,}02$ g/mol)

Aufgabe 9: Noch ganz dicht? **(5 Punkte, mündlich)**

Für diesen Versuch benötigen Sie ein Smartphone mit ***Drucksensor***[2]*. Die Aufgabe kann in Gruppen von bis zu 5 Personen bearbeitet werden.*

Bestimmen Sie mit Ihrem Smartphone, und gegebenenfalls weiteren Hilfsmitteln, die **Dichte von Luft**. Erläutern Sie Ihr Vorgehen und die zugrundeliegenden Annahmen. Vergleichen Sie Ihren Wert auch mit dem Literaturwert und diskutieren Sie mögliche Quellen für Abweichungen.

Tipp: Eine Vorrichtung zur Messung von Längen (z.B. Lineal oder Zollstock) könnte hilfreich sein.

[2] Drucksensoren sind **nicht in jedem Handy** verbaut. Überprüfen Sie bitte rechtzeitig ob Ihr Gerät über diesen Sensor verfügt. Falls das nicht der Fall sein sollte, können Sie sich einer Gruppe mit Drucksensor anschließen oder den Versuch mit einem der Vorlesungshandys durchführen.